

XXIV. reál- és humántudományi erdélyi tudományos diákköri konferencia (ETDK)
Kolozsvár, 2021, május 27-30

Töredezett figyelem: komplex fluktuációk egy
Lotka–Volterra-féle modellben

Szerző:

Rusu András-Pál,

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Fizika Kar, fizika szak, III. év

Témavezető:

dr. Sándor Bulcsú egyetemi adjunktus,

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Fizika Kar, Magyar Fizika Intézet

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	1
2. A modell felépítése	2
2.1. A klasszikus, kompetitív Lotka–Volterra-modell leírása	2
2.1.1. Általánosítás N fajra	3
2.1.2. A rendszer fixpontjai	3
2.2. Módosított Lotka–Volterra-egyenletek: témák versengése a figyelmünkért .	5
2.2.1. Az egyenlet átírása közönséges differenciálegyenletté	6
3. Analitikus eredmények	8
3.1. Az egyenletrendszer adimenzionális alakja	8
3.2. Lineáris stabilitás	9
3.2.1. Fixpontok	9
3.2.2. Linearizáció és a Jacobi-mátrix	10
3.2.3. Sajátértékek	12
3.2.4. Sajátértékek előjele	13
3.2.5. Stabil fixpontok	15
3.2.6. $w = 1$ határeset	16
3.2.7. Analitikus eredmények összefoglalása	17
4. Numerikus eredmények	18
4.1. Egy téma esete: izolált viselkedés	18
4.2. Lehetséges dinamikák: témák népszerűségének fluktuációja több téma esetén	18
4.2.1. 2 téma esete: a $4D$ rendszer dinamikája	19
4.2.2. Fixpontok és határciklusok bifurkációi	20
4.2.3. A koegzisztencia fixpont bifurkációja kis rendszerben	20
4.2.4. Stabil periodikus megoldás eltűnése	21
4.3. Aszimptotikus viselkedés jellemzése a karakterisztikus Lyapunov-kitevő segítségével	23
4.4. Nagyobb rendszerek vizsgálata	25
4.4.1. A C és B tartomány közti átmenet vizsgálata	26
4.4.2. A tranziens káosz átlagos élettartamának kiszámítása	27
4.4.3. A csatolás erősségének szerepe klasszikus LV-egyenletek esetén . . .	29
5. Következtetés	31
6. Jövőbeli célok, előzetes eredmények	32
A. Függelék	33
A.1. Nyulak és bányók	33
A.2. Káosz a klasszikus, kompetitív LV-rendszerben	33
A.3. Blokkmátrix determinánsa	33
A.4. Cirkuláris mátrixok determinánsa	33
A.5. Fixpontok Lyapunov-kitevői	34

Kivonat

A dinamikai rendszerek tudományága sok komplex, időben fejlődő rendszer viselkedését segíthet megérteni. Az utóbbi évtizedekben egyre gyakrabban alkalmazzák sikeresen ösztársadalmi jelenségek, szociális rendszerek vizsgálatára is. A társadalom kollektív figyelme napjainkban töredezettnek mondható, hiszen az internetnek köszönhető szinte valós idejű információáradat az éppen aktuális hírek és beszédtemák gyors váltakozását eredményezi. Nemrég megjelent kutatási eredmények alapján, egy Lotka-Volterra-típusú modell, amely szerint ezek egy közös erőforrásért, a kollektív figyelemért versengenek, jó egyezést mutat internetes aktivitást mérő adatok egyes statisztikai tulajdonságaival. A modellben egy bizonyos témával kapcsolatosan egységnyi idő alatt megjelent tartalom mennyiségét a más témákkal való versengés, illetve ugyanennek a múltban megjelent mennyisége (telítődés) gátolhatja.

Munkánk során megmutatjuk, hogy ezen módosított modellben, a szimmetrikus paraméter-választás esetében a lineáris stabilitás-analízist analitikusan is el lehet végezni, annak ellenére, hogy a fixpontok száma a témák számával exponenciálisan, pontosabban 2^N szerint nő. Innen belátható az is, hogy a fixpont-attraktorokon kívüli más, érdekes viselkedés (határciklus és káosz) a paramétertér egy jól körülhatárolható tartományában jöhet létre. Numerikus vizsgálat során kiderül, hogy a komplex fluktuációk létrejöttében és újra eltűnésében a fixpontok bifurkációi játszanak szerepet. Kis rendszereknél vizsgáljuk ezen bifurkációk skálázási törvényeit, valamint nagyobb rendszernél a tranziens káosz átlagos élettartamára állapítunk meg hatványfüggvényszerű összefüggést. Az aszimptotikus viselkedés jellemzésére a karakterisztikus Lyapunov-kitevőt használjuk. A témák közti csatolást, mint kontrollparaméter függvényében kis rendszereknél a stabil fixpont-attraktorok mellett határciklusokat találunk, nagyobb rendszerek esetén megjelenhet az empirikus adatokra hasonlító, kaotikus dinamika is. Összehasonlítva a klasszikus versengő Lotka-Volterra dinamikával számos érdekes különbséget figyelhetünk meg.

1. Bevezető

A dinamikai rendszerek elmélete sok tudományágban (fizika, kémia, biológia, közgazdaságtan, stb.) alkalmazható, hiszen rengeteg időben fejlődő komplex rendszer leírható matematikai modellek segítségével [1]. A matematikai leíráshoz gyakran leképezéseket vagy nemlineáris differenciálegyenleteket használunk. Jelen dolgozatban egy, az internetes témák figyelemdinamikáját modellező egyenletrendszert vizsgálunk a dinamikai rendszerek módszereivel.

A különböző hírek, beszédtemák aktualitásának tipikus időtartama napjainkban egyre rövidebb és rövidebb [2, 3]. A publikum egyszerre csak véges mennyiségű információt képes befogadni és feldolgozni, az internet korában pedig egyre bonyolultabbá válik az a mechanizmus, amely szerint figyelmünk egyik eseményről a másikra helyeződik át. A társadalom résztvevői és az közösség kollektív figyelméért versengő témák (kulturális termékek, hírek, stb.) közti egyre erősebb csatolás nemcsak ezen témák népszerűségi eloszlásának egyenlőtlenségét növeli (a győztes mindent visz), hanem egyre megjósolhatatlanabbá is teszi [4].

A szociodinamikában a csoportot alkotó egyének döntései és egymásra tett befolyása hozzá létre a kollektív viselkedést [5]. A figyelmet az egyén szintjén olyan kognitív folyamatként határozzák meg, amely során a személy bizonyos mennyiségű erőforrást biztosít valamilyen információ feldolgozására, vagy feladat ellátására [6]. A kollektív figyelmet ezzel szemben a csoport-szintű tartalomfogyasztáshoz tudjuk kötni [7, 3]. Ebben a megközelítésben ez számszerű adattá válik, amit mérhetünk. Az internetes site-okon ugyanis gyakran találni olyan mérőszámot, amely az emberek aktivitását jellemzi (like, hashtag, hozzászólás, megtekintés stb.). A kollektív figyelmet kisebb csoportokban, kísérlet keretein belül is sokszor tanulmányozták [4], azonban az internet olyan közeg ebben a tekintetben, amelyben nagy csoportok természetes viselkedését figyelhetjük meg [7, 8].

A kollektív figyelem dinamikáját egy a Nature Communications szaklapban nemrég megjelent cikkben Lotka-Volterra típusú rendszerrel modellezzük [3]. A javasolt matematikai leírásmódban az időben változó mennyiség a téma "népszerűségét" méri. Ezek között kompetitív jellegű kölcsönhatást feltételez, azaz a témákat egy közös erőforrásért – a kollektív figyelemért – versengő "fajokként" képzei el. A modell alapját a jól ismert kompetitív Lotka-Volterra-egyenletek szolgáltatják, de olyan mechanizmusokat is figyelembe vesz, mint a médiafogyasztók folyamatos újdonságkeresése. Ezért a Lotka-Volterra-egyenletek kiegészítésre kerülnek egy ún. memóriatag által, amely a témák "unalmasságát" jelképezi.

Az említett tudományos munkában nem vizsgálják, hogy hogyan alakul ki az az érdekes fluktuáló dinamika, amely szépen vissza tudja adni a kollektív figyelem dinamikájának néhány statisztikai tulajdonságát. A dolgozat keretében ezt modellt vizsgáljuk tehát a dinamikai rendszerek eszköztárának segítségével analitikus és numerikus módszereket felhasználva. Megmutatjuk, hogy a rendszer fixpontjainak száma aszimptotikusan nő a vizsgált témák számának növelésével, de ennek ellenére a nagyszámú fixpontok lineáris stabilitás-vizsgálata mégis lehetséges. Megvizsgáljuk, milyen lehetséges dinamikák jöhetnek létre a paraméterek függvényében. Azt találjuk, hogy míg a klasszikus rendszer esetében (a vizsgált paraméterekre) a stacionárius állapotban az erőforrások vagy egyenlően osz-

lanak meg a fajok között, vagy csak egy faj populációja marad meg (a többi faj kihal), addig a módosított rendszerben ezeken az aszimptotikus állapotokon kívül kaotikusan és periodikusan fluktuáló dinamika is létrejöhet. Ennek feltérképezésére egy újszerű fázisdiagramot javasolunk, amelyen a legnagyobb Lyapunov-kitevőt ábrázoljuk a paraméterek függvényében. Összehasonlítva a kapott eredményeket a klasszikus versengő Lotka-Volterra-modell dinamikájával további érdekes különbségeket figyelhetünk meg. Kitérünk a fixpontok bifurkációinak vizsgálatára is: kis rendszerekben kimutatjuk a Hopf- és homoklinikus bifurkációra jellemző skálázási törvényeket, valamint nagyobb rendszerben vizsgáljuk a fluktuáló és periodikus dinamika közti átmenetet, a tranziens káosz átlagos élettartamára hatványfüggvényszerű skálázási törvényt állapítunk meg.

2. A modell felépítése

A javasolt modell leírását először a klasszikus Lotka-Volterra-modell (LV) tulajdonságainak ismertetésével kezdjük. Itt bemutatjuk ezen egyenletek alakját, amelyek a már említett cikkben a módosított, internetes témákra szabott modell kiindulópontjául szolgált [3], és összefoglaljuk a szakirodalomban talált, a dinamikai rendszerek szempontjából fontos jellemzőket, eredményeket.

Ezután rátérünk a módosított rendszer tárgyalására, értelmezzük a differenciálegyenlet különböző tagjait a [3]-ból átvett gondolatmenet alapján.

2.1. A klasszikus, kompetitív Lotka–Volterra-modell leírása

A Lotka–Volterra-egyenletrendszert biológiai fajok populációdinamikájának alapmodelljeként tartják számon. Gyakran jelenik meg tankönyvi példa-modellekben, amelyek két vagy több, egymással kölcsönhatásban lévő faj viselkedését írják le [1, 9, 10]. A fajok közötti kölcsönhatás jelenthet egy közös erőforrásért folyó versengést (kompetitív modell), vagy trofikus interakciót is (ragadozó-préda-modell). Ebben a dolgozatban az előbbivel foglalkozunk.

Egy faj populációjának dinamikáját a legyegeyszerűbb feltételezéssel élve a

$$\dot{x}(t) = rx(t) \tag{1}$$

lineáris differenciálegyenlettel írhatjuk le, amelyben $r > 0$ a növekedési ráta, $x(t)$ pedig a populáció számossága a t időpillanatban. Természetesen, mivel a faj számára véges erőforrások állnak rendelkezésre (élettér nagysága, élelem), így olyan $r'(x)$ növekedési rátára van szükség, amely függ az x pillanatnyi értékétől, és 0-at ad (tehát a megáll a növekedés), ha a populáció nagysága elér egy bizonyos K kritikus értéket. Ez a gondolatmenet a logisztikus növekedéshez vezet. Egyetlen faj esetén (izolációban) a populáció eleinte exponenciális növekedést mutat, majd az élettér betöltésének következtében telítődik:

$$\dot{x} = r'(x) \cdot x = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \tag{2}$$

ahol az r a populáció növekedési rátája, K pedig az élettér kapacitása. Látható, hogy a derivált eltűnik, $\dot{x} = 0$, ha $x = x_1^* = K$, vagy ha $x = x_0^* = 0$. Ezek az ún. egyensúlyi pontok vagy fixpontok, amelyek stabilitása (stabil, instabil, esetleg közömbös) egydimenziós, folytonos rendszer esetében meghatározza a rendszer viselkedését.

A kompetitív modellben két, közös és véges erőforrásért versengő faj (x_1, x_2) logisztikus növekedése mellett megjelenik egy-egy extra, a kölcsönhatásért (csatolásért) felelő tag:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1 + c_{12} x_2}{K} \right) \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2 + c_{21} x_1}{K} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Itt c_{12} az x_2 faj hatását jelenti az x_1 -re. Az (3) zárójel értékét így a másik faj x_2 populáció nagysága is fogja csökkenteni, egy bizonyos súllyal. Erre a populációra pedig az előző faj hat vissza, a saját súlyfaktorával. A c_{12}, c_{21} együtthatóknak tehát általános esetben nem kell megegyezniük (ahogy a növekedési rátáknak r_1, r_2 sem), tehát ilyen paraméterválasztásnál a kölcsönhatás nem lesz szimmetrikus. Ilyen általános helyzetre példa lehet két, különböző reprodukciós rátával és termérettel rendelkező faj együttélése (nyulak és bárányok).

2.1.1. Általánosítás N fajra

N fajra általánosítva a fenti egyenletet:

$$\dot{x}_i = r_i x_i \left(1 - \sum_{j=1}^N c_{ij} x_j \right) \quad (4)$$

ahol a $c_{ij} \geq 0$ együtthatók a $\mathbf{C}$ kölcsönhatási mátrix pozitív mátrixelemei. Az c_{ii} önkorlátozó tagok együtthatói általában 1-el egyenlőek. Tehát ebben az esetben minden faj kölcsönhat minden másikkal, ezek súlyát a c_{ij} együtthatók adják meg.

Általános esetben az $\mathbf{C}$ -nek nem kell szimmetrikusnak lennie, és minden x_i fajhoz különböző r_i növekedési ráta tartozhat.

2.1.2. A rendszer fixpontjai

Tekintve egy általános, N dimenziós $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ dinamikai rendszert, a fixpontok (egyensúlyi pontok, ezek a stacionárius állapotokat adják meg) azok az $\mathbf{x}^*$ pontok, amelyek esetén az összes derivált eltűnik, tehát eleget tesznek az $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek. Itt az $\mathbf{x}^*$ a $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$ vektort jelöli, ahol x_i az N -dimenziós rendszer dinamikai változóit jelöli általános esetben. Az egyenletrendszer alakja kibontva:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_1(\mathbf{x}^*) = 0 \\ f_2(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \vdots \\ f_N(\mathbf{x}^*) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Az (4)-es általános rendszer esetében a (6) konkrét egyenletrendszert kell megolda-

nunk:

$$\begin{cases} r_1 x_1 (1 - \sum_{j=1}^N c_{1j} x_j) = 0 \\ r_2 x_2 (1 - \sum_{j=1}^N c_{2j} x_j) = 0 \\ \vdots \\ r_N x_N (1 - \sum_{j=1}^N c_{Nj} x_j) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Mivel az egyes egyenletekben az x_i és egy, az összes változóban lineáris függvény szorzata áll, a fixpontoknak speciális alakjuk lesz. Látható, hogy az $x_i = 0$ mindegyik egyenlet esetében megoldás. Attól függően, hogy az N darab egyenlet közül hányban választjuk a $x_i = 0$ és hányban azt a megoldást, amely a zárójelben lévő tag nullává tételéből származó megoldást, a fixpontokat a következő 3 kategóriába sorolhatjuk:

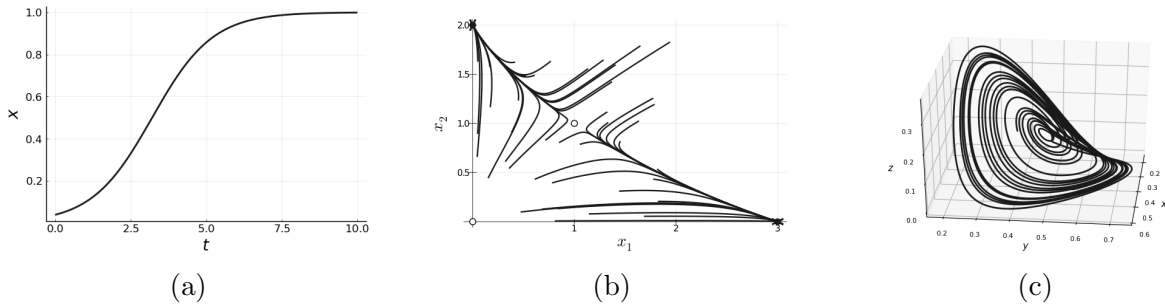
1. $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, origó,
2. $\mathbf{x}^* = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}$, $\mathbf{C}^{-1}$ a kölcsönhatási mátrix inverze, $\mathbf{1}$ pedig N elemű, 1-eseket tartalmazó oszlopvektor,
3. azok az $\mathbf{x}^*$ fixpontok, amelyek esetén legalább egy faj populációja 0.

Egybevetve, ha $M = 0, 1, \dots, N$ darab x_i nem-nulla érték van, az a (6) rendszerre C_N^M kombináció számú megoldás kapható. Így összesen, a rendszernek

$$\sum_{M=0}^N C_N^M = 2^N \quad (7)$$

darab $\mathbf{x}^*$ fixpontja van. Tehát az N rendszermérettel exponenciálisan nő az egyensúlyi pontok száma.

Ha a fajok száma elég nagy ($N \geq 5$), általános kölcsönhatási mátrix esetében a rendszer az összes típusú aszimptotikus viselkedéssel kompatibilis: fixpont, határciklus, tórusz, káosz [11]. Sőt, a szakirodalomban ismert, hogy klasszikus LV-rendszerekben határciklushoz minimum 3, káoszhoz minimum 4 dimenzió szükséges, annak ellenére, hogy általános esetben az előbbihez csak 2, az utóbbi dinamikatípushoz pedig 3 dimenzió szükséges [12] (példáért lásd az 1. ábrát).



1. ábra. (a) logisztikus növekedés ($r = 1, K = 1$). (b) A 2-dimenziós "Nyulak és bárányok"-rendszer fázistere több trajektóriával, amelyek aszimptotikusan a fázistér egyes tengelyein elhelyezkedő fixpontokhoz közelítenek (vagy az egyik, vagy a másik faj él túl). A két faj együttélését jelentő pont itt instabil (lásd: A.1 Függelék). (c) Kaotikus megoldás 4-dimenziós rendszerben (a csatolási mátrix a A.2 függelékben található). Az ábrán az attraktor 3-dimenziós vetülete látható.

2.2. Módosított Lotka–Volterra-egyenletek: témák versengése a figyelmünkért

A fajok közti versengést leíró egyenletek hasznosnak bizonyulhatnak szociális rendszerek modellezésénél is.

Legújabb eredmények szerint az interneten és szociális médiában a különböző témák népszerű válása, feledésbe merülése, majd újrafelbukkanása hasonló dinamikát mutat a közös erőforrásért versengő biológiai fajok viselkedéséhez [3]. Egy módosított, kompetitív Lotka–Volterra-típusú matematikai modell képes reprodukálni a különböző internetes forrásokból gyűjtött, egy-egy téma felkapottságát mérő adatok statisztikai tulajdonságait [3]. A javasolt modellben a fajok szerepét a témák veszik át, amelyek szintén egy közös és véges erőforrásért versengenek, ez ebben az esetben a közösség kollektív figyelme.

Ha egy téma (pl. aktuális vagy közelgő esemény, médiatartalom) népszerűvé válik, nagy körülötte a felhajtás: a médiában egyre több tartalom jelenik meg az adott témával kapcsolatban, amelyek egyre keresettebbek és látogatottabbak, és sokan szeretnék megosztani véleményüket erről.

A faj populációjának számossága helyett a dinamikai változó az L_i , az egységnyi idő alatt megjelent, a témával kapcsolatos tartalom mennyisége, amely jellemzi a téma népszerűségét. A szociális médiából gyűjtött adatok esetén ennek a mérőszáma (proxyja) például lehet azon kommentek, tweetek, cikkek, vagy hashtagek száma, amelyek tartalmazták a téma kulcsszavát (pl. "választások", "döntő", "vakcina") [3].

A versengés mellett, a felkapottság dinamikáját meghatározza még egy fontos mechanizmus. A közönség folyamatosan az újdonságot keresi, ezért azok a témák, amelyek már egy ideje felkapottak, az idő előrehaladtával egyre kevésbé érdekesek. Azaz az egységnyi idő alatt megjelenő tartalom mennyiségét korlátozza saját unalmassága. A modell így figyelembe veszi azt is, hogy a publikum emlékezete véges, így a már régen lejárt és elfelejtett trendek újra megjelenhetnek.

Ezt a mechanizmust a javasolt modell a telítődést okozó ön-korlátozó tag módosításával veszi figyelembe. Pontosabban, a logisztikus növekedés ön-korlátozó tagjában L_i helyére

a

$$\frac{r_c}{K} \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-t')} L_i(t') dt'$$

tag kerül. Látható, hogy így késleltetett differenciálegyenletet kapunk, ugyanis így az L_i deriváltja nemcsak a pillanatnyi értékétől, hanem a múltbeli értékeitől is függeni fog. Az integrál megadja a témával kapcsolatosan eddig megjelent tartalom összmenyiségét. Azonban az exponenciális súlyozás miatt a közelmúltban generált és elfogyasztott mennyiség többet számít, a régmúlt megjelenéseinek kevesebb a hozzájárulásuk. Tehát egy rég elfelejtett (ha L_i értéke egy ideje kicsi, vagy nulla-közeli) témának előnye van az aktuális témákkal szemben.

Az $\alpha > 0$ paraméter a publikum véges memóriáját jellemzi. Jelentőségét az extrém esetekkel lehet érzékelteni: ha $\alpha \rightarrow 0$, az emlékezőképesség végtelen, mivel az exponenciális tag eltűnik. Ekkor a régmúlt és közelmúlt megjelenései ugyanakkora hozzájárulást adnak. Ha $\alpha \rightarrow \infty$, csak az L_i pillanatnyi értéke számít. Az r_c a elfogyasztási ráta, a K pedig a klasszikus kapacitás.

A javasolt modellben a módosított Lotka–Volterra-egyenlet alakja N téma esetén tehát:

$$\dot{L}_i = r_p L_i \left(1 - \frac{r_c}{K} \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-t')} L_i(t') dt' - c \sum_{i \neq j}^N L_j \right). \quad (8)$$

Megjegyezzük, hogy ez nem a legáltalánosabb alak. Ebben az egyszerűbb esetben az egyes témákhoz tartozó növekedési ráták megegyeznek, a egymással való kölcsönhatás súlyfaktorai mind ugyanazok, sőt, a memóriatagok együtthatói is minden egyenletben azonosak. A rendszer ezen szimmetriái nagyban megkönnyítik úgy az analitikus számításokat, mint a dinamikai rendszer számítógépes implementációját.

2.2.1. Az egyenlet átírása közönséges differenciálegyenletté

A fenti késleltetett differenciálegyenletet átírhatjuk 2 közönséges differenciálegyenlet-párra a [3] alapján. Változócsere alkalmazva:

$$\int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-t')} L_i(t') dt' = Y_i, \quad t - t' = \tau \quad (9)$$

Felhasználva, hogy: $dt' = -d\tau$,

$$\begin{aligned} Y_i &\equiv \int_0^\infty e^{-\alpha(\tau)} L_i(t - \tau) d\tau \Rightarrow \frac{dY_i}{dt} = \int_0^\infty e^{-\alpha(\tau)} \frac{dL_i(t - \tau)}{dt} d\tau = \\ &= - \int_0^\infty e^{-\alpha(\tau)} \frac{dL_i(t - \tau)}{d\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Parciális integrálás után:

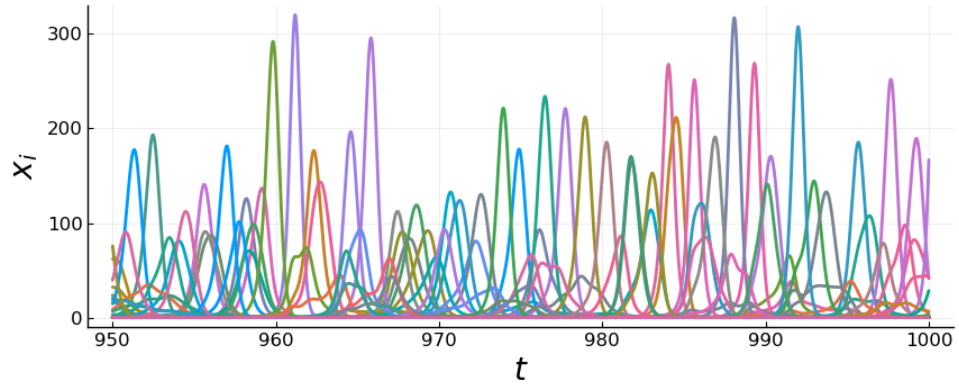
$$\frac{dY_i}{dt} = -e^{-\alpha\tau} L_i(t - \tau) \Big|_0^\infty - \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha(\tau)} L_i(t - \tau) d\tau = L_i(t) - \alpha Y_i.$$

Tehát a két egyenlet:

$$\begin{aligned}\dot{L}_i &= r_p L_i \left(1 - \frac{r_c}{K} Y_i - c \sum_{j \neq i} L_j \right) \\ \dot{Y}_i &= L_i - \alpha Y_i.\end{aligned}\tag{10}$$

Az Y_i bevezetésével mindegyik L_i változóhoz egy további Y_i változó társul, ezért rendszer dimenziója N téma esetén $2N$.

Ahogy az eredeti cikkben is megmutatták, a fenti N darab (10) egyenletpárból álló rendszer a valós adatok gyorsan fluktuáló idősorai képes imitálni (lásd a 2. ábrán).



2. ábra. Komplex fluktuáló idősor (értsd: gyorsan változó, nem-periodikus idősor). A paraméterek: $N = 300$, $r_p = r_c = 9$, $\alpha = 0.005$, $c = 2.4$, $K = 1.0$ rendszerben, amit a Twitter-ről gyűjtött adatokkal vetettek össze.

3. Analitikus eredmények

3.1. Az egyenletrendszer adimenzionális alakja

A figyelemdinamika modell (10) alakjában 5 paramétert tartalmaz. r_p a növekedési ráta, r_c/K a telítődési ráta, K a klasszikus kapacitás, c a csatolás erőssége, α a memóriatagból származó paraméter, amely a közönség véges memóriáját jellemzi. r_c, r_p, K határozzák meg a növekedés felső határát. Mivel a témaszám növelésével csatolási tag is nőne, ezért az ezt skálázó c paramétert is ennek megfelelően kellene módosítani. Ezt elkerülhetjük, ha az összeg helyett a többi téma átlagértékével dolgozunk:

$$\begin{aligned}\dot{L}_i &= r_p L_i \left(1 - \frac{r_c}{K} Y_i - \frac{C}{N-1} \sum_{j \neq i} L_j \right) \\ \dot{Y}_i &= L_i - \alpha Y_i\end{aligned}$$

ahol $C = c(N-1)$.

Bevezetjük az új $x = L_i/\lambda$ és $y = Y_i/\eta$ dimenzió nélküli dinamikai változókat:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= r_p x_i \left(1 - \frac{r_c}{K} \eta y_i - \frac{C\lambda}{N-1} \sum_{j \neq i} L_j \right) \\ \dot{y}_i &= \frac{\lambda}{\eta} x_i - \alpha y_i,\end{aligned}$$

itt a λ és η szabadon megválaszthatóak.

Egy bizonyos

$$\lambda = \frac{K}{r_c + \alpha K C}, \quad \eta = \frac{\alpha K}{r_c + \alpha K C} \quad (11)$$

megválasztással lehetséges úgy új alakba írni az egyenleteket, hogy az y_i és az $\bar{x}_i$ tagok együtthatóiban ugyanaz a paraméter szerepeljen.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= g x_i [1 - (1-w)y_i - w\bar{x}_i] \\ \dot{y}_i &= x_i - y_i,\end{aligned} \quad (12)$$

ahol

$$w = \frac{1}{1 + r_c/\alpha K C}, \quad g = r_p, \quad \bar{x}_i = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} x_j.$$

Itt w és g az új, átskálázott rendszerleíró paraméterek. Így lehetséges az ön-korlátozás (unalmasság) és az egymás közti versengés jelentőségét egyetlen, közös paraméterrel befolyásolni, és ezek szerepét összehasonlítani. A $w = 0.5$ értékre a kompetíció és unalmasság ugyanolyan fontosak, míg $w = 0$ az izolált esetet, $w = 1$ a kizárólag kompetitív esetet jelenti.

3.2. Lineáris stabilitás

Általánosan N darab témára ($i = 1, 2, \dots, N$) a differenciálegyenlet-rendszerünk az egyes (x_i, y_i) változópárokra felírt egyenletekből áll:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= gx_i [1 - (1 - w)y_i - w\bar{x}_i] \\ \dot{y}_i &= x_i - y_i\end{aligned}\tag{13}$$

Figyeljük meg, hogy N darab téma esetén N egyenletpár van ($2N$ egyenlet) és az y_i deriváltja az x változók közül csak az x_i -től függ. A számítás hosszadalmas, az eredményeket a 3.2.7 rész foglalja össze.

3.2.1. Fixpontok

Ebben az esetben a fixpontokat a következő egyenletrendszer megoldásával kaphatók meg:

$$\begin{aligned}gx_i [1 - (1 - w)y_i - w\bar{x}_i] &= 0 \\ x_i - y_i &= 0\end{aligned}\tag{14}$$

A klasszikus Lotka-Volterra-rendszer fixpontjainál már tárgyaltuk, hogy milyen alakja lehet a (6) egyenletrendszer megoldásainak. Itt is hasonló a feladat. Az első egyenlet kétféleképpen teljesülhet, ha $x_i^* = 0$ vagy $[1 - (1 - w)y_i^* - w\bar{x}_i^*] = 0$. A második egyenletből következik, hogy a fixpontban $x_i^* = y_i^*$.

Azon (x_i, y_i) változópárok száma, amelyek esetén zárójeles tag tűnik el, legyen M . Ekkor $N - M$ darab pár 0. Az M darab zárójelben lévő tagot nullává téve a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}1 - (1 - w)y_1^* - w\bar{x}_1^* &= 0 \\ 1 - (1 - w)y_2^* - w\bar{x}_2^* &= 0 \\ &\vdots \\ 1 - (1 - w)y_M^* - w\bar{x}_M^* &= 0\end{aligned}\tag{15}$$

Kibontva a $\bar{x}_i^*$ tagot, és mivel a fixpontban $x_i^* = y_i^*$:

$$\begin{aligned}(1 - w)x_1^* + \frac{w}{N - 1}(x_2^* + x_3^* + \dots + x_M^*) &= 1 \\ (1 - w)x_2^* + \frac{w}{N - 1}(x_1^* + x_3^* + \dots + x_M^*) &= 1 \\ &\vdots \\ (1 - w)x_M^* + \frac{w}{N - 1}(x_1^* + x_2^* + \dots + x_{M-1}^*) &= 1\end{aligned}\tag{16}$$

A fenti lineáris egyenletrendszer mátrix alakban felírva:

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & & \dots & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_M^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\tag{17}$$

ahol $a = 1 - w$ és $b = w/(N - 1)$. A rendszer megoldása csak akkor egyértelmű, ha

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & & \dots & a \end{vmatrix} \neq 0 \quad (18)$$

ami igaz $\forall a \neq b$ esetén. Tehát ekkor van egyértelmű megoldás, és ennek olyan kell lennie, hogy $x_1^* = x_2^* = \dots = x_M^* = x^*$:

$$\begin{aligned} 1 - (1 - w)x^* - \frac{w}{N - 1}(M - 1)x^* &= 0, \\ x^* &= \frac{1}{1 + w_M - w_N}, \end{aligned} \quad (19)$$

ahol bevezettük a $w_M = wM/(N - 1)$ és $w_N = wN/(N - 1)$ jelöléseket.

Hogy ezt belássuk, tegyük fel, hogy a fixpontban az M darab x változó felvehet különböző értékeket: $x_1^* \neq x_2^* \neq \dots \neq x_M^*$. Ha bármelyik két egyenletet kivonjuk egymásból:

$$(x_i^* - x_j^*)(a - b) = 0 \quad (20)$$

Mivel $x_i^* \neq x_j^* \Rightarrow a = b$ ami viszont ellentmond az előző $a \neq b$ feltételnek. Tehát fixpontban az N db. (x_i, y_i) pár közül $N - M$ darab nulla és M nem-nulla.

$$\begin{aligned} (x_i, y_i) &= (x^*, x^*), & i &= 1, 2, \dots, M, \text{ és} \\ (x_i, y_i) &= (0, 0), & i &= M + 1, \dots, N \end{aligned}$$

Adott M esetén N párból C_M^N -féleképpen választhatók ki a nem-nulla párok, így az M egy C_M^N elemű fixpontcsaládot határoz meg. Összesen, a fixpontok száma újból $\sum_{M=0}^N C_M^N = 2^N$.

Nem mellesleg, az $a = b$ azt jelentené, hogy $1 - w = \frac{w}{N-1}$, amiből következik, hogy $w = \frac{N-1}{N}$. Tehát a tanulmányozott rendszernek 2^N fixpontja van, ha a w paraméter értéke kisebb, vagy nagyobb ennél az értéknél, ha pedig egyenlő ezzel az értékkel, akkor a meglévő fixpontok mellett megjelenik még végtelen darab fixpont (a fixpontban nem-nulla változópárokat megadó rendszer határozatlan lesz), tehát a rendszer elfajult lesz.

3.2.2. Linearizáció és a Jacobi-mátrix

A fixpontok stabilitását a rendszernek a fixpontokhoz közeli viselkedése határozza meg. Ezt tanulmányozhatjuk a rendszer linearizált változatával, ami általánosan

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \delta \mathbf{x}$$

alakban írható, ahol a $\delta \mathbf{x}$ a fixponttól mért infinitezimális perturbáció, a $\mathbf{J}$ a Jacobi-mátrix. A Jacobi-mátrix λ sajátértékei (valós részeinek előjele) dönti el, hogy az egyes sajátvektorok által meghatározott irányokban a trajektória közeledik (stabil irány), vagy távolodik a fixponttól (instabil irány). Ha $\text{Re}(\lambda) > 0$, a hozzá tartozó irány instabil, ha

$Re(\lambda) < 0$ az irány stabil. Ha $Re(\lambda) = 0$, a fixpont nem hiperbolikus, a stabilitás nem mindig dönthető el lineáris stabilitás-vizsgálattal.

A könnyebb kezelhetőség érdekében a Jacobi-mátrixot úgy építjük fel, hogy a $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N)$ rendezés helyett a $(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N)$ rendezést használjuk. A fixpontban, a x és y változók között is bizonyos sorrendet feltételezünk:

$$\begin{aligned} x_i^* &= y_i^* = 0 & i &= 1, \dots, N - M \\ x_i^* &= y_i^* = x^* & i &= N - M + 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Tehát előbb a nulla, utánuk pedig a nem-nulla változók szerepelnek külön az x -ek és külön az y -ok sorrendjében is.

A $2N \times 2N$ Jacobi-mátrix a következő alakot veszi fel:

$$J = \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \right) & \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial y_j} \right) \\ \hline \left(\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial x_j} \right) & \left(\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_j} \right) \end{array} \right) \quad (21)$$

A mátrixban mindegyik blokk $N \times N$ -es négyzetes mátrix. A parciális deriváltakat kiszámítva adódnak a következő mátrixelemek :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \right|_{i \neq j} &= \frac{-gw}{N-1} x_i, & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} &= g[1 - (1-w)y_i - w\bar{x}_i], \\ \left. \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial y_j} \right|_{i \neq j} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial y_i} &= -g(1-w)x_i, \\ \left. \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial x_j} \right|_{i \neq j} &= 0, & \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} &= 1, \\ \left. \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_j} \right|_{i \neq j} &= 0, & \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_i} &= -1. \end{aligned}$$

Ezeket kiértékeljük a fixpontban és a fent említett sorrendben beírjuk a $2N \times 2N$ -es Jacobi-mátrixba:

$$J = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{I}_N & -\mathbf{I}_N \end{array} \right) \quad (22)$$

Ahol az egyenként $N \times N$ -es $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ blokkmátrixok pedig a következő alakba írhatók:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} a_1 \mathbf{I}_{N-M} & \mathbf{0}_{N-M,M} \\ \hline a_2 \mathbf{1}_{M,N-M} & a_2 (\mathbf{1}_M - \mathbf{I}_M) \end{array} \right) \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{N-M} & \mathbf{0}_{N-M,M} \\ \hline \mathbf{0}_{M,N-M} & b \mathbf{I}_M \end{array} \right) \quad (23)$$

Itt bevezettük a következő jelöléseket:

$$a_1 = g(1 - w_M x^*), \quad a_2 = -\frac{gwx^*}{N-1}, \quad b = g(w-1)x^*,$$

$\mathbf{I}_N$ pedig az $N \times N$ -es egységmátrixot jelöli.

3.2.3. Sajátértékek

A Jacobi-mátrix sajátértékeit a sajátérték-egyenletből számíthatjuk ki:

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}_{2N}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_N & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{I}_N & -\mathbf{I}_N - \lambda \mathbf{I}_N \end{array} \right) = 0.$$

A fenti determináns kiszámításához használunk egy blokkmátrixokra vonatkozó tulajdonságot (lásd: A.3 Függelék):

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}_{2N}) = \det(\mathbf{I}') \cdot \det(\mathbf{A}' - \mathbf{B} \mathbf{I}'^{-1} \mathbf{I}_N) = (1 - \lambda)^N \cdot \det(\mathbf{F}), \quad (24)$$

ahol az egyszerűség kedvéért bevezettük az $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_N$, $\mathbf{I}' = -\mathbf{I}_N - \lambda \mathbf{I}_N$ és $\mathbf{F} = \mathbf{A}' - \mathbf{B} \mathbf{I}'^{-1} \mathbf{I}_N$ jelöléseket. A mátrixműveletek elvégzése után az $\mathbf{F}$ alakja blokkmátrixként felírva:

$$\mathbf{F} = \left(\begin{array}{c|c} (a_1 - \lambda) \mathbf{I}_{N-M} & \mathbf{0}_{N-M, M} \\ \hline a_2 \mathbf{1}_{M, N-M} & a_2 (\mathbf{1}_M - \mathbf{I}_M) + a_\lambda \mathbf{I}_M \end{array} \right)$$

ahol $a_\lambda = -\lambda - bc/(1 - \lambda)$. A $\det(\mathbf{F})$ kiszámítására is használhatjuk a fenti tulajdonságot, így:

$$\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{G}) \cdot \det((a_1 - \lambda) \cdot \mathbf{I}_{N-M}) \quad (25)$$

ahol $\mathbf{G} = a_2 (\mathbf{1}_M - \mathbf{I}_M) + a_\lambda \mathbf{I}_M$. Kibontva:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a_\lambda & a_2 & \dots & a_2 \\ a_2 & a_\lambda & \dots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \dots & a_\lambda \end{pmatrix}$$

A $\mathbf{G}$ $M \times M$ -es mátrix kezelhető cirkuláris mátrixként, ennek tulajdonságait felhasználva a G determinánsra a következő adódik (lásd: A.4 Függelék) [13]:

$$\det(\mathbf{G}) = [a_\lambda + a_2(M - 1)] \cdot (a_\lambda - a_2)^{M-1} \quad (26)$$

A (24)-es, (25)-es, majd (26)-os összefüggések felhasználásával megkapjuk a sajátértékegyenletet:

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}_{2N}) = (1 - \lambda)^N \cdot (a_1 - \lambda)^{N-M} \cdot [a_\lambda + a_2(M - 1)] \cdot (a_\lambda - a_2)^{M-1}$$

ahol a sajátértékeket a szorzat tagjaiból határozzuk meg. Mivel $a_\lambda = -\lambda - bc/(1 - \lambda)$, $\lambda \neq 1$. A szorzat első tagjából $(1 - \lambda)^M$ -el átszorozunk, hogy megszüntessük a szingularitást az utolsó két tagban. Használva a $a_3 = -a_2(M - 1)$ jelölést:

$$(1 - \lambda)^{N-M} \cdot (a_1 - \lambda)^{N-M} \cdot (1 - \lambda)(a_\lambda - a_3) \cdot [(1 - \lambda)(a_\lambda - a_2)]^{M-1} = 0. \quad (27)$$

Ebből az egyenletből a szorzat tagjaiból megkapjuk a keresett sajátértékeket:

$$\begin{aligned}\lambda_i &= -1, \quad i = 1, \dots, N - M \\ \lambda_j &= g(1 - w_M \cdot x^*), \quad j = N - M + 1, \dots, 2(N - M) \\ \lambda_k &= \frac{1}{2} \left[-(1 + a_2) \pm \sqrt{(1 + a_2)^2 + 4(b - a_2)} \right], \quad k = 2(N - M) + 1, \dots, 2N - 2 \\ \lambda_l &= \frac{1}{2} \left[-(1 + a_3) \pm \sqrt{(1 + a_3)^2 + 4(b - a_3)} \right], \quad l = 2N - 1, 2N,\end{aligned} \quad (28)$$

ahol az $(1 - \lambda)^{N-M}$, $(a_1 - \lambda)^{N-M}$, $[(1 - \lambda)(a_\lambda - a_2)]^{M-1}$ illetve a $(1 - \lambda)(a_\lambda - a_3)$ tagokból származó megoldásokat rendre i, j, k, l indexekkel jelöltük. Az, hogy ezek milyen sorrendben vannak kevésbé számít, inkább ezen tagok hatványkitevőiből meghatározható létezési feltételek lényegesek. Mivel ezek a kitevők függenek M -től, nem minden fixpont-család esetén lesz jelen mind a 4 típus, de minden esetben összesen $2N$ sajátértéknek kell lennie.

3.2.4. Sajátértékek előjele

Ahhoz, hogy meg tudjuk határozni a különböző fixpont-családok stabilitási feltételeit, a továbbiakban megvizsgáljuk a $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k, \lambda_l$ típusú sajátértékek valós részeinek előjelét. Ehhez felhasználjuk a gyökök tartalmazó tagoknál, hogy $\lambda = a + \sqrt{a^2 + b}$ valós része akkor biztosan negatív előjelű, ha $a < 0$ és $b < 0$.

λ_i sajátértékek $i = 1, \dots, N - M$, tehát λ_i akkor nem létezik, ha $N = M$.

$$\lambda_i = -1 < 0, \quad \forall M \neq N.$$

λ_j sajátértékek $j = N - M + 1, \dots, 2(N - M)$, tehát λ_j szintén akkor nem létezik, ha $N = M$.

$$\begin{aligned}\lambda_j &= g(1 - w_M \cdot x^*), \\ \lambda_j &< 0 \Leftrightarrow w > \frac{N - 1}{N}, \quad \forall M \neq N.\end{aligned}$$

λ_k sajátértékek $k = 2(N - M) + 1, \dots, 2N - 2$, λ_k akkor létezik, ha $M \geq 2$

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \left[-(1 + a_2) \pm \sqrt{(1 + a_2)^2 + 4(b - a_2)} \right]$$

Az első tag előjele:

$$\begin{aligned}a_2 + 1 &= -\frac{gwx^*}{N - 1} + 1 > 0 \\ \frac{gw}{N - 1 + w(M - N)} &< 1 \Rightarrow \\ w &< \frac{N - 1}{g + (N - M)}\end{aligned} \quad (29)$$

Az gyök alatti kifejezés második tagjának előjele:

$$\begin{aligned}
 b - a_2 &= g(w - 1)x^* + \frac{gwx^*}{N - 1} = \\
 &= gx^* \left(\frac{wN}{N - 1} - 1 \right) < 0 \Rightarrow \\
 w &< \frac{N - 1}{N}
 \end{aligned} \tag{30}$$

Tehát $Re(\lambda_k) < 0$ ha (29) és (30) teljesülnek.

λ_l **sajátértékek** $l = 2N - 1, 2N$, λ_l akkor létezik, ha $M \neq 0$

$$\lambda_l = \frac{1}{2} \left[-(1 + a_3) \pm \sqrt{(1 + a_3)^2 + 4(b - a_3)} \right]$$

Az első tag előjelére kapjuk, hogy:

$$a_3 + 1 = -a_2(M - 1) + 1 = \frac{wx^*}{N - 1}(M - 1) + 1 > 0 \quad \forall M \geq 1$$

Az gyök alatti kifejezés második tagjának előjele:

$$\begin{aligned}
 b - a_3 &= g(w - 1)x^* - \frac{gwx^*}{N - 1}(M - 1) = \\
 &= gx^* \left[\frac{w(N - M)}{N - 1} - 1 \right] < 0 \Rightarrow \\
 w &< \frac{N - 1}{N - M}
 \end{aligned} \tag{31}$$

Tehát $Re(\lambda_l) < 0$ ha (31) teljesül.

A fenti eredményeket összegezve a 1 táblázatban láthatjuk.

1. táblázat. A fixpontokhoz tartozó sajátértékek létezési és stabilitási feltételei.

	Létezési feltétel	$Re(\lambda < 0)$
λ_i	$M < N$	mindig
λ_j	$M < N$	$w > \frac{N-1}{N}$
λ_k	$M \geq 2$	$w < \frac{N-1}{g+N-M}$ és $w < \frac{N-1}{N}$
λ_l	$M \neq 0$	$w < \frac{N-1}{N-M}$

3.2.5. Stabil fixpontok

A rendszer fixpontjai közül csak azok lehetnek stabilak, amelyek esetén vagy a λ_j , vagy a λ_k típusú sajátérték nem létezik. Ha ugyanis egyszerre léteznek, a stabilitási feltételek kölcsönösen kizárják egymást (lásd 1. táblázatot).

Legyen $M \geq 2$ és $M \neq N$ ($\Rightarrow N > 2$), tehát mindkét (λ_j és λ_k) típusú sajátérték jelen van. Az előző részben láttuk, hogy:

$$\begin{aligned}\lambda_j < 0 &\Rightarrow w > \frac{N-1}{N} \\ \lambda_k < 0 &\Rightarrow w < \frac{N-1}{N} \quad \text{és} \quad w < \frac{N-1}{g+(N-M)}.\end{aligned}$$

Tehát ha egy adott fixpont-család esetén (adott M esetén) ez a két típus egyszerre létezik, akkor ezek a fixpontok nem lehetnek stabilak, ugyanis a lineáris stabilitáshoz mindegyik sajátértéknek negatívnak kell lennie. Két eset lehetséges tehát:

1. Nem létezik a λ_k típus $\Rightarrow M = 0, 1$. Mivel az origó esetében ($M = 0$) $\lambda_j = g$, ez mindig nyeregpont lesz.

Az $M = 1$ fixpontokra (ezek száma N) felírva a feltételeket:

$$\begin{aligned}\lambda_i &< 0 \\ \lambda_j &< 0 \Leftrightarrow w > \frac{N-1}{N} \\ \lambda_l &< 0 \Leftrightarrow w < 1\end{aligned}$$

Vagyis ezek a fixpontok stabilak, ha $w \in (\frac{N-1}{N}, 1)$. Ezek azokat a fixpontokat jelentik, amelyeknél egy változó marad nemnulla, másképpen fogalmazva ez az egy téma nyeri meg a figyelemért folyó versenyt. Ezt a típusú fixpontot hívjuk **egy-téma fixpontnak**.

2. Nem létezik a λ_j típus $\Rightarrow M = N$. Az $M = N$ fixpontra (ebből egy van), azaz $p^* = (x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1 \dots x_N = 1, y_1 = 1, y_2 = 1, \dots y_N = 1)$:

- λ_i nem létezik
- $\lambda_l < 0 \Leftrightarrow w < 1$
- $\lambda_k < 0$
 - ha $g > M = N \Rightarrow w < \frac{N-1}{g+N-M} = \frac{N-1}{g}$
 - ha $g < N \Rightarrow w < \frac{N-1}{N}$

Vagyis ez a fixpont stabil, ha $w \in (0, \frac{N-1}{g})$, abban az esetben, ha $g > N$, és ha $w \in (0, \frac{N-1}{N})$, abban az esetben ha $g < N$. Ezek azt a fixpontot jelenti, amelynél egy változó sem nulla, másképpen fogalmazva mindegyik téma ugyanannyi figyelmet fog kapni. Ezt a típusú fixpontot hívjuk **koegzisztencia fixpontnak**.

Összességében, a stabilitási intervallumok a 0 és 1 között mozgó w kontrollparaméter függvényében kifejezve a következőképpen néznek ki:

$$\begin{aligned} \text{Ha } g > N : \quad & \mathbf{p}_{M=N}^* \rightarrow w \in (0, \frac{N-1}{g}) \\ & \mathbf{p}_{M=1}^* \rightarrow w \in (\frac{N-1}{N}, 1) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \text{Ha } g < N : \quad & \mathbf{p}_{M=N}^* \rightarrow w \in (0, \frac{N-1}{N}) \\ & \mathbf{p}_{M=1}^* \rightarrow w \in (\frac{N-1}{N}, 1) \end{aligned} \quad (33)$$

3.2.6. $w = 1$ határeset

A $w \rightarrow 1$ határesetben az y memóriaváltozó együttthatója eltűnik, így az x_i -re vonatkozó egyenlet mostmár nem függ a neki megfelelő memóriaváltozótól. Az x_i változókból álló rendszer továbbra is csatolt marad, de mivel már nincs ön-gátló tag, az egyenletrendszer egy klasszikus, instabil Lotka-Volterra lesz, amelynek versengési mátrixának diagonális elemei nullák lesznek.

Továbbá, ha a határesetbeli szétcsatolt rendszert vizsgáljuk, az egy-faj fixpontok nem léteznek. Ez az általános rendszer fixpontjainak kiszámításából is látszik, ugyanis ha M darab nem-nulla x_i változónk van, a fixpont értéke:

$$x^* = \frac{1}{1 + wM/(N-1) - wN/(N-1)}$$

In the case of single-species equilibria ($M = 1$):

$$x^* = \frac{1}{1 - w}$$

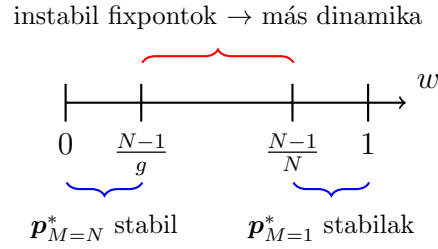
ami divergál, ha $w = 1$, tehát nem definiált. Visszatérve a határesetbeli rendszerre, az egy-faj fixpont esetén ($M = 1$ ahol $x_1 \neq 0, x_2 = 0 = \dots = x_N = 0$) azt kapjuk hogy:

$$\dot{x}_1 = gx_1 \left[1 - \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} x_j \right] = gx_1$$

Ami egy instabil egyenlet, hiszen $g > 0$.

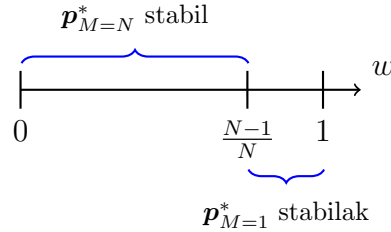
3.2.7. Analitikus eredmények összefoglalása

A fixpontok stabilitására g növekedési ráta szerint két esetet különböztethetünk meg aszerint, hogy ez nagyobb, vagy kisebb mint a rendszer témáinak száma N . A (32) feltételek alapján a tárgyalt egy-téma és koegzisztencia fixpontcsaládok, azaz $\mathbf{p}_{M=1}^*$, és $\mathbf{p}_{M=N}^*$ stabilitási intervallumai a w függvényében egy olyan szakaszt zárnak közre, amelyben egy stabil fixpont sincs (lásd a 3. ábrát). Ebben a paraméter-intervallumban várható más dinamika (határciklus, káosz).



3. ábra. Stabilitási intervallumok $g > N$ esetben.

Az (33) feltételek alapján pedig ez a két intervallum összeér, tehát nincs olyan intervallum, amelyben ne lenne legalább egy stabil fixpont (lásd a 4. ábrát).



4. ábra. Stabilitási intervallumok $g < N$ esetben.

Ez az utóbbi eset tehát nem különösebben érdekes, hiszen a numerikus vizsgálat során kiderül, hogy a stabil fixpontok globális attraktorok, és ettől eltérő viselkedés a rendszerben csak az előző (32) feltételek esetén jelenhet meg az említett $w \in (\frac{N-1}{g}, \frac{N-1}{N})$ intervallumban. Ezért a továbbiakban végig ezt a $g > N$ esetet vizsgáljuk.

4. Numerikus eredmények

A rendszer aszimptotikus viselkedését numerikusan is tanulmányozzuk. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy hogyan befolyásolják a kapott dinamikát a (w, g) paraméterek, illetve a témák száma (N) . Itt ugyancsak fontos kérdés, hogy milyen rendszerméret és paraméterértékek esetén kapunk olyan komplex fluktuációkat (lásd: 2. ábra), amelyek hűen modellezhetik az empirikus eredményeket [3].

A vizsgálat során felhasználjuk az előző részben tárgyalt analitikus eredményeket, illetve néhány, a dinamikai rendszerek tanulmányozása során gyakran használt numerikus módszert, mint a Lyapunov-kitevők [14].

4.1. Egy téma esete: izolált viselkedés

Egy téma esetén a csatolás $w = 0$. Ez megfelel az izolált viselkedésnek, vagyis amikor a csatolás 0, N darab (x, y) egymástól független változópár marad. Az egyenletek alakja így:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= gx(1 - y) \\ \dot{y} &= x - y\end{aligned}\tag{34}$$

Ennek a 2 dimenziós rendszernek 2 fixpontja létezik és az ehhez tartozó sajátértékek a következők:

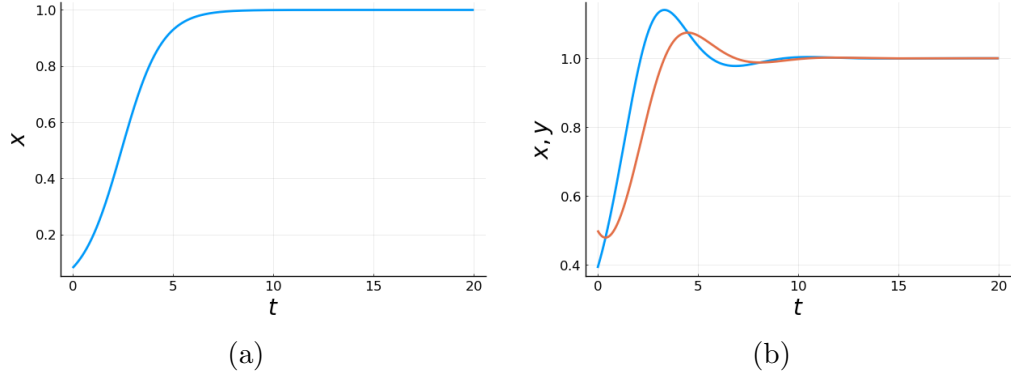
- $p_0^* = (0, 0)$ nyeregpont: $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = g > 0$
- $p_1^* = (1, 1)$ stabil fókusz, ha $g > 1/4$, és stabil csomópont, ha $g \in (0, \frac{1}{4}]$:
 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 - 4g}) < 0$

Tehát az egyetlen attraktor a $p_1^* = (1, 1)$ fixpont, amely mindig stabil. Ebből a szempontból nem különbözik a klasszikus LV izolált esetétől (egyszerű logisztikus populációdinamika), amelynél szintén 2 fixpont létezik, az $x^* = 0$ (instabil) és $x^* = 1$ (stabil). A két rendszert összehasonító idősorok 5. ábrán láthatóak.

4.2. Lehetséges dinamikák: témák népszerűségének fluktuációja több téma esetén

Az analitikus számolás során láttuk, hogy kétféle stabil fixpont jelenhet meg a rendszerben: ahol az összes változó 1-el egyenlő ($M = N$), vagy ahol csak 1 darab x változó x^* -el egyenlő ($M = 1$), a többi 0. Az előbbi fixpont stabilitási intervalluma és bifurkációs kulcsszerepet játszanak a másfajta dinamikák létrejöttében.

Növelve a rendszer méretét (tehát minél több téma verseng egymással), a $p^* = (1, 1 \dots 1)$, azaz a $M = N$ fixpont stabilitásvesztése (bifurkációja) után egyre komplexebb fluktuációkat kapunk.



5. ábra. **(a)** A klasszikus LV izolált esete: logisztikus növekedés ($r = 1, K = 1$). **(b)** A módosított LV izolált esete ($g = 1$). Ez már 2 dimenziós rendszer, ezért a csomópont helyett fókuszpont is megjelenhet. Látható, ahogy a x -et a y memóriaváltozó fáziskéséssel követi.

4.2.1. 2 téma esete: a 4D rendszer dinamikája

A klasszikus, kompetitív LV-egyenletek két fajra felírva egy 2 dimenziós rendszert adnak.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= rx_1[1 - x_1 - c_{12}x_2] \\ \dot{x}_2 &= rx_2[1 - x_2 - c_{21}x_1] \end{aligned} \quad (35)$$

Tipikusan, a fenti rendszerben nem alakul ki oszcilláció (stabil vagy nem stabil periodikus trajektórák). Megjegyezzük, hogy ragadozó-préda típusú egyenletekben létrejöhet oszcilláció, azonban ezek nem izolált pályák, tehát nincs határciklus attraktor a rendszerben (az $(1, 1)$ egyensúlyi pont itt centerként viselkedik) [1].

Rátérve 2 téma memóriafüggő versengésére, az egyenletek a következő alakba írhatók:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= gx_1[1 - (1 - w)y_1 - wx_2], & \dot{y}_1 &= x_1 - y_1 \\ \dot{x}_2 &= gx_2[1 - (1 - w)y_2 - wx_1], & \dot{y}_2 &= x_2 - y_2 \end{aligned} \quad (36)$$

Ekkor összesen 4 fixpont létezik, ezek a $\mathbf{p}_M^*$ jelöléssel és a $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ rendezéssel felírva:

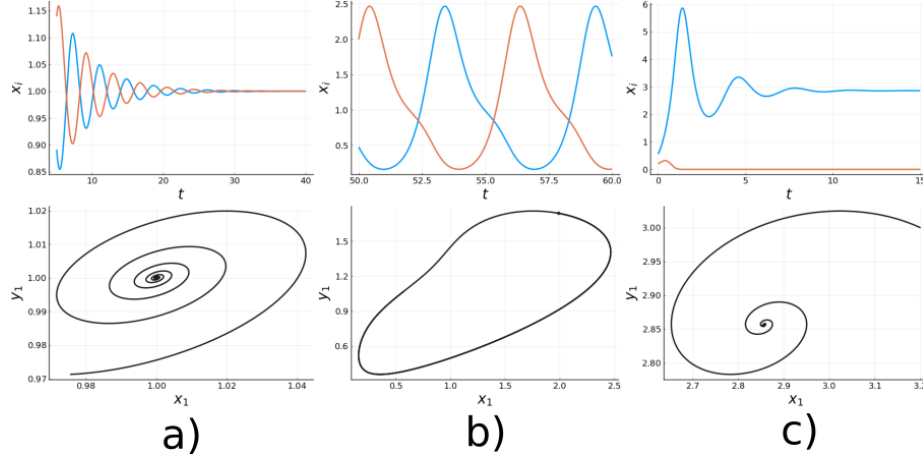
- 1 darab, amelyre $M = 0 \rightarrow \mathbf{p}_0^* = (0, 0, 0, 0)$
- 2 darab, amelyre $M = 1 \rightarrow \mathbf{p}_{11}^* = (x^*, x^*, 0, 0), \mathbf{p}_{12}^* = (0, 0, x^*, x^*)$
- 1 darab, amelyre $M = N = 2 \rightarrow \mathbf{p}_2^* = (1, 1, 1, 1)$

Legyen $g > N$. Az analitikus számolásból már előzőleg megkaptuk az $M = N$ és $M = 1$ fixpontok stabilitási feltételeit:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2^* \text{ stabil, ha } w &\in \left(0, \frac{N-1}{g} \right) \\ \mathbf{p}_{11}^*, \mathbf{p}_{12}^* \text{ stabilak, ha } w &\in \left(\frac{N-1}{N}, 1 \right) \end{aligned} \quad (37)$$

A kérdés most az, hogy mi történik az analitikus résznél már említett $w \in (\frac{N-1}{g}, \frac{N-1}{N})$ intervallumban. Az intervallum két végpontját jelentő kritikus csatolás értékeit jelöljük a következő módon: $w_c^{(1)} = (N-1)/g$, $w_c^{(2)} = (N-1)/N$.

Ehhez a rendszert numerikusan tanulmányozzuk.



6. ábra. A 2 témát tartalmazó rendszer dinamikai $g = 4$ növekedési rátánál (idősor, alatta fázisportré $x_1 - y_1$ vetülete). Ebben az esetben a kritikus értékek: $w_c^{(1)} = 1/4$, $w_c^{(2)} = 1/2$. **a)** $w = 0.15$, $\mathbf{p}_2^*$ stabil. **b)** $w = 0.35$ stabil határciklus. **c)** $w = 0.65$, $\mathbf{p}_{11}^*, \mathbf{p}_{12}^*$ stabil.

A numerikus megoldás további információval szolgál a rendszerről. A 6 ábrán látható **a)**, **b)** és **c)** 3 idősor és fázisportré pár a 3 diagramon látható paraméter-tartományoknak felelnek meg. A numerikus eredményekből azt is megfigyelhetjük, hogy a stabil fixpontok a két intervallumban az **a)** és **c)** globális attraktorok, tehát bármilyen kezdőfeltételre csak ezek az attraktorok felé közelít aszimptotikusan a trajektória. A **b)** tartományban, ahol nincs stabil fixpont, erre a rendszerméretre stabil határciklus-attraktor jelenik meg. A következőkben azt tárgyaljuk, hogy hogyan jelenik meg, és hogyan tűnik el az $w_c^{(1)}$, illetve $w_c^{(2)}$ kritikus csatolásnál.

4.2.2. Fixpontok és határciklusok bifurkációi

Általánosan tárgyalva, lokális bifurkáció során fixpontok jelenhetnek/tűnhetnek el, illetve stabilitásuk megváltozhat, ahogy a paraméterek értékei elérnek egy kritikus értéket. Így módosul a rendszer fázisportréja is. Fixpont stabilitásának megváltozása közelebbről azt jelenti, hogy a fázistér ebben a pontjában kiértékelt Jacobi-mátrix vezető sajátértéke (annak valós része) a paraméterek megváltozása miatt előjelt vált. Ekkor az ehhez tartozó irány vonzó/taszító lesz, ha azelőtt taszító/vonzó jellegű volt.

4.2.3. A koegzisztencia fixpont bifurkációja kis rendszerben

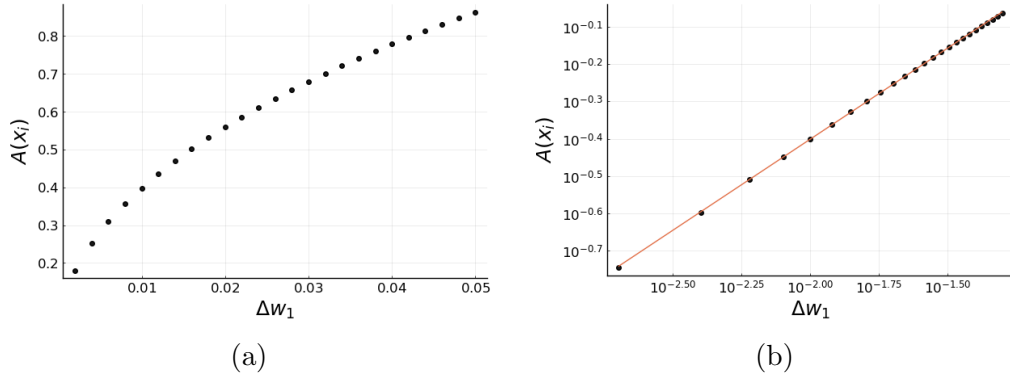
Lokális bifurkáció egyik típusa a szuperkritikus Hopf-bifurkáció. Ennek során egy stabil fókuszpontból instabil fókuszpont keletkezik, körülötte egy kis amplitudójú határciklussal. Ekkor az imaginárius résszel rendelkező sajátérték (és konjugáltjának) valós része a kritikus paraméterértéknél (ezt a paramétert jelöljük általánosan μ -vel, a kritikust pedig

μ_c -vel) nulla, majd a μ paraméter további változtatásával pozitívvá válnak (komplex síkban a sajátértékek átlépik az imagináris tengelyt, balról jobbra haladva) [1]. Az így instabillá vált fixpont körül létrejött stabil határciklus mérete (amplitúdója) a paraméter növelésével szintén folyamatosan növekszik, $\sqrt{\mu - \mu_c}$ -vel arányosan, ha μ elég közel van μ_c -hez [1].

Tehát a határciklus amplitúdóját A -val jelölve:

$$A \propto \sqrt{\mu - \mu_c} \quad (38)$$

Vizsgáljuk most ismét a két témát ($N = 2$) tartalmazó 4-dimenziós rendszert numerikusan. A $\mathbf{p}_{M=2}^* = (1, 1, 1, 1)$ fixpont stabilitási feltétele $w < (N-1)/g$. A $w_c^{(1)} = (N-1)/g$ kritikus paraméterértéknél Hopf-bifurkáció következik be, $w > w_c^{(1)}$ esetén a trajektória határciklushoz tart. A kapott határciklus amplitúdójának változása a kritikus pont közelében megfelel az elvárt (38) skálázási összefüggésnek (lásd a 7. ábrát).



7. ábra. Szuperkritikus Hopf-bifurkáció során létrejött határciklus amplitúdójának skálázási törvénye $N = 2$ esetben. $g = 4$, a kritikus érték $w_c^{(1)} = (N-1)/g = (2-1)/4 = 1/4$. **(a)** Az x változók amplitúdója a kritikus paramétertől vett távolság függvényében $\Delta w_{(1)} = w - w_c^{(1)}$ lineáris skálán. **(b)** Ugyanez log-log reprezentációban. A kapott egyenes meredeksége a numerikus számításból 0.48, tehát jól megfelel az elvárt gyökös skálázási összefüggésnek (ideális esetben a hatványkitevő pontosan $1/2$ lenne).

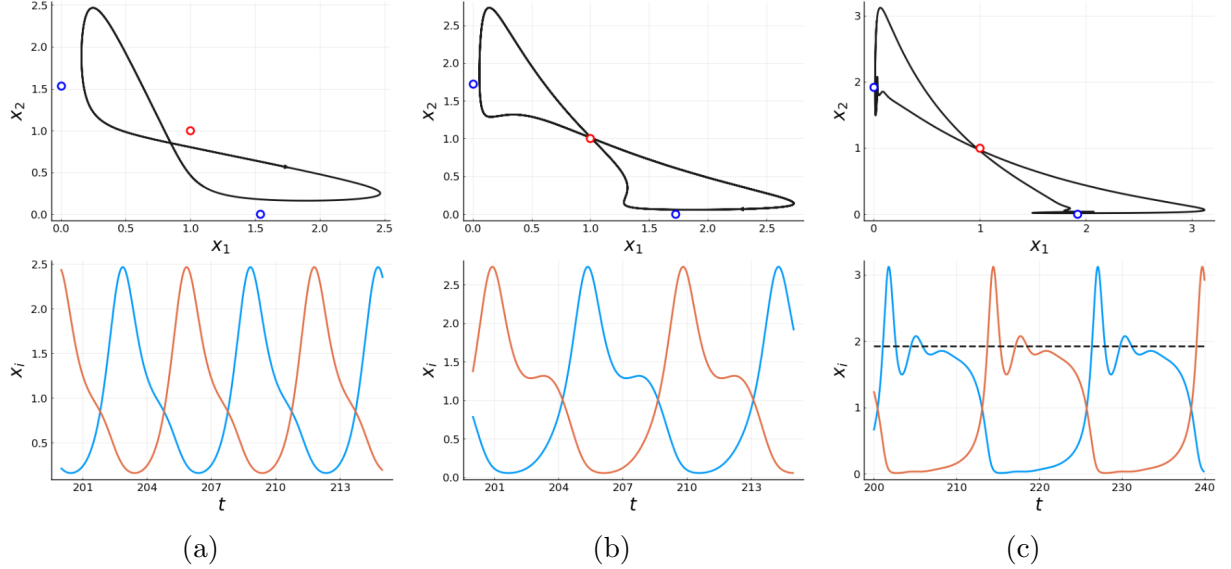
4.2.4. Stabil periodikus megoldás eltűnése

Tovább növelve a csatolást, egészen addig, amíg nem teljesül az egy-téma fixpont stabilitási feltétele, azaz amíg $w < w_c^{(2)}$, a határciklus fentmarad.

Határciklusok eltűnését globális bifurkációk okozhatják (ezek a fázistér nagyobb régióit érintik, nemcsak egy fixpont közvetlen környezetét). Azt a bifurkációt, melynek során a ciklus a paraméter változásával egyre közelebb kerül egy nyeregponthoz, majd elérve a kritikus értéket, beleütközik ebbe homoklinikus orbitált hozva létre (olyan trajektória, amely a nyeregpontot önmagával köti össze), homoklinikus bifurkációnak nevezzük.

Ahogy már láttuk, a c) tartományban a $\mathbf{p}_{11}^* = (x^*, x^*, 0, 0)$, $\mathbf{p}_{12}^* = (0, 0, x^*, x^*)$ fixpontok stabilitási feltétele $w > (N-1)/N$. Az $N = 2$ esetben pedig a $w > w_c^1$ növelésével a ciklus szimmetrikusan egyre közelebb kerül a $\mathbf{p}_{11}^*$ és $\mathbf{p}_{12}^*$ -höz (lásd a 8. ábrát). Az egyen-

letrendszer numerikus megoldása itt segítségünkre lesz. A 4-dimenziós rendszernél a $w_c^{(2)}$ értéke $(N - 1)/N = 1/2$.



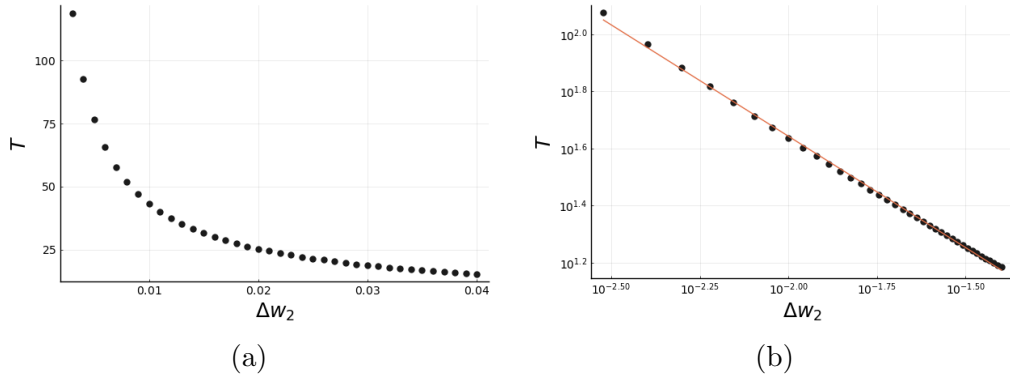
8. ábra. Határciklus a bifurkációhoz közeledve: fázisportrék fixpontokkal és az ezeknek megfelelő idősorok. $\mathbf{p}_2^*$ piros, a $\mathbf{p}_{11}^*, \mathbf{p}_{12}^*$ pedig kék színnel, a határciklus pedig feketével van feltüntetve. A g értéke szintén 4. **(a)** fázistér $x_1 - x_2$ vetületben ($w = 0.35$) **(b)** A $w_c^{(2)} = 1/2$ kritikus értékhez közeledve (itt $w = 0.42$) a határciklus egyre közelebb kerül a kék fixpontokhoz (csak az x vetületet nézve a piroshoz is). A periódus némileg nőtt. **(c)** $w = 0.48$: a határciklushoz tartó trajektória periódusa láthatóan megnőtt (lásd az időtengelyt). A fekete szaggatott vonal az kék fixpontokra analitikusan kiszámolt $x^* = 1/[1 + wM/(N - 1) - wN/(N - 1)] = 1/(1 - w)$ értéket jelöli, ami jelen esetben 1.92 körüli. Eszrevehető, hogy a fixponthoz közel kerülve az x_1, x_2 ez az érték körül oszcillálnak.

Ahogy a határciklus egyre közelebb kerül a nyeregponthoz, ennek periódusa is egyre nagyobb lesz (mivel egyensúlyi pontok közelében definíció szerint a deriváltak 0-hoz közelítenek, itt a trajektória lényegesen lelassul).

A homoklinikus bifurkációnál is megállapítottak skálázási összefüggéseket. Általánosan vizsgálva, a bifurkáció során megszűnő (vagy fordított irányban létrejövő, de mi a w növekvő irányában vizsgáljuk) határciklus periódusa a kritikus értéktől vett $\Delta\mu$ paramétertávolság függvényében logaritmikus $\ln(\Delta\mu)$ [1]. Azonban ha a rendszer szimmetriákkal rendelkezik, a skálázási törvény ettől eltérhet. A mi esetünkben a témák teljes ekvivalenciája miatt a rendszer nagyfokú szimmetriával rendelkezik (lásd 9. ábra).

Érdekes módon itt egy globális és egy lokális bifurkáció egybeesik (ez szintén magyarázhatja a kivételt az általános skálázási törvény alól). $w_c^{(2)} = (N - 1)/N$ esetén a határciklus beleütközik az éppen ekkor stabilá váló nyeregpontokba, és ennél nagyobb paraméterértékekre a globális attraktor a két $\mathbf{p}_{11}^*, \mathbf{p}_{12}^*$, immár stabil fixpont marad (lásd a 6. ábra).

Ezt a lehető legkisebb méretű rendszert azért tanulmányoztuk részleteiben, mert az itt kapott eredmények segíthetnek a nagyobb rendszerek megértésében is. Azonban nagyobb rendszereknél a instabil fixpontok tartományában komplexebb dinamika is létrejöhet,



9. ábra. A határciklus periódusának növekedése a $w_c^{(2)}$ kritikus értéktől számított távolság függvényében $\Delta w_{(2)} = w_c^{(2)} - w$ hatványfüggvény szerint történik. **(a)** Lineáris skála. **(b)** Log-log skála: a kapott egyenes meredeksége az illesztésből -0.78 -nak adódik.

ezt már nem elég idősorok és fázisportrék szemrevételezésével tanulmányozni. Ezért használjuk a következőkben a Lyapunov-kitevőket.

4.3. Aszimptotikus viselkedés jellemzése a karakterisztikus Lyapunov-kitevő segítségével

A Lyapunov-kitevő a dinamikai stabilitás mérőszáma, azaz a fázistér közeli pályáinak össze- vagy széttartásának mértékét adja meg. Tekintsünk egy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ dinamikai rendszert, ennek megoldásai a trajektóriák: $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Nézzünk most a fázistérben két, egymáshoz közeli kezdőfeltételt: $\mathbf{x}_0$ és $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$, ahol $\delta\mathbf{x}_0$ egy kis különbség-vektor. A két trajektória időfejlődése során $(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))$, a kettő közti különbség-vektor megadható, mint:

$$\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'(t). \quad (39)$$

Tekintsünk a fázistérben egy pontot és körülötte bármely irányban, de azonos távolságra lévő perturbált kezdeti feltételeket, vagyis egy infinitezimális (hiper)gömböt. Ez az időfejlődés során egy elipszoiddá torzul. Az eredeti, középső ponthoz kötött lokális koordinátarendszerben az ellipszoidnak n sajátengelye van, ezek mentén a perturbált pontok $\delta_k(t) \propto \delta_k(0)e^{\lambda_k t}$ szerint nőnek/csökkennek (attól függően, hogy milyen λ_k előjele). A λ_k ($k = 1, \dots, n$) mennyiséget a k -adik Lyapunov-kitevőnek nevezzük. Tehát n -dimenziós rendszer esetén n darab Lyapunov-kitevő létezik. Aszimptotikusan, az ellipszis átmérőjét, vagyis azt, hogy hosszú idő után milyen exponenciális rátával közelednek/távolodnak az egymáshoz közeli pályák, a legpozitívabb λ_k határozza meg. Ez a legnagyobb vagy karakterisztikus Lyapunov-kitevő, λ_{max} [1]. Tehát a pályák konvergenciájának vagy divergenciájának idő-átlagolt exponenciális üteme:

$$\lambda_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta\mathbf{x}(t)\|}{\|\delta\mathbf{x}_0\|}. \quad (40)$$

A karakterisztikus Lyapunov-kitevőhöz előjele alapján különböző aszimptotikus viselkedést rendelhetünk [15, 16] (lásd: 2. táblázat).

2. táblázat. Disszipatív és adaptív rendszerekben megjelenő attraktorok és a hozzájuk rendelhető Lyapunov-kitevők [15]. A táblázat nem veszi figyelembe a nem-hiperbolikus attraktorokat, ezek dinamikai stabilitása nem határozható meg pusztán a Lyapunov-kitevők alapján.

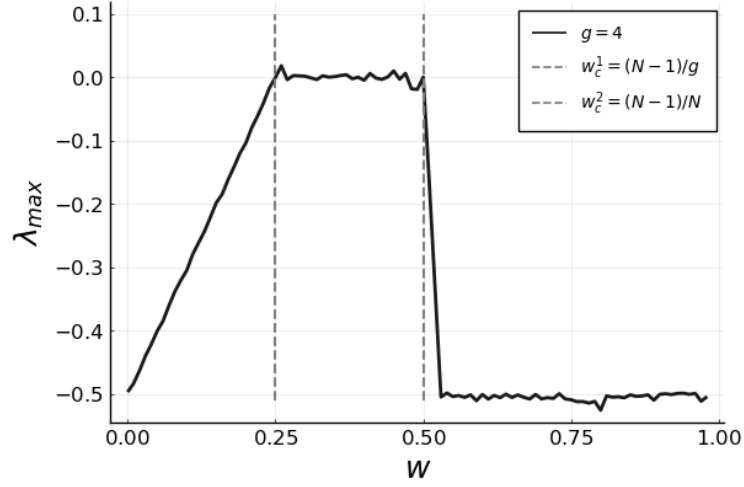
Attraktor	Lyapunov-spektrum
Fixpont	$\lambda_i < 0 \quad i = 1, \dots, n$
Határciklus	$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_i < 0 \quad i = 2, \dots, n$
K-tórusz	$\lambda_1 = \dots = \lambda_K = 0 \quad \lambda_i < 0 \quad i = K + 1, \dots, n$
Káosz	$\lambda_i > 0$ (legalább 1 db.)

Megjegyzések [15]:

- Nem-kaotikus attraktor egyik Lyapunov-kitevője sem lehet pozitív.
- A λ_{max} előjele alapján eldönthető a dinamika típusa: $\lambda_{max} > 0 \rightarrow$ káosz, $\lambda_{max} = 0 \rightarrow$ periodikus dinamika (ez lehet egyszerű határciklus vagy tórusz, de ebben a dolgozatban mindegyik periodikus dinamikára a határciklus kifejezést használjuk), $\lambda_{max} < 0 \rightarrow$ stabil fixpont.
- Pozitív λ_{max} karakterisztikus Lyapunov-kitevő káoszt jelent konzervatív, adaptív és disszipatív rendszerekben is, de csak az utóbbi kettő esetén jár ezzel kaotikus attraktor is.

Visszatérve az $N = 2$, azaz 4 dimenziós rendszerre, a fixpont-határciklus, határciklus-fixpont átmenet tanulmányozható a karakterisztikus Lyapunov-kitevők segítségével (10). A Lyapunov-kitevők kiszámíthatók numerikusan, ehhez már implementált, a Benettin-algoritmuson alapuló eljárást használtunk [17].

Fixpont attraktor esetén a Lyapunov-kitevők pont egybeesnek a fixpont sajátértékeinek valós részével (lásd: A.5 Függelék).

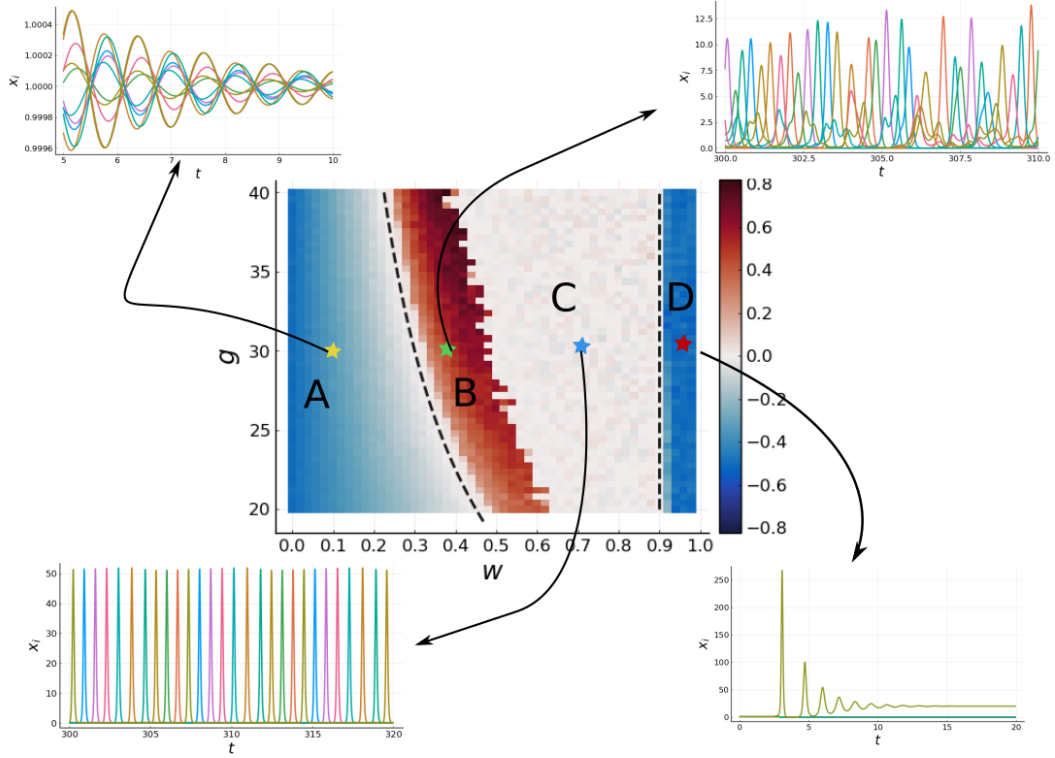


10. ábra. Két témát tartalmazó rendszerben ($N = 2$) a λ_{max} karakterisztikus Lyapunov-kitevők a w paraméter függvényében ($g = 4$): a két szaggatott vonal a két kritikus w értékeket jelöli $w_c^{(1)} = (N - 1)/g = 1/4$, illetve $w_c^{(2)} = (N - 1)/N = 1/2$. Ezek jelentik rendre a koegzisztencia fixpont-határciklus és a határciklus - stabil egy-téma fixpont átmeneteket. A negatív Lyapunov-kitevők jó egyezést mutatnak a megfelelő stabil fixpontok sajátértékeinek legnagyobb valós részeivel: az első, w -vel lineárisan növekvő szakaszt visszkapjuk λ_k , az ebben az esetben legnagyobb sajátérték valós részéből. Vagyis kiszámolható úgy is, mint $Re(\lambda_k(w)) = 1/2(gw - 1)$. Az utolsó w -ben konstans -0.5 kitevőjű szakaszt pedig a $Re(\lambda_l) = -1/2$ valós rész adja vissza.

4.4. Nagyobb rendszerek vizsgálata

A kis rendszert ($N = 2$) tanulmányozva tehát láttuk, hogy nem-fixpont dinamika (abban az esetben határciklus) az $p_{M=N}^*$ fixpont bifurkációja (instabillá válása) után jöhet létre.

A klasszikus, kompetitív Lotka–Volterra-egyenletek esetén káosz létrejöttéhez legalább 4 dimenziós rendszerre van szükség. A mi esetünkben ez már $N = 2$ -re teljesül, ugyanis a két x változó, a két y változóval kiegészülve már 4 dimenziós rendszert alkot. Ennek ellenére a numerikus kísérletek során kaotikus dinamikára nem találtunk példát, csak nagyobb rendszerekben ($N \geq 5$). Kísérletet tettünk annak a kiderítésére, hogy mekkora az a legkisebb rendszer, amelyben $w_c^{(1)}$ kritikus csatolás után már kaotikus dinamikát lehet megfigyelni, azonban az erre vonatkozó eredmények még nem egyértelműek, és az sem, hogy a káoszhoz ekkor milyen út vezet. Adott rendszerméret esetén a paraméterter egy teljesebb képe kapható, ha a karakterisztikus Lyapunov-kitevőket mindkét (g, w) paraméter függvényében vizsgáljuk (lásd a 11. ábrát). A következőkben a 10 témát tartalmazó rendszert vizsgáljuk, mert ez elég nagynak bizonyult az érdekesebb dinamikák megjelenéséhez, és elég kicsi ahhoz, hogy ne okozzon gondot a numerikus számítások során.



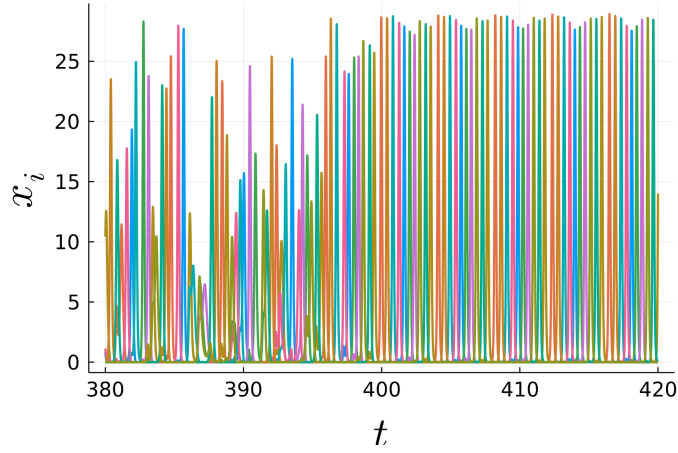
11. ábra. Karakterisztikus Lyapunov-kitevők a w és g függvényében és az egyes régiókhoz rendelhető idősorok $N = 10$ rendszerre: tengelyeken a g és a w paramétert ábrázoltuk, a kitevők nagyságát pedig a szín reprezentálja. A szaggatott vonallal jelölt görbék megkapjuk, a $w_c^{(1)}, w_c^{(2)}$ kritikus értékekből: $g = (N - 1)/w = 9/w$ és $w = (N - 1)/N = 0.9$ az $\mathbf{p}_{M=10}^*$, illetve az $\mathbf{p}_{M=1}^*$ típusú fixpontok stabilitási határait jelentik. A csillagokkal jelölt, az egyes régiók dinamikáit mutató idősorok $g = 30$, $w_A = 0.1$, $w_B = 0.4$, $w_C = 0.7$, és $w_D = 0.95$ paraméterekre készültek.

A kisebb rendszerekhez képest itt újdonság az, hogy a $w \in (\frac{N-1}{g}, \frac{N-1}{N})$ intervallum további két tartományra oszlik, amelyeket a Lyapunov-kitevő nagysága választ el egymástól. A **B** pozitív kitevőjű régió káoszhoz, a **C** pedig, ahol közel nulla kitevőket kaptunk, határciklushoz tartozik. A kaotikus régió határain (**A** és **B**, illetve a **B** és **C**) régiók közti átmenetek pontos tanulmányozása is érdekes eredményekre vezethet.

4.4.1. A **C** és **B** tartomány közti átmenet vizsgálata

A **C** paramétertartományban tranziens káosz figyelhető meg (lásd: 12. ábra). Rögzített g esetén azt látjuk, hogy a **C** tartomány felől a **B** fele haladva (csökkentve a w paramétert) egyre hosszabb időintervallumok szükségesek a határciklus-attraktor eléréséhez, ez magyarázatot adhat a két tartomány közti határvonal töredezettségére. Ez a tranziens viselkedés a **B** tartományban feltehetően végtelenné válik, de a tartomány pontos határai, a kritikus értékek még nem ismertek. Célunk itt a tranziens idők skálázódási tulajdonságainak vizsgálata $w = 0.5$ (közelítő, nem kritikus érték) közelében.

Ez a véges időintervallum, amely ahhoz szükséges, hogy a rendszer a nem-kaotikus att-



12. ábra. A kaotikus viselkedésből a periodikus megoldásba való átmenetet mutató idősor. Paraméterek: $N = 10, g = 30, w = 0.5$.

raktorba kerüljön, függ a kezdeti feltételektől. A tranziens káosz tanulmányozásához tehát egyetlen trajektória helyett célszerűbb különböző kezdeti feltétellel indított trajektóriák sokaságát vizsgálni. Annak ellenére, hogy az egyes tranziens idők között óriási különbségek lehetnek, definiálható egy **átlagos élettartam** [18].

Legyen $N(t)$ azoknak a pályáknak a száma t időpontban, amelyek még nem szöktek el a fázistér kaotikus régiójából. Kezdetben $N(0) = N_0$ trajektóriát indítunk. Általában $N(t)$ exponenciálisan csökken:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\kappa t} \quad (41)$$

ahol a κ együtthatót szökési rátának nevezzük. A szökési ráta reciproka egy időszakos mennyiség, amely a káosz átlagos élettartamának tekinthető (átlagos tranziens idő, átlagos szökési idő).

$$\tau = \frac{1}{\kappa} \quad (42)$$

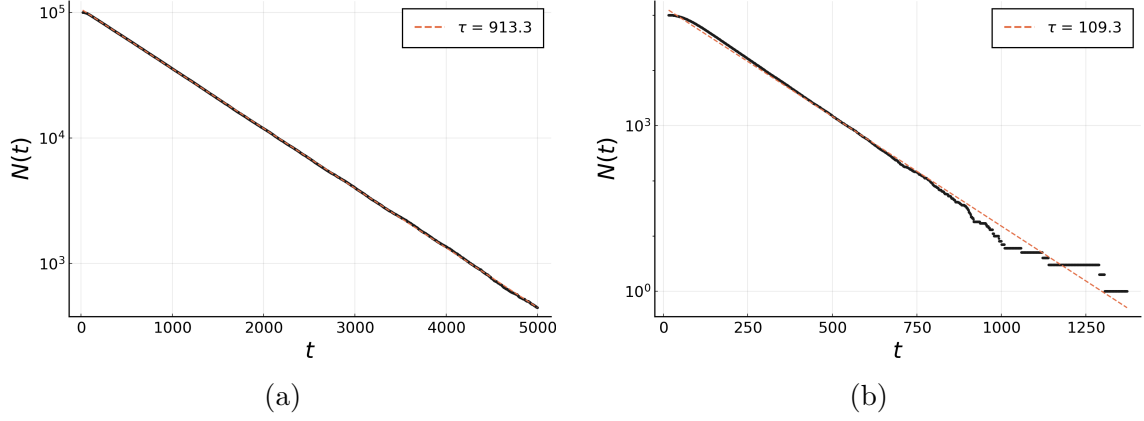
4.4.2. A tranziens káosz átlagos élettartamának kiszámítása

A fenti elméleti részben (4.4.1) leírtak szerint járunk el. Tekintsük a különböző kezdeti állapotú trajektóriák sokaságát, mindegyik esetén megmérjük a tranziens időt. Ezekből az adatokból egy $N(t)$, bomlási folyamathoz hasonló idősor készíthető, amely felhasználható a káosz átlagos élettartamának becslésére különböző paraméterértékek esetén.

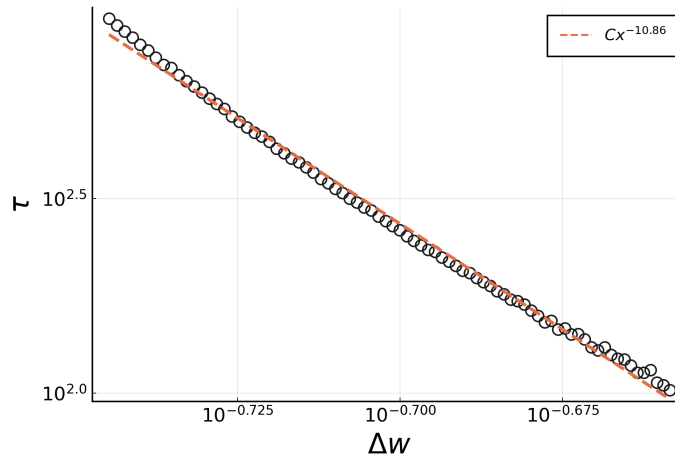
A tranziens idők kiszámításának egy nagyon egyszerű, de naiv módja ebben az esetben az, hogy ellenőrizzük, hogy a numerikus integrálás során elértük-e a határciklust. Azt mondjuk, hogy a határciklust akkor értük el, ha a csúcsok maximális értékei és a köztük lévő idők (periódus) konvergáltak (a szomszédos maximumok és periódusértékek közötti különbség kisebb, mint egy ϵ küszöbérték). Ha ez a feltétel teljesül, kilépünk, és visszatérítjük a végső időpontot.

Az $N(t)$ idősorok felépítése ezután történik, az értékek binnelesével, ahol a bin méretét (Δt) mi választjuk meg. Ez azt jelenti, hogy ha t és $t + \Delta t$ között n trajektória "bomlott

el”, akkor $N(t + \Delta t) = N(t) - n$. Az 13. ábrán két példát mutatunk ilyen idősorra. Azt kapjuk, hogy a B tartomány fele haladva a káosz átlagos élettartama hatványfüggvényszerűen nő (lásd az illesztést a 14. ábrán).



13. ábra. Kaotikus trajektóriák száma az idő függvényében. $N(t)$ exponenciálisan csökken, hasonlóan a radioaktív bomlási folyamatokhoz (figyeljük meg a logaritmikus tengelyeket). Ahogy a w csökken, úgy nő a transziens idő (figyeljük meg a két féllogaritmikus diagram tengelyét). A káosz átlagos élettartama a választott paraméterintervallumban egy nagyságrenddel változik. **a)** $w = 0.48, \tau \approx 913.3$ **b)** $w = 0.5195, \tau \approx 109.3$

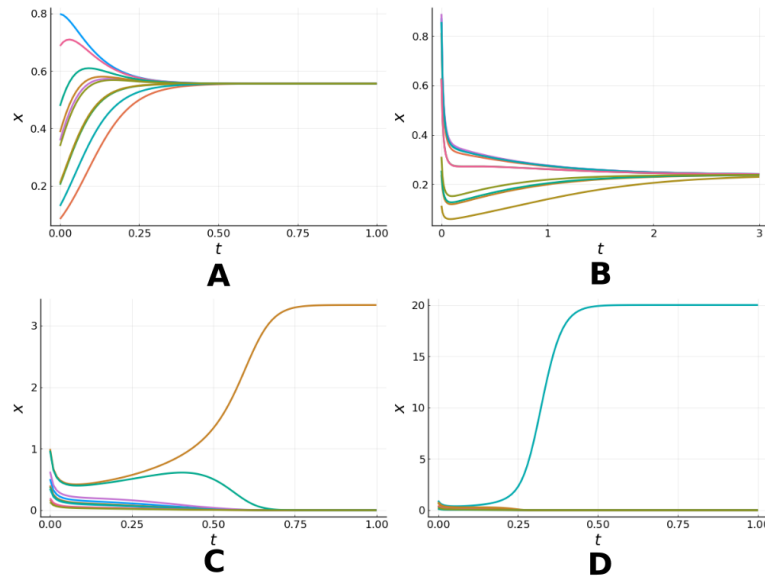


14. ábra. A káosz átlagos élettartama a Δw függvényében. $\Delta w = w - w_0$ különbség, ahol $w_0 = 0.3$ az az érték, ahol a káosz először megjelenik $g = 30$ esetén (lásd 11 ábra). A τ skálázódására a legjobban hatványfüggvény illeszkedik, amelynek kitevője -10.86 körül van (figyeljük meg a logaritmikus tengelyeket). A skálázási törvényt úgy kaptuk meg, hogy minden paraméterértékre megmértük a $N(t)$ meredekségét (a $N(t)$ elejét és végét levágtuk, így csak a középső részre illesztettünk egyenest), és a τ -t a meredekség abszolút értékének inverze adja. Paraméterek: $w \in [0.48, 0.52)$, $\Delta t = 1$.

4.4.3. A csatolás erősségének szerepe klasszikus LV-egyenletek esetén

Összehasonlításképp megmutatjuk a fenti A, B, C, D tartományokban a klasszikus LV-egyenletek által generált dinamikát 10-dimenziós és hasonló szimmetria esetén. Egyezzenek meg tehát a növekedési ráták $r_i = g$ és a 2.1 részben tárgyalt kölcsönhatási mátrixot a módosított rendszer mintájára határozzuk meg úgy, hogy a összes, egymással való kölcsönhatás erősségét jellemző $c_{ij} = w$ ($i \neq j$) együttható azonos legyen, az x_i önkölcsönhatási együttható pedig legyenek mind $c_{ii} = 1 - w$ (ahogyan a módosított esetén az y_i együtthatója).

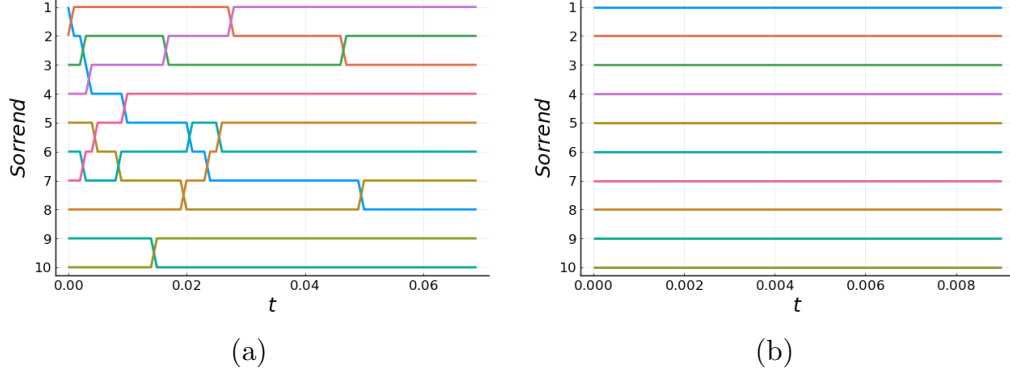
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1-w & w & w & \dots & w \\ w & 1-w & w & \dots & w \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ w & w & \dots & \dots & 1-w \end{bmatrix} \quad (43)$$



15. ábra. A klasszikus LV-egyenletek viselkedése 10-dimenziós, szimmetrikus rendszer esetén. Az előző, 11. ábrának megfelelően $g = 30$, $w_A = 0.1$, $w_B = 0.4$, $w_C = 0.7$, és $w_D = 0.95$

A klasszikus esetben, szimmetrikus paraméter-választás esetén nem látunk fluktáló dinamikát. Ehelyett, a trajektória csak fixpontokhoz közelít. Gyengébb csatolásnál (A, B) ugyanúgy a koegzisztencia fixpont stabil, ($\mathbf{x}^* = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}$), és nem történik bifurkáció az A, B tartományok közt (ez végig stabil marad). A csatolás növelésével itt is megjelenik a "csak egy faj él túl" fixpont, ami a módosított rendszerénél az egy-téma fixpont volt (de csak a D tartományban). Érdekes megjegyezni, hogy a kezdeti állapot ismeretében ebben az esetben egyértelműen meg tudjuk mondani, hogy az N darab ilyen fixpont közül melyik lesz a rendszer végállapota, ugyanis az az x_i változó "nyer" (a többi értéke nullához közelít), amely kezdeti értéke a legnagyobb volt. Ezzel szemben, a módosított

rendszer esetében ez csak akkor igaz, ha a memóriatagokat "kikapcsoljuk", azaz a kezdeti feltételben $y_i = 0$ (lásd a 16. ábrát).



16. ábra. Toplista-idősorok 10-témás módosított és 10 fajt tartalmazó szimmetrikus, klasszikus rendszerben, mindekettő erős csatolás esetén, vagyis az "egy téma/faj él túl" fixpontok tartományában. A vízszintes tengelyen az időt, a megfordított függőleges tengelyen pedig az x_i változók sorrendjét tüntettük fel. Az egyes színek különböző változókhoz tartoznak. A végső állapot az 1., a legnagyobb x_i (mivel a többi változó 0-hoz tart). **(a)** 10-témás módosított rendszer véletlenszerű kezdőfeltétekkel indítva (a memóriatagok nem-nullák voltak) a D tartományban: $g = 30, w = 0.95, N = 10$. Látható, hogy a végállapot eléréséig a változók sokszor "lekörözhetik" egymást. **(b)** 10 fajt tartalmazó szimmetrikus, klasszikus rendszer a 15 ábrán is látható D tartományban: $g = 30, w = 0.95, N = 10$. Észrevehető, hogy itt egyetlen "lekörözés" sem történik.

5. Következtetés

A dolgozat keretében egy a szakirodalomban nemrég javasolt modellt tanulmányoztunk a dinamikai rendszerek eszköztárának segítségével. Megmutattuk, hogy a rendszer fixpontjainak száma exponenciálisan nő a rendszer méretével, de a lineáris stabilitás-vizsgálat elvégezhető analitikusan. Az innen levezetett stabilitási feltételek pontos egyezést mutatnak a numerikus eredményeinkkel is. A Lyapunov-kitevők segítségével sikerült beazonosítani a különböző dinamikájú régiókat a (w, g) paraméterterben. A nagyobb témaszámú rendszerek dinamikája gazdagabb, ezek produkálhatnak az adatokat hűen imitáló, fluktuáló idősorokat. Ekkor a viselkedés kaotikus, és a káosz megjelenése egy fixpont-család bifurkációjához kötődik. Összehasonlítottuk a kapott eredményeket a klasszikus versengő Lotka-Volterra modell dinamikájával Ugyanolyan paraméterek esetén. A Lorenz-Spreen és tsai által javasolt memóriatag eredményeképpen [3] érdekes kaotikus dinamikát figyelhetünk meg, olyan szimmetrikus kölcsönhatási mátrix esetében is, amelyre a klasszikus LV esetében csak stabil fixpontokat találunk. Erős versengés esetén a "csak egy maradhat" vagy más néven a "győztes mindent visz" típusú dinamika érvényesül, ahol befagy a rendszer és egyetlen téma köti le a teljes kollektív figyelmet mindörökké. A csatolási tényező csökkentésével először periodikusan, majd kaotikusan versengő, időben fluktuáló figyelemkiosztás jellemző, hiszen a véges memória jelenléte a rendszerben instabillá teheti a szimmetria által kapcsolt stacionárius állapotokat, olyan komplex fluktuációkat eredményezve, amely során a rendszer újból és újból felkeresi ezeken a fixpontokat a fázistérben. Gyenge csatolás hatására a kollektív figyelem egyenlő elosztása érvényesül a versengő témák között.

6. Jövőbeli célok, előzetes eredmények

1. **A koegzisztencia fixpont bifurkációinak további vizsgálata.** Mivel a bifurkációnál elfajult sajátérték vált előjelet (egyszerre $N - 1$ pár sajátérték), nagyobb rendszereknél ($N > 2$) nem egyszerű Hopf-bifurkációról van szó. Ez megmagyarázhatja a kisebb és nagyobb rendszerek közti dinamikabeli különbséget is. A nagyobb rendszerek esetén a káosz fele vezető út típusának beazonosítása is fontos és érdekes lehet.
2. **A rendszer vizsgálata leképezésként.** A határciklusok tartományában az egyes változók dinamikája kétállapotú (aktív vagy nem aktív). Ha az evolúcióból csak arra az információra vagyunk kíváncsiak, hogy épp melyik változó aktív, az állapotaink diszkrét (0 vagy 1) és a rendszer leképezésként tanulmányozható. Ezt a módszert szeretnénk alkalmazni a kaotikus viselkedés esetén is.
3. **Zaj hatásának vizsgálata a dinamikára.** a valós, kollektív figyelemdinamikai folyamatok a társadalom tagjainak egyéni, véletlenszerű döntéseiből állnak. Hipotézisünk, hogy a rendszert additív zajjal stochasztikussá téve a valós folyamatokhoz közelebbi dinamika jön létre, a zaj valós folyamatokban nem tapasztalt határciklus-dinamikát permanens káosszá alakítja.

A. Függelék

A.1. Nyulak és bárányok

Egy sokat tanulmányozott tankönyvi példa két állatfaj közti kölcsönhatások leírására a "Nyulak és bárányok" néven ismert 2-dimenziós rendszer. Az (1b) ábrához következő rendszert használtuk:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(3 - x_1 - 2x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(2 - x_1 - x_2)\end{aligned}$$

ahol a nyulak populációját az x_1 , a bárányok populációját az x_2 adja meg. A rendszer tárgyalását lásd Strogatz könyvében [1] a 155-159 oldalakon.

A.2. Káosz a klasszikus, kompetitív LV-rendszerben

Előző munkák szerint [19] a legegyszerűbb rendszer, amelyben kaotikus dinamika jelenhet meg, 4-dimenziós és 15-dimenziós paramétertérrel rendelkezik (lásd az (1c) ábrát) :

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.72 \\ 1.53 \\ 1.27 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1.09 & 1.52 & 0 \\ 0 & 1 & 0.44 & 1.36 \\ 2.33 & 0 & 1 & 0.47 \\ 1.21 & 0.51 & 0.35 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Ezek a paraméterértékek beállítása a 15-dimenziós paramétertér brute-force numerikus keresésével történt (részletekért lásd J.A. Vano cikkét [19]).

A.3. Blokkmátrix determinánása

Legyenek $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ rendre $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ dimenziójú mátrixok. Ha $\mathbf{D}$ invertálható, akkor az ezekből felépített mátrix

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right) \quad (45)$$

determinánása számolható két determináns szorzataként:

$$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{D} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}) \quad (46)$$

A.4. Cirkuláris mátrixok determinánása

Általánosan, egy cirkuláris mátrixot egy n -elemű $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ vektor jellemez. Az első sort (oszlopot) maga a $\mathbf{c}$ alkotja, a többi sor (oszlop) pedig cirkuláris permutációval kapható meg. [13]

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_1 & \dots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$\det(\mathbf{C}) = \prod_{j=0}^{n-1} (c_0 + c_1\omega_j + c_2\omega_j^2 + \dots + c_{n-1}\omega_j^{n-1}) \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (48)$$

ahol $\omega_j = \exp(i2\pi j/n)$, az n -edik egységgyökök. A mi esetünkben az (25)-as egyenletben megjelenő $\mathbf{G}$ mátrix ennek egy speciális esete, ahol $c_0 = a_\lambda$ és $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = a_2$. Ekkor

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{G}) &= (a_\lambda + a_2(M-1)) \cdot \prod_{j=0}^{M-1} (a_\lambda + a_2 \cdot (\omega_j + \omega_j^2 + \dots + \omega_j^{M-1})) = \\ &= (a_\lambda + a_2(M-1)) \cdot (a_\lambda + a_2)^{M-1} \end{aligned} \quad (49)$$

ahol használtuk az $1 + \omega_j + \omega_j^2 + \dots + \omega_j^{M-1} = 0$, ha $\omega_j \neq 1$ összefüggést.

A.5. Fixpontok Lyapunov-kitevői

A Lyapunov-kitevők analitikus kiszámítása lehetséges fixpontokra. [15]. A kitevők definíció szerint felírhatók, mint:

$$\lambda_i := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta x_i(t)}{\delta x_{0i}}, \quad (50)$$

ahol δx_{0i} megfelelő irányban választott kezdeti távolságok nagysága. Mivel szokás a sajátértékeket és a Lyapunov-kitevőket is λ -val jelölni, az egyértelműség kedvéért a sajátértékek legyenek most $\bar{\lambda}$ -val jelölve. Fixpont közelében a rendszer linearizált változata a kis perturbáció deriváltját adja meg:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \delta \mathbf{x} \quad (51)$$

Ennek megoldása megadható, mint

$$\delta \mathbf{x}(t) = \sum_i c_i e^{\bar{\lambda}_i t} \boldsymbol{\eta}_i \quad (52)$$

ahol a c_i együtthatókat a kezdeti feltételek határozzák meg, $\bar{\lambda}_i$ a Jacobi-mátrix sajátértékei, $\boldsymbol{\eta}_i$ pedig az ezekhez tartozó sajátvektorok.

A Lyapunov-kitevők kiszámításánál az eredeti trajektóriát (amelytől a perturbált trajektória távolságát mérjük) választhatjuk a fixpontnak. Ez egy konstans trajektória lesz időben. Ha a perturbált pálya kezdetben $\delta \mathbf{x}(0) = \delta \mathbf{x}_0$ távolságra van, a lineárizált rendszer (52) megoldása pontosan a két trajektória távolságának evolúcióját adja meg. Ezt beírva a (50) definícióba:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta x_i(t)}{\delta x_{0i}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \operatorname{Re}(\bar{\lambda}_i) \cdot t = \operatorname{Re}(\bar{\lambda}_i) \quad (53)$$

Tehát a Lyapunov-kitevők pont egybeesnek a fixpont sajátértékeinek valós részével.

Hivatkozások

- [1] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Westview Press, 2000.
- [2] Lukas Schneider és Claudius Gros. “Five decades of US, UK, German and Dutch music charts show that cultural processes are accelerating”. *Royal Society Open Science* 6.8 (2019), 190944. old.
- [3] Lorenz-Spreen és tsai. “Accelerating dynamics of collective attention”. *Nature Communications* 10 (2019).
- [4] Matthew J. Salganik, Peter Sheridan Dodds és Duncan J. Watts. “Experimental Study of Inequality and Unpredictability in an Artificial Cultural Market”. *Science* 311.5762 (2006), 854–856. old. ISSN: 0036-8075.
- [5] John Sterman. “Business Dynamics, System Thinking and Modeling for a Complex World”. 19 (2000. jan.).
- [6] Jeffrey T. Klein, Stephen V. Shepherd és Michael L. Platt. “Social Attention and the Brain”. *Current Biology* 19.20 (2009. nov.), R958–R962.
- [7] Fang Wu és Bernardo A. Huberman. “Novelty and collective attention”. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 104.45 (2007), 17599–17601. old.
- [8] M. J. Salganik. *Bit by Bit: Social Research in the Digital Age*. Princeton University Press, 2017.
- [9] Leah Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*. Society for Industrial és Applied Mathematics, 2005.
- [10] A. J. Lotka. “Elements of physical biology”. *Sci. Progress. Twent. Century (1919–1933)* 21 (1926), 341–343. old.
- [11] S. Smale. “On the differential equations of species in competition”. *Journal of Mathematical Biology* 3.1 (1976. márc.), 5–7. old.
- [12] M W Hirsch. “Systems of differential equations which are competitive or cooperative: III. Competing species”. *Nonlinearity* 1.1 (1988), 51–71. old.
- [13] Robert M. Gray. “Toeplitz and Circulant Matrices: A Review”. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory* 2.3 (2006), 155–239. old. ISSN: 1567-2190.
- [14] A. M. Lyapunov. “The general problem of the stability of motion”. *International Journal of Control* 55.3 (1992), 531–534. old.
- [15] Thomas S. Parker és Leon Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. 1st. Springer Publishing Company, Incorporated, 1989. ISBN: 1461281210.
- [16] Marco Sandri. “Numerical calculation of Lyapunov exponents”. *Math. J.* 6 (1996).
- [17] Giancarlo Benettin, Luigi Galgani és Jean-Marie Strelcyn. “Kolmogorov entropy and numerical experiments”. *Phys. Rev. A* 14 (6 1976), 2338–2345. old.
- [18] Tamás Tél és Márton Gruiz. *Chaotic dynamics: an introduction based on classical mechanics*. Cambridge University Press, 2006.

- [19] J A Vano és tsai. “Chaos in low-dimensional Lotka–Volterra models of competition”. *Nonlinearity* 19.10 (2006. szept.), 2391–2404. old.