SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM

GÉPÉSZMÉRNÖKI, INFORMATIKAI ÉS VILLAMOSMÉRNÖKI KAR

A DIGITÁLIS TÁVOKTATÁS TÁMOGATÁSA MATEMATIKÁBÓL MAPLE SZOFTVERRENDSZER SEGÍTSÉGÉVEL

TDK-dolgozat

Gönczi Gábor

Gazdaságinformatikus BSc

Konzulens: Dr. Kallós Gábor

Beosztása: egyetemi docens

Kézirat lezárásának dátuma: 2021. 05. 18.

Tartalom

1. Bevezetés ... 1
2. Oktatási módszerek áttekintése ... 2
2.1 Előadás ... 2
2.2 Magyarázat ... 3
2.3 Szemléltetés ... 3
2.4 Egyéb oktatási módszerek és a tanulási munkaformák ... 4
3. Elméleti háttér áttekintése a tananyag helyes felépítésének vizsgálatához ... 4
3.1 K-algoritmus ... 5
3.2 Módosított K-algoritmus ... 6
4. Matematikai szakmai áttekintés ... 7
5. A Maple munkalap elkészüléséhez vezető út ... 10
6. A Maple munkalapon szereplő szekciók részletes bemutatása ... 15
6.1 Egyszerű másodfokú egyenletek megoldása ... 15
6.2 Másodfokú függvény ... 17
6.3 Másodfokú egyenlet ... 19
6.4 Másodfokú egyenletek alkalmazása feladatok megoldása során ... 24
6.5 Másodfokú egyenletek és komplex számok (Felsőfokú tananyag) ... 25
7. Az elkészült dokumentum felhasználási lehetőségei az oktatásban ... 25
7.1 H1: Az elkészített dokumentum képes jó/megfelelő mintaként szolgálni a digitális tananyagok készítéséhez a matematika területén ... 26
7.1.1. Középszint ... 30
7.1.2. Emelt szint ... 33
7.2. H2 a: A középszintű érettségire készülő diákok számára megfelelő mélységben tartalmazza a másodfokú egyenletekhez kapcsolódó témakörök anyagát ... 35
7.3. H2 b: Az emelt szintű érettségire készülőknek segítséget nyújt bizonyos feladatok megoldásához a témakörön belül ... 37
8. Összegzés ... 38
Irodalomjegyzék ... 40
Mellékletek ... 42
1. számú melléklet ... 42
2. számú melléklet ... 44

1. Bevezetés

2020 márciusában Magyarországon veszélyhelyzetet hirdettek ki a Covid-19 vírus megjelenése miatt. Az iskoláknak egyik pillanatról a másikra kellett alkalmazkodniuk az új helyzethez. Ennek hatására a legtöbb helyen új alternatívákat kerestek a tananyag közlésére, az órák megtartására, valamint a diákokkal és szülőkkel való kapcsolattartásra. Ezen okból kifolyólag lehetőségem volt egyetemi tanulmányaim során középiskolai tananyagot digitális formában feldolgozni. Követelmény volt, hogy a középiskolai matematika tananyag egy jól körül határolt több tanórát magába foglaló részét dolgozzam fel egy Maple nevű matematikai program segítségével.

Dolgozatommal az a célom, hogy bemutassam egy tananyagrész lehetséges feldolgozását, ezzel elősegítve a hasonló tananyagok keletkezését. Ehhez kellett keresnem egy megfelelő méretű – több tanóra anyagát magába foglaló – témakört, amit ki szerettem volna dolgozni. Én a másodfokú egyenletek témakörét választottam. Most választásom okait szeretném ismertetni. Az már a kezdetektől fogva világos volt számomra, hogy valamilyen algebrai témakört szeretnék feldolgozni, hiszen már középiskolás koromban is szerettem a számolással, függvényekkel, egyenletekkel kapcsolatos témaköröket. Röviddel azután, hogy megismerkedtem a Mapleval azt tapasztaltam, hogy az egyenletek megoldásánál ez a rendszer remekül használható. Az egyenleteken belül konkrétan a másodfokú egyenletekre két okból esett a választásom. Egyrészt ez volt az egyik témakör, ahol egy bizonyítást tudni kellett középiskolában (a megoldóképlet levezetését), másrészt sok probléma megoldható másodfokú egyenletek segítségével.

A dolgozatom a következő módon épül fel: először áttekintem a matematikaoktatásban használt oktatási módszertanokat. Ezután bemutatok néhány, a tananyagok felépítését vizsgáló algoritmust, mely segítségemre volt abban, hogy az érettségi vizsgakövetelmények alapján egy logikailag helyes munkalapot tervezzek. Bemutatom azokat a lépéseket, melyek elvezettek oda, hogy a munkalap elkészítését el tudjam kezdeni. Ezután szöveges formában bemutatom az általam elkészített dokumentumot (később erre hivatkozok digitális tananyag, munkalap és Maple munkalap neveken is). Ezt követően bemutatom az általam elvégzett kutatást, ahol arra a fő kérdésre keresem a választ elméleti módszerekkel, hogy az általam elkészített munkalap képes-e hatékonyan támogatni a (digitális) matematikaoktatást a választott témakör esetén.

2. Oktatási módszerek áttekintése

Ebben a fejezetben röviden áttekintjük az általam elképzelt tananyaghoz szorosabban kapcsolódó hagyományos oktatási módszereket. Ezek a következők:

- előadás
- magyarázat
- szemléltetés. (Lada 2009)

2.1 Előadás

Az előadás célja többek között az információátadás és a figyelem felkeltése, fenntartása. Ennek elérése érdekében törekedni kell az alábbi eszközök alkalmazására az előadás során:

- **változatosság**: minél gazdagabb nyelvi struktúrák használata, bő szókincs, hangszín változtatása az előadás ívének megfelelően. Átlátható, informatív ábrák alkalmazása.
- **humor beleszövése az előadásba**: segíti az új információ rögzülését, későbbi felidézését, és a pozitív attitűd létrejöttét, fenntartását,
- az előadó **dinamizmusa, elhivatottsága, odaadó magyarázata**,
- a hallgatóság aktív bevonása az előadásba, közbeiktatott költői és valós **kérdések** segítségével,
- jegyzetelés,
- **segédanyagok megfelelő használata**. (Lada 2009; Dr. Tigyiné Dr. Pusztafalvi 2015: 35)

Az előadás három fő része a bevezetés, a kifejtés és az összegzés. A bevezetésben ismerteti az előadó a témát és felidézi a téma feldolgozásához szükséges ismereteket. A kifejtésben megtörténik az előadás anyagának közlése. Itt helyet kaphatnak egyéb módszerek is, mint például a magyarázat és a szemléltetés. Az összegzésben pedig az előadás rövid összefoglalása és a következő előadásra történő utalások kaphatnak helyet. (Lada 2009; Dr. Nádasi é.n.) Felépítése háromféle lehet. Az egymással alá-fölé rendeltségi fogalmak bemutatásakor hierarchikus; események időrendi bemutatása, vagy az ok-okozati összefüggések bemutatása esetén szekvenciális; elemek egy bizonyos szempontrendszer alapján történő bemutatása, ezen elemek rendszerezése során összehasonlító felépítést érdemes használni. (Lada 2009; Dr. Tigyiné Dr. Pusztafalvi 2015: 35)

2.2 Magyarázat

Célja egy fogalom, törvényszerűség vagy jelenség megértésének megkönnyítése. Általában az előadás részeként jelenik meg, de megjelenhet önálló formában is. Terjedelme az előadás másfél-két órás időtartamánál jelentősen rövidebb mindössze 20-25 perc. Három fajtáját különböztetjük meg *Brown és Armstrong (1984)* szerint. Az értelmező magyarázat egy fogalmat tesz érthetőbbé (pl. Mi a szerepe a szakmai gyakorlatnak a felsőoktatásban?). A leíró magyarázat egy folyamat megértését, végrehajtását könnyíti meg (pl. Hogyan kell jelentkezni szakmai gyakorlatra?). Az okfeltáró magyarázat pedig a jelenségek közötti ok-okozati, összefüggések feltárását szolgálja (pl. Miért érdemes a szakmai gyakorlatba sok energiát belefektetni?). (Lada 2009; Dr. Martinkó 2010; Dr. Tigyiné Dr. Pusztafalvi 2015: 36; Dr. Nádasi é.n) A hatékony magyarázat egyszerű, logikusan van felépítve, tömör és szenvedéllyel átitatott. Eredményességéhez hozzájárul a következő pedagógiai eszközök használata, Nádasi szerint:

„1. a célok megfogalmazása
2. példák kiválasztása és bemutatása
3. a magyarázat logikus felépítése, magyarázó kötő szavak alkalmazása
4. audiovizuális eszközök alkalmazása
5. részösszefoglalások, ismétlések beiktatása
6. a tanulók előzetes ismereteinek számbavétele
7. szabatos megfogalmazás, ismert szavak használata
8. kérdések feltétele; 9. mimikával, gesztusokkal kísért előadásmód
10. vázlat készítése (tábla, számítógép, interaktív táblát használva, vagy diktálva).” (Dr. Nádasi é.n.)

2.3 Szemléltetés

A cselekvésre épülő tudásanyag fő elsajátítási módszere azonban kiegészítő módszerként fogalmak tanításához is jó választás. Ilyenkor lehetőségünk van arra, hogy egy konkrét jelenség vizsgálatából kiindulva példákon keresztül eljussunk egy absztrakt fogalomig. Ha sikerül a fogalomtanításban alkalmazva kialakítani a tanulókban egy szemléletes gondolkozási módot, azzal elérhetjük, hogy könnyebben megértsenek elvontabb, már nem olyan egyszerűen szemléltethető fogalmakat is. (Lada 2009; Dr. Tigyiné Dr. Pusztafalvi 2015: 40)
A demonstráció eredményességének feltételei a következők:

- kapcsolódnia kell az előtte lévő és utána következő módszerekhez kiegészítve azokat,
- a szemléltetés kezdetén ismertetni kell a problémát, feladatot ezzel megteremtve a megértés feltételeit,
- a tanulók által jól követhetőnek kell lennie,
- legfontosabb a lényeg kiemelése, pl. aláhúzással jelölőszínekkel szóbeli ismétléssel,
- tanulói aktivitás elérése irányító kérdések segítségével. (Dr. Tigyiné Dr. Pusztafalvi 2015: 41)

2.4 Egyéb oktatási módszerek és a tanulási munkaformák

Szeretnék felsorolni, néhány további oktatási módszert, illetve oktatásban használatos munkaformát. További oktatási módszerek: elbeszélés, megbeszélés, házi feladat, vita, kooperatív oktatási módszerek, tanulói kiselőadás, projektmódszer, szimuláció, szerepjáték, játék. (Dr. Tigyiné Dr. Pusztafalvi 2015: 36-39,41-45)
Az oktatásban használható munkaformák: frontális munkaforma, egyéni munka, páros munka, csoportban folyó munka. (Dr. Tigyiné Dr. Pusztafalvi 2015: 45-47)
Ezeknek a módszereknek a részletes ismertetésétől eltekintek, mert az általam elképzelt tananyag szempontjából ezek az oktatási módszerek kevésbé fontosnak tekinthetők.

3. Elméleti háttér áttekintése a tananyag helyes felépítésének vizsgálatához

Ahhoz, hogy eredményesen tudjunk javaslatot megfogalmazni a matematika tantárgy tantárgypedagógiájának digitális eszközökkel történő támogatásához, érdemes először megvizsgálnunk, hogy milyen követelményeknek kell megfelelnie egy tanagyagnak pedagógiai szakmai szempontból. Ezeket a lehetséges szempontokat megtalálhatjuk a (Dr. Nyéki 2020: 3) -ban. Ezekre alapozva a következő alfejezetekben ismertetésre kerül két algoritmust, mellyel a későbbiek folyamán ellenőrizni tudjuk, hogy pedagógiai szempontból megfelelő felépítésű tananyagokat hoztunk-e létre. Az algoritmusokat szemléltető kis táblázatok saját szerkesztésűek.

3.1 K-algoritmus

A tananyagrészek egymásra épüléséhez vegyünk egy olyan méretű négyzetes mátrixot, ahány tananyag kapcsolatát vizsgálni szeretnénk. Helyezzük el a megfelelő jelöléseket az 1.táblázat/1-hez hasonlóan, ami egy három részből álló tananyaghoz tartozó mátrixot szemléltet.

	1	2	3
1	0	1	1
2	0	0	1
3	0	0	0

1.

	1	2	3
1	0	1	~~1~~
2	0	0	~~1~~
3	~~0~~	~~0~~	~~0~~

2.

	1	2	3
1	0	~~1~~	~~1~~
2	~~0~~	~~0~~	~~1~~
3	~~0~~	~~0~~	~~0~~

3.

	1	2	3
1	~~0~~	~~1~~	~~1~~
2	~~0~~	~~0~~	~~1~~
3	~~0~~	~~0~~	~~0~~

4.

1. táblázat: A K-algoritmus lépéseinek bemutatása 3x3-as mátrix esetén
Forrás: Saját szerkesztés

Az oszlop-sor metszéspontokba írjunk 1-et vagy 0-át aszerint, hogy két anyagrész egymásra épül-e. Miután feltöltöttük a mátrixot, megkezdhetjük a tananyag ellentmondás-mentességének vizsgálatát. Ezt a Morgunov-féle K algoritmussal tudjuk megtenni. Nyéki szerint az algoritmus lépései a következők (Dr. Nyéki 2015: 3):

„1. Vizsgálja meg, hogy van-e csupán „0” elemeket tartalmazó oszlop vagy sor a mátrixban? Ha nincs, akkor stop! Ha van, akkor:

2. Törölje az oszlopot sorával vagy a sort oszlopával együtt, és térjen vissza 1-hez!

Ha végül az összes sorokat és oszlopokat törölni tudta, akkor a mátrix ellentmondásmentes, ha nem, van benne ellentmondás.”

A fenti algoritmust a következő módon alkalmazhatjuk:

1. lépés: Töröljük a harmadik sort és oszlopot. (1. táblázat/2)
2. lépés: Mivel a második sorban lévő 1-est az első lépésben töröltük, így most már az is csupa 0-ákat tartalmaz. Töröljük tehát a második sort az oszlopával együtt. (1. táblázat/3)
3. lépés: Az első sor is egy csak 0-ákat tartalmazó sorra redukálódott, így ezt is törölhetjük az oszlopával együtt.

Látható, hogy a kiinduló mátrix nem tartalmaz körpályát, mivel minden sort és oszlopot törölni tudtunk az algoritmus szabályainak betartásával. Ez alapján megállapítható, hogy ebben a példában a tananyag felépítése ellentmondásmentesen történt. Ez az, amit a valódi tananyagoknál is el szeretnénk érni.

3.2 Módosított K-algoritmus

A módosított K-algoritmus annyiban különbözik, illetve több a K-algoritmusnál, hogy itt csak oszlopokat választunk törlésre sorokat nem. Ha a vizsgált gráf körpálya mentes, akkor a törlések eredményeként megkapjuk a tananyagrészek javasolt feldolgozási sorrendjét. Ez azonban csak akkor igaz, ha több választási lehetőség esetén a kisebb sorszámú oszlopot választjuk.

	1	2	3
1	0	0	0
2	1	0	1
3	1	0	0

1.

	1	2	3
1	0	~~0~~	0
2	~~1~~	~~0~~	~~1~~
3	1	~~0~~	0

2.

	1	2	3
1	0	~~0~~	~~0~~
2	~~1~~	~~0~~	~~1~~
3	~~1~~	~~0~~	~~0~~

3.

	1	2	3
1	~~0~~	~~0~~	~~0~~
2	~~1~~	~~0~~	~~1~~
3	~~1~~	~~0~~	~~0~~
	III.	I.	II.

4.

2. táblázat: A módosított K-algoritmus lépéseinek bemutatása 3x3-as mátrix esetén
Forrás: Saját szerkesztés

A módosított K algoritmus lépései a következők (Dr. Nyéki 2014: 3) alapján:

„1. Vizsgálja meg, hogy van-e több olyan oszlop, amely csupán 0 elemeket tartalmaz? Ha nincs, akkor stop! Ha csak egy ilyen van, úgy törölje ezt sorával együtt és térjen vissza 1.-hez! Ha több ilyen van, úgy:

2. Törölje az eredeti mátrix sorrendje szerint következő oszlopot sorával együtt, s utána folytassa 1.-nél!”

Az algoritmus végrehajtásának állapotait a 2. táblázat tartalmazza.

1. lépés: Töröljük a második oszlopot és a hozzá tartozó sort. (2. táblázat/2). Ez lesz az első egység az át strukturált tananyagban, amit jelöljünk római számmal. (2->I.)
2. lépés: Mivel a harmadik oszlopban lévő 1-est az első lépésben töröltük, így most már az is csupa 0-ákat tartalmaz. Töröljük tehát a harmadik oszlopot a sorával együtt. (2. táblázat/3). Ez lesz a második egység az át strukturált tananyagban, amit jelöljünk római számmal. (3->II.)
3. lépés: Az 1. oszlop is egy csak 0-ákat tartalmazó oszlopra redukálódott, így ezt is törölhetjük a sorával együtt. (2. táblázat/4) Ez lesz a harmadik egység az át strukturált tananyagban, amit jelöljünk római számmal. (1->III.)

Végül egy olyan mátrixot kaptunk, melynek minden sorát és oszlopát törölni tudtuk az algoritmus szabályainak betartásával. Ezek után a következőket kell még tennünk:

„Felírjuk a római számok alapján az új sorrend szerinti reláció mátrixot.

Az új sorrend felett, illetve mellett feltüntetjük a római számoknak megfelelő arab számokat. Ha a számítás helyes, akkor csak a főátló felett lehet 1-es." (Dr. Nyéki 2014: 13)

A római számok meghatározzák az oszlopok és sorok helyes sorrendjét. Az oszlopok és a hozzá tartozó sorok római számok szerinti növekvő sorrendbe tételével kapjuk a tananyagrészek helyes sorrendjét, így végeredményül az alábbi mátrixot kapjuk.

	2	3	1
2	0	1	1
3	0	0	1
1	0	0	0
	I.	II.	III.

1. ábra: A tananyagrészek a módosított K-algoritmus eredményeként létrejövő új sorrendje
Forrás: Saját szerkesztés

A főátló felett csak 1-es van, így az algoritmus helyesen futott le.

4. Matematikai szakmai áttekintés

Mielőtt bemutatnám az algoritmusok működését az általam definiált mátrixra, szeretném ismertetni a jelenleg hatályos érettségi vizsgakövetelményeket, mely a mátrix és a munkalap alapját képezi. A könnyebb érthetőség kedvéért meghagyom teljes egészében a táblázatos formát, valamint – bár a munkalap jellemzően a középszintű tananyagot dolgozza fel –, mivel emelt szintű anyag is megtalálható benne, ezért azokat is megjelenítem. (Oktatási Hivatal 2017: 5-8)

2.5 Hatvány, gyök, logaritmus	Ismerje és használja a hatványozás azonosságait. Ismerje és alkalmazza a négyzetgyökvonás azonosságait.Definiálja és használja az $\sqrt[n]{a}$ fogalmát. Definiálja és használja feladatok megoldásában a logaritmus fogalmát, valamint a logaritmus azonosságait. Tudjon áttérni más alapú logaritmusra.	Ismerje a permanencia elvet. Tudja szemléletesen értelmezni az irracionális kitevőjű hatványt. Bizonyítsa a hatványozás azonosságait egész kitevő esetén. Bizonyítsa a négyzetgyökvonás azonosságait. Ismerje és alkalmazza a gyökvonás azonosságait. Bizonyítsa a szorzat, a hányados és a hatvány logaritmusáravonatkozó azonosságokat. Bizonyítsa a más alapú logaritmusra való áttérés szabályát.
2.6 Betűkifejezések 2.6.1 Nevezetes azonosságok	Tudja alkalmazni feladatokban a következő kifejezésekkifejtését, illetve szorzattá alakítását:	Ismerje a polinom fokszámát, fokszám szerint rendezett alakját.

	$(a + b)^2$, $(a – b)^2$, $a^2 – b^2$. Tudjon algebrai kifejezésekkel egyszerű műveleteket végrehajtani, algebrai kifejezéseket egyszerűbb alakra hozni (összevonás, szorzás, osztás, szorzattá alakítás kiemeléssel, nevezetes azonosságok alkalmazása).	Tudja alkalmazni feladatokban az $a^n - b^n$, illetve az $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ kifejezés szorzattá alakítását.
2.8 Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek, egyenlőtlenség-rendszerek 2.8.1 Algebrai egyenletek, egyenletrendszerek Elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek Magasabb fokú egyenletek Négyzetgyökös egyenletek	Ismerje az alaphalmaz és a megoldáshalmaz fogalmát. Alkalmazza a különböző egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, ekvivalens átalakítások, következményegyenletre vezető átalakítások, új ismeretlen bevezetése, értelmezési tartomány és értékkészlet vizsgálata. Tudja meghatározni szöveges feladatban szereplő változók értelmezési tartományát és a feladat eredményét összevetni a feladat szövegével. Alkalmazza az egyenleteket, egyenletrendszereket szöveges feladatok megoldásában. Tudjon elsőfokú, egyismeretlenes egyenleteket és elsőfokú,kétismeretlenes egyenletrendszereket megoldani. Ismerje az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakját.Ismerje a másodfokú egyenlet diszkriminánsának fogalmát, és a diszkrimináns előjele és a (valós) megoldások száma közötti összefüggést. Ismerje és alkalmazza a másodfokú egyenlet megoldóképletét.Használja a teljes négyzetté alakítás módszerét. Alkalmazza feladatokban a gyöktényezős alakot. Tudjon törtes egyenleteket, másodfokú egyenletre vezető szövegesfeladatokat megoldani. Tudjon egyszerű másodfokú egyenletrendszereket megoldani. Tudjon egyszerű, másodfokúra visszavezethető egyenleteket megoldani. Tudjon $\sqrt{a \cdot x + b} = c \cdot x + d$ típusú egyenleteket megoldani.	Tudjon paraméteres elsőfokú egyenleteket megoldani. Tudjon elsőfokú, háromismeretlenes egyenletrendszereket megoldani. Igazolja a másodfokú egyenlet megoldóképletét. Igazolja és alkalmazza a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket. Tudjon másodfokú paraméteres egyenleteket megoldani. Tudjon másodfokúra visszavezethető egyenletrendszereket megoldani. Tudjon értelmezési tartomány, illetve értékkészlet-vizsgálattal, valamint szorzattá alakítással megoldható összetett feladatokatmegoldani. Tudjon két négyzetre emeléssel megoldható egyenleteket megoldani.

3.1 A függvény	Ismerje a függvény matematikai fogalmát és a függvénytani alapfogalmakat (értelmezési tartomány, hozzárendelés, képhalmaz, helyettesítési érték, értékkészlet). Tudjon szövegesen megfogalmazott függvényt képlettel megadni.Tudjon helyettesítési értéket számítani, illetve tudja egyszerű függvények esetén $f(x) = c$ alapján az x-et meghatározni. Ismerje a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés fogalmát. Ismerje és alkalmazza a függvényeket gyakorlati problémák megoldásánál. Ismerje az inverzfüggvény fogalmának szemléletes értelmezését (pl.az exponenciális és a logaritmus függvény vagy a geometriai transzformációk esetében).	Ismerje a függvénytani alapfogalmak pontos definícióját. Ismerje és alkalmazza a függvények összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának a fogalmát. Ismerje és alkalmazza a függvények megszorításának (leszűkítésének) és kiterjesztésének fogalmát. Ismerje és alkalmazza az inverzfüggvény fogalmát. Ismerje az összetett függvény fogalmát, képzésének módját.
3.2 Egyváltozós valós függvények	Ismerje, tudja ábrázolni és jellemezni az alábbi hozzárendelésselmegadott függvényeket: $x \mapsto a*x + b$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto a*x^2 + b*x + c$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \lvert x\rvert$, $x \mapsto \frac{a}{x}$ $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \mapsto a^x$; $x \mapsto \log_a x$.	Ismerje és tudja ábrázolni az $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbf{N}^+$) függvényt. Tudjon a középszinten felsorolt függvényekből összetett függvényeket képezni.
3.2.1 A függvények grafikonja, függvénytranszformációk 3.2.2 A függvények jellemzése	Tudjon értéktáblázat és képlet alapján függvényt ábrázolni, illetveadatokat leolvasni a grafikonról. Tudjon néhány lépéses transzformációt igénylő függvényeket függvénytranszformációk segítségével ábrázolni: $x) + c$, $f(x+c)$, $c*f(x)$. Tudjon egyszerű függvényeket jellemezni (pl. grafikon alapján) értékkészlet, zérushely, növekedés, fogyás, szélsőérték, periodicitás,paritás szempontjából.	Tudja ábrázolni az alapvető függvények (3.2) transzformáltjainak grafikonját ($c*f(ax + b) + d$). Tudja jellemezni a függvényeket korlátosság szempontjából. Tudja meghatározni a függvények tulajdonságait az alapfüggvények ismeretében, transzformációk segítségével. Használja a konvexitás és konkavitás fogalmát a függvények jellemzésére. Tudjon másodfokú függvényre vezető szélsőérték-feladatokat megoldani.

3. táblázat

Forrás: Oktatási Hivatal 2017: 5-8

https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/vizsgakovetelmenyek2017/matematika_vk.pdf alapján saját szerkesztés

5. A Maple munkalap elkészüléséhez vezető út

Ebben a fejezetben szeretném bemutatni azokat a lépéseket, melyek elvezettek oda, hogy a 6. fejezetben részleteiben bemutatott munkalapot elkészítsem. A Maple megismerését követően a 2017-es matematika érettségi vizsgakövetelmények tanulmányozásával folytattam a munkát. Kiválasztottam a másodfokú egyenletek témaköréhez kapcsolódó főként középszintű követelményeket és a következő táblázatba rendeztem őket:

	A		B		C		D	
	Hatvány, gyök, logaritmus	Konkrétan megkövetelt előismeret	Betűkifejezések	Konkrétan megkövetelt előismeret	Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek, egyenlőtlenségrendszerek	Konkrétan megkövetelt előismeret	Függvények	Konkrétan megkövetelt előismeret
0.1	Ismerje és használja a hatványozás azonosságait.(1)	-	Tudja alkalmazni feladatokban a következő kifejezések kifejtését, illetve szorzattá alakítását: (a + b)2, (a -b)2, a2 – b2. Tudjon algebrai kifejezésekkel egyszerű műveleteket végrehajtani, algebrai kifejezéseket egyszerűbb alakra hozni (összevonás, szorzás, osztás, szorzattá alakítás kiemeléssel, nevezetes azonosságok alkalmazása teljes négyzetté alakítás).(2)	A 0.1	Ismerje az alaphalmaz és a megoldáshalmaz fogalmát. (3)	-	Ismerje a függvény matematikai fogalmát és a függvénytani alapfogalmakat (értelmezési tartomány, hozzárendelés, képhalmaz, helyettesítési érték, értékkészlet). Ismerje a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés fogalmát. Tudjon szövegesen megfogalmazott függvényt képlettel megadni. (4)	-
0.2					Alkalmazza a különböző egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, ekvivalens átalakítások, következményegyenletre vezető átalakítások értelmezési tartomány és értékkészlet vizsgálata. (elsőfokú függvény és egyenlet esetén) (5)	B 0.1	Tudjon helyettesítési értéket számítani, illetve tudja egyszerű függvények esetén f(x) = c alapján az x-et meghatározni. (6)	D 0. 1,C 0.2
0.3					Tudjon elsőfokú, egyismeretlenes egyenleteket megoldani Tudjon elsőfokú, kétismeretlenes egyenletrendszereket megoldani. Alkalmazza az egyenleteket, egyenletrendszereket szöveges feladatok megoldásában.(7)	C 0.1,C0.2	Ismerje, tudja ábrázolni és jellemezni az alábbi hozzárendeléssel megadott függvényt: x ↦ ax + b Tudjon értéktáblázat és képlet alapján függvényt ábrázolni, illetve adatokat leolvasni a grafikonról. Tudjon néhány lépéses transzformációt igénylő függvényeket függvénytranszformációk segítségével ábrázolni: f(x) + c, f(x+c), c·f(x). Tudjon egyszerű függvényeket jellemezni (pl. grafikon alapján) értékkészlet, zérushely, növekedés, fogyás, szélsőérték, periodicitás, paritás szempontjából.(8)	D 0.2
0.4					Tudja meghatározni szöveges feladatban szereplő változók értelmezési tartományát és a feladat eredményét összevetni a feladat szövegével. (9)	D 0.1	Ismerje és alkalmazza a függvényeket gyakorlati problémák megoldásánál.(10)	D 0.3

2. ábra: A másodfokú egyenletekhez tartozó ismeretek, a témakörhöz tartozó elő- és ráépülő ismeretek
Forrás: Saját szerkesztés

1.1			Tudjon megoldani egyszerű másodfokú egyenleteket kiemelés segítségével: pl. x^2+5x=0 -> x*(x+5)=0 "Egy szorzat akkor 0 ha valamelyik tényezője 0"(11)			B 0.1	Ismerje, tudja ábrázolni és jellemezni az alábbi hozzárendeléssel megadott függvényt: x ↦ ax^2+bx+c Használja a teljes négyzetté alakítás módszerét Tudjon értéktáblázat és képlet alapján függvényt ábrázolni, illetve adatokat leolvasni a grafikonról. Tudjon néhány lépéses transzformációt igénylő függvényeket függvénytranszformációk segítségével ábrázolni: f(x) + c, f(x+c), c·f(x). Tudjon egyszerű függvényeket jellemezni (pl. grafikon alapján) értékkészlet, zérushely, növekedés, fogyás, szélsőérték, periodicitás, paritás szempontjából. Ismerje és alkalmazza a függvényeket gyakorlati problémák megoldásánál(12)	D 0.3,D 0.4
1.2					Ismerje az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakját. Tudjon másodfokú egyenletet grafikusan megoldani. Ismerje az egyismeretlenes másodfokú egyenlet megoldóképletét. (13)	C 0.2, C 0.4, C 1.1, D1.1		
1.3					Ismerje a másodfokú egyenlet diszkriminánsának fogalmát, és a diszkriminánsa előjele és a (valós) megoldások száma közötti összefüggést.(14)	C 1.2		
1.4					Alkalmazza feladatokban a gyöktényezős alakot. Tudjon törtes egyenleteket megoldani. Tudjon másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatokat megoldani. Tudjon egyszerű, másodfokúra visszavezethető egyenleteket megoldani. Tudjon egyszerű másodfokú egyenletrendszereket megoldani. Tudjon √(ax+b)=cx+d típusú egyenleteket megoldani.(15)	C 1.3		
2					Kevert típusú másodfokú egyenletek(16)	ABCD-0-1.4		
2.1					Komplex számok bevezetése(17)	ABCD-0-1.4		
2.2					Komplex számok ábrázolása(18)	ABCD-0-1.4, C 2.1		

2. ábra: A másodfokú egyenletekhez tartozó ismeretek, a témakörhöz tartozó elő- és ráépülő ismeretek (folytatás)
Forrás: Saját szerkesztés.

A táblázaton belül horizontálisan négyes, míg vertikálisan hármas felosztást alkalmaztam. Vízszintesen a következő egységeket határoztam meg:

- A: Hatvány, gyök, logaritmus
- B: Algebrai kifejezések
- C: Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek, egyenlőtlenségrendszerek
- D: Függvények.

Ezekre tekinthetünk úgy, mint az általam feldolgozott tananyag és a hozzá kapcsolódó előismeretek, illetve ráépülő ismeretek. Miután a főbb területek meghatározásra kerültek, függőlegesen 3 nagyobb részre osztottam a tananyagot. Az első részben (ennek számozása 0.x alakú) azokat jelenítettem meg, amik előkövetelmény jellegűek a munkalapom szempontjából. Ezek azok az ismeretek, amik elengedhetetlenül szükségesek ahhoz, hogy a munkalapot a leendő diák hasznosítani tudja. Ezután található egy zöld sáv. Ez azt jelenti, hogy ha a diák elsajátította az eddigi ismereteket, akkor nekikezdhet a másodfokú egyenletek témakörének feldolgozásához. A második részben (ennek számozása 1.x alakú) azokat az ismereteket

találjuk, amiket feldolgoztam a Maple segítségével. A harmadik részben (ennek számozása 2.x alakú) olyan ismeretek szerepelnek, melyek már túlmutatnak a másodfokú egyenletek témakörén, de a feldolgozott témakör ismeretei szükségesek hozzájuk. Azt, hogy ez már túlmutat a középiskolai tananyagon piros sávval jelöltem ezen cellák előtt. A függőleges felosztáshoz meg kellett állapítanom egyfajta időrendiséget. A célom itt az volt, hogy minden cellára teljesüljön az az állítás, hogy a benne szereplő ismereteket csak olyan ismeretek előzzék meg, amelyekre az adott ismeret ráépül. Fontos szempont volt az is, hogy a táblázat ne nőjön túl nagyra, ezért igyekeztem az egymással nagyon szoros kapcsolatban lévő részeket egy cellában megjeleníteni. Ennek ellenére előfordul olyan, hogy az előbb meghatározott szabályt nem tartom be. Ez azért fordulhat elő, mert az egyik cella olyan lényeges részletet tartalmaz, amire az iskolában különösen felhívják a diákok figyelmét. A következő dolog, amit meg kell vizsgálnunk az általam készített táblázatban, az az előismeretek oszlop. Minden cellához meghatározható, hogy mely korábbi cellákra épül rá. Ezeket az előismeretek oszlopban jelenítettem meg olyan módon, hogy megelőző cella oszlopában lévő betűjelből és a sorában lévő számból egy azonosítót képeztem. Miután a táblázatot elkészítettem, minden celláját megszámoztam. A bal felső (A 0.1) cella kapta az egyes számot, majd balról jobbra és fentről lefelé folytattam a számozást, így az utolsó 18-as cella a (C 2.2) -es lett. Az új számozás bevezetése lehetővé tette, hogy a táblázatból elkészítsek egy mátrixot, aminek a segítségével el tudtam végezni az általam kitalált tananyag ellentmondásmentességének vizsgálatát. A vizsgálat eredményét mutatja az első számú melléklet, illetve a főbb lépések utáni állapotokat ennek a fejezetnek a végén is bemutatom.

A korábban bevezetett új számozással az általam Maple munkalap formájában feldolgozott részek 11 és 18 közötti számokat kaptak. Ebből a 11 és 16 közötti számmal jelzett anyagrészeket mutatja a következő táblázat, ami saját szerkesztésű (Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, & Dr. Vincze 2011a, 2011b) alapján.

Blokk	A mező száma a táblázatban[1]	Sokszínű Matematika 9.	Sokszínű matematika 10
1	11	48-55,157-161	-
2	12	90-93	58-60
3	13	-	58-60,62-64,65
4	14	-	65
5	15	-	67-77,88-93,103-106
6	16	Minden eddigi tudás, valamint néhány fejezet a 11. évfolyamról[2]	

4. táblázat: A másodfokú egyenletekhez tartozó tananyagrészek helye a Sokszínű Matematika tankönyvsorozat 9. és 10. évfolyamnak szóló köteteiben
Forrás: Saját szerkesztés.

A fenti táblázatban lényegi elemként két oszlop jelenik meg Sokszínű Matematika 9. és Sokszínű Matematika 10. címmel. Az itt található cellákban oldalszámokat találunk. Ezeken az oldalakon találjuk meg az említett két könyvben azokat a tananyagrészeket, amiket a munkalapon feldolgoztam. A táblázatban 6 egység található, viszont a Maple munkalap az előbbi felosztással kicsit szembe megy és ezt a 6 egységet 4 nagyobb egységbe zárja. Az eltérés oka a táblázattól az, hogy vannak olyan anyagrészek, amik elválaszthatatlanul kapcsolódnak egymáshoz ugyanakkor úgy gondoltam, hogy megérdemelnek egy cellát a táblázatban, mert olyan fontos dolgot írnak le, amire a tanárok külön felhívják a diákjaik figyelmét is. Ilyen például a 14-es számmal jelölt ismeret, amiről a *Másodfokú egyenlet* blokk *Diszkrimináns* című alblokkjában lesz szó. Egy másik nagyon fontos eltérés a táblázattól, hogy a gyöktényezős alak alkalmazása ugyan 15-ös cellában jelenik meg, ami az 5. blokknak felel meg a munkalapon, de az elméleti áttekintés során már a 3. blokkban előkerül ez a fogalom. Ezen kívül még egy összevonást találunk. A 15-ös és 16-os cellák is a *Másodfokú egyenletek alkalmazása feladatok megoldása során* című blokkban kaptak helyet, mivel mind a két cella alapvetően a feladatmegoldáshoz kapcsolódó ismeretet ír le, de az utóbbi már nem kizárólag a másodfokú egyenletekre koncentrál, hanem olyan vegyes feladatokra utal, melyeknél a másodfokú egyenletek más típusú (pl.: Exponenciális, logaritmusos, trigonometrikus) egyenletek mellett fordulnak elő. Ennek okán a 16-os cellához tartozó egyenletfajtákat csak címként említem meg, mivel erről bővebben lesz szó a középiskola 11. osztályában.

[1] Lásd 2. ábra
[2] Ezzel a résszel bővebben nem foglalkozunk, mivel a diákok majdnem biztosan fogják tanulni ezt később.

Mint azt már korábban említettem, vannak a munkalapnak a középiskolai anyagon túlmutató részei. A táblázatban ezt a 17-18-as számú cellák jelzik. Ezeket gyűjtöttem össze az ötödik tartalmi blokkban annak érdekében, hogy akit érdekel megismerkedhessen a másodfokú egyenletekből levezethető komplex számokkal, illetve egy kis kitekintést kapjon a valós számhalmazon kívül elhelyezkedő számokról. Fentebb említettem, hogy elvégeztem a tananyag ellentmondásmentességének vizsgálatát. Most szeretném a fontosabb lépésekről készült képeket bemutatni.

Kiindulási állapot

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

0

10. lépés az előismeretek vége

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

10

11. lépés a másodfokú egyenletek kezdete

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

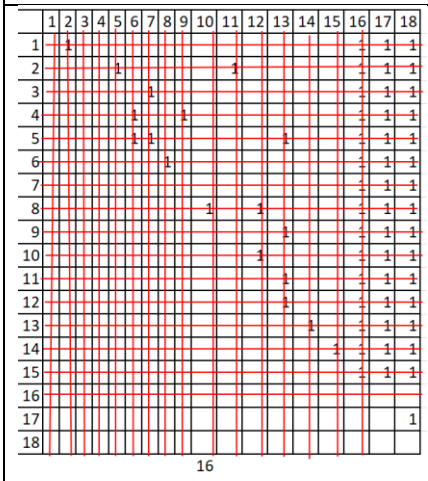
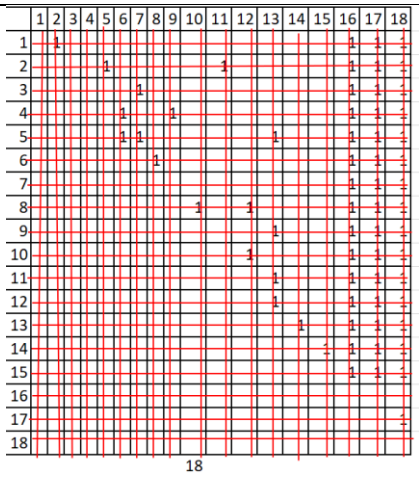
11

15. lépés a másodfokú rész vége

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

15

5. táblázat: A módosított K-algoritmus lefutásának főbb lépései az általam elképzelt tananyagmátrixon
Forrás: Saját szerkesztés

16. lépés a másodfokú egyenletekre épülő rész kezdete	18. lépés végállapot
	

5. táblázat: A módosított K-algoritmus lefutásának főbb lépései az általam elképzelt tananyagmátrixon (folytatás)
Forrás: Saját szerkesztés

Látható, hogy a módosított K-algoritmus helyesen futott le. Ez alapján megállapítható, hogy az általam készített tananyag logikailag helyes, így a munkalap alkalmas lehet a másodfokú egyenletek témakörének feldolgozására, oktatására.

6. A Maple munkalapon szereplő szekciók részletes bemutatása

Ebben a fejezetben részletesen bemutatom az elkészült munkalapot, mely teljes terjedelemben megtalálható a kettes számú mellékletben.

6.1 Egyszerű másodfokú egyenletek megoldása

Az egyszerű másodfokú egyenletek megoldása előtt, felidézünk néhány definíciót, azonosságot és módszert, melyekkel az ilyen típusú egyenletek megoldhatóak.

- A blokk tartalma:
  - Kéttagú kifejezésekhez kapcsolódó azonosságok
    - Kéttagú összeg négyzete (3.1.1.1-3.1.1.1.3)
    - Kéttagú különbség négyzete (3.1.2.1-3.1.2.1.3)
    - Két tag összegének és különbségének szorzata (3.1.3.1-3.1.3.1.3)
  - A szorzattá alakítás módszerei
    - Kiemelés (3.2.1.1-3.2.1.12)
    - Kiemelés csoportosítással (3.2.2.1-3.2.2.12)
  - Egyenlet megoldása szorzattá alakítással (3.3.1.1-3.3.2.11)

- Online gyakorlófeladatok

Ez a szekció abból a célból készült, hogy a tanulónak legyen lehetősége feleleveníteni a másodfokú függvény és a másodfokú egyenlet előtt néhány nevezetes azonosságot és a szorzattá alakítások módszereit, melyek segítségével még a megoldóképlet ismerete nélkül tud speciális másodfokú egyenleteket megoldani. A blokk három kisebb részre bontható. Az első részben három alap azonosságnak a definícióját, valamint a definíciók bemutatását célzó három egyszerű feladatot találunk. Az azonosságok alkalmazására következő példákat írtam fel:

Kéttagú összeg négyzete:

$$(2 \cdot x + 3)^2 = (2 \cdot x)^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = 4 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 9 \ (1).$$

Kéttagú összeg különbsége:

$$(2 \cdot x - 3)^2 = (2 \cdot x)^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = 4 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 9 \ (\ 2).$$

Két tag összegének és különbségének szorzata:

$$(2 \cdot x + 3) \cdot (2 \cdot x - 3) = 4 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 6 \cdot x - 9 = 4 \cdot x^2 - 9 \ (3).$$

Nyilvánvalóan az általános képletben a 2x *a*-nak a 3 pedig *b*-nek felel meg.

A blokk második részében a kiemelést, mint szorzattá alakítási módszert szintén egy egyszerű példával illusztrálom először, majd ennek másik alpontjában bemutatok egy csoportos kiemeléssel megoldható feladatot.

Egyszerű példa:

$$12 \cdot a^4 + 20 \cdot a^3 + 8 \cdot a^2 \ (4).$$

Ebben a példában $4 \cdot a^2$ kiemelhető, az eredmény:

$$4 \cdot a^2 \cdot (3 \cdot a^2 + 5 \cdot a + 8) \ (5).$$

Bonyolultabb példa:

$$12 \cdot a \cdot x + 12 \cdot b \cdot y + 48 \cdot a \cdot y + 3 \cdot b \cdot x \ (6).$$

A példában kiemelhető az *a*-kat tartalmazó tagokból $12 \cdot a$ a b-ket tartalmazó tagokból pedig $3 \cdot b$. Ha ezt végrehajtjuk észrevehető, hogy mindkét kiemelt résznek a szorzója az x+4y kifejezés. Ezeket ismét ki tudjuk emelni:

$$(12 \cdot a + 3 \cdot b) \cdot (x + 4 \cdot y) \ (7).$$

Végül a kapott szorzat első tényezőjéből kiemelhetünk még 3-at:

$$3 \cdot (4 \cdot a + b) \cdot (x + 4 \cdot y) \ (8).$$

A blokk utolsó részeként megoldok két egyenletet a szorzattá alakítás segítségével. Az első itt is egy könnyebb feladat, aminél már szorzattá van alakítva és nullára van rendezve az egyenlet:

$$(x + 2) \cdot (2 \cdot x + 2) \cdot (3 \cdot x - 6) \cdot (4 \cdot x - 3) = 0 \ (9).$$

Tudjuk, hogy **egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.** Ebből egyértelműen következik, hogy ha megoldjuk a tényezőkből képzett nullára rendezett egyenleteket, akkor megkapjuk az egyenlet gyökeit. Ezt kézzel is elvégezhetjük, azonban a Mapleban az egyenletek megoldására a **solve** parancsot tudjuk használni. Ennek megadhatunk egy egyenletet első paraméterként, majd egy változót amire az adott egyenletet meg szeretnénk oldani. A gyökök tehát a következők: $\left\{x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = \frac{3}{4}\right\}$. A második feladat egy fokkal nehezebb, hiszen itt már rendezni is kell az egyenletet az eddig elsajátított ismeretek segítségével. Az eredeti egyenlet:

$$(2 \cdot x + 7) \cdot (x + 2) - (x - 5) \cdot (x + 2) = (2 \cdot x + 3) \cdot (x + 2) \ (10).$$

Ez az egyenlet többféleképpen is megoldható. Helytakarékossági okokból csak a főbb lépéseket és a megoldáshalmazt fogom bemutatni. Ha nullára rendezzük az egyenletet úgy, hogy a jobb oldalt kivonjuk a balból, akkor x+2 kiemelhető. Ekkor következő egyenletet kapjuk:

$$(x + 2) \cdot \big((2 \cdot x + 7) - (x - 5) - (2 \cdot x + 3)\big) = 0 \ (11).$$

Baloldalon a második zárójelen belül össze tudunk vonni. Összevonás után kapjuk a következő egyenletet:

$$(x + 2) \cdot (-x + 9) = 0 \ (12).$$

Ebből az egyenletünk megoldáshalmaza: $\{x_1 = -2, x_2 = 9\}$.

Ezt ellenőrizhetjük kézzel, illetve a solve paranccsal ahogyan azt korábban bemutattam.

6.2 Másodfokú függvény

Ebben a blokkban megismerkedünk a másodfokú függvénnyel.

- A blokk tartalma
  - A másodfokú függvény általános hozzárendelési szabálya (4.1.1-4.1.4)
  - A másodfokú függvény képe
  - A parabola fogalma (4.3.3-4.3.6)
  - A teljes négyzetté alakítás módszere (4.4.1.1-4.4.4)
    - Definíció (4.4.1.1.-4.4.1.2)
  - A másodfokú függvény jellemzése (4.5.1.1-4.5.7.1.2)
    - A függvény
    - Értelmezési tartomány
    - Értékkészlet
    - Zérushely
    - Monotonitás

        - Minimum hely/Maximum hely/Minimum érték/Maximum érték
        - Paritás.
    - Online gyakorlófeladatok

Ez a blokk a másodfokú függvényhez kapcsolódó ismereteket rendszerezi. Az első alpontban a Mapleban elérhető matematikai jelekkel megadtam az általános másodfokú függvény hozzárendelési szabályát, amely egyben definiálja is a másodfokú függvényt:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\text{ahol } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \ (13).$$

A definícióban leírtak gyakorlatiasabb bemutatására készítettem egy olyan eljárást, mely a feltüntetett paraméterértékek (a, b, c) és a változó (x) megadása után megjeleníti az azokból felírható hozzárendelési szabályt.

A következő alpontban bemutatom a másodfokú függvénycsaládra jellemző grafikont. Ehhez a program egyik beépített parancsát használom, a **plot**-ot. Ezzel a Descartes-féle koordinátarendszerben tudunk függvényeket felrajzolni. A parancs első paramétere maga a függvény, a második és harmadik paraméter pedig egy-egy intervallum, ami azt adja meg hogy x, illetve y irányban milyen intervallumot szeretnénk megjeleníteni a tengelyeken. Ezek közül az első paraméter kötelező a másik kettő opcionális.

A harmadik pontban definiálom a parabola fogalmát, ami a következő:

Definíció: Azon pontok halmazát, amelyek egy adott **F** *fókuszponttól* és egy adott **e** *vezéregyenestől* **azonos** távolságra vannak parabolának nevezzük.[3]

Ehhez készítettem egy szemléltető ábrát, ami a munkalapon szintén megtalálható.

A negyedik alpontban a teljes négyzetté alakítás módszerét mutatom be. A definíció jelekkel a következő:

$$a \cdot (x - u)^2 + v;$$

$$\text{ahol } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge u \in \mathbb{R} \wedge v \in \mathbb{R};$$

$$u = \frac{-b}{2 \cdot a} \wedge v = -\frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a};$$

$$A\ parabola\ csúcspontja\ C = (u, v)\ (14).$$

Ennek lépésenkénti levezetése is megtalálható a munkalapon 4.4.2.1-től a blokk végéig. Úgy gondolom, hogy mivel a teljes négyzetté alakítás a függvényeknél kerül tárgyalásra, ezért jó, ha ez a témakör logikailag megelőzi az másodfokú egyenletek témakörét, így a grafikus megoldási módszernél felhasználható ez az ismeret.

[3] Maple munkalap „A parabola fogalma” alpont eleje.

A második blokk utolsó pontjában egy „teljes” függvényvizsgálatot mutatok be az x^2 függvény segítségével. A másodfokú függvény jellemzése című blokkban feltüntetett szempontok alapján.

6.3 Másodfokú egyenlet

Ebben a blokkban a másodfokú egyenletekkel kapcsolatos ismereteket tekintjük át.

- A blokk tartalma
    - Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakja (5.1.1-5.1.2)
    - A grafikus megoldási módszer (5.2.1-5.2.9)
    - A másodfokú egyenlet megoldóképlete
        - Levezetés (5.3.1.1-5.3.1.20)
            - Hiányos másodfokú egyenletek gyökei (5.3.1.1.1.1-5.3.1.1.2.3.2.4)
        - Diszkrimináns
            - Diszkrimináns fogalma (5.3.2.1.1)
            - A diszkrimináns és a másodfokú egyenlet megoldásainak száma közötti összefüggés (5.3.2.2.1-5.3.2.2.3)
    - A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja(elmélet) (5.4.1-5.4.9)
    - Viéte-formulák (Emelt szint)
        - Gyökök összegére fennálló összefüggés (5.5.1.1-5.5.1.4)
        - Gyökök szorzatára fennálló összefüggés (5.5.2.1-5.5.2.7)
    - Másodfokú egyenletre visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek (5.6.1.1-5.6.2.15)
    - Paraméteres másodfokú egyenletek (Emelt szint) (5.7.1-5.7.2.13)
    - Online gyakorlófeladatok

Első lépésként ennél a témakörnél mindenképpen érdemes megismertetni a tanulókat a másodfokú egyenlet általános alakjával. A másodfokú egyenletet úgy is definiálhatjuk, hogy „…ha egy másodfokú kifejezést egyenlővé teszünk egy másodfokúnál nem nagyobb fokszámú kifejezéssel, akkor másodfokú egyenletet kapunk.”[4] Ezzel a definícióval arra szerettem volna felhívni a figyelmet, hogy minden olyan egyenletet másodfokúnak tekinthetünk, aminek a két oldalán egy-egy másodfokúnál nem magasabb fokszámú polinom áll. A szöveggel

[4] Lásd a munkalapon.

megfogalmazott definíciót követően ismertetésre kerül a nullára rendezett alak, mely a későbbiekben az egyenletmegoldás általánosításánál kap majd fontos szerepet. Mielőtt azonban levezetném a másodfokú egyenlet megoldóképletét, röviden bemutatom a grafikus megoldás lehetőségét. Egy korábbi blokk alkalmával a tanulók már megismerhették a teljes négyzetté alakítás módszerét, amit a grafikus megoldás során alkalmazunk. Erre utalok a „A grafikus megoldási módszer rész" elején. Ezután egy példán bemutatom azokat a lépéseket, amiket a grafikus megoldáshoz végre kell hajtani. Nézzük meg most a grafikus megoldás bemutatására hozott példát:

$$x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0 \ (15).$$

Ahogyan korábban már általánosan bemutattam, úgy az egyenlet bal oldalát át kell alakítanunk teljes négyzetté. Ehhez az x-es tag együtthatóját el kell osztanunk 2-vel ez lesz a zárójelen belüli kifejezés második tagja. Ezután ennek a tagnak a négyzetét le kell vonnunk a kialakult négyzetes kifejezésből, majd az előjelnek megfelelően hozzá kell adnunk a konstans tagot az eddigi kifejezéshez. Összevonások után megkapjuk a teljes négyzet alakot. Ez a fenti esetben a következő lesz:

$$(x - 3)^2 + 1 = 0 \ (16).$$

Ebben az esetben a teljes négyzet alak jelöléseivel u=3 és v=1. Ebből az következik, hogy ha az alap x^2 függvény csúcsát eltoljuk a C (3;1) pontba és ábrázoljuk a függvényt (pl. Mapleban a plot parancs segítségével), akkor a függvény grafikon x tengellyel alkotott metszéspontjainak x értékei lesznek az egyenlet gyökei.

A blokk harmadik pontjának első alpontja mutatja be az általános másodfokú egyenlet megoldóképletének levezetését. Fontosnak tartom, hogy a diákok ne csak megtanulják a megoldóképletet hanem akár ők maguk is elő tudják állítani azt az általános egyenletből kiindulva. A levezetést kétféle módon is meg lehet oldani. A (Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, & Dr. Vincze 2011a) forrás 64. oldalán egy olyan változatot találunk, melyben először megszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát *4a*-val majd hozzáadunk mindkét oldalhoz b^2 -et ezután pedig észrevesszük, hogy a bal oldalon $2ax+b$ négyzetét ki tudjuk alakítani. Ez a levezetés matematikai szempontból tökéletesen megállja a helyét, ugyanakkor azt gondolom, hogy a diákok számára a következő gondolatmenetet talán könnyebb követni abból a szempontból, hogy bár a levezetés hosszabb lesz, de a végrehajtott lépések kisebb „méretűek" és kevesebb intuíciót igényelnek. A gondolatmenet tehát a következő: Kössük ki, hogy *a* nem lehet 0 ugyanis, ha ezt megengednénk, akkor könnyedén belátható, hogy az x^2-es tag eltűnne és az egyenletünk elsőfokúra redukálódna. Miután beláttuk, hogy *a* 0-tól különbözik, el tudjuk osztani vele az egyenlet mindkét oldalát, így x^2 együtthatója 1 lesz. Mivel mi x lehetséges

értékeit szeretnénk meghatározni, de nekünk ebben a lépésben x^2-es tagunk van, ezért a következő gondolatunk az, hogy gyököt kellene vonni. Összegből azonban ezt nem tudjuk megtenni, ebből adódóan az összeget át kell alakítanunk valamilyen szorzattá. A sima kiemelés azért nem elegendő, mert a $\frac{c}{a}$ tagban nincs *x, így* a gyökvonást továbbra sem lehetne elvégezni úgy, hogy közelebb jussunk x kifejezéséhez. Kiemelés helyett azonban használhatjuk a teljes négyzetté alakítás módszerét. A teljes négyzet négyzetes részét ebben az esetben az $x^2 + \frac{b \cdot x}{a}$ összegből kell előállítanunk. Az x^2-es tagból látható, hogy x lesz az egyik tagunk, a négyzetes kifejezésben a második tag pedig a két szám összegének négyzetére vonatkozó nevezetes azonosság miatt $\frac{b}{2 \cdot a}$.

Ha ezek alapján felírjuk a négyzetes kifejezést, majd visszaellenőrzünk zárójel felbontással, akkor a nevezetes azonosság miatt keletkezik egy tag, amit le kell vonnunk, ha az eredeti kéttagú összegünk teljes négyzet alakját szeretnénk kapni. Ha sikerült végrehajtanunk a teljes négyzetté alakítást, akkor a zárójelen kívüli részt csak át kell vinnünk az egyenlet jobb oldalára, majd közös nevezőre kell hoznunk a jobb oldalon. Ezután kapjuk a következő egyenletet:

$$\left(x + \frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2} \quad (17).$$

Innen már csak gyököt kell vonnunk (figyeljünk az abszolútértékre) és az esetszétválasztást követően meg is kapjuk az ismert formulát.

A Maple munkalapban a levezetés során 3 érdekesebb dolgot fedezhetünk fel. Az első az **sqrt** parancs. Ezzel gyökvonást tudunk végrehajtani. Alapértelmezetten a gyökvonás definíciója szerint számol, tehát figyelembe veszi, hogy a gyökvonás eredménye csak nemnegatív lehet.

A második figyelemreméltó dolog a képletben a *symbolic* kulcsszó, ami az sqrt függvény opcionális paramétere lehet. Ezzel utasíthatjuk a Maple-t, hogy hajtsa végre a szimbólumokon is a műveletet, ha tudja. Ekkor viszont elképzelhető, hogy gyököt veszítenénk. Hiszen tudjuk, hogy $\sqrt{a^2} = |a|$.

Azaz egy szám négyzetének a gyöke a szám abszolútértékével egyenlő. Tehát amikor egy változó négyzetét tartalmazó kifejezésből szeretnénk gyököt vonni, akkor a gyökvonás eredményét abszolútértékbe kell tennünk. Ebben segít a program **abs** nevű függvénye. A gyökvonás utáni állapotot látjuk a munkalap 5.3.1.13-as egyenletében. Innen esetszétválasztás és rendezés után megkapjuk a jól ismert megoldóképletet. Láttuk, hogy a megoldásunk helyes, ezt azonban le is tudjuk ellenőrizni egy megfelelően felparaméterezett solve parancs segítségével. Ehhez mindösszesen egy *parametric* kulcsszót kell aposztrófok között az

általános egyenlet és a változó mögé írnunk, ahogyan azt az 5.3.1.20-as Maple egyenletnél látjuk.

A megoldóképlet levezetését követően kitérek a különböző hiányos másodfokú egyenletekre és azok gyökeire. Röviden tekintsük át ezeket is. A hiányos másodfokú egyenlet definíciója: Olyan másodfokú egyenlet, amelyből hiányzik vagy az x-es, vagy a konstans tag. (Oktatási Hivatal é.n.) A dolgozat szerzője szerint az $a \cdot x^2 = 0$ egyenlet is tekinthető hiányosnak bár ekkor az egyenlet megoldása triviálisan 0. Ha az előbb hivatkozott forrás által említett definíciót alkalmazzuk, akkor összesen 3 fajta hiányos másodfokú egyenletről beszélhetünk. Elsőnek vegyük az alábbit:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0 \ (18).$$

Itt c=0. Ebben az esetben szorzattá tudunk alakítani úgy, hogy kiemelünk x-et minden tagból a baloldalon $x \cdot (a \cdot x + b)$. Ebből rendezés után megkaphatjuk, hogy az ilyen típusú egyenletek gyökei mindig $\left\{x_1 = 0, x_2 = \frac{-b}{a}\right\}$. A következő esetben b=0 és tegyünk egy kikötést c-re: c<0. Ekkor az egyenletünk, így néz ki:

$$a \cdot x^2 - c = 0 \ (19).$$

Rendezés után látjuk, hogy ennek az egyenletnek a gyökei:$\left\{x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}\right\}$.

A harmadik esethez változtassuk meg az előző egyenletben c-re tett kikötésünket: c>0. Ekkor az egyenlet, így néz ki:

$$a \cdot x^2 + c = 0 \ (20).$$

Ennek gyökei:$\left\{x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$.

Látjuk, hogy az utolsó esetben negatív kifejezés gyöke adja a megoldást. Az ilyen típusú egyenletekkel középiskolában nem foglalkozunk, de egy rövid kitekintés erejéig említést teszek az utolsó blokkban róluk.

A következő alblokkban a diszkriminánsról, valamint arról van szó, hogy milyen kapcsolat van a diszkrimináns és az egyenlet gyökeinek száma között. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa a következő:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \ (21).$$

Ennek előjele dönti el, hogy hány és milyen megoldása(i) van(nak) az egyenletnek. Ha a diszkrimináns pozitív, úgy két eltérő valós megoldás van, ha negatív úgy két komplex gyöke van az egyenletnek, ekkor a valós számkörben nincs megoldás. Ha a diszkrimináns pontosan 0, akkor egy megoldása van az egyenletnek, mivel ekkor az x_1 és x_2 megegyezik. A könnyebb érthetőség kedvéért a diszkrimináns és a gyökök száma közötti összefüggést nem csak

szövegesen mondom ki, hanem emellett a plot parancs segítségével készítettem néhány ábrát is a könnyebb érthetőség kedvéért.

A blokk következő (negyedik) részében a gyöktényezős alakot egy példán keresztül mutatom be. Vettem egy szorzattá bontott másodfokú egyenletet:

$$5 \cdot (x+3) \cdot (x+2) = 0 \ (22).$$

Ezt utána a hagyományos módon felbontottam és 0-ára rendeztem, így egy olyan egyenlethez jutottam, melyet a diákok a korábbi ismereteik segítségével könnyedén meg tudnak oldani:

$$5 \cdot x^2 + 25 \cdot x + 30 = 0 \ (23).$$

Megoldások:$\{x_1 = -2, x_2 = -3\}$.

Oldjuk meg most úgy is az egyenletet, hogy a zárójeleket nem bontjuk fel. Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért két lehetőségünk van:

$$x + 3 = 0 \bigvee x + 2 = 0 \ (24).$$

Ezekből szintén megkapjuk a megoldóképlet segítségével meghatározott gyököket. Adott tehát a kérdés, hogy ha van egy másodfokú egyenletünk, aminek ismerjük a gyökeit, akkor fel tudjuk-e írni az egyenletet szorzattá bontva? A válasz az, hogy igen. Egy általános másodfokú egyenletet gyökeinek ismeretében felírható szorzatként a következő módon:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ (25).$$

Következő pontunk a Viéte-formulák. Ez a rész csak az emelt szintű követelmények között szerepel, amit jeleztem is a munkalapon ugyanakkor úgy gondoltam, hogy a középszintű érettségit íróknak is hasznos tudást jelenthet. A gyökök összegére vonatkozó formulához egyszerűen csak össze kell adnunk a megoldóképlet megfelelő részeit. Miután használtuk a Maple **simplify** nevű függvényét – ami kifejezések egyszerűbb alakra hozásakor válik nagy hasznunkra –, rögtön megkaptuk a gyökök összegére vonatkozó összefüggést:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \ (26).$$

A szorzatra vonatkozó összefüggés levezetéséhez észre kell vennünk, hogy a számlálóban egy nevezetes azonosság van, ami két négyzetes kifejezés különbségének tudunk megfeleltetni. Ezek után összevonások és egyszerűsítések segítségével megkaphatjuk a gyökök szorzatára vonatkozó összefüggést:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \ (27).$$

A blokk következő pontjába két magasabb fokú egyenlet kerül megoldásra a szokásos átjelöléses módszer segítségével. Mind a két egyenletet ábrázolom függvényként két plot parancs segítségével, így az algebrai ellenőrzésen túl grafikonon is láthatóvá teszem az egyenlet

gyökeit. A Mapleban nagyon egyszerűen megoldhatunk magasabb fokú egyenleteket is a solve parancs segítségével. Azonban papír alapon sincsen feltétlenül nehéz dolgunk, hiszen egy másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenlet megoldása csak annyiban mutatnak túl egy sima másodfokú egyenletén, hogy itt megfelelő átjelölésekkel redukáljuk másodfokúra az egyenletet, majd az egyenlet gyökeit visszahelyettesítjük abba az egyenletbe, amivel az új változót bevezettük. Az ilyen típusú egyenleteknél minden esetben célszerű ellenőrizni, hogy mi az eredeti egyenletünk értelmezési tartománya, mert itt is előfordulhatnak hamis gyökök.
Az utolsó pontban egy a valós paraméter függvényében vagyunk kíváncsiak az egyenlet megoldásaira a valós számok halmazán:

$$a \cdot x^2 + (2 \cdot a + 1) \cdot x + a + 2 \ = \ 0 \ (28).$$

Ennek megoldását két részre kell bontanunk:
Ha $a = 0$, akkor $x + 2$ marad a bal oldalon, amiből az egyenlet megoldása x=2. Ha a nem 0, akkor meg kell vizsgálnunk a diszkriminánsát az egyenletnek:

$$D = (2 \cdot a + 1)^2 - 4 \cdot a \cdot (a + 2) =$$
$$= 4 \cdot a^2 + 4 \cdot a + 1 - 4 \cdot a^2 - 8 \cdot a =$$
$$= -4 \cdot a + 1 \ (29).$$

Ezt rendezve azt kapjuk, hogy ha a értéke ¼-ed, akkor az eredeti egyenlet diszkriminánsa 0, tehát ebben az esetben egy valós gyököt kapunk. Ha a értéke kisebb ¼-nél, akkor a diszkrimináns pozitív, ami két valós gyököt jelent. Ha nagyobb, akkor a diszkrimináns negatív, így nem lesz az egyenletnek valós gyöke.

6.4 Másodfokú egyenletek alkalmazása feladatok megoldása során

Ebben a blokkban az eddig megszerzett elméleti tudásunkat alkalmazzuk feladatok megoldása során.

- A blokk tartalma
    - Feladatmegoldás a gyöktényezős alak segítségével (6.1.1.1-6.1.2.1.3)
    - Törtes egyenletek megoldása (6.2.1.1-6.2.2.1.12)
    - Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével (6.3.1.1.1-6.3.2.1.8)
    - Egyszerű másodfokú egyenletrendszerek megoldása (6.4.1.1-6.4.2.1.5)
    - $\sqrt{a \cdot x + b} = c \cdot x + d$ típusú egyenletek megoldása (6.5.1.1-6.5.2.1.9)
    - Teljes függvényvizsgálat feladat (6.6.1-6.6.6.1.2)
    - Másodfokú egyenletet is tartalmazó „kevert” egyenletek megoldása (Emelt szint)

- Logaritmust tartalmazó
- Szögfüggvényt tartalmazó
- Exponenciális függvényeket tartalmazó.

Mint ahogyan a blokk címe is utal rá, ebben a részben összegyűjtöttem néhány feladattípust, ami a másodfokú egyenletekhez kapcsolódik valamilyen módon. Ezeket a feladatokat fel lehet használni mintapéldaként, de akár házifeladat formájában is. Minden alpontban két feladat és azok megoldása található. Ez alól kivételt képez az utolsó alpont, mert bár ezekről az egyenletekről szó esik a középiskolában, viszont csak tizenegyedik évfolyamban, amikor a tanulók már megismerték a nem másodfokú rész megoldásához használt módszereket. A feladatokkal foglalkozó rész utolsó előtti alpontjában ismét előkerül egy „teljes" függvényvizsgálat, ezúttal azonban az alapfüggvény egy transzformáltját vizsgálja a feladat. Ezekről bővebben a dolgozatban nem tervezek szót ejteni, mert ez a blokk főként a diákok gyakorlásának elősegítését szolgálja és nem tartalmaz olyan új ismereteket, amit a korábbi alfejezetekben ne említettem volna.

6.5 Másodfokú egyenletek és komplex számok (Felsőfokú tananyag)

Ebben a blokkban kicsit előre tekintünk, megnézzük, hogy lehetséges-e megoldani mégis negatív diszkriminánsú másodfokú egyenleteket, majd kitekintünk a valós számhalmazon túlra.

- A blokk tartalma
  - Komplex számok bevezetése (7.1.1-7.1.4)
  - Komplex számok ábrázolása.

Az utolsó nagyobb blokkban rövid kitekintést találunk a valós számhalmazon túlra, a komplex számokra. Itt felszínesen érintjük a felsőfokú oktatásban előkerülő anyagrészt. Nem volt cél a komplex számok részletes ismertetése, hiszen alapvetően a középfokú oktatás segítésére készült a munkalap, a komplex számok témaköre pedig bőven a felsőfokú tananyagba tartozik.

7. Az elkészült dokumentum felhasználási lehetőségei az oktatásban[5]

A dolgozat eddigi fejezeteiben megnéztünk néhány, a munkalap szempontjából releváns elméleti megfontolást, áttekintést kaptunk a témakör szakmai alapjairól, illetve bemutatásra került a témakört, a digitális távoktatást támogatni kívánó munkalap. Adódik a kérdés, hogy milyen módon hasznosítható a dokumentum az oktatásban. Ennek vizsgálatára teszek kísérletet

[5] A fejezetben szereplő 11-es, 15-ös, 16-os, és 17-es táblázatok saját szerkesztésűek

ebben a fejezetben. Az alábbi hipotéziseket fogalmaztam meg, melyekre elméleti, - az eddigiektől eltérő megközelítéssel, - választ szeretnék adni.

H1: Az elkészített dokumentum képes jó/megfelelő mintaként szolgálni a digitális tananyagok készítéséhez a matematika területén.

H2 a: A középszintű érettségire készülő diákok számára megfelelő mélységben tartalmazza a másodfokú egyenletekhez kapcsolódó témakörök anyagát.

H2 b: Az emelt szintű érettségire készülőknek segítséget nyújt bizonyos feladatok megoldásához a témakörön belül.

7.1 H1: Az elkészített dokumentum képes jó/megfelelő mintaként szolgálni a digitális tananyagok készítéséhez a matematika területén

A hipotézist tantervi megközelítés alkalmazásával vizsgálom, ezért a feltevés igazságtartalmának eldöntése előtt vizsgáljuk meg, hogy milyen szintjei vannak a közoktatás szabályozásának. Ebben a következő ábra lesz a segítségünkre. (Dr. Nyéki 2016)

3. ábra: A háromszintű tantervi szabályozás
Forrás: Dr. Nyéki 2016
http://rs1.szif.hu/~nyeki/InfMod/Infmodszertan/

A legfelső szinten a nemzeti alaptantervet (NAT) látjuk. A NAT nevelési célokat és kulcskompetenciákat határoz meg. Ezek közül a számunkra érdekes kulcskompetencia a matematikai kompetencia. (Magyarország Kormánya 2012: 10653; Dr. Nyéki 2016) A NAT a matematikai kompetenciáról, így nyilatkozik:

„*A matematikai kompetencia kialakításához elengedhetetlen az olyan meghatározó bázisképességek fejlesztése, mint a matematikai gondolkodás, az elvonatkoztatás és a logikus következtetés. E kompetencia összetevőit alkotják azok a készségek is, amelyekre támaszkodva*

a mindennapi problémák megoldása során a matematikai ismereteket és módszereket alkalmazzunk.

A matematikai kompetencia kialakulásában, hasonlóan más területekhez, az ismeretek és a készség szintű tevékenységek egyaránt fontos szerepet töltenek be.

Szükséges képességek, készségek, ismeretek és attitűdök

A matematikai ismeretek magukban foglalják a számok, mértékek, struktúrák, az alapműveletek és az alapvető matematikai fogalmak, jelölések és összefüggések készség szinten alkalmazható tudását.

A matematikai kompetencia azt jelenti, hogy felismerjük az alapvető matematikai elveket és törvényszerűségeket a hétköznapi helyzetekben, elősegítve a problémák megoldását a mindennapokban, otthon és a munkahelyen. E kompetencia teszi lehetővé a törvényszerűségek felismerését a természetben, és alkalmassá tesz az érvek láncolatának követésére, a matematika nyelvén megfogalmazott törvények megértésére.

A matematikai műveltséghez való pozitív hozzáállás annak az igazságnak a tiszteletén alapul, hogy a világ rendje megismerhető, megérthető és leírható." (Magyarország Kormánya 2012: 10653-10654)

A fejlesztési feladatok és a kulcskompetenciák mentén a NAT meghatároz bizonyos műveltségi területeket. Ezeknek az ajánlott százalékos eloszlását mutatja be a következő táblázat a középiskola 4 évfolyamán (Magyarország Kormánya 2012: 10659):

Műveltségi területek	**9-10.**	**11-12.***
Magyar nyelv és irodalom	10-15	10
Idegen nyelvek	12-20	13
Matematika	10-15	10
Ember és társadalom	8-15	10
Ember és természet	15-20	10
Földünk – környezetünk	5-8	-
Művészetek	8-15	6
Informatika	4-8	4
Életvitel és gyakorlat	4-8	-
Testnevelés és sport	14-20	15

6. táblázat: Ajánlás a NAT műveltségi területek százalékos arányaira
Forrás: Magyarország Kormánya 2012: 10659
https://ofi.oh.gov.hu/sites/default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf

* Csak a minimális százalékos arány.

A táblázat alapján megállapítható, hogy a középfokú oktatás során minimum 10%-ot kell, hogy kitegyen a középiskolában elsajátított műveltségi anyagból. Ezen a területen a következőképpen alakul a fejlesztési feladatok struktúrája:

„1. Tájékozódás
1.1. Tájékozódás a térben
1.2. Tájékozódás az időben
1.3. Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban
2. Megismerés
2.1. Tapasztalatszerzés: a *tapasztalatok tudatosítása, közlése, rögzítése, jelölése, ezek értelmezése, visszaolvasása*
2.2. Képzelet (követő, alkotó)
2.3. Emlékezés
2.4. Gondolkodás
2.5. Az ismeretek rendszerezése
2.6. Az ismerethordozók használata
3. Az ismeretek alkalmazása
4. Problémakezelés és -megoldás
5. Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotások adott feltételeknek megfelelően; átstrukturálás
6. Akarati, érzelmi szabályozás, az önfejlesztés képessége és az együttéléssel kapcsolatos értékek
6.1. Kommunikáció
6.2. Együttműködés
6.3. Motiváltság
6.4. Önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás
7. Matematikai tapasztalatszerzés, a matematika épülésének elvei.” (Magyarország Kormánya 2012: 10689)

A felsorolásban előfordulnak olyan fejlesztési feladatok, melyek már az alapfokú oktatás során végrehajtásra kerülnek és a középfokú oktatásban már nem épülnek rá újabb feladatok, illetve előfordulnak olyanok is, melyek az alap- és középfokú oktatásban végig jelen vannak. Az alábbi táblázatban a NAT alapján összegyűjtöttem azokat a 9-12. évfolyamon a vizsgált műveltségi területhez tartozó fejlesztési feladatokat, melyek elérésében az általam elkészített munkalap segítséget nyújthat. (Magyarország Kormánya 2012: 10690-10701)

2.1. Tapasztalatszerzés: a tapasztalatok tudatosítása, közlése, rögzítése, jelölése, ezek értelmezése, visszaolvasása Adatok jegyzése, rendezése, ábrázolása. Együtt változó mennyiségek összetartozó adatpárjainak jegyzése: tapasztalati függvények, sorozatok alkotása, értelmezése stb.; változások leírására szolgáló matematikai modell keresése. Geometriai transzformációkban megfigyelt megmaradó és változó tulajdonságok tudatosítása Szavakban megfogalmazott helyzet, történés matematizálása: matematikai modellek választása, keresése, készítése, értelmezése adott szituációkhoz. (Pl. egyszerűsített rajz, számfeladat, nyitott mondat, sorozat, táblázat, egyenlet-megoldási módszerek, gráfok.) Szavakban megfogalmazott helyzetről, történésről készült matematikai „szöveg” értelmezése. Konkrét matematikai modellek (nyitott mondat, szakaszos ábra stb.) értelmezése a modellnek megfelelő szöveges feladat alkotásával. Tudatos megfigyelés elvont szituációkban; analízis, azonosítás, megkülönböztetés, szemponttartás: megfigyelés adott tulajdonságok szerint; felismert tulajdonságok és kapcsolatok szerint; változó szempontok, feltételek szerint; szempontok önálló megválasztása. Esetfelsorolások, érvelés a szempontok, feltételek, paraméterek önálló megválasztásával és változtatásával (pl. kombinatorika, egyenletek, szerkesztések).
2.2. Képzelet (követő, alkotó) Számok, műveletek, egyéb matematikai szimbólumok (pl. képek, szakaszos ábrák, diagramok, grafikonok, táblázatok, műveletek, nyitott mondatok) alapján az általuk leírt valóságos helyzetek, történések, összefüggések elképzelése.
2.4. Gondolkodás

Matematikai modellek megértése (pl. számok, műveletek, nyitott mondatok, sorozatok, függvények, táblázatok, rajzos modellek, diagramok, gráfok, grafikonok); átkódolás más modellbe. Adott modellhez példa, probléma megfogalmazása
2.5. Az ismeretek rendszerezése Definíció, tétel. A matematika különböző területei közötti kapcsolatok tudatosítása
2.6. Az ismerethordozók használata Könyvek (pl. matematikai zsebkönyvek, szakkönyvek, ismeretterjesztő könyvek, lexikonok, feladatgyűjtemények, táblázatok, képletgyűjtemények), számológépek, számítógépek használata
3. Az ismeretek alkalmazása Friss vagy felfrissített ismeretek, információk, felismerések közvetlen alkalmazása egyszerű utasítás végrehajtásában, döntésben. Régebbi ismeretek, információk, felismerések mozgósítása, felhasználása az ismeretszerzés szituációjával analóg helyzetben. Régebbi ismeretek mozgósítása, összeillesztése, felhasználása új helyzetben; sejtés, ellenőrzés. Ismeretek alkalmazása az újabb ismeretek megszerzésében egyes szakmák esetében. Új tapasztalatok visszarendezése előfogalmakhoz, fogalmakhoz
4. Problémakezelés és -megoldás Probléma felismerése (problémahelyzet átélése); problémaérzékenység. Az ismert elemek és az ismeretlen momentumok ütköztetése; sejtések, kérdések megfogalmazása. Egyszerű probléma áttekintése. A probléma megoldására való készség, a probléma vállalása. Sikertelen megoldási kísérlet után újjal való próbálkozás. A sikertelenség okának feltárása (pl. kihagytunk egy feltételt). A problémához hasonló egyszerűbb (már megoldott) probléma keresése. Önálló eljárások keresése, megoldási kísérletek, tippelések szabad végzése, összevetése a kapott információkkal, a valósággal. A problémához illeszthető matematikai modell választása, keresése, alkotása. (A probléma részekre bontása; összetett probléma áttekintése. Átfogalmazás más, ismertebb problémává; analógia keresése.) Megoldás a matematikai modellen belül. Matematikai modellek (pl. nyitott mondatok, gráfok, sorozatok, függvények, függvényábrázolás, számítógépes programok, statisztikai elemzések) ismerete, alkalmazásának módja, korlátai (pontosság, értelmezhetőség). Önellenőrzés; felelősségvállalás az eredményért. Többféle megoldási mód keresése, a problémához leginkább illő megoldási mód (módok) kiválasztása; indoklása. Gondolatmenet kiépítése (pl. „megoldási terv" szöveges feladathoz). Manuálisan elvégzett tevékenység gondolati lépésként való értelmezése, tudatosítása. Megértett probléma részletproblémákra bontása modell nélkül vagy modell segítségével; a részletproblémák sorrendbe állítása, pl. megoldhatóságuk időrendje szerint; az, így képzett terv tudatosítása elmondással, írásban, jelsorozattal (folyamattervezés). A tervkészítés módjának megalkotása. Stratégia alkotása. Kidolgozás megalkotása. (Az eltervezett megoldás lépéseinek végrehajtása; a részeredmények értelmezése, a végeredmény vonatkoztatása az eredeti problémára, válaszadás diszkusszió nélkül, illetve diszkusszióval.)

7. táblázat: Fejlesztési feladatok matematika műveltségi területen 9-12. osztályban a NAT szerint
Forrás: Magyarország Kormánya 2012: 10690-10701.
https://ofi.oh.gov.hu/sites/default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf alapján saját szerkesztés

A fejlesztési feladatokon túl meg kell említenünk azokat a tudástartalmakat is, amelyeket a tantárgy oktatása során meg kell szerezniük a tanulóknak. A NAT alapján itt is összegyűjtöttem azokat a 9-12. évfolyamra vonatkozó tartalmakat, melyeket az általam készített munkalap lefed. Ezeket a NAT a következő táblázatban foglaltak szerint határozza meg. (Magyarország Kormánya 2012: 10704-10706).

2.3. Számelméleti ismeretek: prímtényezős felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, relatív prímek.
2.4. Algebrai kifejezések: műveletek egyszerű algebrai kifejezésekkel
2.6. Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek: kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer, másodfokú egyenletek, elsőfokú egyenlőtlenségek; szöveges feladatok: egyszerű (fogalom közvetlen alkalmazását igénylő, illetve a gyakorlati életből vett szöveges) egyenletek; négyzetgyökös, exponenciális, logaritmikus, trigonometrikus egyenletek
4.2. Függvények megadása, ábrázolása: A függvény szemléletes fogalma. Függvény megadása, ábrázolása koordináta-rendszerben. Lineáris és másodfokú függvények, fordított arányosság. Exponenciális, logaritmus, trigonometrikus alapfüggvények.

4.3. Függvények transzformációja: *f(x)+c*; *f(x+c)* és *c*f (x)* ábrázolása.
4.4. Függvények jellemzése: értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás, periodicitás leolvasása grafikonról

8. táblázat: Tudástartalmak matematika műveltségi területen 9-12. osztályban a NAT szerint
Forrás: Magyarország Kormánya 2012: 10704-10706.
https://ofi.oh.gov.hu/sites/default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf alapján saját szerkesztés

A fentiekben bemutatott fejlesztési feladatok és tudástartalmak alapján kidolgozásra kerültek közismereti kerettantervek, melyek a közoktatás középső szintjét alkotják. Ezeknek a kerettanterveknek különböző változatai vannak iskolatípus és a képzési szinthez tartozó óraszámok szerint. Én ezek közül a gimnáziumi kerettantervek alap óraszámhoz és az emelt óraszámhoz tartozó „A” változatát használom fel a dolgozatomban. A kerettantervet teljes részletességgel, - a dolgozat terjedelmi korlátai miatt, - nem áll módomban bemutatni, ezért csak az általam feldolgozott témakörhöz kapcsolódó részeket fogom ismertetni.

7.1.1. Középszint

Az általam feldolgozott témakör a 9-10. évfolyamhoz azon belül a 2. Számtan, algebra és a 3. Összefüggések, függvények, sorozatok témakörök ismeretei között találhatóak meg. A két témakörre a kerettanterv összesen 82 (66+16) óra feldolgozási időt javasol. Ez alatt az idő alatt az alábbi táblázatokba foglalt ismeretek kerülnek elsajátításra. (Oktatási Hivatal 2012a: 9-13)

Ismeretek számtan algebra témakörben
Számelmélet elemei. A tanult oszthatósági szabályok. Prímtényezős felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös. Relatív prímek. *Matematikatörténeti és számelméleti érdekességek*: (pl. végtelen sok prímszám létezik, tökéletes számok, barátságos számok, Eukleidész. Mersenne, Euler, Fermat)
Hatványozás 0 és negatív egész kitevőre. Permanencia-elv.
A hatványozás azonosságai.
Számok abszolút értéke.
Különböző számrendszerek. A helyiértékes írásmód lényege. Kettes számrendszer. *Matematikatörténet:* Neumann János.
Számok normálalakja.
Nevezetes azonosságok: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás. Számolási szabályok, zárójelek használata.
Szöveges számítási feladatok a természettudományokból, a mindennapokból.
$(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$ polinom alakja, $a^2 - b^2$ szorzat alakja. Azonosság fogalma.
Egyszerű feladatok polinomok, illetve algebrai törtek közötti műveletekre. Tanult azonosságok alkalmazása. Algebrai tört értelmezési tartománya. Algebrai kifejezések egyszerűbb alakra hozása.
Egyes változók kifejezése fizikai, kémiai képletekből.
Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása.
Elsőfokú egyenletre, egyenlőtlenségre, egyenletrendszerre vezető szöveges feladatok.

Egy abszolútértéket tartalmazó egyenletek. $\lvert x+c \rvert = ax+b$.
A négyzetgyök definíciója. A négyzetgyök azonosságai.
A másodfokú egyenlet megoldása, a megoldóképlet.
Másodfokú egyenletre vezető gyakorlati problémák, szöveges feladatok.
Gyöktényezős alak. Másodfokú polinom szorzattá alakítása.
Gyökök és együtthatók összefüggései.
Néhány egyszerű magasabb fokú egyenlet megoldása. *Matematikatörténet:* részletek a harmad- és ötödfokú egyenlet megoldásának történetéből.
Egyszerű négyzetgyökös egyenletek. $\sqrt{ax+b} = cx+d$.
Másodfokú egyenletrendszer. A behelyettesítő módszer.
Egyszerű másodfokú egyenlőtlenségek. $ax^2+bx+c \geq 0$ (vagy > 0) alakra visszavezethető egyenlőtlenségek ($a \neq 0$).
Példák adott alaphalmazon ekvivalens és nem ekvivalens egyenletekre, átalakításokra. Alaphalmaz, értelmezési tartomány, megoldáshalmaz. Hamis gyök, gyökvesztés.
Összefüggés két pozitív szám számtani és mértani közepe között. Gyakorlati példa minimum és maximum probléma megoldására.

9. táblázat: A kerettanterv által meghatározott ismeretek számtan, algebra témakörben középszinten 9-12. évfolyamon Forrás: Oktatási Hivatal 2012a: 9-13 https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/3.2.04_matemat_9-12.doc alapján saját szerkesztés

Ismeretek összefüggések, függvények, sorozatok témakörben
A függvény megadása, elemi tulajdonságai.
A lineáris függvény, lineáris kapcsolatok. A lineáris függvények tulajdonságai. Az egyenes arányosság. A lineáris függvény grafikonjának meredeksége, ennek jelentése lineáris kapcsolatokban.
Az abszolútérték-függvény. Az $x \mapsto \lvert ax+b \rvert$ függvény grafikonja, tulajdonságai ($a \neq 0$).
A négyzetgyökfüggvény. Az $x \mapsto \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) függvény grafikonja, tulajdonságai.
A fordított arányosság függvénye. $x \mapsto \frac{a}{x}$ ($ax \neq 0$) grafikonja, tulajdonságai.
Függvények alkalmazása.
Egyenlet, egyenletrendszer grafikus megoldása.
Az $x \mapsto ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) másodfokú függvény ábrázolása és tulajdonságai. Függvénytranszformációk áttekintése az $x \mapsto a(x-u)^2+v$ alak segítségével.

10. táblázat: A kerettanterv által meghatározott ismeretek függvények sorozatok témakörben középszinten 9-12. évfolyamon Forrás: Oktatási Hivatal 2012a: 9-13 https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/3.2.04_matemat_9-12.doc alapján saját szerkesztés

A fenti táblázatban megjelöltem szaggatott vonallal aláhúzva azokat a tartalmakat, melyek a másodfokú egyenletekhez és a másodfokú függvényekhez tartoznak. A következő táblázatban bemutatom, hogy ez pontosan hol található az általam készített tananyagban.

Ismeret	Helye az általam készített tananyagban
$(a \pm b)^2$ polinom alakja, $a^2 - b^2$ szorzat alakja.	1. blokk Kéttagú kifejezésekhez kapcsolódó azonosságok Kéttagú összeg négyzete Kéttagú különbség négyzete Két tag összegének és különbségének szorzata
Egyszerű feladatok polinomok, illetve algebrai törtek közötti műveletekre. Tanult azonosságok alkalmazása. Algebrai tört értelmezési tartománya. Algebrai kifejezések egyszerűbb alakra hozása.	4. blokk Feladatmegoldás a gyöktényezős alak segítségével Törtes egyenletek megoldása
A másodfokú egyenlet megoldása, a megoldóképlet.	3. blokk Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakja A másodfokú egyenlet megoldóképlete Levezetés Hiányos másodfokú egyenletek gyökei Diszkrimináns Diszkrimináns fogalma A diszkrimináns és a másodfokú egyenlet megoldásainak száma közötti összefüggés
Másodfokú egyenletre vezető gyakorlati problémák, szöveges feladatok.	Teljes 4. blokk a „Másodfokú egyenletet is tartalmazó „kevert" egyenletek megoldása (Emelt szint)” kivételével
Gyöktényezős alak. Másodfokú polinom szorzattá alakítása.	3. blokk A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja(elmélet)
Gyökök és együtthatók összefüggései.	3. blokk Viéte-formulák (Emelt szint) Gyökök összegére fennálló összefüggés Gyökök szorzatára fennálló összefüggés
Néhány egyszerű magasabb fokú egyenlet megoldása.	3. blokk Másodfokú egyenletre visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek
Egyszerű négyzetgyökös egyenletek. $\sqrt{ax+b} = cx+d$.	4. blokk $\sqrt{a \cdot x + b} = c \cdot x + d$ típusú egyenletek megoldása
Másodfokú egyenletrendszer. A behelyettesítő módszer.	4. blokk Egyszerű másodfokú egyenletrendszerek megoldása
Példák adott alaphalmazon ekvivalens és nem ekvivalens egyenletekre, átalakításokra. Alaphalmaz, értelmezési tartomány, megoldáshalmaz. Hamis gyök, gyökvesztés.	4. blokk Törtes egyenletek megoldása $\sqrt{a \cdot x + b} = c \cdot x + d$ típusú egyenletek megoldása
Egyenlet, egyenletrendszer grafikus megoldása. Az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ másodfokú függvény ábrázolása és tulajdonságai. Függvénytranszformációk áttekintése az $x \mapsto a(x-u)^2 + v$ alak segítségével	2. blokk és a 3. és 4. blokk alábbi részei: A grafikus megoldási módszer (3.blokk) Teljes függvényvizsgálat feladat (4. blokk)

11. táblázat: A feldolgozott középszintű ismeretek Maple munkalapon található helye Forrás: Saját szerkesztés

A táblázatban minden középszinten a témakörbe tartozó ismeretanyag szerepel, és közel mindegyik ismeretanyaghoz társítható, a dokumentumban szereplő rész. A fentiek alapján a H1-es hipotézis középszinten igazoltnak tekinthető.

7.1.2. Emelt szint

Az általam feldolgozott témakör emelt szinten három részből tevődik össze. A 2. Számelmélet, algebra fő témakörön belül a 2.2. Algebrai kifejezések használata és a 2.4. Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer altémakörökből és a 3. Függvények fő témakörön belül a 3.1. Algebrai függvények altémakörből. A kiemelt témakörökre a kerettanterv összesen 95 (25+45+25) óra feldolgozási időt javasol. Az órakeretbe a következőtáblázatokban foglaltaknak kell beleférnie. (Oktatási Hivatal 2012b: 7-8,9-12)

Ismeretek összefüggések, algebrai kifejezések használata témakörben
Algebrai kifejezések. Egész kifejezések, polinomok, törtkifejezések. Racionális és nem racionális kifejezések.
Nevezetes azonosságok: $(a \pm b)^2$, $(a+b+c)^2$, a^2-b^2, a^3-b^3, a^3+b^3. Utalás $(a + b)^n$ kiszámolásra Pascal-háromszög segítségével. Geometria: azonosságok „rajzos” igazolása.
Azonos átalakítások. Polinomok összeadása, kivonása. Polinomok szorzása, hatványozása. Szorzattá alakítás különböző módszerei. Polinom osztása polinommal. Algebrai törtekkel végzett műveletek. Algebrai törtek egyszerűsítése, összeadása, kivonása, szorzása, osztása. Kifejezések legnagyobb közös osztója, legkisebb közös többszöröse. Matematikatörténet: algebra – Al-Hvarizmi.
Számtani, mértani, négyzetes és harmonikus közép, a köztük lévő egyenlőtlenség. Algebrai bizonyítás két változóra. Szélsőérték-feladatok közepek segítségével. Kapcsolat: másodfokú függvények vizsgálata.

12. táblázat: A kerettanterv által meghatározott ismeretek algebrai kifejezések használata témakörben emelt szinten 9-12. évfolyamon
Forrás: Oktatási Hivatal 2012b: 9-13
https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/3.3.2.1_matemat_emelt_9-12_a.doc alapján saját szerkesztés

Ismeretek összefüggések, egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer témakörben
Elsőfokú egyenletek. Alaphalmaz, megoldáshalmaz, igazsághalmaz. Ekvivalens átalakítások. Elsőfokú paraméteres egyenletek. Egyenletek grafikus megoldása.
Elsőfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok. A korábban tanult módszerek elmélyítése. További módszerek szöveges feladatok megoldására. Példák egyenlet nélküli megoldási módszerekre.
Törtes egyenletek, egyenlőtlenségek. Értelmezési tartomány vizsgálata, hamis gyök. Mikor lesz egy tört értéke nulla, pozitív, negatív?
Abszolút értéket tartalmazó egyenletek. (Több abszolút értéket tartalmazók is.) Abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenségek. Algebrai és grafikus megoldás.
Elsőfokú egyenletrendszerek. Egyenletrendszerek grafikus megoldása. Behelyettesítő módszer. Egyenlő együtthatók módszere. Új ismeretlen bevezetése. Elsőfokú paraméteres egyenletrendszerek. Egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok. A kapott eredmény értelmezése, valóságtartalmának vizsgálata.
Elsőfokú egyenlőtlenségek. Egyenlőtlenségek grafikus megoldása. Egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszer.
Másodfokú függvények vizsgálata. Teljes négyzetté alakítás használata. Szélsőérték-feladatok, másodfokú függvény vizsgálatával. Kapcsolat: számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával történő megoldás. Optimális megoldásokra törekvés. Másodfokú egyenletek. Grafikus megoldás. Teljes négyzetté kiegészítés. Egyenletmegoldás szorzattá alakítással. A másodfokú egyenlet megoldóképlete. A megoldóképlet készségszintű alkalmazása. Számológép használata. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa. Diszkusszió. Önellenőrzés. Gyöktényezős alak, Viéte-formulák.

Másodfokúra visszavezethető egyenletek. Új ismeretlen bevezetése. Racionális gyökök keresése. Viete-formulák. Néhány további módszer az egyenlet speciális tulajdonságainak felhasználásával. *Matematikatörténet*: magasabb fokú egyenletek megoldhatósága. Cardano, Galois, Abel.
Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok. Modellalkotás, megoldási módszerek.
Másodfokú egyenlőtlenségek. A megoldás megadása másodfokú függvény vizsgálatával. Többféle megoldási módszer összevetése.
Másodfokú egyenletrendszer. Másodfokú egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok. Emlékezés korábban megismert módszerekre, alkalmazás az adott környezetben.
Gyökös egyenletek. Ekvivalens és nem ekvivalens egyenlet-megoldási lépések. Hamisgyök, gyökvesztés. Önellenőrzés képességének fejlesztése.
Paraméteres másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek. Esetszétválasztások, divergens gondolkodás fejlesztése.

13. táblázat: A kerettanterv által meghatározott ismeretek egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer témakörben emelt szinten 9-12. évfolyamon Forrás: Oktatási Hivatal 2012b: 9-13 https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/3.3.2.1_matemat_emelt_9-12_a.doc alapján saját szerkesztés

Ismeretek összefüggések, függvények témakörben
Függvény fogalma. Rendszerező ismétlés. Értelmezési tartomány, értékkészlet. A függvény megadási módjai, ábrázolása, jellemzése: zérushely, monotonitás, szélsőérték. Új fogalmak: periodicitás, paritás, korlátosság. (Pontos definíciók. Néhány esetben a tagadás megfogalmazása is: pl. egy függvény nem páros, ha…) Kapcsolat: logika elemei – bármely, van olyan, negáció. Hétköznapi állítások tagadása. Pontos fogalmazás.
Lineáris függvények. Rendszerező ismétlés. Lineáris kapcsolatok felfedezése a hétköznapokban.
Másodfokú függvények. Teljes négyzetté kiegészítés. Hatványfüggvények. Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények. Abszolútérték-függvény. (Több abszolút értéket tartalmazók is.) Egészrész-, törtrész-, előjelfüggvény, Dirichlet-féle függvény. Függvények inverze. Gyökfüggvények.
Fordított arányosság, elsőfokú törtfüggvény.
Függvénytranszformációk. A tanult függvények többlépéses transzformációi. A transzformációk rendszerezése, transzformációs sorrend. $\lvert f(x)\rvert$ ábrázolása. Adott tulajdonságú függvények konstruálása.
Rekurzív sorozatok. A Fibonacci-sorozat. Kapcsolat: aranymetszés. *Matematikatörténet*: Fibonacci.

14. táblázat: A kerettanterv által meghatározott ismeretek függvények témakörben emelt szinten 9-12. évfolyamon Forrás: Oktatási Hivatal 2012b: 9-13 https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/3.3.2.1_matemat_emelt_9-12_a.doc alapján saját szerkesztés

A következő táblázatban megmutatom, hogy a fenti táblázatokban szaggatottan aláhúzott ismeretek, hol találhatóak meg az általam készített munkalapon, illetve, ha kiegészítésre szorul a munkalap.

Ismeret	**Helye az általam készített tananyagban**
$(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$.	1. blokk Kéttagú kifejezésekhez kapcsolódó azonosságok Kéttagú összeg négyzete Kéttagú különbség négyzete Két tag összegének és különbségének szorzata
Szorzattá alakítás különböző módszerei. Algebrai törtek egyszerűsítése, összeadása, kivonása, szorzása, osztása.	1. blokk A szorzattá alakítás módszerei Kiemelés Kiemelés csoportosítással Egyenlet megoldása szorzattá alakítással 4. blokk Feladatmegoldás a gyöktényezős alak segítségével Törtes egyenletek megoldása

Törtes egyenletek, egyenlőtlenségek. Értelmezési tartomány vizsgálata, hamis gyök.	4. blokk
Másodfokú függvények vizsgálata. Teljes négyzetté alakítás használata. Másodfokú függvény vizsgálatával. Másodfokú egyenletek. Grafikus megoldás. Teljes négyzetté kiegészítés. Egyenletmegoldás szorzattá alakítással. A másodfokú egyenlet megoldóképlete. A megoldóképlet készségszintű alkalmazása. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa. Gyöktényezős alak, Viete-formulák. Másodfokúra visszavezethető egyenletek. Új ismeretlen bevezetése. Racionális gyökök keresése. Viete-formulák. Néhány további módszer az egyenlet speciális tulajdonságainak felhasználásával.	1. blokk A szorzattá alakítás módszerei Kiemelés Kiemelés csoportosítással Egyenlet megoldása szorzattá alakítással 2. és 3. blokk
Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok.	4. blokk Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével
Másodfokú egyenletrendszer. Másodfokú egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok.	4. blokk Egyszerű másodfokú egyenletrendszerek megoldása
Ekvivalens és nem ekvivalens egyenlet-megoldási lépések. Hamisgyök, gyökvesztés.	4. blokk $\sqrt{a \cdot x + b} = c \cdot x + d$ típusú egyenletek megoldása
Paraméteres másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek. Esetszétválasztások, divergens gondolkodás fejlesztése.	3. blokk Másodfokú egyenletre visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek Paraméteres másodfokú egyenletek (Emelt szint)
Másodfokú függvények. Teljes négyzetté kiegészítés.	2. blokk

15. táblázat: A feldolgozott emelt szintű ismeretek Maple munkalapon található helye
Forrás: Saját szerkesztés

A táblázatban minden emelt szinten a témakörbe tartozó ismeretanyag szerepel, viszont előfordulnak olyan részek, melyek a munkalapon nem, vagy csak egyszerűsített formában vannak jelen. A fentiek alapján a H1-es hipotézis emelt szinten csak részlegesen tekinthető igazoltnak.

7.2. H2 a: A középszintű érettségire készülő diákok számára megfelelő mélységben tartalmazza a másodfokú egyenletekhez kapcsolódó témakörök anyagát

A hipotézist az érettségi oldaláról vizsgálom. A tananyag ellentmondás-mentességének vizsgálatakor már felhasználtam az érettségi követelmények táblázatát.[6] Ez alapján már igazoltnak tekinthető a feltevés, viszont szeretném ezt korábbi érettségi feladatsorok áttekintő vizsgálatával is alátámasztani. Ehhez a 2017. évi május-júniusi vizsgaidőszaktól kezdődően vizsgálom a feladatlapokat egészen a legutolsó rendelkezésre álló feladatsorral (2021. évi) bezáróan. (Oktatási Hivatal é.n.)[7] A következő táblázat azt mutatja be, hogy az egyes

[6] Lásd a dolgozat 4. és 5. fejezete
[7] 2024-től új érettségi követelmények lépnek hatályba, ezért a legutolsó ilyen feladatlap 2023 évi lehetne

középszintű érettségi feladatlapokban 2017 és 2021 között, mely feladatok kapcsolódtak a vizsgált témakörhöz és ezekért mennyi pontot lehetett kapni. Itt is feltüntetem, hogy az adott feladat megoldásához, mely részek kapcsolódnak a munkalapon.[8]

Év	Időszak	Ssz.	Fr.	Psz.	I. h.
17	május	13	a, b, c	2+5+5	Kéttagú összeg négyzete A másodfokú függvény általános hozzárendelési szabálya A másodfokú függvény jellemzése A másodfokú egyenlet megoldóképlete
		16	c	7	Egyszerű másodfokú egyenletrendszerek megoldása
	október	9	-	3	A másodfokú függvény képe A másodfokú függvény jellemzése Teljes függvényvizsgálat feladat
		13	a	5	Kéttagú különbség négyzete A másodfokú egyenlet megoldóképlete
18	május	9	-	2	A másodfokú függvény képe A másodfokú függvény jellemzése Teljes függvényvizsgálat feladat
		13	b	5	$\sqrt{a \cdot x + b} = c \cdot x + d$ típusú egyenletek megoldása
	október	15	a, c	6+4	Törtes egyenletek megoldása A másodfokú függvény jellemzése
		17	a	6	Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével
19	május	1	-	2	A másodfokú egyenlet megoldóképlete
		14	a, b, c, d	2+2+3+7	A másodfokú egyenlet megoldóképlete A másodfokú függvény képe A másodfokú függvény jellemzése A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja(elmélet) Feladatmegoldás a gyöktényezős alak segítségével Teljes függvényvizsgálat feladat
	október	6	-	2	A másodfokú függvény jellemzése
		13	c	4	A másodfokú egyenlet megoldóképlete A másodfokú függvény képe
		15	b	7	A másodfokú egyenlet megoldóképlete Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével
20	május	6	-	3	A másodfokú függvény képe A másodfokú függvény jellemzése
		13	a	6	Kéttagú összeg négyzete Két tag összegének és különbségének szorzata A teljes négyzetté alakítás módszere
	október	8	-	2+1	A másodfokú egyenlet megoldóképlete Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével
		10	a, b	2+2	A másodfokú függvény jellemzése
		15	a, b	4+5	A másodfokú függvény általános hozzárendelési szabálya A másodfokú egyenlet megoldóképlete Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével
21	május	13	a	6	Kéttagú összeg négyzete A másodfokú egyenlet megoldóképlete

16. táblázat: A középszintű érettségi feladatokban megkövetelt, a témakörbe tartozó ismeretek és azok helye a munkalapon
Forrás: Saját szerkesztés

[8] Rövidítések: SSz: Sorszám, Fr: Feladatrész, Psz: Pontszám, I. h.: Ismeret helye

Mivel a táblázat az összes a témakörrel kapcsolatos feladatot tartalmazza a vizsgált időszakból és mindegyik sorhoz hozzá tudjuk társítani a munkalap egy vagy több blokkját, így ez a feltevés igazoltnak tekinthető.

7.3. H2 b: Az emelt szintű érettségire készülőknek segítséget nyújt bizonyos feladatok megoldásához a témakörön belül

Hasonlóan a H2a) hipotézishez itt is elkészítettem azt a táblázatot, amely az emelt szintű érettségi feladatokhoz, hozzárendeli a munkalap egyes részeit. (Oktatási Hivatal é.n.)[9]

Év	Időszak	Ssz.	Fr.	Psz.	I. h.
17	május	1	a, b	6+6	Csak kijelölve*
		2	a	**7**	Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével, de bonyolultabb a példa
		4	a, c	**5**+4	A másodfokú egyenlet megoldóképlete A másodfokú függvény jellemzése -
		9	a	**8**	Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével
	október	3	b	**8**	Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével, de bonyolultabb a példa
		8	b	11	-
18	május	2	b	**5**	A másodfokú függvény általános hozzárendelési szabálya Törtes egyenletek megoldása
		6	c	**9**	A másodfokú egyenlet megoldóképlete Paraméteres másodfokú egyenletek Egyszerű másodfokú egyenletrendszerek megoldása
		8	c	7	-
		9	b	10	-
	október	4	c	7	-
		9	a	**5**	A másodfokú egyenlet megoldóképlete -
19	május	3	b	7	$\sqrt{a \cdot x + b} = c \cdot x + d$ típusú egyenletek megoldása→ ennek a bonyolultabb változata: $\sqrt{a \cdot x + b} = \sqrt{c \cdot x + d}$
		5	b	9	-
		6	a	**6**	Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével, de bonyolultabb a példa
		8	a, c	**3+7**	Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével Paraméteres másodfokú egyenletek
	október	4	b	**9**	A másodfokú egyenlet megoldóképlete Paraméteres másodfokú egyenletek
		9	a	**9**	Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével, de bonyolultabb a példa
20	május	4	a, b, c	**3+4+6**	A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja(elmélet) Viéte-formulák (Emelt szint) Gyökök összegére fennálló összefüggés Gyökök szorzatára fennálló összefüggés Paraméteres másodfokú egyenletek (Emelt szint)
	október	1	a, b, c	**4+3+6**	A másodfokú egyenlet megoldóképlete A másodfokú függvény képe

[9] Rövidítések: SSz: Sorszám, Fr: Feladatrész, Psz: Pontszám, I. h.: Ismeret helye
* Lásd a dolgozat 6.4-es alfejezetét

					A másodfokú függvény jellemzése
		3	a	**6**	Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével
		5	a	7	-
21	május	1	a	5	$\sqrt{a \cdot x + b} = c \cdot x + d$ típusú egyenletek megoldása
		4	a, b	**2**+10	A másodfokú függvény általános hozzárendelési szabálya -
		5	a	**6**	A másodfokú egyenlet megoldóképlete Paraméteres másodfokú egyenletek
		7	b	**8**	A másodfokú függvény általános hozzárendelési szabálya
		8	b	9	-

17. táblázat: Az emelt szintű érettségi feladatokban megkövetelt, a témakörbe tartozó ismeretek és azok helye a munkalapon
Forrás: Saját szerkesztés

A táblázatban látható, hogy néhány helyre nem tudtunk az „Ismeret helye” oszlopban feltüntetni semmit. Ilyenkor a cella kihúzásra került. Amennyiben több részfeladat található egy feladaton belül, akkor előfordulhat olyan, hogy néhány ismeret megjelölését követően a cella ki van húzva. Ekkor a későbbi feladatrész olyan ismereteket is ellenőriz, melyekről nem esik szó a munkalapon. Előfordul olyan, hogy szöveges példa vezet másodfokú egyenletre, de bonyolultabb a példa abból adódóan, hogy a másodfokú rész felírása előtt néhány műveletet el kell végezni. Ezek szintén jelölésre kerültek a táblázatban. A H2b) feltevés elméleti igazolásához nézzük meg, hogy a feladatokért kapható pontszámok hány százalékát lehet a munkalapon szereplő ismeretek birtokában megszerezni. A számítás során amennyiben ki van húzva az ismeret helye, akkor a kihúzott rész feltüntetett pontszámát figyelmen kívül hagyjuk, így megállapítható, hogy megközelítőleg 57 százalékban fedi le a munkalap ismeretanyaga az emelt szintű érettségi másodfokú egyenletek és függvények témakörével foglalkozó részét, a 2017 és 2021 közötti feladatlapok alapján. Mivel ez a százalékos érték pozitív, és meghaladja az 50 százalékot, ezért a H2b) hipotézist elfogadhatjuk.

8. Összegzés

Dolgozatomban egy alternatívát kívántam bemutatni arra, hogy a vírushelyzet okozta megváltozott körülmények között milyen lehetséges módon támogathatjuk a középfokú oktatásban résztvevő diákokat és tanáraikat digitális eszközökkel a matematika oktatás területén. Ehhez először áttekintést adtam a jelenleg használatos oktatási módszerekről, melyek relevánsak a tantárgy oktatása során. Ezek után bemutattam néhány olyan matematikai algoritmust, mely alapján logikailag helyesen tudjuk felépíteni az összefüggő anyagrészeket, majd ismertettem a jelenleg hatályos érettségi követelmények témához tartozó részeit. Az elméleti áttekintést követően megmutattam, hogy a harmadik fejezetben ismertetett algoritmusok megfelelően „lefutnak” a feldolgozni kívánt tananyagból készített mátrixon, ami

bizonyítja, hogy sikerült logikailag helyesen felépítenem a témakört. Ezután bemutattam, hogy a munkalapon tárgyalt anyagrészek hol találhatóak meg az egyik legnépszerűbb matematika tankönyvsorozatban. Ezt követően részletesen bemutattam az elkészült tananyagot. A munkalap bemutatását követően megfogalmaztam négy hipotézist, melyek szerint az általam készített digitális tananyag használható a témakör oktatására és jó kiindulási alapot nyújt további témakörök kidolgozásához. A megfogalmazott hipotézisek többségét igazolni tudtam elméleti oldalról. Bízom benne, hogy a dolgozatban leírtakkal sikerült egy, a jövőben használható oktatási eszközt és módot kidolgoznom és bemutatnom, amivel sok emberben új gondolatokat ébresztettem a digitális oktatással kapcsolatban.

Irodalomjegyzék

Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János & Dr. Vincze István 2011. (a) *Sokszínű matematika 9. (tizenegyedik kiadás).* Mozaik Kiadó. Szeged.

Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János & Dr. Vincze István 2011. (b) *Sokszínű matematika 10. (tizedik kiadás)*. Mozaik Kiadó. Szeged.

Lada László (Szerk.) 2009. *Oktatási Módszerek.*
https://ofi.oh.gov.hu/tudastar/problemak-kerdesek/oktatasi-modszerek (2021. április 15.)

Magyarország Kormánya 2012. *Nemzeti Alaptanterv.* Magyar Közlöny 66 Budapest: 10653-10654,10659,10688-10701,10704-10706.
https://ofi.oh.gov.hu/sites/default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf (2021. május 10.)

Dr. Martinkó József 2010. *Az agrár mérnöktanár mester képzés általános szakmódszertana: A magyarázat, az elbeszélés - 5. fejezet - A monologikus módszerek.*
http://janus.ttk.pte.hu/tamop/kaposvari_anyag/martinko_jozsef/ch05s02.html (2021. május 1.)

Dr. Nádasi András é.n. *Oktatáselmélet és technológia.*
http://okt.ektf.hu/data/nadasia/file/tananyag/oktataselmelet/1_tananyag9.html (2021. április 15.)

Dr. Nyéki Lajos 2014. *A módosított K algoritmus.*
http://rs1.sze.hu/~nyeki/progs/InfMod/A_modositott_K_algoritmus.pdf (2021. április 15.)

Dr. Nyéki Lajos 2015. *A K algoritmus.*
http://rs1.sze.hu/~nyeki/progs/InfMod/A_K_algoritmus.pdf (2021. április 15.)

Dr. Nyéki Lajos 2016. *Szakmódszertan informatika szakos mérnöktanárok számára - 2. modul 1. lecke.*
http://rs1.szif.hu/~nyeki/InfMod/Infmodszertan/ (2021. május 5.)

Dr. Nyéki Lajos 2020. A tananyag-elrendezés gráfelméleti alapjai.
http://rs1.szif.hu/~nyeki/progs/InfMod1L/A tananyag-elrendezes grafelmeleti alapjai 2020.pdf (2020. 09. 28.)
http://rs1.sze.hu/~nyeki/progs/InfMod1/A tananyag-elrendezes grafelmeleti alapjai.pdf (2021. április 15.)

Oktatási Hivatal (Szerk.) 2012. (a.) *3. MELLÉKLET Kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára: Matematika alap óraszám.* 9-13.
https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/3.2.04_matemat_9-12.doc (2021. május 10.)

Oktatási Hivatal (Szerk.) 2012. (b.) *3. MELLÉKLET Kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára: Matematika emelt óraszám A változat.* 7-8,9-12.

https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/3.3.2.1_matemat_emelt_9-12_a.doc (2021. május 10.)

Oktatási Hivatal 2017. *Közismereti érettségi vizsgatárgyak 2023. október-novemberi vizsgaidőszakig érvényes vizsgakövetelményei-Matematika.* 5-8. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/vizsgakovetelmenyek2017/matematika_vk.pdf (2021. április 15.)

Oktatási Hivatal é.n. *Központi írásbeli feladatsorok, javítási-értékelési útmutatók.* https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok (2021. május 11.)

Oktatási Hivatal é.n. *Matematika-10. osztály| Sulinet Tudásbázis-Hiányos másodfokú egyenletek.* https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-10-osztaly/masodfoku-egyenletek/hianyos-masodfoku-egyenletek (2021. április 15.)

Dr. Tigyiné Dr. Pusztafalvi Henriett 2015. *Oktatási módszerek és oktatásszervezési módok. In: Dr. Betlehem József (Szerk.), Egészségügyi szakmódszertan.* BME Tanárképző Központ Budapest; Pécs 33 - 48. https://www.etk.pte.hu/protected/OktatasiAnyagok/Egeszsegugyi_szakmodszertan.pdf (2021. április 15.)

https://dtk.tankonyvtar.hu/xmlui/handle/123456789/3922 (2021. április 15.)

Mellékletek

1. számú melléklet

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1		1				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

11

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1						1/2					1	1	1
3							1									1	1	1
4						1			1							1	1	1
5						1	1						1			1	1	1
6								1								1	1	1
7																1	1	1
8										1/2		1/2				1	1	1
9													1			1	1	1
10												1/2				1	1	1
11													1			1	1	1
12													1			1	1	1
13														1		1	1	1
14															1	1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

12

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2								1				1				1	1	1
3									1							1	1	1
4								1		1						1	1	1
5								1	1					1/2		1	1	1
6										1						1	1	1
7																1	1	1
8											1/2		1/2			1	1	1
9														1/2		1	1	1
10													1/2			1	1	1
11														1/2		1	1	1
12														1/2		1	1	1
13															1	1	1	1
14																1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

13

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1							1				1	1	1
3							1/2									1	1	1
4						1/2		1/2								1	1	1
5						1/2	1/2						1/2			1	1	1
6								1/2								1	1	1
7																1	1	1
8											1		1			1	1	1
9														1/2		1	1	1
10													1			1	1	1
11														1/2		1	1	1
12														1/2		1	1	1
13															1/2	1	1	1
14																1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

14

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1	1
2					1							1				1	1	1
3							1/2									1	1	1
4						1/2		1/2								1	1	1
5						1/2	1/2						1/2			1	1	1
6								1/2								1	1	1
7																1	1	1
8											1		1			1	1	1
9														1/2		1	1	1
10													1			1	1	1
11														1/2		1	1	1
12														1/2		1	1	1
13															1/2	1	1	1
14																1	1	1
15																1	1	1
16																		
17																		1
18																		

15

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1/2	1	1
2					1						1					1/2	1	1
3							1									1/2	1	1
4						1			1							1/2	1	1
5						1	1						1			1/2	1	1
6								1								1/2	1	1
7																1/2	1	1
8										1		1				1/2	1	1
9													1			1/2	1	1
10												1				1/2	1	1
11													1			1/2	1	1
12													1			1/2	1	1
13														1		1/2	1	1
14															1/2	1/2	1	1
15																1/2	1	1
16																		
17																		1
18																		

16

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1/2														1/2	1	1
2					1							1				1/2	1	1
3							1/2									1/2	1	1
4						1/2		1/2								1/2	1	1
5						1/2	1/2						1/2			1/2	1	1
6								1/2								1/2	1	1
7																1/2	1	1
8										1		1				1/2	1	1
9													1/2			1/2	1	1
10												1				1/2	1	1
11													1/2			1/2	1	1
12													1/2			1/2	1	1
13														1/2		1/2	1	1
14															1	1/2	1	1
15																1/2	1	1
16																		
17																		1
18																		

17

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1														1	1/2	1/2
2					1						1					1	1/2	1/2
3							1									1	1/2	1/2
4						1			1							1	1/2	1/2
5						1	1						1			1	1/2	1/2
6								1								1	1/2	1/2
7																1	1/2	1/2
8										1		1				1	1/2	1/2
9													1			1	1/2	1/2
10												1				1	1/2	1/2
11													1			1	1/2	1/2
12													1			1	1/2	1/2
13														1		1	1/2	1/2
14															1	1	1/2	1/2
15																1	1/2	1/2
16																		
17																		1/2
18																		

18

2. számú melléklet

Tartalom

Bevezetés

Egyszerű másodfokú egyenletek megoldása
Az egyszerű másodfokú egyenletek megoldása előtt, felidézünk néhány definíciót azonosságot és módszert, melyekkel az ilyen típusú egyenletek megoldhatóak.

A blokk tartalma

Kéttagú kifejezésekhez kapcsolódó azonosságok
Kéttagú összeg négyzete
Kéttagú különbség négyzete
Két tag összegének és különbségének szorzata

A szorzattá alakítás módszerei
Kiemelés
Kiemelés csoportosítással

Egyenlet megoldása szorzattá alakítással
Online gyakorlófeladatok

Másodfokú függvény
Ebben a blokkban megismerkedünk a másodfokú függvénnyel

A blokk tartalma
A másodfokú függvény általános hozzárendelési szabálya
A másodfokú függvény képe
A parabola fogalma

A teljes négyzetté alakítás módeszere
Definíció

A másodfokú függvény jellemzése
A függvény
Értelmezési tartomány
Értékkészlet
Zérushely
Monotonitás
Minimum hely/Maximum hely/Minimum érték/Maximum érték
Paritás
Online gyakorlófeladatok

Másodfokú egyenlet
Ebben a blokkban a másodfokú egyenletekkel kapcsolatos ismereteket tekintjük át

A blokk tartalma
Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakja
A grafikus megoldási módszer

A másodfokú egyenlet megoldóképlete

Levezetés
Hiányos másodfokú egyenletek gyökei

Diszkriminánsa
Diszkriminánsa fogalma
A diszkriminánsa és a másodfokú egyenlet megoldásainak száma közötti összefüggés

A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja(elmélet)

Viéte-formulák(Emelt szint)
Gyökök összegére fennálló összefüggés
Gyökök szorzatára fennálló összefüggés
Másodfokú egyenletre visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek
Paraméteres másodfokú egyenletek(Emelt szint)
Online gyakorlófeladatok

Másodfokú egyenletek alkalmazása feladatok megoldása során
Ebben a blokkban az eddig megszerzett elméleti tudásunkat alkalmazzuk feladatok megoldása során.

A blokk tartalma
Feladatmegoldás a gyöktényezős alak segítségével
Törtes egyenletek megoldása
Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével
Egyszerű másodfokú egyenletrendszerek megoldása
$\sqrt{(a\cdot x+b)}=c\cdot x+d$ ***típusú egyenletek megoldása***
Teljes függvényvizsgálat feladat

Másodfokú egyenletet is tartalmazó "kevert" egyenletek megoldása(Emelt szint)
Logaritmust tartalmazó
Szögfüggvényt tartalmazó
Exponenciális függvényeket tartalmazó

Másodfokú egyenletek és komplex számok(Felsőfokú tananyag)
Ebben a blokkban kicsit előre tekintünk, megnézzük, hogy lehetséges-e megoldani mégis negatív diszkriminánsú másodfokú egyenleteket,majd kitekintünk a valós számhalmazon túlra

A blokk tartalma
Komplex számok bevezetése
Komplex számok ábrázolása

Utószó

Felhasznált irodalom

Bevezetés

Kedves 10. osztályos Diák!
Ennek a munkalapnak a segítségével szeretném megkönnyíteni számodra a másodfokú egyenlet témaköréhez kapcsolódó ismeretek elsajátítását. Remélem hasznodra válik az anyag és örömmel emlékszel vissza majd a témakörre.
Természetesen ha Neked nincs otthon Maple programod, akkor az ellenőrzéseket manuálisan kell elvégezned.
Vágjunk is bele.

Egyszerű másodfokú egyenletek megoldása

Kéttagú kifejezésekhez kapcsolódó azonosságok

Idézzünk fel három azonosságot mely a a kéttagú másodfokú kifejezésekhez kapcsolódnak

Kéttagú összeg négyzete

Definíció szerint egy kéttagú összeg négyzete megegyezik az első tag négyzetének, az első és a második tag kétszeres szorzatának és a második tag négyzetének összegével.

Legyen a az egyik tag b pedig a másik. Ekkor a kéttagú összeg négyzete a következő alakban írható fel:

két_tagú_összeg_négyzete_1 := $(a+b)^2$

$$(a+b)^2 \qquad (3.1.1.1)$$

Kifejtve a négyzetet és a szorzást elvégezve kapjuk hogy ez megegyezik a következő kifejezéssel:

két_tagú_összeg_négyzete_2 := *expand*$((a+b)\cdot(a+b))$

$$a^2+2\,a\,b+b^2 \qquad (3.1.1.2)$$

Ha ellenőrizni szeretnénk egy füzetben végezzük el az expandon belüli szorzást.

Példák az azonosság gyakorlásához

két_tagú_összeg_négyzete_példa_1_1 := $(2\cdot x+3)^2$

$$(2\,x+3)^2 \qquad (3.1.1.1.1)$$

A definíciót felhasználva ez egyenlő lesz a következővel:

két_tagú_összeg_négyzete_példa_1_2 := $(2\cdot x)^2+2\cdot 2\cdot x\cdot 3+3^2$

$$4\,x^2+12\,x+9 \qquad (3.1.1.1.2)$$

Ellenőrizzük le hogy a két kifejezés megegyezik-e. Ehhez fejtsük ki az első kifejezést az **expand** paranccsal:

két_tagú_összeg_négyzete_péda_1_3 := *expand*(*két_tagú_összeg_négyzete_példa_1_1*)

$$4\,x^2+12\,x+9 \qquad (3.1.1.1.3)$$

Kéttagú különbség négyzete

Definíció szerint egy kéttagú különbség négyzete megegyezik azzal az összeggel melyet úgy kapunk hogy az első és a második négyzetének összegéből levonjuk az első és a második tag kétszeres szorzatát.

Legyen a az egyik tag b pedig a másik. Ekkor a kéttagú különbség négyzete a következő alakban írható fel:

két_tagú_különbség_négyzete_1 := $(a-b)^2$

$$(a-b)^2 \qquad (3.1.2.1)$$

Kifejtve a négyzetet és a szorzást elvégezve kapjuk hogy ez megegyezik a következő kifejezéssel:

két_tagú_különbség_négyzete_2 := *expand*$((a-b)\cdot(a-b))$

$$a^2-2\,a\,b+b^2 \qquad (3.1.2.2)$$

Ha ellenőrizni szeretnénk egy füzetben végezzük el az expandon belüli szorzást.

Példák az azonosság gyakorlásához

két_tagú_különbség_négyzete_példa_1_1 := $(2\cdot x-3)^2$

$$(2\,x-3)^2 \qquad (3.1.2.1.1)$$

A definíciót felhasználva ez egyenlő lesz a következővel:

két_tagú_különbség_négyzete_példa_1_2 := $(2\cdot x)^2-2\cdot 2\cdot x\cdot 3+3^2$

$$4\,x^2-12\,x+9 \qquad (3.1.2.1.2)$$

Ellenőrizzük le hogy a két kifejezés megegyezik-e. Ehhez fejtsük ki az előzőekhez hasonlóan a kifejezést:

két_tagú_különbség_négyzete_péda_1_3
:= *expand*(*két_tagú_különbség_négyzete_példa_1_1*)

$$4\,x^2-12\,x+9 \qquad (3.1.2.1.3)$$

Két tag összegének és különbségének szorzata

Definíció szerint egy kéttagú összeg és ugyanazon tagok különbségének szorzata megegyezik az első és a második tag négyzetének különbségével.

Legyen a az egyik tag b pedig a másik. Ekkor a két tag összegének és különbségének szorzata a következő alakban írható fel:

két_tag_összegének_és_különbségének_szorzata_1 := $(a+b)\cdot(a-b)$

$$(a+b)\,(a-b) \qquad (3.1.3.1)$$

A szorzást elvégezve kapjuk hogy ez megegyezik a következő kifejezéssel:

két_tag_összegének_és_különbségének_szorzata_2 := *simplify*$((a+b)\cdot(a-b))$

$$a^2-b^2 \qquad (3.1.3.2)$$

Ha ellenőrizni szeretnénk egy füzetben végezzük el a szorzást és látni fogjuk hogy az $a*b$-s tagok kiesnek.

Példák az azonosság gyakorlásához

két_tag_összegének_és_különbségének_szorzata_példa_1_1 := $(2\cdot x-3)\cdot(2\cdot x+3)$

$$(2\,x-3)\,(2\,x+3) \qquad (3.1.3.1.1)$$

A többtagú algebrai kifejezések szorzására vonatkozó definíciót felhasználva ez egyenlő lesz a következővel:

két_tag_összegének_és_különbségének_szorzata_példa_1_2 := $(2\cdot x)^2+2\cdot x\cdot 3-2\cdot x\cdot 3-3\cdot 3$

$$4\,x^2-9 \qquad (3.1.3.1.2)$$

Ellenőrizzük le hogy a két kifejezés megegyezik-e. Ehhez fejtsük ki az előzőekhez hasonlóan a kifejezést:

két_tag_összegének_és_különbségének_szorzata_példa_1_3 := *expand*(*két_tag_összegének_és_különbségének_szorzata_példa_1_1*)

$$4\,x^2-9 \qquad (3.1.3.1.3)$$

A szorzattá alakítás módszerei

Kiemelés

Definíció szerint ha egy összeg minden tagja osztható egy bizonyos algebrai kifejezéssel, akkor a kiemelés segítségével szorzattá alakíthatjuk, ami később egyszerűbbé teszi a kifejezés kezelését.

Nézzünk meg egy példát erre:

Egyszerű_kiemelés_1 := $12\,a^4-20\cdot a^3+8\cdot a^2$

$$12\,a^4-20\,a^3+8\,a^2 \qquad (3.2.1.1)$$

Próbáljunk meg ebből a kifejezésből kiemelni amit csak lehet. Ehhez keressük meg a legkisebb hatványát. Azért a legkisebbet, mert azzal a magasabb fokszámú tagok is biztosan oszthatóak lesznek. Ezután keressük meg az együtthatók legnagyobb közös osztóját.

a_legkisebb_hatványa := a^2

$$a^2 \qquad (3.2.1.2)$$

első_együttható := 12

$$12 \qquad (3.2.1.3)$$

második_együttható := -20

$$-20 \qquad (3.2.1.4)$$

harmadik_együttható := 8

$$8 \qquad (3.2.1.5)$$

Bontsuk fel az együtthatókat szorzótényezőkre (ezek prímtényezők). Ezt egész számok esetén az **ifactor** segítségével tehetjük meg.

első_együttható_szorzótényezői := *ifactor*(*első_együttható*)

$$(2)^2\,(3) \qquad (3.2.1.6)$$

második_együttható_szorzótényezői := *ifactor*(*második_együttható*)

$$-(2)^2\,(5) \qquad (3.2.1.7)$$

harmadik_együttható_szorzótényezői := *ifactor*(*harmadik_együttható*)

$$(2)^3 \qquad (3.2.1.8)$$

Látható hogy az együtthatók mindegyike osztható 2^2-nel azaz

$$4 \qquad (3.2.1.9)$$

-gyel

Ebből azt kaptuk hogy a kifejezésből $4\cdot a^2$

$$4\,a^2 \qquad (3.2.1.10)$$

kiemelhető

Most már mindent tudunk ahhoz, hogy felírjuk a szorzattá bontott alakot.

szorzattá_bontott_alak := $(4\cdot a^2)\cdot(3\cdot a^2-5\cdot a+2)$

$$4\,a^2\,(3\,a^2-5\,a+2) \qquad (3.2.1.11)$$

Ezt tudjuk ellenőrizni manuális zárójel felbontással is, de a szoftver adta lehetőségeket kihasználva az expand paranccsal is megtehetjük ugyan ezt.

szorzattá_alakítás_ellenőrzés := *expand*(*szorzattá_bontott_alak*)

$$12\,a^4-20\,a^3+8\,a^2 \qquad (3.2.1.12)$$

Mivel az a kifejezés amiből kiindultunk megegyezik a szorzat kifejtésével ebből következik, hogy a kiemelést helyesen végeztük el

Kiemelés csoportosítással

Az előző részben láttuk, hogy milyen módon tudunk kiemelésssel szorzattá bontani egyszerű kifejezéseket. Vannak azonban olyan esetek mikor a kiemelés bonyolultabb feladat.

Nézzük meg a következő példát:

kiemelés_csoportosítással_1 := $12\cdot a\cdot x+12\cdot b\cdot y+48\cdot a\cdot y+3\cdot b\cdot x$

$$12\,a\,x+48\,a\,y+3\,b\,x+12\,b\,y \qquad (3.2.2.1)$$

Az egész kifejezésből kiemelhetünk 3-at

kiemelés_csoportosítással_2 := $3\cdot(4\cdot a\cdot x+4\cdot b\cdot y+16\cdot a\cdot y+b\cdot x)$

$$12\,a\,x+48\,a\,y+3\,b\,x+12\,b\,y \qquad (3.2.2.2)$$

Látjuk, hogy a Maple rögtön felbontotta ismételten a zárójelet és ugyanazt az eredményt írja ki amiből eredetileg kiindultunk.

Következő lépésként a zárójelen belül ki tudunk emelni a $4\cdot a\cdot x+16\cdot a\cdot y$

$$4\,a\,x+16\,a\,y \qquad (3.2.2.3)$$

-ból $4\cdot a$

$$4\,a \qquad (3.2.2.4)$$

-t

A lépés végrehajtását követően ezt kapjuk:

kiemelés_csoportosítással_3_1 := $4\cdot a\cdot(x+4\cdot y)$

$$4\,a\,(x+4\,y) \qquad (3.2.2.5)$$

Harmadik lépésként ki tudunk emelni a b-s tagokból $b\cdot x+4\cdot b\cdot y$

$$b\,x+4\,b\,y \qquad (3.2.2.6)$$

b

$$b \qquad (3.2.2.7)$$

-t

Végezzük el a kiemelést:

kiemelés_csoportosítással_3_2 := $b\cdot(x+4\,y)$

$$b\,(x+4\,y) \qquad (3.2.2.8)$$

A rész kieméléseket írjuk vissza az eredeti kifejezések helyére:

kiemelés_csoportosítással_3_3 := $3\cdot((4\cdot a)\cdot(x+4\cdot y)+(b)\cdot(x+4\cdot y))$

$$12\,a\,(x+4\,y)+3\,b\,(x+4\,y) \qquad (3.2.2.9)$$

Jól látszik hogy a keletkezett összegből ismét ki tudunk emelni ezúttal $x+4\cdot y$

$$x+4\,y \qquad (3.2.2.10)$$

-t

Végezzük el ezt a lépést is

kiemelés_csoportosítással_4 := $3\cdot((x+4\cdot y)\cdot(4\,a+b))$

$$3\,(x+4\,y)\,(4\,a+b) \qquad (3.2.2.11)$$

Hogy tényleg helyesen végeztük-e el a szozattá alakítást azt le tudjuk ellenőrizni úgy hogy az eredeti kifejezésre meghívjuk a **factor** parancsot.

kiemelés_csoportosítással_5 := *factor*(*kiemelés_csoportosítással_1*)

$$3\,(x+4\,y)\,(4\,a+b) \qquad (3.2.2.12)$$

Az átalakításunk helyességét igazolja hogy ez a második szorzat megegyezik a lépéseink eredményével.

Egyenlet megoldás szorzattá alakítással

Most hogy feleleventettük az azonosságokat és a szorzattá alakítás módszereit, megpróbálhatunk ezek segítségével egyenleteket megoldani. Ehhez egy egyszerűbb és egy bonyolultabb példát is megnézünk.

1. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

szorzattá_bontott_egyenlet_1_1 := $(x+2)\cdot(2\cdot x+2)\cdot(3\cdot x-6)\cdot(4\cdot x-3)=0$

$$(x+2)\,(2\,x+2)\,(3\,x-6)\,(4\,x-3)=0 \qquad (3.3.1.1)$$

Belátható hogy ha bármelyik szorzótényező értéke 0 akkor az bal oldal egésze 0 és az egyenlőség teljesül. Másképpen ezt úgy is megfogalmazhatjuk hogy *egy szorzat akkor és csak akkor 0 ha valamelyik tényezője 0*

Ezek alapján négy egyenletet kell megoldanunk:

szorzattá_bontott_egyenlet_1_első_tényező_nulla := $x+2=0$

$$x+2=0 \qquad (3.3.1.2)$$

szorzattá_bontott_egyenlet_1_második_tényező_nulla := $2\cdot x+2=0$

$$2\,x+2=0 \qquad (3.3.1.3)$$

szorzattá_bontott_egyenlet_1_harmadik_tényező_nulla := $3\cdot x-6=0$

$$3\,x-6=0 \qquad (3.3.1.4)$$

szorzattá_bontott_egyenlet_1_negyedik_tényező_nulla := $4\cdot x-3=0$

$$4\,x-3=0 \qquad (3.3.1.5)$$

A mérleg elv alapján azt kapnánk hogy a gyökök:

szorzattá_bontott_egyenlet_1_x1 := *solve*(*szorzattá_bontott_egyenlet_1_első_tényező_nulla*, x)

$$-2 \qquad (3.3.1.6)$$

szorzattá_bontott_egyenlet_1_x2 := *solve*(*szorzattá_bontott_egyenlet_1_második_tényező_nulla*, x)

$$-1 \qquad (3.3.1.7)$$

szorzattá_bontott_egyenlet_1_x3 := *solve*(*szorzattá_bontott_egyenlet_1_harmadik_tényező_nulla*, x)

$$2 \qquad (3.3.1.8)$$

szorzattá_bontott_egyenlet_1_x4 := *solve*(*szorzattá_bontott_egyenlet_1_negyedik_tényező_nulla*, x)

$$\frac{3}{4} \qquad (3.3.1.9)$$

Fentebb mi a **solve** paranccsal megoldva az egyenleteket könnyedén meghatároztuk a gyökőket, ugyanakkor a Maple hiányában mérlegelvet kell alkalmaznunk.

A Maple az eredeti egyenletet is meg tudja egy lépésben oldani, ennek segítségével könnyedén ellenőrizhetjük, hogy jól dolgoztunk-e.

szorzattá_bontott_egyenlet_1_2 := *solve*(*szorzattá_bontott_egyenlet_1_1*, x)

$$-2,\ -1,\ 2,\ \frac{3}{4} \qquad (3.3.1.10)$$

Látható, hogy jól dolgoztunk hiszen mindkét módszer ugyan azokat a megoldásokat adta

2. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

szorzattá_bontott_egyenlet_2_1 := $(2\cdot x+7)\cdot(x+2)-(x-5)\cdot(x+2)=(2\cdot x+3)\cdot(x+2)$

$$(2\,x+7)\,(x+2)-(x-5)\,(x+2)=(2\,x+3)\,(x+2) \qquad (3.3.2.1)$$

Ennek az egyenletnek sokféleképpen meg lehet találni a megoldását, most csak egyféle utat mutatok be.

Emeljünk ki a bal oldalon $x+2$

$$x+2 \qquad (3.3.2.2)$$

-t Azt kapjuk hogy:

szorzattá_bontott_egyenlet_2_2 := $(x+2)\cdot((2\cdot x+7)-(x-5))=(x+2)\cdot(2\cdot x+3)$

$$(x+2)\,(x+12)=(2\,x+3)\,(x+2) \qquad (3.3.2.3)$$

A Maple már el is végezte nekünk a bal oldalon a zárójelfelbontását és az összevonást.

Vigyünk át mindent a bal oldalra. Azt kapjuk hogy:
szorzattá_bontott_egyenlet_2_2 := $(x+2)\cdot((2\cdot x+7)-(x-5))-((x+2)\cdot(2\cdot x+3))=0$

$$(x+2)\,(x+12)-(2\,x+3)\,(x+2)=0 \quad \textbf{(3.3.2.4)}$$

A bal oldalon ismét ki tudunk emelni $x+2$

$$x+2 \quad \textbf{(3.3.2.5)}$$

-t Végezzük el a kiemelést:
szorzattá_bontott_egyenlet_2_3 := $(x+2)\cdot(x+12-(2\cdot x+3))=0$

$$(x+2)\,(-x+9)=0 \quad \textbf{(3.3.2.6)}$$

Egy szorzat akkor és csak akkor 0 ha valamelyik tényezője 0 Ezért felírható az alábbi két egyenlet
szorzattá_bontott_egyenlet_2_első_tényező_nulla := $x+2=0$

$$x+2=0 \quad \textbf{(3.3.2.7)}$$

szorzattá_bontott_egyenlet_2_második_tényező_nulla := $-x+9=0$

$$-x+9=0 \quad \textbf{(3.3.2.8)}$$

Oldjuk meg ezt a két egyenletet.
szorzattá_bontott_egyenlet_2_x1 := *solve*(*szorzattá_bontott_egyenlet_2_első_tényező_nulla*, *x*)

$$-2 \quad \textbf{(3.3.2.9)}$$

szorzattá_bontott_egyenlet_2_x2
:= *solve*(*szorzattá_bontott_egyenlet_2_második_tényező_nulla*, *x*)

$$9 \quad \textbf{(3.3.2.10)}$$

Ismét a solve parancs segítségével meggyőződhetünk arról hogy a -2 és a 9 valóban megoldásai az eredeti egyenletnek.
szorzattá_bontott_egyenlet_2_4 := *solve*(*szorzattá_bontott_egyenlet_2_1*, *x*)

$$-2, 9 \quad \textbf{(3.3.2.11)}$$

Mind a két megoldás megegyezik az általunk kiszámolttal, tehát helyesen dolgoztunk.

Online gyakorlófeladatok

Az alábbi linken a témához tartozó gyakorlófeladatot találsz interaktív formában:
Egyszerű másodfokú egyenletek

Másodfokú függvény

A másodfokú függvény általános hozzárendelési szabálya(Definíció)

A másodfokú függvényt az alábbi képlettel adhatjuk meg általánosan.
$f := (a, b, c) \rightarrow a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

$$(a, b, c) \rightarrow a\,x^2 + b\,x + c \quad \textbf{(4.1.1)}$$

ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}$

$$a \in real \setminus \{0\} \textbf{ and } b \in real \textbf{ and } c \in real \quad \textbf{(4.1.2)}$$

Ebből egy konkrét másodfokú függvényt úgy írhatunk fel, hogy az *a*, *b*, *c*

$$a, b, c \quad \textbf{(4.1.3)}$$

együtthatók helyére konkrét számokat helyettesítünk.

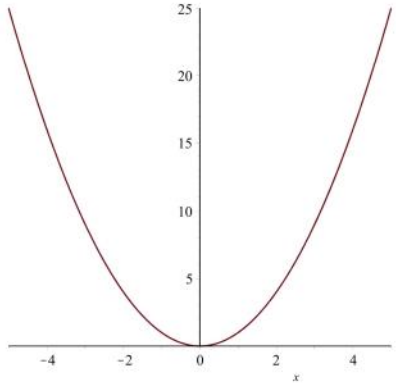
$f(1, -4, 3)$

$$x^2 - 4\,x + 3 \quad \textbf{(4.1.4)}$$

Az a fenti példában *a* értéke *1*, *b* értéke *-4*, *c* értéke *3*

A másodfokú függvény képe

A másodfokú függvény képe **parabola**
Ábrázoljuk a legegyszerűbb hozzárendelésű másodfokú függvényt a grafikon alakjának megjegyzéséhez a **plot** parancs segítségével.
$plot(x^2, x=-5..5)$

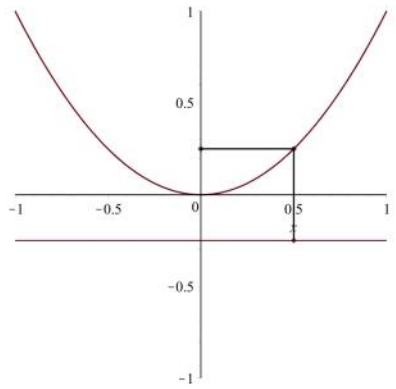


A parabola fogalma

Definíció: Azon pontok halmazát, amelyek egy adott **F** *fókuszponttól* és egy adott **e** *vezéregyenestől* **azonos** távolságra vannak parabolának nevezzük.
A következő ábra a definíciót szemlélteti:
with(*plottools*)

[*annulus, arc, arrow, circle, cone, cuboid, curve, cutin, cutout, cylinder, disk, dodecahedron, ellipse, ellipticArc, exportplot, extrude, getdata, hemisphere, hexahedron, homothety, hyperbola, icosahedron, importplot, line, octahedron, parallelepiped, piesliece, point, polygon, prism, project, rectangle, reflect, rotate, scale, sector, semitorus, sphere, stellate, tetrahedron, torus, transform, translate*] **(4.3.1)**
with(*plots*)
[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, shadebetween, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*] **(4.3.2)**

$display\left(pointplot\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right), plot\left(x^2, x=-1..1\right), plot\left(-\frac{1}{4}, x=-1..1, x=-1..1\right), pointplot([0.5, 0.25]), pointplot([0.5, -0.25]), line\left(\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]\right), line\left(\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]\right)\right)$



Az ábráról látható, hogy az x^2

$$x^2 \quad \textbf{(4.3.3)}$$

függvény $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$$

pontja a $\left[0, \frac{1}{4}\right]$

$$\left[0, \frac{1}{4}\right] \quad \textbf{(4.3.5)}$$

ponttól és az $y=-\frac{1}{4}$

$$y=-\frac{1}{4} \quad \textbf{(4.3.6)}$$

egyenestől azonos távolságra van. Ez a parabola összes többi pontjára igaz.

A teljes négyzetté alakítás módszere

Ennek a fejezetnek az első pontjában megbeszéltük hogy hogyan néz ki a másodfokú függvény általános alakja.
Ott láthattuk, hogy egy összegképletről van szó általánosan.
Ahhoz, hogy az ilyen alakú függvényeket ábrázolni tudjuk, át kell alakítani ezeket teljes négyzetté.

Definíció

A másodfokú függvény teljes négyzet alakját a következő módon írhatjuk fel általánosan:

a_másodfokú_kifejezések_teljes_négyzet_alakja := $a\cdot(x-'u')^2+'v'$

$$a\,(x-u)^2+v \qquad (4.4.1.1)$$

ahol $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \wedge 'u' \in \mathbb{R}\ \wedge 'v' \in \mathbb{R}$

$$a \in real\setminus\{0\}\ \textbf{and}\ u \in real\ \textbf{and}\ v \in real \qquad (4.4.1.2)$$

Egy kifejezés teljes négyzet alakra hozásához néhány lépést végre kell hajtanunk. A lépések végén

a_másodfokú_kifejezések_általános_alakja := $f(a, b, c, x)$

$$a\,x^2+b\,x+c \qquad (4.4.1)$$

-ból előállítjuk

a_másodfokú_kifejezések_teljes_négyzet_alakja := $a\cdot(x-'u')^2+'v'$

$$a\,(x-u)^2+v \qquad (4.4.2)$$

alakot ahol $a \neq 0$

$$a \neq 0 \qquad (4.4.3)$$

Az átalakítás lépései

a_másodfokú_kifejezések_általános_alakja

$$a\,x^2+b\,x+c \qquad (4.4.2.1)$$

teljes_négyzet_1 := $a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}\right)$

$$a\left(x^2+\frac{b\,x}{a}+\frac{c}{a}\right) \qquad (4.4.2.2)$$

teljes_négyzet_2 := $a\cdot\left(\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4\cdot a^2}+\frac{c}{a}\right)\right)$

$$a\left(\left(x+\frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\right)^2-\frac{1}{4}\,\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}\right) \qquad (4.4.2.3)$$

itt $u := \frac{-b}{2\,a}$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{b}{a} \qquad (4.4.2.4)$$

és

$v := -\left(\frac{b^2}{4\cdot a^2}+\frac{c}{a}\right)$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a} \qquad (4.4.2.5)$$

Ekkor az ábrázolandó parabola csúcsa a
$P := C(u, v)$

$$C\left(-\frac{1}{2}\,\frac{b}{a}, -\frac{1}{4}\,\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}\right) \qquad (4.4.4)$$

pontba kerül.

A másodfokú függvény jellemzése

A függvény

A másodfokú fügvények alap függvényének hozzárendelési szabálya a következő:

az_alap_függvény := $x \to x^2$

$$x \to x^2 \qquad (4.5.1.1)$$

Ennek az ún. alap fügvénynek a transzfolmáltja az összes teljes négyzetté alakított másodfokú kifejezés

Értelmezési tartomány

ÉT := $\mathbb{R}$

$$real \qquad (4.5.2.1)$$

Értékkészlet

ÉK := [0, infinity)

$$RealRange(0, \infty) \qquad (4.5.3.1)$$

Zérushely

Ezek azok a helyek ahol y=0 másképpen ahol a függvény grafikonja metszi az x tengelyt.

az_alap_függvény(x)

$$x^2 \qquad (4.5.4.1)$$

nél ez az x=0 hely.
Egy későbbi fejezetben meg fogunk határozni egy olyan módszert/képletet amivel minden másodfokú függvénynek meg tudjuk mondani a zérushelye(i)t még a függvény ábrázolása előtt.

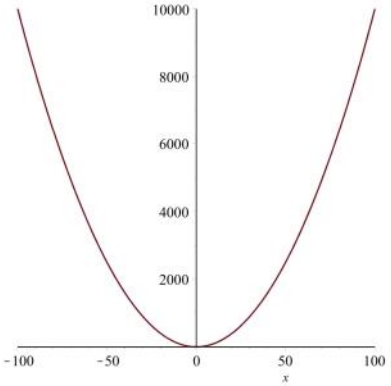
Monotonitás/A függvény menete

Ennek szemléltetésére rajzoljuk ki egy szélesebb intervallumon a függvényt például:

ábrázolási_intervallum := [-100, 100];

$$[-100, 100] \qquad (4.5.5.1)$$

plot(x^2, x=-100..100);



Látható hogy szigorúan monoton csökkenő (szig.mon.csökk) a

szig_mon_csökk := (-infinity, 0]

$$RealRange(-\infty, 0) \qquad (4.5.5.2)$$

és szigorúan monoton növő (szig.mon.növ) a

szig_mon_növ := (0, infinity)

$$0, \infty \qquad (4.5.5.3)$$

intervallumon.

Minimum hely/Maximum hely/Minimum érték/Maximum érték

Minimum hely: *minimumának_helye* := $x=0$

$$x=0 \qquad (4.5.6.1)$$

Minimum érték: *minimumának_értéke* := $y=0$

$$y=0 \qquad (4.5.6.2)$$

Maximum helye és maximum értéke nincs.

Paritás

Egy függvény páros ha f(-x)=f(x)
és páratlan ha f(-x)=-f(x)

Paritás meghatározása

evalb(*az_alap_függvény*(-x) = *az_alap_függvény*(x))

$$true \qquad (4.5.7.1.1)$$

evalb(*az_alap_függvény*(-x) = -*az_alap_függvény*(x))

$$false \qquad (4.5.7.1.2)$$

--> a függvény páros

Online gyakorlófeladatok

Az alábbi linken a témához tartozó gyakorlófeladatot találsz interaktív formában:
Másodfokú függvény

Másodfokú egyenlet

Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakja

Az egyismeretlenes másodfokú egyenletet az alábbi formában adhatjuk meg általánosan.

a_másodfokú_egyenlet_általános_alakja := *a_másodfokú_kifejezések_általános_alakja* = 0

$$a\,x^2+b\,x+c=0 \qquad (5.1.1)$$

Abból ahogyan felírtam az általános egyenletet látható, hogy ha egy másodfokú kifejezést egyenlővé teszünk egy másodfokúnál nem nagyobb fokszámú kifejezéssel akkor másodfokú egyenletet kapunk. Ha az egyenlet egyik oldalán 0

$$0 \qquad (5.1.2)$$

áll akkor azt az egyenlet 0-ra rendezett (redukált) alakot kapunk. Az általános másodfokú egyenlet 0-ra rendezett alakját láthatjuk fent.

A grafikus megoldási módszer

Talán még emlékszünk arra hogy oldottunk már meg egyszerű másodfokú egyenleteket a szorzattá alakítás módszerével. Most szeretnék bemutatni egy másik lehetséges módszert ami szintén alkalmas egyenletek megoldására.

Nézzünk meg egy példát:

egyenlet_megoldása_grafikusan_1 := $x^2-6\cdot x+8=0$

$$x^2-6\,x+8=0 \qquad (5.2.1)$$

Ezt az egyenletet szeretnénk grafikusan megoldani. Ehhez alakítsuk teljes négyzetté a bal oldalt.
Az egyenlet $x^2-6\cdot x$

$$x^2 - 6x \qquad \textbf{(5.2.2)}$$

részéből látjuk miután a 6*x-et elosztottuk 2-vel és x-szel hogy a négyzetes kifejezésen belül $x-3$

$$x - 3 \qquad \textbf{(5.2.3)}$$

lesz. Most a második tag négyzetét le kell vonnunk hiszen ha emlékszünk a *két_tagú_összeg_négyzete_2*

$$a^2 + 2\,a\,b + b^2 \qquad \textbf{(5.2.4)}$$

kifejezésben b négyzete is szerepel viszont nekünk hiányzik a 3 (ez esetben *b*-vel jelölt tag) négyzete.

Tehát a teljes négyzet így nézne ki:

egyenlet_megoldása_grafikusan_2_1 $:= (x-3)^2 - 9 = 0$

$$(x-3)^2 - 9 = 0 \qquad \textbf{(5.2.5)}$$

Mivel azonban a bal oldalon szerepel még egy 8-as pozitív előjellel ezért azt hozzá kell adni. A végső teljes négyzet:

egyenlet_megoldása_grafikusan_2_2 $:= (x-3)^2 - 9 + 8 = 0$

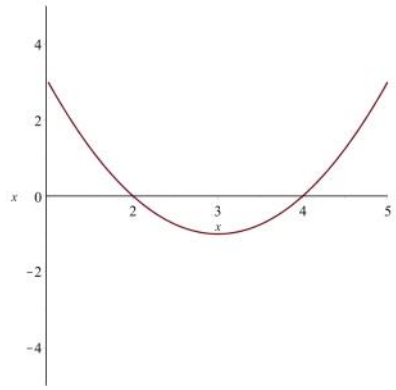
$$(x-3)^2 - 1 = 0 \qquad \textbf{(5.2.6)}$$

Ábrázoljuk ezt a függvényt. Az alap parabolát nyújtani most nem kell csak az origóját elcsúsztatni 3-mal balra és 1-gyel lefelé az $P2 := O(3, -1)$

$$O(3, -1) \qquad \textbf{(5.2.7)}$$

pontba.

$plot\left((x-3)^2 - 1, x = 1..5, x = -5..5\right)$



Grafikus megoldás esetén azt tudjuk mondani, hogy az egyenletek megoldásai azok az értékek ahol a függvény grafikonja metszi az x tengelyt. Az ábráról leolvasható, hogy az egyenlet megoldása

egyenlet_megoldása_grafikusan_x1 $:= 2$

$$2 \qquad \textbf{(5.2.8)}$$

és

egyenlet_megoldása_grafikusan_x2 $:= 4$

$$4 \qquad \textbf{(5.2.9)}$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete

Ebben a részben az általános másodfokú egyenlet megoldóképletét fogjuk algebrai úton lezezetni.

Levezetés

Írjuk fel a másodfokú egyenlet általános alakját.

másodfokú_egyenlet_levezetése_1 $:= a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.1)}$$

ahol $a \neq 0$.

Ha $a = 0$

$$a = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.2)}$$

Állna fent akkor a négyzetes tag eltünne és az egyenlet nem lenne másodfokú. Ennek bővebb tárgyalására a levezetés után térünk ki.

Mivel $a \neq 0$

$$a \neq 0 \qquad \textbf{(5.3.1.3)}$$

így az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk vele. Az egyenlet a következőképpen alakul:

másodfokú_egyenlet_levezetése_2 $:= \dfrac{\textit{másodfokú_egyenlet_levezetése_1}}{a}$

$$\frac{a\,x^2 + b\,x + c}{a} = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.4)}$$

A Maple nem végezte el az egyszerűsítést. Végezzük ezt el manuálisan. Egy összeget úgy is eloszthatunk egy konstansal hogy minden tényezőjét elosztjuk vele. Így kapjuk a következő egyenletet

másodfokú_egyenlet_levezetése_3 $:= x^2 + \dfrac{b \cdot x}{a} + \dfrac{c}{a} = 0$

$$x^2 + \frac{b\,x}{a} + \frac{c}{a} = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.5)}$$

Alakítsunk ki teljes négyzetet a baloldalon. Az

másodfokú_egyenlet_levezetése_4_1 $:= x^2 + \dfrac{b \cdot x}{a}$

$$x^2 + \frac{b\,x}{a} \qquad \textbf{(5.3.1.6)}$$

-ból a szokásos módon

másodfokú_egyenlet_levezetése_4_2 $:= \left(x + \dfrac{b}{2 \cdot a}\right)^2 - \left(\dfrac{b^2}{4 \cdot a^2}\right)$

$$\left(x + \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{4}\,\frac{b^2}{a^2} \qquad \textbf{(5.3.1.7)}$$

teljes négyzetet tudjuk kialakítani. Azonban nem szabad megfeledkeznünk aról sem hogy az *a*-val történő osztás során kialakult egy $\dfrac{c}{a}$

$$\frac{c}{a} \qquad \textbf{(5.3.1.8)}$$

-s tag is. Ezt még hozzá kell adni az előbb kialakított teljes négyzethez. Tehát

másodfokú_egyenlet_levezetése_4_3 $:= \left(x + \dfrac{b}{2 \cdot a}\right)^2 - \left(\dfrac{b^2}{4 \cdot a^2}\right) + \dfrac{c}{a} = 0$

$$\left(x + \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{4}\,\frac{b^2}{a^2} + \frac{c}{a} = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.9)}$$

A négyzetes kifejezéstől jobbra lévő kifejezéseket vigyük át a másik oldalra. A rendezés után így néz ki az egyenletünk:

másodfokú_egyenlet_levezetése_5 $:= \left(x + \dfrac{b}{2 \cdot a}\right)^2 = \dfrac{b^2}{4 \cdot a^2} - \dfrac{c}{a}$

$$\left(x + \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{4}\,\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} \qquad \textbf{(5.3.1.10)}$$

Hozzunk közös nevezőre a jobb oldalon. Azt kapjuk hogy

másodfokú_egyenlet_levezetése_6 $:= \left(x + \dfrac{b}{2 \cdot a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2}$

$$\left(x + \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{4}\,\frac{-4\,a\,c + b^2}{a^2} \qquad \textbf{(5.3.1.11)}$$

Vonjunk gyököt mind a két oldalból. Figyeljünk arra hogy egy kifejezés négyzetének a gyöke megegyezik a kifejezés abszolutértékével Ehhez két eddig nem használt parancsot kell alkalmaznunk. Az **sqrt** parancs gyököt von a kifejezésből, a gyökvonás definíciója szerint. Ha ezt nem tudja megtenni mert változók vagy paraméterek vannak a gyök alatti kifejezésben, akkor alapértelmezetten csak kiírja a kifejezést gyökjel alatt. Bizonyos paraméterek mellett elérhető, hogy a szép kifejezésekből gyököt vonjon. Mivel az sqrt definíció szerint működik amiben vannak kikötések, ezért itt figyelnünk kell az abszolútérték kiírására, **hiszen egy kifejezés négyzetének gyöke mindig a kifejezés abszolútértéke.** Az abszolútérték kiírásához az **abs** parancsot használjuk A gyökvonás utáni egyenlet

másodfokú_egyenlet_levezetése_7 $:= \mathrm{abs}\left(\mathrm{sqrt}\left(\left(x + \dfrac{b}{2 \cdot a}\right)^2, \textit{symbolic}\right)\right)$

$= \mathrm{sqrt}\left(\dfrac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2}, \textit{symbolic}\right)$

$$\left|x + \frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} \qquad \textbf{(5.3.1.12)}$$

Az abszolútérték miatt ezt az egyenletet kétfelé kell bonranunk. Az első esetben az alábbi egyenletet kapjuk:

másodfokú_egyenlet_levezetése_8_1 $:= x + \dfrac{b}{2\,a} = \mathrm{sqrt}\left(\dfrac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2}, \textit{symbolic}\right)$

$$x + \frac{1}{2}\,\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} \qquad \textbf{(5.3.1.13)}$$

Ebből x1-re kapjuk hogy

másodfokú_egyenlet_levezetése_x1 $:= -\dfrac{b}{2 \cdot a} + \dfrac{\mathrm{sqrt}\left(b^2 - 4 \cdot a \cdot c\right)}{2 \cdot a}$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{b}{a} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} \qquad \textbf{(5.3.1.14)}$$

Ezt egyszerűbbé tenni a **symplify** paranccsal tudjuk:

másodfokú_egyenlet_levezetése_x1_egyszerűbben
$:= \textit{simplify}(\textit{másodfokú_egyenlet_levezetése_x1})$

$$\frac{1}{2}\,\frac{-b + \sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} \qquad \textbf{(5.3.1.15)}$$

A második esetben egy ilyen egyenletet tudunk felírni:

másodfokú_egyenlet_levezetése_8_2 $:= -x - \dfrac{b}{2 \cdot a} = \mathrm{sqrt}\left(\dfrac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2}, \textit{symbolic}\right)$

$$-x - \frac{1}{2}\,\frac{b}{a} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} \qquad \textbf{(5.3.1.16)}$$

Ebből x2-re kapjuk hogy

$$\textit{másodfokú_egyenlet_levezetése_x2} := \left(\frac{b}{2\cdot a} + \frac{\mathrm{sqrt}(b^2 - 4\cdot a\cdot c)}{2\cdot a}\right)\cdot(-1)$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{b}{a} - \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} \qquad \textbf{(5.3.1.17)}$$

Egyszerűbben:

$$\textit{másodfokú_egyenlet_levezetése_x2_egyszerűbben} := \textit{simplify}(\textit{másodfokú_egyenlet_levezetése_x2})$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{b + \sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} \qquad \textbf{(5.3.1.18)}$$

Ha a második egyenlet számlájójának minden tagját megszorozzuk -1-gyel a törtvonal előtti - jel miatt akkor a két megoldást össze tudjuk vonni.

$$\frac{\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}\right)}{2\cdot a}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{-b \pm \sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} \qquad \textbf{(5.3.1.19)}$$

Levezettük tehát az általános másodfokú egyenletnek a megoldóképletét. Arról hogy a lépéseink helyesek voltak meggyőződhetünk a maple rendszer segítségével is.
Ellenőrzés:

$$\textit{másodfokú_egyenlet_maple} := \textit{solve}(a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0, x, \textit{'parametric'})$$

$$\begin{cases} \%SolveTools_{Parametric}(\{b\,x + c\}, \{x\}, \{b, c\}) & a = 0 \\ \left[\left[x = \frac{1}{2}\,\frac{-b + \sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a}\right], \left[x = -\frac{1}{2}\,\frac{b + \sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a}\right]\right] & a \neq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(5.3.1.20)}$$

Mint az látható a másodfokú eset megoldásai megegyeznek az általunk levezetettel.

Hiányos másodfokú egyenletek gyökei

Ha valamelyik tényező együtthatója 0 az általános egyenletben akkor vagy hiányos másodfokú vagy elsőfokú egyenletről beszélünk.

Ha a=0

Ebben az esetben elsőfokú egyenletet kapunk ami felírható a következő alakban:

$$\textit{ha_a_egyenlő_nulla_1} := b\cdot x + c = 0$$

$$b\,x + c = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.1.1.1)}$$

Ennek megoldása:

$$\textit{solve}(\textit{ha_a_egyenlő_nulla_1}, x)$$

$$-\frac{c}{b} \qquad \textbf{(5.3.1.1.1.2)}$$

Ha b=0

Ebben az esetben ha c is 0 akkor az egyenletet bármilyen valós szám kielégíti. Ezt másképpen **azonosságnak** is hívjuk.
Ha c nem 0 akkor **ellentmondásra** jutottunk

Ha b≠0 és c=0

Ebben az esetben szintén elsőfokú egyenletet kapun melynek alakja:

$$\textit{ha_a_egyenlő_nulla_és_c_egyenlő_0} := b\cdot x = 0$$

$$b\,x = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.1.1.2.1)}$$

Erről ránézésre megállapíthatjuk, hogy az egyenlőség csak $x = 0$

$$x = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.1.1.2.2)}$$

esetén teljesül

Ha a≠0

Ha b=0 és c=0

Ebben az esetben az egyenletünk így néz ki:

$$\textit{ha_b_és_c_egyenlő_0} := a\cdot x^2 = 0$$

$$a\,x^2 = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.1.1)}$$

Itt is megállapítható, hogy az egyenlőség csak $x = 0$

$$x = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.1.2)}$$

esetén teljesül

Ha b≠0 és c=0

Ebben az esetben az egyenlet így néz ki:

$$\textit{ha_a_nem_nulla_b_nem_0_c_0} := a\cdot x^2 + b\cdot x = 0$$

$$a\,x^2 + b\,x = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.2.1)}$$

Itt ki tudunk emelni a bal oldalon x-et Azt kapjuk hogy

$$\textit{kiemelésssel_megoldva_1} := \textit{factor}(\textit{ha_a_nem_nulla_b_nem_0_c_0})$$

$$x\,(a\,x + b) = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.2.2)}$$

Ebből $\textit{kiemelésssel_megoldva_x1} := 0$

$$0 \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.2.3)}$$

és $\textit{kiemelésssel_megoldva_x2} := \textit{solve}(a\cdot x + b = 0, x)$

$$-\frac{b}{a} \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.2.4)}$$

Ha b=0 és c≠0

Ha c előjele negatív

Ebben az esetben a következő egyenletet tudjuk felírni:

$$\textit{ha_a_nem_nulla_b_0_c_negatív_1} := a\cdot x^2 - c = 0$$

$$a\,x^2 - c = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.3.1.1)}$$

Ebben az esetben c hozzáadása a-val való osztás és gyökvonás után kapjuk hogy

$$\textit{ha_a_nem_nulla_b_0_c_negatív_2} := \mathrm{abs}(x) = \mathrm{sqrt}\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$|x| = \sqrt{\frac{c}{a}} \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.3.1.2)}$$

Ebből esetszétválasztással **valós** gyököket kapunk

$$\textit{valós_x1} := \mathrm{sqrt}\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$\sqrt{\frac{c}{a}} \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.3.1.3)}$$

$$\textit{valós_x2} := -\mathrm{sqrt}\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$-\sqrt{\frac{c}{a}} \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.3.1.4)}$$

Ha c előjele pozitív

Ebben az esetben a következő egyenletet tudjuk felírni:

$$\textit{ha_a_nem_nulla_b_0_c_pozitív_1} := a\cdot x^2 + c = 0$$

$$a\,x^2 + c = 0 \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.3.2.1)}$$

Ebben az esetben c kivonása a-val való osztás és gyökvonás után kapjuk hogy

$$\textit{ha_a_nem_nulla_b_0_c_pozitív_2} := \mathrm{abs}(x) = \mathrm{sqrt}\left(-\frac{c}{a}\right)$$

$$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.3.2.2)}$$

Ebből esetszétválasztással **komplex** gyököket kapunk

$$\textit{komplex_x1} := \mathrm{sqrt}\left(-\frac{c}{a}\right)$$

$$\sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.3.2.3)}$$

$$\textit{komplex_x2} := -\mathrm{sqrt}\left(-\frac{c}{a}\right)$$

$$-\sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad \textbf{(5.3.1.1.2.3.2.4)}$$

Érintőlegesen erről az utolsó fejezetben lesz szó.

Diszkrimináns

Diszkrimináns fogalma

A gyök alatti kifejezést az egyenlet diszkriminánsának nevezzük:

$$\textit{diszkrimináns} := b^2 - 4\cdot a\cdot c$$

$$-4\,a\,c + b^2 \qquad \textbf{(5.3.2.1.1)}$$

Jele: D

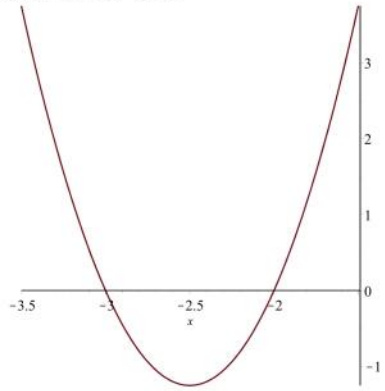
A diszkrimináns és a másodfokú egyenlet megoldásainak száma közötti összefüggés

Ha a *diszkrimináns* > 0;

$$0 < -4\,a\,c + b^2 \qquad \textbf{(5.3.2.2.1)}$$

akkor az egyenletnek **két különböző valós** megoldása van
Ekkor ilyen parabolát kapunk:

$$\textit{plot}(5\cdot x^2 + 25\cdot x + 30, x = -3.5 .. -1.5)$$

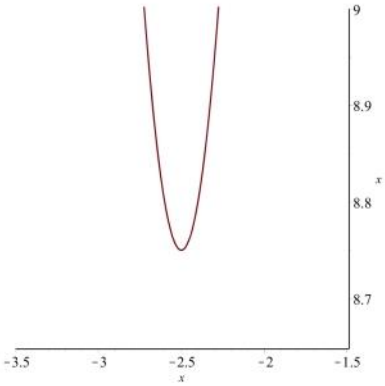


Ha a *diszkrimináns* < 0;

$$-4\,a\,c + b^2 < 0 \qquad \textbf{(5.3.2.2.2)}$$

akkor az egyenletnek **nincs valós** megoldása. (Ekkor az egyenletnek komplex gyökei lesznek. Ha bővebben érdekelnek a komplex számok akkor az utolsó blokkban olvashatsz ezekről a számokról.)
Ekkor ilyen parabolát kapunk:

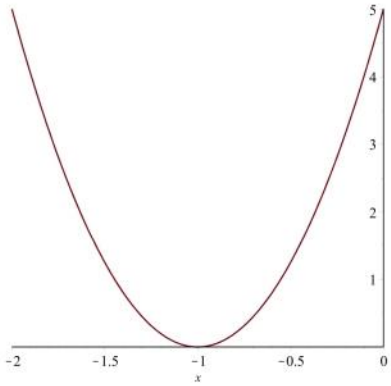
$$\textit{plot}(5\cdot x^2 + 25\cdot x + 40, x = -3.5 .. -1.5, x = 8.65 .. 9)$$



Ha a *diszkriminánsa* = 0;

$$-4\,a\,c + b^2 = 0 \qquad \textbf{(5.3.2.2.3)}$$

akkor az egyenletnek **két azonos/egybeeső valós** megoldása van.
Ekkor ilyen parabolát kapunk:
$plot(5\cdot x^2 + 10\cdot x + 5, x = -2..0)$



A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja

Az előbbiekben megmutattuk, hogy milyen formulával tudjuk meghatározni egy másodfokú egyenlet megoldásait ha ismerjük azok együtthatóit

Próbáljuk meg megoldani most ennek az ismeretnek a segítségével az

$gyöktényezős_alak_1 := 5\cdot(x+3)\cdot(x+2) = 0$

$$5\,(x+3)\,(x+2) = 0 \qquad \textbf{(5.4.1)}$$

egyenletet:

Bontsuk fel a zárójelet:
$gyöktényezős_alak_2 := expand(gyöktényezős_alak_1)$

$$5\,x^2 + 25\,x + 30 = 0 \qquad \textbf{(5.4.2)}$$

Oldjuk meg az egyenletet:
$solve(gyöktényezős_alak_2, x)$

$$-2,\ -3 \qquad \textbf{(5.4.3)}$$

$gyöktényezős_alak_2_x1 := -2$

$$-2 \qquad \textbf{(5.4.4)}$$

$gyöktényezős_alak_2_x2 := -3$

$$-3 \qquad \textbf{(5.4.5)}$$

Vizsgáljuk meg a *gyöktényezős_alak_1*

$$5\,(x+3)\,(x+2) = 0 \qquad \textbf{(5.4.6)}$$

egyenletet.

A gyökök ismeretében egy-egy - előjel beiktatásával a következő formában is írható:
$gyöktényezős_alak_3 := 5\cdot(x-(-3))\cdot(x-(-2)) = 0$

$$5\,(x+3)\,(x+2) = 0 \qquad \textbf{(5.4.7)}$$

Látható hogy a rendszer azonnal átalakította az egyenletet a korábban bevitt alakra. Ez alapján elmondható hogy az:
a_másodfokú_egyenlet_általános_alakja

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad \textbf{(5.4.8)}$$

egyenlet felírható az
$m_gyök_ált := a\cdot(x - "x1")\cdot(x - "x2")$

$$a\,(x - x1)\,(x - x2) \qquad \textbf{(5.4.9)}$$

ahol az x1 és x2 a másodfokú egyenlet gyökei.

Viéte-formulák(Emelt szint)

Ebben a részben az ún. Viéte-formulákról lesz szó. Ezek az összefüggések a másodfokú egyenlet gyökeire állnak fenn

Gyökök összegére fennálló összefüggés

Nézzük meg hogy mi történik ha összeadjuk a két gyököt

$viéte_össz_x1 := \dfrac{(-b + \mathrm{sqrt}(b^2 - 4\cdot a\cdot c))}{2\cdot a}$

$$\frac{1}{2}\,\frac{-b + \sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} \qquad \textbf{(5.5.1.1)}$$

$viéte_össz_x2 := \dfrac{(-b - \mathrm{sqrt}(b^2 - 4\cdot a\cdot c))}{2\cdot a}$

$$\frac{1}{2}\,\frac{-b - \sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} \qquad \textbf{(5.5.1.2)}$$

$viéte_össz_x1_x2 := viéte_össz_x1 + viéte_össz_x2$

$$\frac{1}{2}\,\frac{-b + \sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} + \frac{1}{2}\,\frac{-b - \sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} \qquad \textbf{(5.5.1.3)}$$

Látható, hogy a gyökös kifejezések ki fogják ejteni egymást így a végső összefüggés:
$viéte_össz_egyszerű := simplify(viéte_össz_x1_x2)$

$$-\frac{b}{a} \qquad \textbf{(5.5.1.4)}$$

Gyökök szorzatára fennálló összefüggés

Nézzük meg hogy mi történik ha összeszorozzuka két gyököt

$viéte_szor_x1 := \dfrac{(-b + \mathrm{sqrt}(b^2 - 4\cdot a\cdot c))}{2\cdot a}$

$$\frac{1}{2}\,\frac{-b + \sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} \qquad \textbf{(5.5.2.1)}$$

$viéte_szor_x2 := \dfrac{(-b - \mathrm{sqrt}(b^2 - 4\cdot a\cdot c))}{2\cdot a}$

$$\frac{1}{2}\,\frac{-b - \sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{a} \qquad \textbf{(5.5.2.2)}$$

$viéte_szor_x1_x2 := viéte_szor_x1\cdot viéte_szor_x2$

$$\frac{1}{4}\,\frac{\left(-b + \sqrt{-4\,a\,c + b^2}\right)\left(-b - \sqrt{-4\,a\,c + b^2}\right)}{a^2} \qquad \textbf{(5.5.2.3)}$$

A számláló $(a+b)\cdot(a-b)$

$$(a+b)\,(a-b) \qquad \textbf{(5.5.2.4)}$$

alakú. a-nak $-b$

$$-b \qquad \textbf{(5.5.2.5)}$$

b-nek $\mathrm{sqrt}(b^2 - 4\cdot a\cdot c)$

$$\sqrt{-4\,a\,c + b^2} \qquad \textbf{(5.5.2.6)}$$

felel meg.

A nevezők csak egyszerűen összeszorzásra kerültek, mint azt látjuk a *viéte_szor_x1_x2* kifejezésben is. Az átalakítás után:

$viéte_szor_x1_x2_2 := \dfrac{((-b)^2 - (b^2 - 4\cdot a\cdot c))}{4\cdot a^2}$

$$\frac{c}{a} \qquad \textbf{(5.5.2.7)}$$

A Maple már le is egyszerűsítette a kifejezést. (b^2 kiesik és 4-gyel és a-val lehet egyszerűsíteni)

Másodfokú egyenletre visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek

Ebben a részben megnézzük, hogy a jelenlegi ismereteinkkel hogyan tudunk megoldani speciális magasabb fokú egyenleteket.
Ehhez két példát fogunk megnézni.

1. példa

Tekintsük a következő egyenletet:

$magasabb_fokú_1_1 := x^4 - 5 \cdot x^2 + 4 = 0$

$$x^4 - 5\,x^2 + 4 = 0 \qquad \textbf{(5.6.1.1)}$$

Észrevehetjük hogy az x^4

$$x^4 \qquad \textbf{(5.6.1.2)}$$

felírható $(x^2)^2$

$$x^4 \qquad \textbf{(5.6.1.3)}$$

formában. Ezt a maple is visszaigazolta nekünk. Vezessünk be *x^2*-re új jelölést:
$a = x^2$

$$a = x^2 \qquad \textbf{(5.6.1.4)}$$

Ezzel az új jelöléssel felírva az eredeti egyenletet azt kapjuk, hogy
$magasabb_fokú_1_2 := a^2 - 5 \cdot a + 4 = 0$

$$a^2 - 5\,a + 4 = 0 \qquad \textbf{(5.6.1.5)}$$

Oldjuk meg *a*-ra az átjelölt egyenletet
$magasabb_fokú_1_3 := solve(magasabb_fokú_1_2, a)$

$$4, 1 \qquad \textbf{(5.6.1.6)}$$

Eredményül azt kaptuk hogy *a* vagy *1* vagy *4*

Első eset *a*=4:
Ekkor az *a* és *x* közötti összefüggés alapján
$magasabb_fokú_1_4_1 := x^2 = 4$

$$x^2 = 4 \qquad \textbf{(5.6.1.7)}$$

Ebből gyökvonással
$magasabb_fokú_x1_x2 := solve(magasabb_fokú_1_4_1, x)$

$$2, -2 \qquad \textbf{(5.6.1.8)}$$

adódik.
Második eset *a*=1
Ekkor az *a* és *x* közötti összefüggés alapján
$magasabb_fokú_1_4_2 := x^2 = 1$

$$x^2 = 1 \qquad \textbf{(5.6.1.9)}$$

Ebből gyökvonással
$magasabb_fokú_x3_x4 := solve(magasabb_fokú_1_4_2, x)$

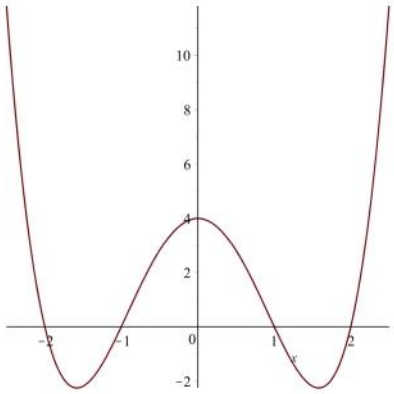
$$1, -1 \qquad \textbf{(5.6.1.10)}$$

adódik.
Ezek alapján *x1 x2 x3 x4* rendre *2 -2 1 -1*
Ellenörizzük le a Maple segítségével hogy jól dolgoztunk-e
$magasabb_fokú_1_maple := solve(magasabb_fokú_1_1, x)$

$$1, 2, -2, -1 \qquad \textbf{(5.6.1.11)}$$

Látható, hogy bár kicsit más sorrendben de a maple is ugyanazokat az eredményeket adja, tehát jól dolgoztunk.

Nézzük meg ábrán:
$plot(x^4 - 5\,x^2 + 4, x = -2.5 ..2.5)$



2. példa

Tekintsük a következő egyenletet:
$magasabb_fokú_2_1 := 8 \cdot (x-1)^6 - 215 \cdot (x-1)^3 - 27 = 0$

$$8\,(x-1)^6 - 215\,(x-1)^3 - 27 = 0 \qquad \textbf{(5.6.2.1)}$$

Észrevehetjük hogy az $(x-1)^6$

$$(x-1)^6 \qquad \textbf{(5.6.2.2)}$$

felírható $((x-1)^3)^2$

$$(x-1)^6 \qquad \textbf{(5.6.2.3)}$$

formában. Ezt a maple is visszaigazolta nekünk. Vezessünk be *(x-1)^3*-re új jelölést:
$b = (x-1)^3$

$$b = (x-1)^3 \qquad \textbf{(5.6.2.4)}$$

Ezzel az új jelöléssel felírva az eredeti egyenletet azt kapjuk, hogy
$magasabb_fokú_2_2 := 8 \cdot b^2 - 215 \cdot b - 27 = 0$

$$8\,b^2 - 215\,b - 27 = 0 \qquad \textbf{(5.6.2.5)}$$

Oldjuk meg *b*-re az átjelölt egyenletet
$magasabb_fokú_2_3 := solve(magasabb_fokú_2_2, b)$

$$27, -\frac{1}{8} \qquad \textbf{(5.6.2.6)}$$

Eredményül azt kaptuk hogy *b* vagy *27* vagy *-1/8*

Első eset b=27:
Ekkor az b és *x* közötti összefüggés alapján
$magasabb_fokú_2_4_1 := (x-1)^3 = 27$

$$(x-1)^3 = 27 \qquad \textbf{(5.6.2.7)}$$

Ebből köbgyökvonás után
$magasabb_fokú_2_4_2 := root((x-1)^3, 3) = root(27, 3)$

$$((x-1)^3)^{1/3} = 3 \qquad \textbf{(5.6.2.8)}$$

adódik. Egyszerűsíthetünk a bal oldalon
$magasabb_fokú_2_4_3 := (x-1)^{\frac{3 \cdot 1}{3}} = root(27, 3)$

$$x - 1 = 3 \qquad \textbf{(5.6.2.9)}$$

Ebből $magasabb_fokú_2_x1 := solve(magasabb_fokú_2_4_3, x)$

$$4 \qquad \textbf{(5.6.2.10)}$$

Második eset b=-1/8
Ekkor az b és *x* közötti összefüggés alapján
$magasabb_fokú_2_5_1 := (x-1)^3 = -\frac{1}{8}$

$$(x-1)^3 = -\frac{1}{8} \qquad \textbf{(5.6.2.11)}$$

Ebből köbgyökvonással
$magasabb_fokú_2_5_1 := root((x-1)^3, 3) = root\left(-\frac{1}{8}, 3\right)$

$$((x-1)^3)^{1/3} = \frac{1}{2}\,(-1)^{1/3} \qquad \textbf{(5.6.2.12)}$$

Ebből egyszerűsítve
$magasabb_fokú_2_5_2 := (x-1)^{\frac{3 \cdot 1}{3}} = -\frac{1}{2}$

$$x - 1 = -\frac{1}{2} \qquad \textbf{(5.6.2.13)}$$

adódik amiből x2 értéke
$magasabb_fokú_2_x2 := solve(magasabb_fokú_2_5_2, x)$

$$\frac{1}{2} \qquad \textbf{(5.6.2.14)}$$

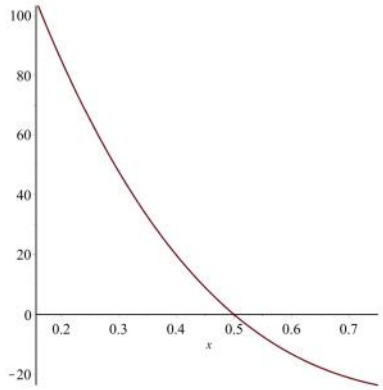
Ezek alapján *x1 x2* rendre *4 1/2*
Ellenörizzük le a Maple segítségével hogy jól dolgoztunk-e

$magasabb_fokú_1_maple := RealDomain{:}\text{-}solve(magasabb_fokú_2_1)$

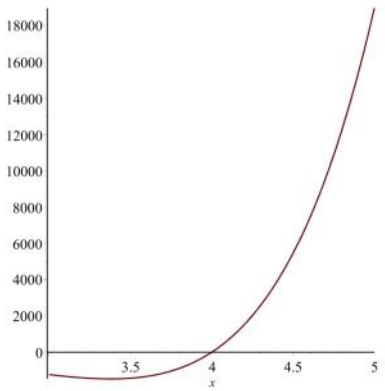
$$\frac{1}{2}, 4 \qquad \textbf{(5.6.2.15)}$$

Látható, hogy a maple is ugyanazokat a valós eredményeket adja, tehát jól dolgoztunk.

Nézzük meg ábrán:
x1
$plot(8 \cdot (x-1)^6 - 215 \cdot (x-1)^3 - 27, x = 0.16 ..0.75)$



x2
$plot(8 \cdot (x-1)^6 - 215 \cdot (x-1)^3 - 27, x = 3 ..5)$



Paraméteres másodfokú egyenletek

Paraméteres másodfokú egyenletnek nevezzük az olyan másodfokú egyenleteket ahol van olyan együttható aminek az értékét nem ismerjük. Ilyenkor általában arra vagyunk kíváncsiak, hogy a paraméter milyen értékeket vehet fel miközben az egyenlet megfelel bizonyos egyéb feltételeknek.

Nézzünk meg egy példát:

Oldjuk meg a következő egyenletet:

paraméteres_másodfokú_egyenlet_1 := $a \cdot x^2 + (2 \cdot a + 1) \cdot x + a + 2 = 0$

$$a\,x^2 + (2\,a + 1)\,x + a + 2 = 0 \qquad \textbf{(5.7.1)}$$

Ahhoz hogy ezt a feladatot korrekt módon meg tudjuk oldani az esetszétválasztás módszerét kell alkalmaznunk:

Ha a=0

akkor a következő egyenletet kapjuk

paraméteres_másodfokú_egyenlet_1_1 := $0 \cdot x^2 + (2 \cdot 0 + 1) \cdot x + 0 + 2 = 0$

$$x + 2 = 0 \qquad \textbf{(5.7.1.1)}$$

Látható hogy a Maple rögtön egyszerűbb formában közölte az egyenletet
Ebből adódik egy lehetséges megoldás:

paraméteres_másodfokú_egyenlet_x1 := *solve*(*paraméteres_másodfokú_egyenlet_1_1*, *x*)

$$-2 \qquad \textbf{(5.7.1.2)}$$

Ha a≠0

Ebben az esetben diszkriminánsvizsgálatot kell végeznünk. Ehhez írjuk fel az egyenlet diszkriminánsát paraméteresen:

Javasolt felírni mivel egyenlő *a b* és *c*

paraméteres_másodfokú_egyenlet_a := *a*

$$a \qquad \textbf{(5.7.2.1)}$$

paraméteres_másodfokú_egyenlet_b := $2 \cdot a + 1$

$$2\,a + 1 \qquad \textbf{(5.7.2.2)}$$

paraméteres_másodfokú_egyenlet_c := $a + 2$

$$a + 2 \qquad \textbf{(5.7.2.3)}$$

Miután azonosítottuk *a*-t *b*-t és *c*-t felírhatjuk a diszkriminánst

paraméteres_másodfokú_egyenlet_diszkriminánsa := (*paraméteres_másodfokú_egyenlet_b*)^2 − 4 · *paraméteres_másodfokú_egyenlet_a* · *paraméteres_másodfokú_egyenlet_c*

$$-4\,a\,(a + 2) + (2\,a + 1)^2 \qquad \textbf{(5.7.2.4)}$$

Ebből 3 irányba ágazunk szét:

Ha *paraméteres_másodfokú_egyenlet_diszkriminánsa* > 0

$$0 < -4\,a\,(a + 2) + (2\,a + 1)^2 \qquad \textbf{(5.7.2.5)}$$

akkor az eredeti másodfokú egyenletünknek **két valós** megoldása van

Ha *paraméteres_másodfokú_egyenlet_diszkriminánsa* = 0

$$-4\,a\,(a + 2) + (2\,a + 1)^2 = 0 \qquad \textbf{(5.7.2.6)}$$

akkor az eredeti másodfokú egyenletünknek **egy valós** megoldása van

Ha *paraméteres_másodfokú_egyenlet_diszkriminánsa* < 0

$$-4\,a\,(a + 2) + (2\,a + 1)^2 < 0 \qquad \textbf{(5.7.2.7)}$$

akkor az eredeti másodfokú egyenletünknek **nincs valós** megoldása

Hozzuk egyszerűbb alakra a diszkriminánst:

paraméteres_másodfokú_egyenlet_diszkriminánsa_egyszerűbben := *simplify*(*paraméteres_másodfokú_egyenlet_diszkriminánsa*)

$$-4\,a + 1 \qquad \textbf{(5.7.2.8)}$$

Egy *a*-ban elsőfokú kifejezésre egyszerűsödött a kifejezés. Arra vagyunk kíváncsiak hogy ez hol vesz fel 0 értéket, ezért oldjuk meg a következő egyenletet:

ahol_a_paraméter_0 := *paraméteres_másodfokú_egyenlet_diszkriminánsa_egyszerűbben* = 0

$$-4\,a + 1 = 0 \qquad \textbf{(5.7.2.9)}$$

solve(*ahol_a_paraméter_0*, *a*)

$$\frac{1}{4} \qquad \textbf{(5.7.2.10)}$$

Ebből azt kaptuk hogy ha ***a=1/4*** akkor az eredeti egyenletnek **1 valós megoldása** van, ha ***a<1/4*** akkor az eredeti egyenletnek **2 valós megoldása van** és ha ***a>1/4*** akkor az eredeti egyenletnek **nincs valós megoldása**

Írjuk fel azt az egyenletet amikor *a=1/4*

paraméteres_másodfokú_egyenlet_ahol_a_egy_negyed := $\frac{1}{4} \cdot x^2 + \left(\frac{1}{4} \cdot 2 + 1\right) \cdot x + \frac{1}{4} + 2 = 0$

$$\frac{1}{4}\,x^2 + \frac{3}{2}\,x + \frac{9}{4} = 0 \qquad \textbf{(5.7.2.11)}$$

Oldjuk meg az előbb felírt egyenletet:

solve(*paraméteres_másodfokú_egyenlet_ahol_a_egy_negyed*, *x*)

$$-3,\ -3 \qquad \textbf{(5.7.2.12)}$$

Láthatjuk hogy a két gyök megegyezik amire abból is következtethettünk, hogy pont *a=1/4* esetén 0 az eredeti egyenletünk diszkriminánsa.

Ha *a<1/4* akkor a 2 valós megoldást megkaphatjuk úgy ha behelyettesítjük *a* értékét a következő képletbe:

ha_a_kisebb_egy_negyed_x1_x2 := *solve*(*paraméteres_másodfokú_egyenlet_1*, *x*,'*parametric*')

$$\begin{cases} \%SolveTools_{Engine}(\{x + 2\}, \{x\}) & a = 0 \\ \left[\left[x = \frac{1}{2}\,\frac{-2\,a - 1 + \sqrt{-4\,a + 1}}{a}\right], \left[x = -\frac{1}{2}\,\frac{2\,a + 1 + \sqrt{-4\,a + 1}}{a}\right]\right] & a \neq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(5.7.2.13)}$$

Online gyakorlófeladatok

Az alábbi linken a témához tartozó gyakorlófeladatot találsz interaktív formában:
Másodfokú egyenlet

Megoldásom:

Másodfokú egyenletek alkalmazása feladatok megoldása során

Ebben a részben az eddig elsajátított tudásunkat fogjuk hasznosítani feladatok megoldása során. Az egyenletek megoldásait minden esetben a **valós** számok halmazán keressük
$x \in \mathbb{R}$

$$x \in real \qquad \textbf{(6.1)}$$

Feladatmegoldás a gyöktényezős alak segítségével

Ebben a részben kettő a gyöktényezős alakhoz kapcsolódó feladatot fogunk megoldani. Javasolt a megoldások tanulmányozása előtt önállóan megoldani a feladatokat

1. feladat(TK10/71/2/c)

Írjunk fel olyan egyenletet melynek gyökei az alábbi számpár $\left\{\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}\right\}$

$$\left\{-\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right\} \qquad \textbf{(6.1.1.1)}$$

Megoldás

Korábban szó volt róla hogy a másodfokú egyenlet felírható a következő alakban:

feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_általános $:= a\cdot(x-'x1')\cdot(x-'x2') = 0$

$$a\,(x-x1)\,(x-x2) = 0 \qquad \textbf{(6.1.1.1.1)}$$

A gyököket megadták *feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_1_x1* $:= -\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$ és

feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_1_x2 $:= \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Mivel *a*-ra nincs kikötésünk ezért azt bárminek megválaszthatjuk. Az egyszerűség kedvéért válasszuk *feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_a* $:= 1 = 1$-nek

Nincs más dolgunk mint behelyettesíteni:

feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_1_megoldás_1
$:=$ *feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_a* $\cdot(x$
$-$ *feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_1_x1*$)\cdot(x$
$-$ *feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_1_x2*$) = 0$

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right) = 0 \qquad \textbf{(6.1.1.1.2)}$$

A szorzást elvégezve adódik a

feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_1_megoldás_2
$:=$ *expand*(*feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_1_megoldás_1*)

$$x^2+\frac{1}{12}x-\frac{1}{2} = 0 \qquad \textbf{(6.1.1.1.3)}$$

egyenlet ami egy lehetsége vlasz a kérdésre, de az egyenletet bármilyen nem 0 számmal megszorozva helyes megoldást kapunk.

2. feladat(TK10/71/4/c)

Egyszerűsítsük a következő törtet:

feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_2 $:= \frac{(3\cdot x^2+3\cdot x-6)}{2\cdot x^2+3\cdot x-2}$

$$\frac{3x^2+3x-6}{2x^2+3x-2} \qquad \textbf{(6.1.2.1)}$$

Megoldásom:

Megoldás

Alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt. Ehhez oldjuk meg a 0-ával egyenlővé tett egyenleteket és írjuk fel a gyöktényezős alakot.

feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_2_számláló_gyökei $:= solve(3\cdot x^2+3\cdot x-6=0, x)$

$$1,\ -2 \qquad \textbf{(6.1.2.1.1)}$$

feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_2_nevező_gyökei $:= solve(2x^2+3x-2=0, x)$

$$\frac{1}{2},\ -2 \qquad \textbf{(6.1.2.1.2)}$$

Írjuk fel szorzat alakban a számlálót és a nevezőt.

feladatmegoldás_gyöktényezős_alakkal_2_tört_szorzatként $:= \frac{(3\cdot(x-1)\cdot(x+2))}{\left(2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x+2)\right)}$

$$\frac{3}{2}\,\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(6.1.2.1.3)}$$

Látható hogy az eredményt a Maple már az $x+2$-vel történő egyszerűsítés után közölte

Törtes egyenletek megoldása

Ebben a részben kettő másodfokú egyenletre vezető törtes egyenletet fogunk megoldani. Javasolt a megoldások tanulmányozása előtt önállóan megoldani a feladatokat

1. feladat(TK10/71/4/d alapján)

Oldjuk meg a következő egyenletet: *törtes_egyenlet_1* $:= \frac{(6\cdot x^2+x-2)}{-2\cdot x^2+5\cdot x-2} = 81$

$$\frac{6x^2+x-2}{-2x^2+5x-2} = 81 \qquad \textbf{(6.2.1.1)}$$

Megoldásom:

Megoldás

Először egy kikötést kell tennünk mivel a nevező nem lehet 0.

törtes_egyenlet_1_nevező_kikötés $:= -2\cdot x^2+5\cdot x-2 \neq 0$

$$-2x^2+5x-2 \neq 0 \qquad \textbf{(6.2.1.1.1)}$$

Ebből megkaphatjuk hogy x milyen értékeket **nem** vehet fel ha a nevezőt egyenlővé tesszük 0-val és megoldjuk a kapott egyenletet.

törtes_egyenlet_1_x_nem_lehet $:= solve(-2\cdot x^2+5\cdot x-2=0, x)$

$$\frac{1}{2},\ 2 \qquad \textbf{(6.2.1.1.2)}$$

A nevező vizsgálata után az **egyenlet** mindkét oldalát megszorozhatjuk a nevezővel.

Egyenletnél szorozhatunk de osztani nem lenne szabad. Az új egyenletünk:

törtes_egyenlet_1_2 $:= 6\cdot x^2+x-2 = 81\cdot(-2\cdot x^2+5x-2)$

$$6x^2+x-2 = -162x^2+405x-162 \qquad \textbf{(6.2.1.1.3)}$$

A maple fel is bontotta a zárójelet. Rendezzünk 0-ra:

törtes_egyenlet_1_3 $:= 6\cdot x^2+x-2+162\cdot x^2-405\cdot x+162 = 0$

$$168x^2-404x+160 = 0 \qquad \textbf{(6.2.1.1.4)}$$

Oldjuk meg az egyenletet:

törtes_egyenlet_1_4 $:= solve($*törtes_egyenlet_1_3*$, x)$

$$\frac{40}{21},\ \frac{1}{2} \qquad \textbf{(6.2.1.1.5)}$$

Mivel az *1/2* a kikötés miatt nincs a megoldások között így az egyetlen megoldásunk $\frac{40}{21} = \frac{40}{21}$

Ellenőrizzünk:

törtes_egyenlet_1_ell_bo $:= eval\left(\frac{(6\cdot x^2+x-2)}{-2\cdot x^2+5\cdot x-2}, x=\frac{40}{21}\right)$

$$81 \qquad \textbf{(6.2.1.1.6)}$$

A bal és a jobb oldal megegyezik így ez valóban megoldása az egyenletnek

2. feladat(FGY10/32/2171/b alapján)

Oldjuk meg a következő egyenletet: *törtes_egyenlet_2* $:= \frac{(3\cdot x^2-13\cdot x-10)}{2\cdot x^2-7\cdot x-15} = 3\cdot x+2$

$$\frac{3x^2-13x-10}{2x^2-7x-15} = 3x+2 \qquad \textbf{(6.2.2.1)}$$

Megoldásom:

Megoldás

Előszőr egy kikötést kell tennünk mivel a nevező nem lehet 0.

törtes_egyenlet_2_nevező_kikötés $:= 2\cdot x^2-7\cdot x-15 \neq 0$

$$2x^2-7x-15 \neq 0 \qquad \textbf{(6.2.2.1.1)}$$

Ebből megkaphatjuk hogy x milyen értékeket **nem** vehet fel ha a nevezőt egyenlővé tesszük 0-val és megoldjuk a kapott egyenletet.

törtes_egyenlet_2_x_nem_lehet $:= solve(2\cdot x^2-7\cdot x-15=0, x)$

$$5,\ -\frac{3}{2} \qquad \textbf{(6.2.2.1.2)}$$

Célszerű az egyenlet baloldalát szorzattá alakítani, mert ha most beszoroznánk mind a két oldaldalt a nevezővel akkor harmadfokú egyenlethez jutnánk amiket nem tudunk megoldani. Ehhez keressük meg a számláló gyökeit is:

törtes_egyenlet_2_számláló_gyökei $:= solve(3\cdot x^2-13\cdot x-10=0, x)$

$$5,\ -\frac{2}{3} \qquad \textbf{(6.2.2.1.3)}$$

Írjuk fel a tört szorzattá bontott alakját. A következőt kapjuk:

törtes_egyenlet_2_2 $:= \frac{3\cdot(x-5)\cdot\left(x-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)}{2\cdot(x-5)\cdot\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)} = 3\cdot x+2$

$$\frac{3}{2}\,\frac{x+\frac{2}{3}}{x+\frac{3}{2}} = 3x+2 \qquad \textbf{(6.2.2.1.4)}$$

A program már el is végezte az (x-5)-tel történő egyszerűsítést. Rendezzük az egyenletet úgy hogy beszorzunk a nevezővel.

törtes_egyenlet_2_3 $:= 3\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right) = 2\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot(3\cdot x+2)$

$$3x+2 = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(3x+2) \qquad \textbf{(6.2.2.1.5)}$$

Bontsuk fel a zárójelet. Ehhez a Maplen belül használhatjuk az expand parancsot.

törtes_egyenlet_2_4 $:= 3\cdot x+2 = expand\left(2\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot(3\cdot x+2)\right)$

$$3x+2 = 6x^2+13x+6 \qquad \textbf{(6.2.2.1.6)}$$

Rendezzük 0-ra az egyenletet:

törtes_egyenlet_2_5 $:= 6\cdot x^2+10\cdot x+4 = 0$

$$6x^2+10x+4 = 0 \qquad \textbf{(6.2.2.1.7)}$$

Oldjuk meg az egyenletet:

törtes_egyenlet_2_6 $:= solve($*törtes_egyenlet_2_5*$, x)$

$$-\frac{2}{3},\ -1 \qquad \textbf{(6.2.2.1.8)}$$

Mivel mind a két megoldás benne van a megoldáshalmazban ezért mindkettőt le kell ellenőriznünk:

Első eset:

$tört_egyenlet_2_x_1 := -\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$

$tört_egyenlet_2_minuszkétharmad_ell_bo := eval\left(\frac{(3\cdot x^2-13\cdot x-10)}{2\cdot x^2-7\cdot x-15}, x=\frac{-2}{3}\right)$

0 **(6.2.2.1.9)**

$tört_egyenlet_2_minuszkétharmad_ell_jo := eval\left(3\cdot x+2, x=\frac{-2}{3}\right)$

0 **(6.2.2.1.10)**

A jobb és baloldal megegyezik így a -2/3 jó megoldás
Második eset:
$tört_egyenlet_2_x_2 := -1 = -1$

$tört_egyenlet_2_minuszegy_ell_bo := eval\left(\frac{(3\cdot x^2-13\cdot x-10)}{2\cdot x^2-7\cdot x-15}, x=-1\right)$

-1 **(6.2.2.1.11)**

$tört_egyenlet_2_minuszegy_ell_jo := eval(3\cdot x+2, x=-1)$

-1 **(6.2.2.1.12)**

A jobb és baloldal itt is megegyezik így a -1 is jó megoldás

Szöveges feladatok megoldása egyszerű másodfokú egyenletek segítségével

Ebben a részben kettő másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatot fogunk megoldani. Javasolt a megoldások tanulmányozása előtt önállóan megoldani a feladatokat

1. feladat

Két egymás után következő természetes szám szorzata 552. Melyik ez a két szám?

Válasz:
Megoldásom:

Megoldás

Az egymást követő számok felírhatóak n

n **(6.3.1.1.1)**

és $n+1$

$n+1$ **(6.3.1.1.2)**

alakban ahol n a kisebb szám
A megoldandó másodfokú egyenlet a szöveg alapján:
$elso_szoveges_egyenlet := n\cdot(n+1) = 552$

$n\,(n+1) = 552$ **(6.3.1.1.3)**

0-ra rendezett alak:
$elso_szoveges_egyenlet_nullara := n^2+n-552 = 0$

$n^2+n-552 = 0$ **(6.3.1.1.4)**

Az egyenletet megoldva kapjuk hogy:
$elso_szoveges_egyenlet_megoldva := solve(elso_szoveges_egyenlet_nullara, n)$

$23, -24$ **(6.3.1.1.5)**

Mivel a -24 nem természetes szám így n=23 adódik amiből n+1=24
Ellenőrzés:
$elso_szoveges_bal := 23\cdot 24$

(6.3.1.1.6)

$elso_szoveges_jobb := 552$

552 **(6.3.1.1.7)**

2. feladat

Egy kétjegyu szám számjegyeinek összege 9. Ha a számjegyeket felcseréljük és az így kapott számot az eredetivel megszorozzuk,
szorzatul 2268-at kapunk. Melyik ez a szám?

Válasz:
Megoldásom:

Megoldás

A kétjegyű szám 10-es helyiértéken álló számjegyét jelölje x

x **(6.3.2.1.1)**

az egyes helyiértéken álló számjegyet jelölje y

y **(6.3.2.1.2)**

Mivel a számjegyek összege 9 így felírható a következő egyenlet:
$otodik_szoveges_egyenlet_1 := x+y = 9$

$x+y = 9$ **(6.3.2.1.3)**

és a keresett szám felírható $10\cdot x+y$

$10\,x+y$ **(6.3.2.1.4)**

alakban
Ha a számjegyeket felcseréljük akkor az új szám felírható lesz $10\cdot y+x$

$10\,y+x$ **(6.3.2.1.5)**

alakban
Mivel a két szám szorzata adott így felírható a következő egyenlet:
$otodik_szoveges_egyenlet_2 := (10\cdot x+y)\cdot(10\cdot y+x) = 2268$

$(10\,x+y)\cdot(10\,y+x) = 2268$ **(6.3.2.1.6)**

Oldjuk meg az egyenletrendszert:
$solve(\{otodik_szoveges_egyenlet_1, otodik_szoveges_egyenlet_2\}, \{x, y\})$

$[[x=6, y=3], [x=3, y=6]]$ **(6.3.2.1.7)**

Ezek alapján elmondhatjuk, hoggy az egyik szám a 36 a másik a 63.
Ellenőrzés
Számjegyeik összege valóban 9. Szorzatuk 36·63

2268 **(6.3.2.1.8)**

a feladat szövegének megfelelően 2268.

Egyszerű másodfokú egyenletrendszerek megoldása

Ebben a részben kettő másodfokú egyenletre vezető egyenletrendszert fogunk megoldani. Javasolt a megoldások tanulmányozása előtt önállóan megoldani a feladatokat

1. feladat(FGY10/33/2178/b)

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:
$másodfokú_egyenletrendszer_1 := \{x-y=4, 3\cdot x-y^2=8\}$

$\{x-y=4, -y^2+3\,x=8\}$ **(6.4.1.1)**

Megoldásom:

Megoldás

Fejezzük ki az első egyenletből y-t
$másodfokú_egyenletrendszer_1_y_elsőből := y = x-4$

$y = x-4$ **(6.4.1.1.1)**

Helyettesítsünk be a második egyenletbe y helyére. A következőtt kapjuk:
$másodfokú_egyenletrendszer_1_y_másodikba := 3\cdot x-\left((x-4)^2\right) = 8$

$3\,x-(x-4)^2 = 8$ **(6.4.1.1.2)**

Zárójelfelbontás és nullára rendezés után kapjuk a következőt:
$másodfokú_egyenletrendszer_1_rendezve := expand\left(3\cdot x-\left((x-4)^2\right)-8\right) = 0$

$-x^2+11\,x-24 = 0$ **(6.4.1.1.3)**

Oldjuk meg x-re a kapott egyenletet:
$másodfokú_egyenletrendszer_1_x1_x2$
$:= solve(másodfokú_egyenletrendszer_1_rendezve, x)$

$3, 8$ **(6.4.1.1.4)**

Visszahelyettesítve az első egyenletbe $x1$-et $y1=-1$ majd $x2$-re $y2=4$ adódik
Ellenőrizzük le a megoldásunkat a Maple segítségével:
$másodfokú_egyenletrendszer_1_ellenőrzés := solve(másodfokú_egyenletrendszer_1, \{x, y\})$

$\{x=3, y=-1\}, \{x=8, y=4\}$ **(6.4.1.1.5)**

A maple megerősítette hogy helyesen számoltunk.

2. feladat(FGY10/33/2178/c)

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:
$másodfokú_egyenletrendszer_2 := \{x+y=7, x\cdot y=10\}$

$\{x\,y=10, x+y=7\}$ **(6.4.2.1)**

Megoldásom:

Megoldás

Fejezzük ki az első egyenletből y-t

másodfokú_egyenletrendszer_2_y_elsőből := $y = 7 - x$

$$y = 7 - x \quad \textbf{(6.4.2.1.1)}$$

Helyettesítsünk be a második egyenletbe y helyére. A következőt kapjuk:

másodfokú_egyenletrendszer_2_y_másodikba := $x \cdot (7 - x) = 10$

$$x\,(7 - x) = 10 \quad \textbf{(6.4.2.1.2)}$$

Zárójelfelbontás és nullára rendezés után kapjuk a következőt:

másodfokú_egyenletrendszer_2_rendezve := $expand(x \cdot (7 - x) - 10) = 0$

$$-x^2 + 7\,x - 10 = 0 \quad \textbf{(6.4.2.1.3)}$$

Oldjuk meg x-re a kapott egyenletet:

másodfokú_egyenletrendszer_2_x1_x2 := $solve(másodfokú_egyenletrendszer_2_rendezve, x)$

$$2, 5 \quad \textbf{(6.4.2.1.4)}$$

Visszahelyettesítve az első egyenletbe *x1*-et *y1=5* majd *x2*-re *y2=2* adódik

Ellenőrizzük le a megoldásunkat a Maple segítségével:

másodfokú_egyenletrendszer_2_ellenőrzés := $solve(másodfokú_egyenletrendszer_2, \{x, y\})$

$$\{x = 5, y = 2\}, \{x = 2, y = 5\} \quad \textbf{(6.4.2.1.5)}$$

A maple megerősítette hogy helyesen számoltunk.

$\sqrt{(a \cdot x + b)} = c \cdot x + d$ típusú egyenletek megoldása

Ebben a részben két gyökös másodfokú egyenletre vezető egyenletet fogunk megoldani. Javasolt a megoldások tanulmányozása előtt önállóan megoldani a feladatokat

1. feladat(FGY10/36/2201/d)

Oldjuk meg a következő egyenletet: *gyökös_egyenlet_1* := $\mathrm{sqrt}(2 \cdot x + 8) = x + 4$

$$\sqrt{2\,x + 8} = x + 4 \quad \textbf{(6.5.1.1)}$$

Megoldásom:

Megoldás

A gyökjel alatt csak nem negatív szám állhat, ezért tegyünk egy kikötést:

gyökös_egyenlet_1_kikötés := $2 \cdot x + 8 \geq 0$

$$0 \leq 2\,x + 8 \quad \textbf{(6.5.1.1.1)}$$

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget:

gyök_alatt_nagyobb_egyenlő_mint_0_1 := $solve(gyökös_egyenlet_1_kikötés, x)$

$$RealRange(-4, \infty) \quad \textbf{(6.5.1.1.2)}$$

Az eredmény azt jelenti hogy -4-től végtelenig vehet fel x értékeket beleértve a -4-et is.

A kikötés után négyzetre emelhetjük mindkét oldalt utána bontsuk is fel a zárójelet:

gyökös_egyenlet_1_2 := $(\mathrm{sqrt}(2 \cdot x + 8))^2 = expand((x + 4)^2)$

$$2\,x + 8 = x^2 + 8\,x + 16 \quad \textbf{(6.5.1.1.3)}$$

Rendezzük 0-ra az egyenletet:

gyökös_egyenlet_1_3 := $x^2 + 6 \cdot x + 8 = 0$

$$x^2 + 6\,x + 8 = 0 \quad \textbf{(6.5.1.1.4)}$$

Oldjuk meg az egyenletet:

gyökös_egyenlet_1_4 := $solve(gyökös_egyenlet_1_3, x)$

$$-2, -4 \quad \textbf{(6.5.1.1.5)}$$

Látható, hogy mindkét kapott érték beleesik az értelmezési tartományba. Egy gyors ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla hogy ezek a számok valóban megoldásai az egyenletnek.

Első eset:

gyökös_egyenlet_1_x1 := $-2 = -2$

gyökös_egyenlet_1_x1_ell_bo := $simplify(eval(\mathrm{sqrt}(2 \cdot x + 8), x = -2))$

$$2 \quad \textbf{(6.5.1.1.6)}$$

gyökös_egyenlet_1_x2_ell_jo := $eval(x + 4, x = -2)$

$$2 \quad \textbf{(6.5.1.1.7)}$$

A jobb és baloldal megegyezik így a -2 jó megoldás

Második eset:

gyökös_egyenlet_1_x2 := $-4 = -4$

gyökös_egyenlet_1_x2_ell_bo := $simplify(eval(\mathrm{sqrt}(2 \cdot x + 8), x = -4))$

$$0 \quad \textbf{(6.5.1.1.8)}$$

gyökös_egyenlet_1_x2_ell_jo := $simplify(eval(x + 4, x = -4))$

$$0 \quad \textbf{(6.5.1.1.9)}$$

A jobb és baloldal itt is megegyezik így a -4 is jó megoldás

2. feladat(FGY10/36/2201/k)

Oldjuk meg a következő egyenletet: *gyökös_egyenlet_2* := $1 - 2 \cdot x = \mathrm{sqrt}(x^2 - 5 \cdot x + 11)$

$$1 - 2\,x = \sqrt{x^2 - 5\,x + 11} \quad \textbf{(6.5.2.1)}$$

Megoldásom:

Megoldás

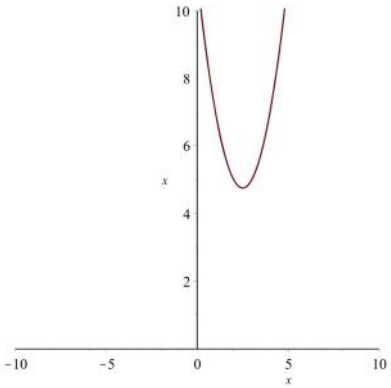
A gyökjel alatt csak nem negatív szám állhat, ezért tegyünk egy kikötést:

gyökös_egyenlet_2_kikötés_1 := $x^2 - 5 \cdot x + 11 \geq 0$

$$0 \leq x^2 - 5\,x + 11 \quad \textbf{(6.5.2.1.1)}$$

Ezt a kikötést érdemes grafikusan ábrázolni (ha megoldjuk a gyök alatti kifejezéssel felírt másodfokú egyenletet, akkor ott a diszkriminánsa negatív lesz. Mivel az eredeti gyökjel alatti kifejezésben x^2 együtthatója pozitív így az általa leírt parabola képe felfelé nyíló lesz és nem fogja metszeni az x tengelyt. Ez azt jelenti hogy a jobb oldal alapján x bármilyen értéket felvehet.

$plot(x^2 - 5 \cdot x + 11, x, x = 0..10)$



Ahhoz viszont hogy az egyenlőség fenn állhasson a bal oldalnak is nagyobb egyenlőnek kell lenni 0-nál.

gyökös_egyenlet_2_kikötés_2 := $1 - 2 \cdot x \geq 0$

$$0 \leq 1 - 2\,x \quad \textbf{(6.5.2.1.2)}$$

Ha megoldjuk ezt az egyenlőtlenséget, akkor azt kapjuk, hogy x:

gyök_alatt_nagyobb_egyenlő_mint_0_2 := $solve(gyökös_egyenlet_2_kikötés_2, x)$

$$RealRange\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \quad \textbf{(6.5.2.1.3)}$$

kisebb mint 1/2-ed

A kikötésekkel végeztünk oldjuk meg az egyenletet:

Négyzetre emelés

gyökös_egyenlet_2_2 := $expand((1 - 2 \cdot x)^2) = \mathrm{sqrt}(x^2 - 5 \cdot x + 11)^2$

$$4\,x^2 - 4\,x + 1 = x^2 - 5\,x + 11 \quad \textbf{(6.5.2.1.4)}$$

Nullára rendezés

gyökös_egyenlet_2_3 := $3 \cdot x^2 + x - 10 = 0$

$$3\,x^2 + x - 10 = 0 \quad \textbf{(6.5.2.1.5)}$$

Megoldás:

gyökös_egyenlet_2_4 := $solve(gyökös_egyenlet_2_3, x)$

$$\frac{5}{3}, -2 \quad \textbf{(6.5.2.1.6)}$$

A két gyök közül csak a -2 esik bele az értelmezési tartományba.

Ellenőrzés:

gyökös_egyenlet_2_x := -2

$$-2 \quad \textbf{(6.5.2.1.7)}$$

gyökös_egyenlet_2_ell_bo := $eval(1 - 2 \cdot x, x = -2)$

$$5 \quad \textbf{(6.5.2.1.8)}$$

gyökös_egyenlet_2_ell_jo := $simplify(eval(\mathrm{sqrt}(x^2 - 5 \cdot x + 11), x = -2))$

$$5 \quad \textbf{(6.5.2.1.9)}$$

A jobb és baloldal itt is megegyezik így a -2 jó megoldás.

Teljes függvényvizsgálat feladat

Most hogy áttekintettük a másodfokú függvény vizsgálatának lépéseit, nézzük meg ezt egy konkrét példán:

Legyen

másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz := $\frac{5}{2}\,x^2 + \frac{5}{16}\,x - \frac{15}{64}$

$$\frac{5}{2}\,x^2 + \frac{5}{16}\,x - \frac{15}{64} \quad \textbf{(6.6.1)}$$

Értelmezési tartomány

Az értelmezési tartomány ugyanaz mint az alapfüggvénynél.

másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz_ÉT := $\mathbb{R}$

$$real \quad \textbf{(6.6.1.1)}$$

Értékkészlet

Az értékkészlet ugyanaz mint az alapfüggvénynél.

másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz_ÉK := $\left[-\frac{125}{512}, \mathrm{infinity}\right)$

$$RealRange\left(-\frac{125}{512}, \infty\right) \quad \textbf{(6.6.2.1)}$$

Zérushely

A zérushelyek meghatározásához oldjuk meg a 0-ára rendezett egyenletet.

másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz_nullára_rendezett_egyenlet := *másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz* = 0

$$\frac{5}{2}\cdot x^2+\frac{5}{16}\cdot x-\frac{15}{64}=0 \qquad \textbf{(6.6.3.1)}$$

másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz_zérushelyek := *solve*(*másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz_nullára_rendezett_egyenlet*, *x*)

$$\frac{1}{4},\ -\frac{3}{8} \qquad \textbf{(6.6.3.2)}$$

Monotonitás/A függvény menete

A monotonitás vizsgálatához készítsünk ábrát, Ehhez teljes négyzetté kell alakítanunk:

Emeljünk ki $\frac{5}{2}$

$$\frac{5}{2} \qquad \textbf{(6.6.4.1)}$$

-et és alakítsunk ki teljes négyzetet.

másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz_teljes_négyzet_1 $=\frac{5}{2}\cdot\left(x^2+\frac{1}{8}\cdot x-\frac{3}{32}\right)$

$$\frac{5}{2}\cdot x^2+\frac{5}{16}\cdot x-\frac{15}{64} \qquad \textbf{(6.6.4.2)}$$

másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz_teljes_négyzet_2 $=\frac{5}{2}\cdot\left(\left(x+\frac{1}{16}\right)^2-\frac{1}{256}-\frac{3}{32}\right)$

$$\frac{5}{2}\cdot\left(x+\frac{1}{16}\right)^2-\frac{125}{512} \qquad \textbf{(6.6.4.3)}$$

Elevenítsük fel a teljes négyzet alakot: *a_másodfokú_kifejezések_teljes_négyzet_alakja*

$$a\cdot\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2-\frac{1}{4}\cdot\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a} \qquad \textbf{(6.6.4.4)}$$

A mi esetünkben *a*-nak

másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz_teljes_négyzet_a $=\frac{5}{2}$

$$\frac{5}{2} \qquad \textbf{(6.6.4.5)}$$

felel meg.

-*u*-nak

másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz_teljes_négyzet_minusz_u $=\frac{1}{16}$

$$\frac{1}{16} \qquad \textbf{(6.6.4.6)}$$

+*v*-nek pedig

másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz_teljes_négyzet_plusz_v $=-\frac{125}{512}$

$$-\frac{125}{512} \qquad \textbf{(6.6.4.7)}$$

felel meg.

Ezek alapján a függvény minimuma

másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz_minimum_helye $=-\frac{1}{16}$

$$-\frac{1}{16} \qquad \textbf{(6.6.4.8)}$$

Ebből következik, hogy szigorúan monoton csökkenő a

másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz_szig_mon_csök $=\left(-\text{infinity},-\frac{1}{16}\right]$

$$RealRange\left(-\infty,-\frac{1}{16}\right) \qquad \textbf{(6.6.4.9)}$$

és szigorúan monoton növő a

$\left(-\frac{1}{16},\text{infinity}\right)$

$$-\frac{1}{16},\ \infty \qquad \textbf{(6.6.4.10)}$$

intervallumon

Minimum hely/Maximum hely/Minimum érték/Maximum érték

A minimum helyét korábban a monotonitásnál már meg kellett határoznunk

Minimum hely: *minimumának_helye* $=x=-\frac{1}{16}$

$$x=-\frac{1}{16} \qquad \textbf{(6.6.5.1)}$$

Minimum érték: *minimumának_értéke* $=y=-\frac{125}{512}$

$$y=-\frac{125}{512} \qquad \textbf{(6.6.5.2)}$$

Maximum helye és maximum értéke nincs.

Paritás

Emlékeztetőül: A függvény páros ha f(-x)=f(x)
és páratlan ha f(-x)=-f(x)

Paritás meghatározása

evalb(*másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz*(−1) = *másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz*(1))

$$false \qquad \textbf{(6.6.6.1.1)}$$

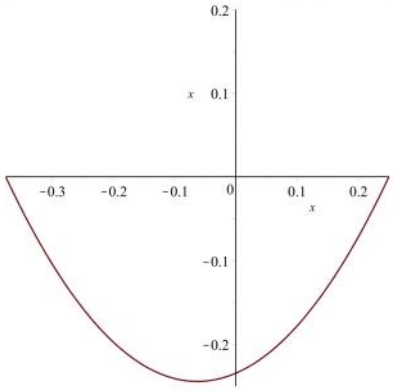
evalb(*másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz*(−1) = −*másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz*(1))

$$false \qquad \textbf{(6.6.6.1.2)}$$

Az evalb mindkét paritás vizsgálatánál hamis értéket adott vissza így ennek a fügvénynek **nincs** paritása

Ábra

plot$\left(\text{másodfokú_függvény_teljes_függvény_vizsgálathoz}, x=-\frac{3}{8}..\frac{1}{4}, x=-0.25..0.2\right)$



Másodfokú egyenletet is tartalmazó "kevert" egyenletek megoldása (Emelt szint)(11.osztály)

Ebben a blokkban szerettem volna néhány más témakörhöz is kapcsolódó egyenletet bemutatni, viszont ezek a témakörök csak később kerülnek tanításra 11. osztályban ezért csak megjegyezzük, hogy léteznek ilyenek is. Később bőven tanulunk róla.

Logaritmust tartalmazó másodfokúra vezető egyenletek

Szögfüggvényt tartalmazó másodfokúra vezető egyenletek

Exponenciális függvényeket tartalmazó másodfokúra vezető egyenletek

Másodfokú egyenletek és komplex számok(Felsőfokú tananyag)

Ebben a részben megnézzük, hogy mik azok a komplex számok és hogyan kapcsolódnak a másodfokú egyenletekhez.

Komplex számok bevezetése

A fentebb ismertetett elméleti anyagban a valós számok halmaza volt ahol a másodfokú egyenletek megoldásait kerestük, ezért ha a diszkriminánsa negatív volt azt mondhattuk hogy az egyenletnek nincsen megoldása. Volt viszont egy nagyon fontos szó amit ilyenkór hangsúlyoznunk kellett, mégpedig azt hogy nincsen **valós** megoldás.

Próbáljuk meg megoldani a következő egyenletet először a valós számok halmazán:

complex_másodfokú_egyenlet_1 $=x^2+1=0$

$$x^2+1=0 \qquad \textbf{(7.1.1)}$$

ebből azt kapjuk hogy *complex_másodfokú_egyenlet_2* $=x^2=-1$

(7.1.2)

Ha mindkét oldalból gyököt vonunk azt kapjuk hogy x abszolút értéke egyenló gyök alatt -1-gyel. Ezt a gyökvonást a valós számok körében nem lehetne elvégezni de ha bevezetnénk egy új jelölést a gyök alatt -1-re máris megoldódna a probléma.

Vezessük is be:

complex_másodfokú_egyenlet_imaginárius_egység := sqrt(−1)

$$1 \qquad \textbf{(7.1.3)}$$

Azzal, hogy bevezettük ezt az új jelölést (képzetes/imaginárius egységet) lehetőségünk van kibővíteni a valós számhalmazt.

Azt a számhalmazt amiben egy szám $a+b\cdot I$

$$a+1b \qquad \textbf{(7.1.4)}$$

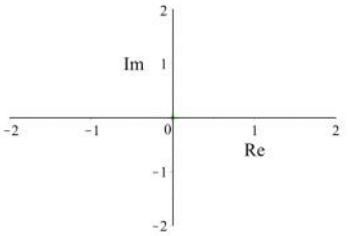
alakú a komplex számok halmazának nevezzük. Egy komplex szám két részre bontható. Az $a+b*I$ komplex szám *a*-val jelölt részét **valós** *b***I*-vel jelölt részét pedig **képzetes** résznek nevezzük. Az előjelek minden esetben hozzátartoznak a mögöttük álló részhez

Ebből adódik az is, hogy a valós számok halmaza a komplex számok halmazának valódi részhalmaza, hiszen minden valós szám előállítható úgy hogy a fenti alakba b helyére 0-át írunk.

Komplex számok ábrázolása

Felmerülhet a kérdés, hogy ha van egy komplex számunk, akkor azt hogyan tudjuk ábrázolni. Valós számok esetén elegendő volt egy számegyenes, ahol középen volt a 0 jobbra illetve balra pedig a pozitív és negatív számok. Komplex számok esetén a számegyenes már nem elég hiszen, ott nem tudjuk ábrázolni a képzetes részt. A problémára a megoldást az jelenti ha bevezetjük a

komplex számsíkot. Nézzük meg a következő ábrán, hogy miről van szó:
complexplot([0 + 0·*I*], -2 ..2, -2 ..2, *style* = *point*, *size* = [0.7, 0.7], *color* = *green*, *labels* = ["Re", "Im"], *labelfont* = ["ROMAN", 15])



Az ábrán zöld rombusszal jelölve látjuk a komplex számsík origóját. A vízszintes tengejen ábrázoljuk a szám valós részét a függőlegesen a képzetest.Ez alapján azt tudjuk mondani hogy a komplex számot egyértelmüen azonosítja a sík azon pontjába mutató helyvektor melynek első koordinátája a valós második koordinátája a képzetes rész. Ezzel a sikkal a felsőfokú matematikaoktatásban még bővebben fogunk foglalkozni.

Utószó

A fentiekkel szerettem volna megkönnyíteni a jelenleg vagy a jövőben 10. osztályos tanulók dolgát. Szeretném felhívni a figyelmet arra, hogy a tananyagból bizonyos részek kimaradtak, annak ellenére, hogy a másodfokú egyenletekkel kapcsolatos lehet. Ennek az az oka, hogy a matematika egyéb fejezetei (melyek önmagukban is megérdemelnének egy külön munkalapot) számtalan módon tartalmazhatnak utalásokat a másodfokú egyenletekre.

Gyakorlásra javasolt irodalom

Sokszínű matematika 10.
Tankönyv
10. évfolyam, x. kiadás (x a legfrissebb kiadás)
Mozaik Kiadó
szerző: Kosztolányi József-Kovács István-Pintér Klára-Urbán János-Dr. Vincze István
terjedelem: 248 oldal

Sokszínű matematika 10. fgy.
Feladatgyűjtemény - megoldásokkal
10. évfolyam, x. kiadás (x a legfrissebb kiadás)
Mozaik Kiadó
szerző: Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Urbán János Dr.
terjedelem: 292 oldal

Felhasznált irodalom

Sokszínű matematika 9.
Tankönyv
9. évfolyam, 11. kiadás (2011.)
Mozaik Kiadó
szerző: Kosztolányi József-Kovács István-Pintér Klára-Urbán János-Dr. Vincze István
terjedelem: 256 oldal

Felhasznált oldalak: 48-55, 90-93, 157-161

Sokszínű matematika 10.
Tankönyv
10. évfolyam, 10. kiadás (2011.)
Mozaik Kiadó
szerző: Kosztolányi József-Kovács István-Pintér Klára-Urbán János-Dr. Vincze István
terjedelem: 248 oldal

Felhasznált oldalak: 58-60,62-64,65,67-77,88-93,103-106

Sokszínű matematika 10.
Feladatgyűjtemény - megoldásokkal
10. évfolyam, (2009.)
Mozaik Kiadó
szerző: Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Dr. Urbán János
terjedelem: 292 oldal

Felhasznált oldalak:32,33,36

http://stuff.uzsolt.hu/edu/math/exams/10/masodfoku_szoveges.pdf (Utolsó megtekintés: 2021.03.31)
http://rs1.szif.hu/~alukacs/info.html A Matematika I. tantárgy tananyaga kidolgozott feladatokkal és ellenőrző kérdésekkel tömörített formában (pdf)(1-4)(1. modul 4. lecke)(Utolsó megtekintés: 2021.03.31)
Konkrét link a tömörített állományhoz:http://rs1.szif.hu/~alukacs/MSTM001/mstm001_konvertalt_pdf.zip(Utolsó megtekintés: 2021.03.31)
http://www.kooperativ.hu/matematika/3_modulleirások-tanár-tanuló-eszköz/2_A_tipus/10-évfolyam/2_Tanári modulok/amat10_6_tanár.pdf(Utolsó megtekintés: 2021.03.31)