

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR
MATEMATIKA SZAK

ETDK-dolgozat

Cesáro-Stolz lemma általánosításai



TÉMAVEZETŐ:

DR. ANDRÁS SZILÁRD,
EGYETEMI DOCENS
BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM,
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

SZERZŐ:

TÓTÓS GYÖRGY

2021 MÁJUS

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	1
1.1. Cesáro-Stolz lemma megjelenése, bizonyításai	1
1.1.1. Történelmi áttekintés	1
1.1.2. Alkalmazások	1
1.1.3. Alternatív bizonyítások	4
2. A Cesáro-Stolz lemma általánosításai	7
2.1. Mortici általánosítása	7
2.2. Renato Spigler és Marco Vianello általánosítása	11
2.3. Rajagopal általánosítása	15
3. Fő eredmények	21
3.1. Cesáro-Stolz lemma általánosítása	21
3.1.1. Cesáro-Stolz feltétel	25
3.1.2. Az időskálákra vonatkozó L'Hospital szabály általánosítása	29
3.2. Kiterjesztett Cesáro-Stolz	33
3.2.1. Konstans együtthatós lineáris differencia operátorra kiterjesztett Cesáro-Stolz	43
4. Összefoglaló és további kutatási lehetőségek	51
4.1. Összefoglaló	51
4.2. További kutatási lehetőségek	53

1. fejezet

Bevezető

1.1. Cesáro-Stolz lemma megjelenése, bizonyításai

1.1.1. Történelmi áttekintés

A jól ismert Cesáro-Stolz lemma, mely először [11]-ben volt publikálva Ernesto Cesáro-nak és Otto Stolz matematikusoknak köszönhető.

1.1. Értelmezés. Legyen $(x_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ sorozat, ekkor

1. $\Delta x_n := x_{n+1} - x_n,$

2. $\nabla x_n := x_n - x_{n-1}$

Pontosabban több lemmáról van szó, amelyek $\frac{\infty}{\infty}$ illetve $\frac{0}{0}$ határozatlansági esetek kiszámolását teszi lehetővé valós számsorozatok esetén. Az alábbi tételben megfogalmazzuk az összes esetet.

1.2. Tétel (Cesaró-Stolz lemma,[5, 11]). *Legyen $(x_n)_n, (y_n)_n$ két valós számsorozat úgy, $(x_n)_n$ szigorúan monoton, sehol se nulla, és $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor ha $(x_n)_n$ nem korlátos (tehát $|x_n| \rightarrow +\infty$), vagy $x_n, y_n \rightarrow 0$, akkor $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = l$.*

Ez a lemma sokat használt a matematikai analízisben, például sorozatok határértékének kiszámolásához, konvergencia rend meghatározásához, illetve aszimptotikus viselkedések vizsgálatához. Gyakori használata miatt, sok általánosítása született a lemmának. Sőt az általánosított Cesáro-Stolz lemmát gyakran alkalmazzák a lineáris differencia egyenletek elméletében és az aszimptotikus viselkedések vizsgálatában.[10]

1.1.2. Alkalmazások

A Cesáro-Stolz lemmát gyakran alkalmazzák a sorozatok konvergencia rendjének a meghatározásakor.

1.3. Értelmezés ([3]). Legyen $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ két sorozat, melyek konvergenssek és határértékei rendre x, y és feltételezzük, hogy létezik a

$$l := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n - x}{y_n - y} \right|$$

határérték.

- a) Ha $l = 0$, akkor azt mondjuk, hogy $(x_n)_n$ *gyorsabban konvergál* x -hez, mint az $(y_n)_n$ sorozat az y -hoz.
- b) Ha $l \in (0, +\infty)$, akkor azt mondjuk, hogy az $(x_n)_n, (y_n)_n$ sorozatok *konvergencia rendje* megegyezik.
- c) Ha $l = +\infty$, akkor azt mondjuk, hogy $(x_n)_n$ *lassabban konvergál* x -hez, mint az $(y_n)_n$ sorozat az y -hoz.

Hasonlóan értelmezhető a konvergencia rend $+\infty$ határértékű sorozatok esetén is.

1.4. Értelmezés ([3]). Legyen $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ két sorozat, melyek határértéke ∞ , és feltételezzük, hogy létezik a

$$l := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{y_n} \right|$$

határérték.

- a) Ha $l = +\infty$, akkor azt mondjuk, hogy $(x_n)_n$ *gyorsabban tart* $+\infty$ -hez, mint az $(y_n)_n$ sorozat. Jelölés $x_n \succ y_n$.
- b) Ha $l \in (0, +\infty)$, akkor azt mondjuk, hogy az $(x_n)_n, (y_n)_n$ sorozatok *konvergencia rendje* megegyezik. Jelölés $x_n \sim y_n$.
- c) Ha $l = 0$, akkor azt mondjuk, hogy $(x_n)_n$ *lassabban tart* $+\infty$ -hez, mint az $(y_n)_n$ sorozat. Jelölés $x_n \prec y_n$.

Valós számsorozatok (moduluszok nélkül) esetén az l határérték gyakran kiszámolható a Cesáro-Stolz lemma segítségével, mivel az első az $\frac{0}{0}$ eset, míg a második a $\frac{\infty}{\infty}$ eset

Példaként (lásd [3]) meghatározzuk az $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ sorozat konvergencia rendjét. Tudjuk, hogy a $(c_n)_n$ sorozat konvergens és határértéke $\gamma \approx 0,57721566 \dots$, az Euler–Mascheroni néven ismert konstans. Tudjuk, hogy

$$\Delta c_n = \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1},$$

ahonnan

$$\frac{c_{n+1} - c_n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} \right) n(n+1) = n \left(1 + (n+1) \ln \frac{n}{n+1} \right).$$

Az egyenlőség utolsó tagjának a határértékét ki tudjuk számolni a következő határérték segítségével ($\frac{1}{n} \leftrightarrow x$)

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x+1}{x} \ln \frac{1}{x+1} \right) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x - (x+1) \ln(x+1)}{x^2} \stackrel{L'H \times 2}{=} \lim_{x \searrow 0} -\frac{1}{2(x+1)} = -\frac{1}{2}.$$

Mivel $(c_n - \gamma)_n, \left(\frac{1}{n}\right)_n$ sorozatok 0-hoz tartanak, illetve $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ szigorúan csökkenő ezért alkalmazhatjuk a Cesáro-Stolz lemmát és kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - \gamma}{\frac{1}{n}} = -\frac{1}{2}.$$

Tehát az $(c_n)_n, \left(\frac{1}{n}\right)_n$ sorozatok konvergencia rendje megegyezik.

A lemmát olyankor is lehet alkalmazni konvergencia rend meghatározásához, mikor a sorozat rekurzívan van megadva. Példaként tekintsük a $x_{n+1} = \sin x_n, \forall n \geq 0$ rekurzióval értelmezett sorozatot, ahol $x_0 \in \mathbb{R}$. Figyelembe véve, hogy a $\sin$ függvény páratlan, és képe $[-1, 1]$ intervallumban van ezért általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük a továbbiakban, hogy $x_0 \in [0, 1]$. Ezen feltételek mellett könnyű belátni, hogy $x_n \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ezt összevetve az ismert

$$\sin x \leq x, \forall x \geq 0$$

egyenlőtlenséggel kapjuk, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat csökkenő, tehát korlátossága miatt konvergens is. A határérték fix pontja lesz a $\sin$ függvénynek, tehát $x_n \rightarrow 0$. (ugyanazt kapjuk ha alkalmazzuk az [1] könyv 111-es oldalán szereplő 4.3-as tételt). Vegyük észre, hogy ha $\exists n_0 : x_{n_0} = 0$ akkor $x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (mert $\sin$ injektív $[0, 1]$ -en), tehát a sorozat pontosan akkor konstans 0, ha $x_0 = 0$. Konvergencia rend szempontjából ez az eset nem lényeges, ezért feltételezhetjük, hogy $x_0 \in (0, 1]$.

Tegyük fel, hogy létezik egy $p > 0$ valós szám úgy, hogy $(n^p x_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens és $l := \lim_{n \rightarrow \infty} n^p x_n \neq 0$ (ekkor $l > 0$). Vagyis n^{-p} alakú sorozatok között keressük az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozattal azonos konvergencia rendű sorozatokat.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta x_n}{\Delta n^{-p}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x_n) - x_n}{-x_n^3} (n^p x_n)^3 \frac{n^{-3p}}{-\Delta n^{-p}} \\ &= \frac{l^3}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-3p}}{-\Delta n^{-p}} = \frac{l^3}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1} n^{1-2p} \\ &= \frac{l^3}{6p} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-2p} \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $(n^{-p})_{n \geq 1}$ sorozat szigorúan csökken 0-hoz, tehát a Cesáro-Stolz lemma alapján

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} n^p x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^{-p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta x_n}{\Delta n^{-p}} = \frac{l^3}{6p} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-2p}.$$

Feltevés alapján $l > 0$ ezért a jobb oldali kifejezés véges és pozitív kell legyen, ez pontosan akkor lesz igaz, ha $p = \frac{1}{2}$. Továbbá $3l = l^3$ ami alapján $l = \sqrt{3}$ tudva, hogy $l > 0$. Azt, hogy $(\sqrt{n}x_n)_{n \geq 1}$ valóban konvergens nem részletezzük.

1.1. Alkalmazás ([4]). Legyen $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ sorozat, melynek létezik határértéke, ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Bizonyítás. Azonnali az $y_n = a_n$ illetve $x_n = n$ sorozatok megválasztásával az 1.2 tétel jelöléseivel. ■

1.2. Alkalmazás ([9]). Legyen $(x_n)_n \subseteq (0, +\infty)$ sorozat. Ekkor igaz az alábbi következtetés:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, +\infty] \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$$

A fenti azonosságot gyakran használják hatványsorok konvergencia sugarának kiszámítására.

Bizonyítás.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ln l \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(\ln x_n)}{\Delta n} = \ln l.$$

Így a Cesáro-Stolz lemma alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{n} = \ln l \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{x_n} = \ln l \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$$

■

1.1.3. Alternatív bizonyítások

A továbbiakban nézzünk meg három alternatív bizonyítást a Cesáro-Stolz lemmának, az első lényegében általánosítja a klasszikus lemma következtetését, hiszen nem követeli meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$ határérték létezését, e helyett az $\left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \right)_n$ sorozat szélső határértékei használja, amik mindig léteznek.

1.5. Tétel (Cesáro-Stolz lemma, [12]). Legyen $(x_n)_n, (y_n)_n \subset \mathbb{R}$ két sorozat úgy, hogy $(\Delta x_n)_n$ szigorúan előjeltartó illetve $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Ha $|x_n| \rightarrow \infty$ vagy $x_n, y_n \rightarrow 0$ akkor

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}.$$

Ennek az eredménynek az ismeretében csak annyit kell felhasználnunk, hogy megkapjuk a klasszikus Cesáro-Stolz lemma bizonyítását, hogy a szélső határértékek akkor és csakis akkor egyeznek meg és értékük l , ha a kérdéses sorozatnak van határértéke és az l .

A Töplitz tételének segítségével igazolható a Cesáro-Stolz lemma $\frac{\infty}{+\infty}$ esete.

1.6. Tétel (Töplitz, [14]). Legyen $(c_{in})_{i=\overline{0,n}, n \geq 0}$ egy végtelen alsó háromszögmátrix, amelyre $c_{in} \geq 0, \forall i = \overline{0,n}, n \geq 0$ illetve $\sum_{i=0}^n c_{in} = 1$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{in} = 0, \forall i \in \mathbb{N}$. Ha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatnak van határérté-

ke, akkor

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n c_{in} x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

1.7. Következmény (Cesáro-Stolz lemma). *Ha $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^*$ szigorúan növekvő, nem korlátos sorozat, és $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ akkor ha*

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = l.$$

Bizonyítás. Legyen $c_{in} = \frac{\Delta x_i}{x_{n+1} - x_0}$, ekkor $(c_{in})_{i=0, n, n \geq 0}$ teljesíti Töplitz tételének feltételét, vagyis $c_{in} > 0$ mert $(x_n)_n$ szigorúan növekvő, illetve

$$\sum_{i=0}^n c_{in} = \frac{1}{x_{n+1} - x_0} \sum_{i=0}^n \Delta x_i = \frac{x_{n+1} - x_0}{x_{n+1} - x_0} = 1,$$

tehát

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{\Delta x_i}{x_{n+1} - x_0} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} = l, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_0}{x_{n+1} - x_0} &= l \stackrel{x_n \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = l. \end{aligned}$$

■

Tudjuk, hogy az időskálák elmélete egyesíti a differencia egyenletek illetve differenciál egyenletek elméletét. Sőt a L'Hospital szabálynak is meg van a megfelelője időskálán.

1.8. Tétel (L'Hospital szabály, [2]). *Legyen $\mathbb{T}$ időskála, $t_0 \in \mathbb{T}$ bal-sűrű pont, $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények a $\mathbb{T}$ halmazon úgy, hogy g^Δ illetve g szigorúan előjeltartó, $L_\varepsilon(t_0)$ halmazon, valamilyen $\varepsilon > 0$ -ra. Ekkor ha $\lim_{t \nearrow t_0} |g(t)| = +\infty$ vagy $\lim_{t \nearrow t_0} g(t), f(t) = 0$ akkor*

$$\liminf_{t \nearrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)} \leq \liminf_{t \nearrow t_0} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} \leq \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} \leq \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)} \quad (1.1)$$

Ekkor $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ illetve $t_0 = +\infty$ -re visszkapjuk az 1.5 lemmát, amivel a Cesáro-Stolz lemma bizonyítása lezárul.

2. fejezet

A Cesáro-Stolz lemma általánosításai

2.1. Mortici általánosítása

Legyen $(x_n)_n, (y_n)_n \subset \mathbb{R}$ két sorozat, $l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$ és $l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$ a klasszikus Cesáro-Stolz lemma feltételei mellett $l_1 = l_2$, ekkor ha l_1 véges akkor

$$\exists l_3 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - \frac{y_n}{x_n} = 0. \quad (2.1)$$

Cristinel Mortici a cikkében[7] megvizsgálja, hogy mi történik l_1, l_2 -vel abban az esetben ha csak az l_3 határérték értékét ismerjük.

Elsőként adott egy példát arra az esetre amikor a (2.1)-es összefüggés fennáll, de l_1 nem létezik. Ha $(\lambda_n)_n$ sorozatnak nincs határértéke és $\Delta \lambda_n \rightarrow 0$, akkor az $y_n = 2^n \lambda_n$, $x_n = 2^n$ sorozatok olyan sorozatok. Valóban

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \lambda_{n+1} - 2^n \lambda_n}{2^{n+1} - 2^n} - \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0,$$

de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ ami feltevés szerint nem létezik. Példának vette a következő sorozatot

$$(\lambda_n)_n = 1, 1 + \frac{1}{2}, 2, 2 - \frac{1}{3}, 2 - \frac{2}{3}, 1, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{2}{4}, 1 + \frac{3}{4}, 2, 2 - \frac{1}{5}, \dots$$

Továbbá kimutatta, hogy tudunk mondani valamit az $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_n$ sorozatról, ha $l_3 = 0$. És pedig

2.1. Tétel ([7]). Ha $(x_n)_n, (y_n)_n \subset \mathbb{R}$ két sorozat, melyre $(x_n)_n$ szigorúan növekvő, divergens és $l_3 = 0$, akkor $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta \left(\frac{y_n}{x_n}\right) = 0$.

Bizonyítás. Ha jelöljük $\lambda_n = \frac{y_n}{x_n}$, akkor

$$\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - \frac{y_n}{x_n} = \frac{x_{n+1} \lambda_{n+1} - x_n \lambda_n}{x_{n+1} - x_n} - \lambda_n = \Delta \lambda_n \cdot \left(1 + \frac{x_n}{x_{n+1} - x_n}\right),$$

ahonnan

$$|\Delta\lambda_n| \leq |\Delta\lambda_n| \cdot \left(1 + \frac{x_n}{x_{n+1} - x_n}\right) \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta\lambda_n \rightarrow 0.$$

■

Ezek után rátér l_1, l_2 vizsgálására, mikor l_3 létezik és nem 0.

2.2. Tétel ([7]). Ha $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq (0, +\infty)$ két sorozat, melyre $(x_n)_n$ szigorúan növekvő, divergens és $l_3 \neq 0$, akkor $l_{1,2} = \infty$.

2.3. Lemma ([7]). Ha $(x_n)_n \subseteq (0, +\infty)$ szigorúan növekvő, divergens, akkor a

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \quad (2.2)$$

sor divergens.

Lemma bizonyítása. Legyen $\alpha_n = 1 - \frac{x_n}{x_{n+1}} \in (0, 1)$ a (2.2) sor általános tagja. Ha α_n nem konvergál 0-hoz akkor a sor divergens, ezért feltételezhetjük, hogy $\alpha_n \rightarrow 0$ mikor $n \rightarrow \infty$. De

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{1 - \alpha_n} \Rightarrow b_n = \frac{b_1}{\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \alpha_k)}, \forall n \geq 2.$$

Mivel $b_n \rightarrow \infty$ ezért $\prod_{n \geq 1} (1 - \alpha_n) = 0$, ahonnan

$$\sum_{n \geq 1} -\ln(1 - \alpha_n) = +\infty \quad (2.3)$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(1 - \alpha_n)}{\alpha_n} = 1$ ezért az összehasonlítási kritérium alapján $\sum_{n \geq 1} -\ln(1 - \alpha_n), \sum_{n \geq 1} \alpha_n$ sorok azonos természetűek, ahonnan a (2.3) alapján $\sum_{n \geq 1} \alpha_n$ divergens. ■

A 2.2 tétel bizonyítása. Legyen $u_n = \sum_{k=1}^n 1 - \frac{x_k}{x_{k+1}}$, ekkor

$$w_n = \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - \frac{y_n}{x_n} = \frac{\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{y_n}{x_n}}{1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}} = \frac{\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{y_n}{x_n}}{u_{n+1} - u_n}.$$

Előbbi lemma alapján $(u_n)_n$ divergens, szigorúan növekvő ($\alpha_n > 0$), tehát alkalmazva a klasszikus Cesáro-Stolz lemmát (az 1.2 tétel) írhatjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = l_3 \neq 0 \xrightarrow{u_n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

A (2.4) összefüggés bal oldali határértéke és az $\frac{y_n}{x_n} > 0$ egyenlőtlenség miatt levonhatjuk a következtést, hogy $l_3 > 0$ ⁽¹⁾, ami miatt

$$l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - \frac{y_n}{x_n} + \frac{y_n}{x_n} = l_3 + \infty = \infty.$$

■

Majd kimutatta, hogy gyengébb feltételek mellett igaz lesz egy hasonló következtetés.

2.4. Tétel ([7]). Ha $(x_n)_n, (y_n)_n \subset (0, +\infty)$ két sorozat, melyre $(x_n)_n$ szigorúan növekvő, divergens és

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - \frac{y_n}{x_n} > 0 \quad (2.5)$$

akkor $l_1 = l_2 = \infty$.

Bizonyítás. Az 1.5 tétel alapján

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{y_n}{x_n}}{u_n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{y_n}{x_n}}{u_{n+1} - u_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - \frac{y_n}{x_n} > 0,$$

és tudva, hogy $u_n \rightarrow +\infty$ írhatjuk, hogy $l_1 = +\infty$; utóbbiból és (2.5)-ből következik, hogy $l_2 = +\infty$ ■

Ezek után Mortici megvizsgálja azt az esetet, amikor $(x_n)_n$ szigorúan növekvő, és felülről korlátos.

2.5. Tétel ([7]). Ha $(x_n)_n, (y_n)_n \subset (0, +\infty)$ két sorozat, melyre $(x_n)_n$ szigorúan növekvő, felülről korlátos úgy, hogy $u_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{x_{k-1}}{x_k}\right)$ sorozat konvergens, továbbá ha létezik l_3 és véges, akkor az $l_{1,2}$ határértékek léteznek és végesek.

Bizonyítás. Feltétel szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{y_n}{x_n}}{u_{n+1} - u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{y_n}{x_n}}{1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} - \frac{y_n}{x_n} = l_3.$$

Mivel $u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - u_k$ konvergens ezért az összehasonlítási kritérium alapján $\frac{y_n}{x_n} - \frac{y_1}{x_1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} - \frac{y_k}{x_k}$ is konvergens, vagyis l_1 létezik és véges. Ekkor figyelembe véve l_3 értelmezését írhatjuk, hogy l_2 létezik és véges, sőt $l_2 - l_1 = l_3$. ■

A fenti tétel egy javított változata a cikkbeli tételnek. Mortici a cikkében a fenti tételben l_3 -ra nincs kikötve, hogy véges legyen; illetve azt állítja, hogy $l_1 = 0$ és $l_2 = l_3$. A következő példa megmutatja, hogy ezen változtatásokkal a tétel állítása hamis.

1. Annak az igazolása, hogy $l_3 > 0$ nem szerepel a [7] cikkben

2.6. Példa. Legyen $x_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^{-1}$, $x_1 = 1$, $x_0 = 0$, és $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, $y_0 = 0$. A tételben csak az lényeges, hogy a két sorozat véges sok tag kivételével pozitív legyen, tehát használhatjuk ezeket a sorozatokat példaként. Ekkor $u_n = y_n$. Továbbá

$$\ln x_n = \sum_{k=1}^n -\ln \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}.$$

Tehát $(\ln x_n)_{n \geq 1}$ konvergens az összehasonlítási kritérium miatt, ahonnan $(x_n)_n$ konvergens; az, hogy növekvő következik abból, hogy 1-nél nagyobb számok szorzata.

$$\Delta x_n = x_n \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{(n+1)^2}} - 1 \right) = \frac{x_n}{n(n+2)},$$

$$\Delta y_n = \frac{1}{(n+1)^2},$$

$$\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} = \frac{1}{x_n} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2},$$

$$\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - \frac{y_n}{x_n} = (n+1)^2 \Delta \left(\frac{y_n}{x_n} \right) = (n+1)^2 \left(\frac{\Delta y_n}{x_{n+1}} - y_n \frac{\Delta x_n}{x_n x_{n+1}} \right) = \frac{1}{x_{n+1}} \left(1 - y_n \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right).$$

Ha $x > 1$ jelöli az $(x_n)_n$ sorozat határértékét, akkor a fentiek alapján

$$l_1 = \frac{\pi^2}{6x} \neq 0, \quad l_2 = \frac{1}{x} \neq l_3, \quad l_3 = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\pi^2}{6} \right) \neq 0.$$

A hiba a cikkbeli bizonyításában ott található, hogy alkalmazza a Cesáro-Stolz lemma $\frac{0}{0}$ esetét a $\left(\frac{y_n}{x_n} \right)_n$, $(u - u_n)_n$ sorozatokra ($u_n \rightarrow u$), hogy igazolja azt, hogy a $\left(\frac{y_n}{x_n} \right)_n$ sorozat 0-hoz tart, ami hibás gondolatmenet.

2.2. Renato Spigler és Marco Vianello általánosítása

Az általánosítás

Általánosításuk lényege, hogy a nevező monotonitása nem egy szükséges feltétel, e helyett olyan feltételt fogalmaznak meg mely esetén nem szükséges a sorozat rendezettsége. Ezáltal az a lemma nem csak valós számsorozatokra lesz érvényes, hanem komplex értékűekre is.

Legyen $v \in \mathbb{Z}$ rögzített.

2.7. Tétel ([10]). Legyen $(y_n)_{n \geq v}, (x_n)_{n \geq v}$ két komplex számsorozat, melyre $x_n \neq 0, \forall n \geq v$ és $|x_n| \rightarrow \infty$. Továbbá feltételezzük, hogy létezik egy $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ részsorozat ($\sigma := \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$), melyre $\Delta x_n \neq 0$ bármely $n \in \sigma$ esetén, és

- (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \Big|_{n=n_k} = L \in \mathbb{C},$
- (ii) $\sum_{j=v, j \in \sigma}^{n-1} \left| \frac{\Delta x_j}{x_n} \right|$ korlátos,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=v, j \notin \sigma}^{n-1} \frac{\Delta y_j - L \Delta x_j}{x_n} = 0.$

Akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = L. \quad (2.6)$$

2.8. Tétel ([10]). Legyen $(y_n)_{n \geq v}, (x_n)_{n \geq v}$ két komplex számsorozat, melyre $x_n \neq 0, \forall n \geq v$ és $x_n, y_n \rightarrow 0, \sum_{n \geq v} |\Delta y_n|, \sum_{n \geq v} |\Delta x_n| < +\infty$. Továbbá feltételezzük, hogy létezik egy $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ részsorozat ($\sigma := \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$), melyre $\Delta x_n \neq 0$ bármely $n \in \sigma$ esetén, és

- (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \Big|_{n=n_k} = L \in \mathbb{C},$
- (ii) $\sum_{j \geq n, j \in \sigma} \left| \frac{\Delta x_j}{x_n} \right|$ korlátos,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \geq n, j \notin \sigma} \frac{\Delta y_j - L \Delta x_j}{x_n} = 0.$

Akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = L. \quad (2.7)$$

A 2.7 tétel bizonyítása. Tudjuk, hogy

$$y_n - Lx_n = y_v - Lx_v + \sum_{j=v}^{n-1} \Delta y_j - L \Delta x_j, \forall n \geq v,$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\left| \frac{y_n}{x_n} - L \right| \leq \frac{|y_v - Lx_v|}{|x_n|} + \left| \sum_{j=v, j \in \sigma}^{n-1} \frac{\Delta y_j - L\Delta x_j}{x_n} \right| + \left| \sum_{j=v, j \notin \sigma}^{n-1} \frac{\Delta y_j - L\Delta x_{vj}}{x_n} \right|, \forall n \geq v.$$

A fenti összeg első tagja tart 0-hoz mert $|x_n| \rightarrow \infty$, illetve a (iii) feltétel miatt a harmadik tag is 0-hoz tart, így a (2.6)-os bizonyításhoz elég belátnunk, hogy a középső tag is 0-hoz tart mikor $n \rightarrow \infty$.

Legyen $M > 0$ az $\sum_{j=v, j \in \sigma}^{n-1} \left| \frac{\Delta x_j}{x_n} \right|$ egy felső korlátja ami létezik a (ii) feltétel miatt. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor az (i) feltétel alapján

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left| \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \forall j \geq n_\varepsilon \text{ és } j \in \sigma,$$

továbbá

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=v, j \in \sigma}^{n-1} \frac{\Delta y_j - L\Delta x_j}{x_n} \right| &\leq \sum_{j=v, j \in \sigma}^{n-1} \left| \frac{\Delta y_j - L\Delta x_j}{x_n} \right| \\ &\leq \sum_{j=v, j \in \sigma}^{n_\varepsilon-1} \left| \frac{\Delta y_j - L\Delta x_j}{x_n} \right| + \sum_{j=n_\varepsilon, j \in \sigma}^{n-1} \left| \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} - L \right| \left| \frac{\Delta x_j}{x_n} \right| \\ &\leq \frac{1}{|x_n|} \underbrace{\sum_{j=v, j \in \sigma}^{n_\varepsilon-1} |\Delta y_j - L\Delta x_j|}_{C_1} + \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{j=n_\varepsilon, j \in \sigma}^{n-1} \left| \frac{\Delta x_j}{x_n} \right| \\ &\leq \frac{C_1}{|x_n|} + \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_\varepsilon \end{aligned}$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_1}{|x_n|} = 0$ ezért létezik $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\frac{C_1}{|x_n|} < \frac{\varepsilon}{2}$ minden $n \geq n'_\varepsilon$ esetén. Ha most $n_0 = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$, akkor

$$\left| \sum_{j=v, j \in \sigma}^{n-1} \frac{\Delta y_j - L\Delta x_j}{x_n} \right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

■

A 2.8 tétel bizonyítása. Tudjuk, hogy

$$y_n - Lx_n = - \sum_{j \geq n} \Delta y_j - L\Delta x_j, \forall n \geq v,$$

ami igaz mert $x_n, y_n \rightarrow 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} \left| \frac{y_n}{x_n} - L \right| &\leq \sum_{j \geq n, j \in \sigma} \left| \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} - L \right| \left| \frac{\Delta x_j}{x_n} \right| + \left| \sum_{j \geq n, j \in \sigma} \frac{\Delta y_j - L \Delta x_j}{x_n} \right|, \\ &\leq \sup \left\{ \left| \frac{\Delta y_j}{\Delta x_j} - L \right| \mid j \geq n, j \in \sigma \right\} \sum_{j \geq n, j \in \sigma} \left| \frac{\Delta x_j}{x_n} \right| + \left| \sum_{j \geq n, j \in \sigma} \frac{\Delta y_j - L \Delta x_j}{x_n} \right|, \forall n \geq v. \end{aligned}$$

Az összeg jobb oldali tagja 0-hoz tart a (iii) feltétel miatt. A bal oldali tag 0-hoz tart az (i), (ii) feltételek miatt. ■

Egy alkalmazás lineáris differencia egyenletek elméletében

A következő alkalmazását adják eredményüknek. Tekintsük a következő másodrendű differencia egyenletet

$$\Delta^2 y_n + (\alpha + h_n) y_n = 0, \quad \forall n \geq n_0, \quad (2.8)$$

ahol $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (\{-1\} \cup \mathbb{R}_0^+)$, $(h_n)_{n \geq n_0} \subseteq \mathbb{C}$ sorozat úgy, hogy $\sum_{n \geq n_0} |h_n| < +\infty$, és $n_0 \in \mathbb{Z}$ rögzített.

Egy kvalitatív jellemzést lehet adni a (2.8)-as megoldásainak aszimptotikus viselkedéséről, felhasználva a 2.7., illetve a 2.8. tételt.

2.9. Tétel ([10]). Legyen $\lambda_{\pm} = 1 \pm \sqrt{-\alpha}$, ahol a gyök pozitív valós szám pozitív valós argumentum esetén. A a (2.8) differencia egyenletnek pontosan akkor létezik olyan $(y_n^+)_{n \geq n_0}$ megoldása, amelyre $y_n^+ \sim (\lambda_+)^n$ mikor $n \rightarrow \infty$, ha létezik olyan $(y_n^-)_{n \geq n_0}$ megoldása, amelyre $y_n^- \sim (\lambda_-)^n$ mikor $n \rightarrow \infty$.

Megjegyzés. Az $a_n \sim b_n$ mikor $n \rightarrow \infty$ szimbólum értelmezés szerint azt jelenti, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{C}^*$.

Bizonyítás. Vegyük az $(y_n^-)_{n \geq n_0}$ sorozatot, és értelmezzük vele a $(z_n)_{n \geq n^*}$ sorozatot a következőképpen

$$z_n := y_n \sum_{k=n^*}^{n-1} \frac{C_k}{y_k^- y_{k+1}^-},$$

ahol n^* a legkisebb egész, amely nagyobb mint n_0 és $y_n^- \neq 0$, minden $n \geq n^*$ esetén; illetve C_k jelöli az y_k^- és z_k Casorati-ját, vagyis

$$C_k = C_{n^*} \prod_{j=n^*}^{k-1} (1 + \alpha + h_j),$$

ahol C_{n^*} egy nem zéró konstans, amit sajátos módon választunk meg. Ekkor $(z_n)_{n \geq n^*}$ is megoldása a (2.8)-as egyenletnek (lásd [6, Section 3.5, Theorem 3.9, p.77]). Most figyeljük meg, hogy

$$\frac{z_n}{\lambda_+^n} \sim \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right)^{-n} \sum_{k=n^*}^{n-1} \frac{C_k}{\lambda_-^{2k+1} [1 + o(1)]}, \quad \text{amikor } n \rightarrow \infty, \quad (2.9)$$

és $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right)^n = \infty$, mivel $\left| \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right| > 1$, minden $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ (vagyis minden elfogadható α -ra), a négyzetgyökök megfelelő ágait választva.

Ahhoz, hogy alkalmazhassuk a 2.7 tételt legyen y_n a (2.9)-es összefüggésben az összeg, illetve $x_n = \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right)^n$, $v = n^*$, $\sigma = \{n \mid n \geq n^*\}$. Ekkor

$$\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \sim \frac{C_n}{\lambda_-^{2n+1} \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right)^n \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-} - 1 \right)} = \frac{C_{n^*} (1 + \alpha)^{-n^*}}{2\sqrt{-\alpha}} \prod_{j=n^*}^{n-1} \left(1 + \frac{h_j}{1 + \alpha} \right), \text{ mikor } n \rightarrow \infty.$$

Tudva, hogy $\sum_{j \geq n^*} |h_j| < +\infty$, mondhatjuk, hogy a fenti kifejezésben szereplő szorzat konvergens, tehát

C_{n^*} -ot úgy válasszuk meg, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} = 1$. A (iii) feltétel triviálisan igaz, hiszen σ komplementere üres, továbbá a (ii) feltétel is teljesül hiszen

$$\sum_{j=n^*}^{n-1} \left| \frac{\Delta x_j}{x_n} \right| = \frac{\left| \frac{\lambda_+}{\lambda_-} - 1 \right|}{\left| \frac{\lambda_+}{\lambda_-} - 1 \right|^n} \sum_{j=n^*}^{n-1} \left| \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right|^j = \frac{\left| \frac{\lambda_+}{\lambda_-} - 1 \right|}{\left| \frac{\lambda_+}{\lambda_-} - 1 \right| - 1} \frac{\left| \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right|^n - \left| \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right|^{n^*}}{\left| \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right|^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{\lambda_+}{\lambda_-} - 1 \right|}{\left| \frac{\lambda_+}{\lambda_-} - 1 \right| - 1}$$

Így a tétel alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\lambda_+^n} = 1$, vagyis $y_n^+ = z_n \sim \lambda_+^n$, mikor $n \rightarrow \infty$.

Fordítva, adva az $(y_n^+)_n$ megoldását a (2.8)-as egyenletnek, melyre $y_n^+ \sim \lambda_+$, mikor $n \rightarrow \infty$, vesszük a $(w_n)_{n \geq n^*}$ sorozatot, ahol

$$w_n := y_n^+ \sum_{k \geq n} \frac{C_k}{y_k^+ y_{k+1}^+}, \quad \forall n \geq n^*,$$

illetve n^* és C_k az előbbi esethez hasonlóan vannak megadva. Ekkor

$$\frac{w_n}{\lambda_-^n} \sim \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{-n} \sum_{k \geq n} \frac{C_k}{\lambda_+^{2k+1} [1 + o(1)]}, \quad \text{mikor } n \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Ahhoz, hogy alkalmazhassuk a 2.8 tételt legyen y_n a (2.10)-es összefüggésben a sor, és $x_n = \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^n$, illetve $v = n^*$, $\sigma = \{n \mid n \geq n^*\}$. A tétel feltételei ugyanúgy teljesülnek, és C_n^* megfelelő megválasztására $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} = 1$, ahonnan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n}{\lambda_-^n} = 1$. Így $y_n^+ := w_n \sim \lambda_-^n$, mikor $n \rightarrow \infty$. ■

2.3. Rajagopal általánosítása

Az általánosítás

Spigler és Vianello-val ellentétben Rajagopal általánosítása abban áll, hogy finomítja az 1.5 tételben a szélső korlátokat a $\frac{\infty}{\infty}$ esetben.

2.10. Tétel ([8]). Legyen $(y_n)_n$ tetszőleges valós számsorozat, $(M_n)_n \subset (0, +\infty)$ egy monoton sorozat és $(x_n)_n$ növekvő, divergens sorozat². Legyen

$$\underline{\lambda} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k \leq n} M_k \nabla y_k}{\sum_{k \leq n} M_k \nabla x_k}, \quad \bar{\lambda} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k \leq n} M_k \nabla y_k}{\sum_{k \leq n} M_k \nabla x_k}.$$

Ekkor

(i) ha $(M_n)_n$ növekvő, akkor

$$\underline{\lambda} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \bar{\lambda}, \quad (2.11)$$

(ii) ha $(M_n)_n$ csökkenő és létezik egy K szám melyre (C) $\frac{1}{x_n} \sum_{k \leq n} M_k \nabla x_k < K M_n$, akkor

$$\bar{\lambda} + K(\underline{\lambda} - \bar{\lambda}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \underline{\lambda} + K(\bar{\lambda} - \underline{\lambda}). \quad (2.12)$$

Megjegyzés. A (C) feltételben szereplő K -ra igaz, hogy $K > 1$. Egyrészt pozitív, mert a bal oldal pozitív és $M_n > 0$, másrészt

$$\sum_{k=1}^n M_k \nabla x_k \stackrel{(C)}{<} K \sum_{k=1}^n M_n \nabla x_k \leq K \sum_{k=1}^n M_k \nabla x_k \Rightarrow K > 1.$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$v_n = \sum_{k=1}^n M_k \nabla y_k, \quad d_n = \sum_{k=1}^n M_k \nabla x_k.$$

Ekkor adott $\varepsilon > 0$ esetén $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\underline{\lambda} - \varepsilon < \frac{v_n}{d_n} < \bar{\lambda} + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

2. Feltételezzhetjük, hogy $y_0, x_0 = 0$

Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{k=1}^n \frac{\nabla v_k}{M_k} = \sum_{k=1}^{n-1} v_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + \frac{v_n}{M_n} \\ &= \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + \sum_{k=n_0}^{n-1} v_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + \frac{v_n}{M_n}; \end{aligned}$$

Illetve

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\nabla d_k}{M_k}$$

Ekkor a (C) feltétel ekvivalens a következővel $\frac{d_n}{M_n x_n} < k$.

Az (i) esetben $\forall n \geq n_0$ esetén

$$\begin{aligned} y_n &> \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + (\underline{\lambda} - \varepsilon) \left[\sum_{k=n_0}^{n-1} d_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + \frac{d_n}{M_n} \right], \\ y_n &> \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + (\underline{\lambda} - \varepsilon) \left[\sum_{k=n_0+1}^n \frac{\nabla d_k}{M_k} + \frac{d_{n_0}}{M_{n_0+1}} \right], \\ y_n &> \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + (\underline{\lambda} - \varepsilon) \left[x_n - x_{n_0} + \frac{d_{n_0}}{M_{n_0+1}} \right], \\ \frac{y_n}{x_n} &> \frac{1}{x_n} \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + (\underline{\lambda} - \varepsilon) \left[1 - \frac{1}{x_n} \left(x_{n_0} - \frac{d_{n_0}}{M_{n_0+1}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Az utolsó kifejezésben $\liminf$ -re térve kapjuk, hogy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \geq \underline{\lambda} - \varepsilon.$$

A másik egyenlőtlenség hasonlóan tárgyalandó. Tehát

$$\underline{\lambda} - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq \bar{\lambda} + \varepsilon.$$

Ahonnán $\varepsilon \searrow 0$ -val kapjuk a (2.11)-es egyenlőtlenséget.

Az (ii) esetben, minden $n \geq n_0$ esetén igazak, hogy

$$\begin{aligned} y_n &> \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + (\bar{\lambda} + \varepsilon) \sum_{k=n_0}^{n-1} d_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + (\underline{\lambda} - \varepsilon) \frac{d_n}{M_n}, \\ y_n &> \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + (\bar{\lambda} + \varepsilon) \left[\sum_{k=n_0+1}^n \frac{\nabla d_k}{M_k} + \frac{d_{n_0}}{M_{n_0+1}} - \frac{d_n}{M_n} \right] + (\underline{\lambda} - \varepsilon) \frac{d_n}{M_n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_n &> \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + (\bar{\lambda} + \varepsilon) \left[x_n - x_{n_0} + \frac{d_{n_0}}{M_{n_0+1}} \right] + (\underline{\lambda} - \bar{\lambda} - 2\varepsilon) \frac{d_n}{M_n}, \\
\frac{y_n}{x_n} &> \frac{1}{x_n} \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + (\bar{\lambda} + \varepsilon) \left[1 - \frac{1}{x_n} \left(x_{n_0} - \frac{d_{n_0}}{M_{n_0+1}} \right) \right] + (\underline{\lambda} - \bar{\lambda} - 2\varepsilon) \frac{d_n}{M_n x_n}, \\
\frac{y_n}{x_n} &> \frac{1}{x_n} \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right) + (\bar{\lambda} + \varepsilon) \left[1 - \frac{1}{x_n} \left(x_{n_0} - \frac{d_{n_0}}{M_{n_0+1}} \right) \right] + (\underline{\lambda} - \bar{\lambda} - 2\varepsilon) K.
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenségben $\liminf$ -re térve kapjuk, hogy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \geq \bar{\lambda} + \varepsilon + (\underline{\lambda} - \bar{\lambda} - 2\varepsilon)K,$$

ahonnan $\varepsilon \searrow 0$ -val írhatjuk, hogy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \geq (\underline{\lambda} - \bar{\lambda})K + \bar{\lambda}.$$

Hasonló gondolatmenet alapján

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \leq (\bar{\lambda} - \underline{\lambda})K + \underline{\lambda}.$$

■

Megjegyzés ([8]). 1. A $(d) \sum_{n \geq 1} M_n \nabla x_n$ sor divergens függetlenül attól, hogy $(M_n)_{n \geq 1}$ növekvő, vagy csökkenő.

Valóban, az első esetben ez triviális, míg a másik esetben, ha konvergens lenne akkor

$$\sum_{n \geq 1} \frac{M_n \nabla x_n}{d_n}$$

sor is konvergens³, ahol $(d_n)_n$ a (d) sor részletösszeg-sorozata. Viszont a (C) feltétel szerint $\frac{1}{kx_n} < \frac{M_n}{d_n}$, ami miatt a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\nabla x_n}{x_n} = \sum_{n \geq 1} 1 - \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

sor is konvergens, ami ellentmond a 2.3 lemma következtetésének.

2. Ha $(M_n)_n$ növekvő, akkor

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{d_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\nabla v_n}{\nabla d_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\nabla y_n}{\nabla x_n}, \\
\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{d_n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\nabla v_n}{\nabla d_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\nabla y_n}{\nabla x_n}.
\end{aligned}$$

3. összehasonlítási kritérium a (d) sorral

Az alkalmazások

A [8] cikkben a szerző az előbbi általánosítás felhasználásával igazolja a következő tételt:

2.11. Tétel ([8]). Legyen $\sum_{n \geq 1} u_n$ egy valós sor, illetve $(d_n)_n \subset (0, +\infty)$ egy növekvő, divergens sorozat.

Legyen

$$U_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad V_n = \sum_{k=1}^n u_k d_k, \quad \underline{U} = \liminf_{n \rightarrow \infty} U_n, \quad \overline{U} = \limsup_{n \rightarrow \infty} U_n, \quad \bar{\lambda} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{d_n}, \quad \underline{\lambda} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{d_n}.$$

Ekkor

(a) ha $\underline{U}, \overline{U}$ végesek, akkor

$$\underline{U} - \overline{U} \leq \underline{\lambda} \leq 0 \leq \bar{\lambda} \leq \overline{U} - \underline{U}.$$

(b) Fordítva, ha $|\bar{\lambda}| \leq K$, ahol K egy a $(d_n)_{n \geq 1}$ sorozattól független konstans, akkor $\underline{U}, \overline{U}$ végesek és $\overline{U} - \underline{U} < 2K$.

Bizonyítás. (a) Legyen a 2.10 tételben $y_n = U_n$, $M_n = d_n$, $x_n = \sum_{k=1}^n 1 - \frac{d_{k-1}}{d_k}$ (4). Ekkor $\sum_{k=1}^n d_k \nabla x_k =$

$$d_n, \quad \sum_{k=1}^n d_k \nabla y_k = V_n \text{ ahonnan}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{d_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{d_n}.$$

Figyelembe véve, hogy $(U_n)_n$ korlátos és $x_n \rightarrow \infty$, írhatjuk a fenti összefüggés alapján, hogy $\underline{\lambda} \leq 0 \leq \bar{\lambda}$.

Következőnek igazoljuk, hogy $\bar{\lambda} \leq \overline{U} - \underline{U}$. A $\bar{\lambda} = 0$ eset triviális, ezért feltételezhetjük, hogy $\bar{\lambda} > 0$.

Adva egy $0 < \varepsilon < \frac{\bar{\lambda}}{2}$ számot, találunk $m' > m$ számokat úgy, hogy

$$|U_{m'} - U_m| < \overline{U} - \underline{U} + 2\varepsilon,$$

illetve

$$\frac{V_m}{d_m} < \varepsilon \leq \min_{m < i < m'} \frac{V_i}{d_i} \leq \max_{m < i < m'} \frac{V_i}{d_i} \leq \bar{\lambda} - \varepsilon < \frac{V_{m'}}{d_{m'}}.$$

Ekkor $V_v - V_m > 0$, $\forall m < v \leq m'$,⁽⁵⁾ tehát

$$U_{m'} - U_m = \sum_{k=m+1}^{m'-1} (V_k - V_m) \left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k+1}} \right) + (V_{m'} - V_m) \frac{1}{d_{m'}} > (V_{m'} - V_m) \frac{1}{d_{m'}} > \bar{\lambda} - 2\varepsilon,$$

4. $(x_n)_n$ divergens a 2.3 lemma alapján

5. $\frac{V_m}{d_m} < \frac{V_k}{d_k} \Rightarrow V_m \leq V_k \frac{d_m}{d_k} \leq V_k$

ahonnan következik, hogy

$$\overline{U} - \underline{U} + 2\varepsilon > \bar{\lambda} - 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \overline{U} - \underline{U} \geq \bar{\lambda}.$$

A másik egyenlőtlenséget megkapjuk ha u_n -et lecseréljük $-u_n$ -re, ezáltal igazolva azt, hogy $\underline{U} - \overline{U} \leq \underline{\lambda}$.

(b) A jelölések alapján

$$U_{n'} - U_n = -\frac{V_n}{d_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{n'-1} V_k \left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k+1}} \right) + \frac{V_{n'}}{d_{n'}}, \quad \forall n' > n.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Feltétel szerint létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\left| \frac{V_k}{d_k} \right| < K + \varepsilon, \quad \forall k \geq N,$$

tehát

$$\begin{aligned} |U_{n'} - U_n| &< 2(K + \varepsilon) + \sum_{k=n+1}^{n'-1} (K + \varepsilon) d_k \left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k+1}} \right) \\ &< 2(K + \varepsilon) + (K + \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{n'-1} \ln \frac{d_{k+1}}{d_k}, \\ |U_{n'} - U_n| &< (K + \varepsilon) \left(2 + \ln \frac{d_{n'}}{d_{n+1}} \right), \quad \forall n' > n \geq N. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Legyen $(p_r)_{r \geq 1}, (p'_r)_{r \geq 1} \subset \mathbb{N}$ szigorúan növekvő sorozatok úgy, hogy $p_r < p'_r < p_{r+1}, \forall r \geq 1$ esetén és

$$\underline{U} = \lim_{r \rightarrow \infty} U_{p_r}, \quad \overline{U} = \lim_{r \rightarrow \infty} U_{p'_r},$$

illetve válasszuk meg

$$d_k = r + \begin{cases} \frac{v - p_r}{2(p'_r - p_r)}, & p_r < k \leq p'_r, \\ \frac{1}{2} + \frac{v - p'_r}{2(p_{r+1} - p'_r)}, & p'_r < k \leq p_{r+1}, \end{cases}, \quad \forall k \geq p_1.$$

Ekkor $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d_{p'_r}}{d_{p_r+1}} = 1$. Utóbbi és a (2.13)-as egyenlőtlenség alapján r szerint határértékre térve ($n = p_r, n' = p'_r$) írhatjuk, hogy

$$|\overline{U} - \underline{U}| \leq 2(K + \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \overline{U} - \underline{U} \leq 2K.$$

■

3. fejezet

Fő eredmények

3.1. Cesáro-Stolz lemma általánosítása

Spigler és Vianello általánosítása feltételezi a $\left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\right)_n$ sorozat konvergenciáját. A továbbiakban adunk egy általánosítást, melyben az utóbbi sorozatról csak azt tudjuk, hogy korlátos.

3.1. Tétel. Legyen $(x_n)_n, (y_n)_n \subset \mathbb{C}$ két sorozat és $l \in \mathbb{C}$. Ekkor

1. Ha $|x_n| \rightarrow \infty$ akkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k|. \quad (3.1)$$

2. Ha $x_n, y_n \rightarrow 0$ akkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k \geq n} |\Delta x_k|. \quad (3.2)$$

Amennyiben a jobb oldal nem határozatlansági eset.

Bizonyítás. Legyen $E = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - l \right|$. Ha $E = +\infty$, akkor a feltétel szerint a (3.1), (3.2) egyenlőtlenségek jobb oldala $+\infty$, tehát nincs mit bizonyítani. Ezért feltételezhetjük, hogy $E < +\infty$.

Legyen $\varepsilon > E$ tetszőleges, ekkor

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq n_0 \text{ esetén } \left| \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} - l \right| < \varepsilon \Rightarrow |\Delta(y_k - lx_k)| < \varepsilon |\Delta x_k|.$$

Legyen $n > m \geq n_0$ tetszőlegesek és összegezzük az utolsó egyenlőtlenséget $k = m$ -től $n - 1$ -ig, ekkor írhatjuk, hogy

$$\sum_{k=m}^{n-1} |\Delta(y_k - lx_k)| < \varepsilon \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta x_k| \Rightarrow \left| \sum_{k=m}^{n-1} \Delta(y_k - lx_k) \right| < \varepsilon \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta x_k|,$$

ahonnan következik, hogy

$$|y_n - lx_n - (y_m - lx_m)| < \varepsilon \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta x_k|, \forall n > m \geq n_0. \quad (3.3)$$

Most feltételezzük, hogy $|x_n| \rightarrow \infty$. Ekkor $m = n_0$ -át véve és a (3.3)-as összefüggés alapján minden $n > n_0$ esetén igaz lesz, hogy

$$\left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \left| \frac{y_n}{x_n} - l - \frac{y_m - lx_m}{x_n} \right| + \left| \frac{y_m - lx_m}{x_n} \right| < \varepsilon \frac{1}{|x_n|} \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta x_k| + \left| \frac{y_m - lx_m}{x_n} \right|.$$

A fenti kifejezésben $\limsup$ -ra térve, mikor $n \rightarrow \infty$, felhasználva a következőket

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k < m} |\Delta x_k| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_m - lx_m}{x_n} \right| = 0$$

kapjuk, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \varepsilon \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k|,$$

amely kifejezésben ha $\varepsilon \searrow E$, akkor megkapjuk a (3.1)-es egyenlőtlenséget.

Most térjünk át az $x_n, y_n \rightarrow 0$ esetre. A (3.3)-as összefüggésben határértékre térve n szerint írhatjuk, hogy

$$|y_m - lx_m| \leq \varepsilon \sum_{k \geq m} |\Delta x_k| \Rightarrow \left| \frac{y_m}{x_m} - l \right| \leq \varepsilon \frac{1}{|x_m|} \sum_{k \geq m} |\Delta x_k|, \forall m \geq n_0.$$

Az utolsó egyenlőtlenségben $\limsup$ -ra térünk m szerint és következtethetjük, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \varepsilon \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k \geq n} |\Delta x_k|,$$

amely kifejezésben ha $\varepsilon \searrow E$ -hez, akkor megkapjuk a (3.2)-es egyenlőtlenséget. ■

3.2. Értelmezés. Legyen $(x_n)_n \subseteq \mathbb{C}^*$ sorozat, ekkor

$$M(x_n) := \begin{cases} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k|, & \text{ha } |x_n| \rightarrow \infty \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k \geq n} |\Delta x_k|, & \text{ha } x_n \rightarrow 0 \end{cases}.$$

Megjegyzés. Ha $(x_n)_n \subseteq \mathbb{C}^*$ sorozatra igaz, hogy $x_n \rightarrow 0$ vagy $|x_n| \rightarrow \infty$, akkor $M(x_n) \geq 1$. Ez könnyen belátható az alábbi egyenlőtlenség felhasználásával

$$|x_n - x_m| = \left| \sum_{k=m}^{n-1} \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta x_k|.$$

Ha $|x_n| \rightarrow \infty$, akkor minden $n > m$ esetén, akkor

$$\left|1 - \frac{x_m}{x_n}\right| \leq \frac{1}{|x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k| \Rightarrow 1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k| \leq M(x_n).$$

Illetve, ha $x_n \rightarrow 0$, akkor határértékre térve n szerint kapjuk, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$|x_m| \leq \sum_{k \geq m} |\Delta x_k| \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{|x_m|} \sum_{k \geq m} |\Delta x_k| \Rightarrow 1 \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_m|} \sum_{k \geq m} |\Delta x_k| \leq M(x_n).$$

Most belátjuk, hogy klasszikus Cesáro-Stolz lemma feltételei mellett egyenlőség áll fenn.

3.3. Lemma ([10]-2.4 megjegyzés). *Ha $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^*$ sorozat monoton, akkor $M(x_n) = 1$.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon = \pm 1$ konstans az $(\Delta x_n)_n$ sorozat előjele, ekkor $|\Delta x_k| = \varepsilon \Delta x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén; ezt összegezve k szerint m -től $n - 1$ -ig, ahol $n > m \in \mathbb{N}$ tetszőlegesen, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=m}^{n-1} |\Delta x_k| = \varepsilon \cdot (x_n - x_m) = |x_n - x_m|. \quad (3.4)$$

Ha $|x_n| \rightarrow \infty$ akkor m legyen a $(x_n)_n$ sorozat kezdőindexe (valójában mindegy minek válasszuk). Ekkor a (3.4) egyenlőség alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{1}{|x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k| = \left|1 - \frac{x_m}{x_n}\right|, \forall n > m \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k| = 1 \Rightarrow M(x_n) = 1.$$

Ahol felhasználtuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_m}{x_n} = 0$.

Ha most $x_n \rightarrow 0$, akkor rátérve n szerint határértékre a (3.4) egyenlőségben kapjuk, hogy

$$\sum_{k \geq m} |\Delta x_k| = |x_m| \Rightarrow \frac{1}{|x_m|} \sum_{k \geq m} |\Delta x_k| = 1, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Az utolsó összefüggés alapján $M(x_n) = 1$. ■

Ennek a lemmának és a 3.1 tétel ismeretében tudunk adni a klasszikus Cesáro-Stolz lemma egyik esetének egy alternatív bizonyítását.

3.4. Következmény (Cesáro-Stolz lemma). *Ha $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ két sorozat úgy, hogy $(x_n)_n$ szigorúan monoton, sehol se nulla. Továbbá $|x_n| \rightarrow \infty$, vagy $x_n, y_n \rightarrow 0$ akkor, ha*

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} = l \in \mathbb{R} \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = l.$$

Bizonyítás. A 3.1 tétel alapján

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - l \right| M(x_n). \quad (3.5)$$

A 3.3 lemma alapján $M(x_n) = 1$, így írhatjuk, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - l \right| = 0 \xrightarrow{(3.5)} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq 0 \cdot 1 = 0.$$

Tehát $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = l$. ■

A 3.1 tétel segítségével általánosítani tudjuk az 1.5 tételt is.

3.5. Tétel. Legyen $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ két sorozat, amelyre $\left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \right)_n$ korlátos; illetve $|x_n| \rightarrow \infty$, vagy $x_n, y_n \rightarrow 0$. Ha $M := M(x_n) < +\infty$, akkor

$$\begin{aligned} (1 - M) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} + M \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}, \\ (1 - M) \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} + M \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az a 3.6 lemmát az $\left(\frac{y_n}{x_n} \right)_n, \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \right)_n$ sorozatokra, a 3.1 tételből következő összefüggésre. ■

3.6. Lemma. Legyen $(x_n)_n, (y_n)_n$ két valós sorozat, $(y_n)_n$ korlátos, melyre létezik $M \geq \frac{1}{2}$ úgy, hogy bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n - c| \leq M \limsup_{n \rightarrow \infty} |y_n - c|, \quad (3.6)$$

akkor

$$L + M(l - L) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq l + M(L - l),$$

ahol $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n \in \mathbb{R}$ és $l = \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Legyen $R > L$ tetszőleges, ekkor $\exists n_0 > 0$ úgy, hogy $\forall n \geq n_0$ esetén $y_n \leq R$. Ekkor $c = R$ -re alkalmazva a (3.6)-os összefüggést kapjuk:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n - R| \leq M \limsup_{n \rightarrow \infty} |y_n - R| = M \limsup_{n \rightarrow \infty} R - y_n = M(R - l)$$

Tehát

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n - L| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n - R| + |R - L| \leq M(L - l) + (M + 1)(R - L) \xrightarrow{R \searrow L} \\ &\xrightarrow{R \searrow L} \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n - L| \leq M(L - l). \end{aligned}$$

Hasonlóan $\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n - l| \leq M(L - l)$.

Most legyen $\alpha > M(L - l) \geq \frac{1}{2}(L - l)$ tetszőleges, ekkor $\exists n_1 > 0$ úgy, hogy

$$\forall n \geq n_1 : |x_n - l| \leq \alpha \text{ és } |x_n - L| \leq \alpha \Rightarrow x_n \in [L - \alpha, L + \alpha] \cap [l - \alpha, l + \alpha], \forall n \geq n_1,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \in [L - \alpha, L + \alpha] \cap [l - \alpha, l + \alpha] \stackrel{l \leq L}{=} [L - \alpha, l + \alpha] \neq \emptyset.$$

Tehát

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \in \bigcap_{\alpha > M(L-l)} [L - \alpha, l + \alpha] = [L - M(L - l), l + M(L - l)].$$

■

3.1.1. Cesáro-Stolz feltétel

A továbbiakban elégséges feltételeket adunk arra, hogy $M(x_n) < \infty$.

3.7. Lemma. Tegyük fel, hogy $|\nabla x_n| > 0$, és $\sum_{n \geq 1} |\Delta x_n| = \infty$. Ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}| - |x_n|}{|x_{n+1} - x_n|} > 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta x_n|}{|\Delta x_n|},$$

Partikulárisan $|x_n| \rightarrow \infty$.

Bizonyítás. A $\sum_{k < n} |\Delta x_k|$ általános tagú sorozat szigorúan növekvő és divergens, ekkor alkalmazva az 1.5 tételt kapjuk, hogy

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}| - |x_n|}{|x_{n+1} - x_n|} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n|}{\sum_{k < n} |\Delta x_k|} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k|},$$

tudva, hogy az $y \mapsto \frac{1}{y}$ megfeleltetés csökkenő és folytonos az $(0, +\infty)$ -n, megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. ■

3.8. Lemma. Tegyük fel, hogy $|\Delta x_n| > 0$ és $\sum_{n \geq 0} |\Delta x_n| < +\infty$ és $x_n \rightarrow 0$. Ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n| - |x_{n+1}|}{|x_{n+1} - x_n|} > 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k \geq n} |\Delta x_k| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta x_n|}{-|\Delta x_n|}.$$

Bizonyítás. A $\sum_{k \geq n} |\Delta x_k|$ általános tagú sorozat szigorúan csökkenő és 0-hoz tart, ekkor alkalmazva

az 1.5 tételt kapjuk, hogy

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n| - |x_{n+1}|}{|x_{n+1} - x_n|} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n|}{\sum_{k \geq n} |\Delta x_k|} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k \geq n} |\Delta x_k|},$$

tudva, hogy az $y \mapsto \frac{1}{y}$ megfeleltetés csökkenő és folytonos az $(0, +\infty)$ -n, megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. ■

3.9. Tétel. Ha $(x_n)_n \subseteq \mathbb{C}^*$ sorozatra $|\Delta x_n| > 0$ illetve, ha

$$1. \quad |x_n| \rightarrow \infty \text{ és } \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} \right| > 2, \text{ vagy}$$

$$2. \quad x_n \rightarrow 0 \text{ és } \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} \right| < \frac{1}{2},$$

akkor $M(x_n) < +\infty$.

A bizonyítás azonnali, ha igazoljuk a következő két lemmát.

3.10. Lemma. Legyen $(x_n)_n \subset \mathbb{C}^*$ sorozat és $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} \right| = l > 2$ akkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k| \leq \frac{l}{l-2}.$$

3.11. Lemma. Legyen $(x_n)_n \subset \mathbb{C}^*$ sorozat és $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} \right| = l < \frac{1}{2}$, akkor $(x_n)_n$ konvergens és

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n - x|} \sum_{k \geq n} |\Delta x_k| \leq \frac{1}{1-2l},$$

ahol $x_n \rightarrow x$.

A 3.10 lemma bizonyítása. Mivel $l > 1$ ezért $(|\Delta x_n|)_n$ egy adott indextől kezdve szigorúan növekvő lesz, illetve divergens, tehát alkalmazva az 1.5 tételt kapjuk, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Delta x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta x_n|}{|\Delta x_{n+1}| - |\Delta x_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left| \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} \right| - 1} = \frac{1}{l-1},$$

tudva hogy a $y \mapsto \frac{1}{y-1}$ folytonos és csökkenő megfeleltetés az $(1, +\infty)$ -ről. Mivel $|\Delta x_n| \rightarrow \infty$, ezért

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{\Delta x_n} \right| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n - x_{n_0}}{\Delta x_n} \right| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta x_n} \sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k \right| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta x_n} \sum_{k < n} \Delta x_k \right|,$$

ahonnan felhasználva, hogy $l > 2$ következik, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{\Delta x_n} \right| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\Delta x_n} \sum_{k < n} \Delta x_k \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Delta x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k| \leq \frac{1}{l-1} < 1 \quad (3.7)$$

ahonnan egyrészt kapjuk, hogy $|x_n| \rightarrow \infty$, másrészt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{x_n}{\Delta x_n} \right| \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| 1 - \left| \frac{x_n}{\Delta x_n} \right| \right| \stackrel{(3.7)}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} 1 - \left| \frac{x_n}{\Delta x_n} \right| \geq 1 - \frac{1}{l-1} > 0.$$

Ekkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_{n+1}|} \sum_{k < n+1} |\Delta x_k| \leq \frac{\limsup_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{|\Delta x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k|}{\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{x_n}{\Delta x_n} \right|} \leq \frac{1 + \frac{1}{l-1}}{1 - \frac{1}{l-1}} = \frac{l}{l-2} < +\infty.$$

■

A 3.11 lemma bizonyítása. Mivel $l < 1$ ezért $(|\Delta x_n|)_n$ egy indextől kezdve szigorúan csökkenő lesz, és 0-hoz konvergál, illetve $\sum_{n \geq 0} |\Delta x_n|$ konvergens, tehát $(x_n)_n$ is konvergens. Alkalmazva az 1.5 tételt kapjuk, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Delta x_n|} \sum_{k \geq n+1} |\Delta x_k| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta x_{n+1}|}{|\Delta x_n| - |\Delta x_{n+1}|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|}{1 - \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|} = \frac{l}{1-l},$$

ahol felhasználtuk azt, hogy $y \mapsto \frac{y}{1-y}$ növekvő és folytonos megfeleltetés $(0, 1)$ -n. Továbbá

$$x - x_{n+1} = \sum_{k \geq n+1} \Delta x_k \Rightarrow \left| \frac{x - x_{n+1}}{\Delta x_n} \right| = \left| \frac{1}{\Delta x_n} \sum_{k \geq n+1} \Delta x_k \right| \leq \frac{1}{|\Delta x_n|} \sum_{k \geq n+1} |\Delta x_k|,$$

ahonnan, mivel $l < \frac{1}{2}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x - x_{n+1}}{\Delta x_n} \right| \leq \frac{l}{1-l} < 1, \quad (3.8)$$

ahonnan

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{x - x_{n+1}}{\Delta x_n} \right| \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| 1 - \left| \frac{x - x_{n+1}}{\Delta x_n} \right| \right| \stackrel{(3.8)}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} 1 - \left| \frac{x - x_{n+1}}{\Delta x_n} \right| \geq 1 - \frac{l}{1-l}.$$

Tehát

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x - x_n|} \sum_{k \geq n} |\Delta x_k| \leq \frac{\limsup_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{|\Delta x_n|} \sum_{k \geq n+1} |\Delta x_k|}{\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{x - x_{n+1}}{\Delta x_n} \right|} \leq \frac{1 + \frac{l}{1-l}}{1 - \frac{l}{1-l}} = \frac{1}{1-2l}$$

■

3.12. Lemma. Legyen $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq \mathbb{C}^*$ két sorozat úgy, hogy $|\Delta x_n| > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, illetve $x_n, y_n \rightarrow 0$ vagy $|x_n|, |y_n| \rightarrow \infty$. Ekkor

$$M(y_n) \leq M(x_n) \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{y_n} \right|, \quad (3.9)$$

amennyiben a jobb oldal nem határozatlansági eset.

3.1. Alkalmazás. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tetszőleges úgy, hogy $|\lambda| < 1$ vagy $|\lambda| > 1$ ekkor $M(\lambda^n) < +\infty$.

Bizonyítás. Ha a 3.12 lemmában $y_n = \lambda^n$ és $x_n = |\lambda|^n$, akkor mivel $(x_n)_n$ szigorúan monoton kapjuk, hogy $M(x_n) = 1$, ahonnan

$$M(\lambda^n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda^n(\lambda - 1)}{|\lambda|^n(|\lambda| - 1)} \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{|\lambda|^n}{\lambda^n} \right| = \left| \frac{\lambda - 1}{|\lambda| - 1} \right|$$

■

A 3.12 lemma bizonyítása. Legyen $\varepsilon > \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \right| =: E$ tetszőleges¹, ekkor létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén

$$\left| \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \right| \leq \varepsilon \Rightarrow |\Delta y_n| \leq \varepsilon |\Delta x_n|.$$

Az utolsó egyenlőtlenséget összegezve n szerint m -től $n-1$ -ig, ahol $n > m$ tetszőlegesek, kapjuk, hogy

$$\sum_{k=m}^{n-1} |\Delta y_k| \leq \varepsilon \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta x_k|. \quad (3.10)$$

Felételezzük, hogy $x_n, y_n \rightarrow 0$, ekkor a (3.10) egyenlőtlenségben határértékre térve n szerint, írhatjuk, hogy

$$\sum_{k \geq m} |\Delta y_k| \leq \varepsilon \sum_{k \geq m} |\Delta x_k| \Rightarrow \frac{1}{|y_m|} \sum_{k \geq m} |\Delta y_k| \leq \varepsilon \left| \frac{x_m}{y_m} \right| \cdot \frac{1}{|x_m|} \sum_{k \geq m} |\Delta x_k|,$$

ahonnan

$$M(y_n) \leq \varepsilon \cdot M(x_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{y_n} \right|.$$

Most feltételezzük, hogy $|x_n|, |y_n| \rightarrow \infty$, ekkor a (3.10) egyenlőtlenség alapján

$$\frac{1}{|y_n|} \sum_{k < n} |\Delta y_k| \leq \varepsilon \cdot \left| \frac{x_n}{y_n} \right| \cdot \frac{1}{|x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k|,$$

ahonnan

$$M(y_n) \leq \varepsilon \cdot M(x_n) \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{y_n} \right|.$$

1. Ha $E = +\infty$ akkor nincs mit bizonyítani

$\varepsilon \searrow E$ esetén megkapjuk a (3.9) egyenlőtlenséget. ■

3.13. Tétel. Legyen $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq \mathbb{C}^*$ két sorozat úgy, hogy $|\Delta x_n|, |\Delta y_n| > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, illetve $x_n, y_n \rightarrow 0$ vagy $|x_n|, |y_n| \rightarrow \infty$. Ha $M(x_n) < \infty$ és létezik $l \in \mathbb{C}^*$ úgy, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - l \right| \cdot M(x_n) < |l|,$$

akkor $M(y_n) < \infty$.

A 3.13 tétel bizonyítása. A 3.1 tétel alapján

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - l \right| M(x_n) < |l|,$$

ahonnan következik, hogy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} \right| > 0 \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{y_n} \right| < +\infty \quad (3.11)$$

Így a 3.12 lemma alapján $M(y_n) < +\infty$, mivel feltétel szerint $M(x_n) < +\infty$ és a $\left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \right)_n$ sorozat korlátos. ■

3.1.2. Az időskálákra vonatkozó L'Hospital szabály általánosítása

A sorozatoknál használt gondolatmenettel általánosítani tudjuk az időskálán értelmezett L'Hospital szabályt is. Komplex értékű függvény delta deriváltja szokásos módon értelmezendő, vagyis

$$f^\Delta = (\operatorname{Re} f)^\Delta + i(\operatorname{Im} f)^\Delta.$$

Továbbá szükségünk lesz a következő jelölésekre:

3.14. Értelmezés ([2]). Tetszőleges $t_0 \in \mathbb{T}$ bal-sűrű pont, és tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén legyen

$$L_\varepsilon(t_0) := \{t \in \mathbb{T} \mid 0 < t_0 - t < \varepsilon\} = \mathbb{T} \cap (t_0 - \varepsilon, t_0),$$

$$L_\varepsilon(+\infty) := \left\{ t \in \mathbb{T} \mid t > \frac{1}{\varepsilon} \right\} = \mathbb{T} \cap \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty \right), \text{ ha } +\infty \in \overline{\mathbb{T}}.$$

Jobb-sűrű $t_0 \in \mathbb{T}$ esetén $R_\varepsilon(t_0)$ illetve $R_\varepsilon(-\infty)$ hasonlóan értelmezendők.

Ekkor egy $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén értelmezhetjük

$$\liminf_{t \nearrow t_0} h(t) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \inf_{t \in L_\varepsilon(t_0)} h(t),$$

minden $t_0 \in \overline{\mathbb{T}}$ bal-sűrű pont esetén.

Hasonlóan értelmezhető $\liminf_{t \searrow t_0} h(t)$, $\limsup_{t \nearrow t_0} h(t)$, $\limsup_{t \searrow t_0} h(t)$.

3.15. Tétel. Legyen $\mathbb{T}$ időskála, $t_0 \in \bar{\mathbb{T}}$ bal-sűrű, $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ differenciálható függvények úgy, hogy $|g^\Delta| > 0$ és $|g| > 0$ az $L_\varepsilon(t_0)$ halmazon, valamilyen $\varepsilon > 0$ -ra, és legyen $l \in \mathbb{C}$ tetszőleges, ekkor:

1. $\lim_{t \nearrow t_0} |g(t)| = +\infty$ akkor

$$\limsup_{t \nearrow t_0} \left| \frac{f(t)}{g(t)} - l \right| \leq \limsup_{t \nearrow t_0} \left| \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} - l \right| \cdot \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{1}{|g(t)|} \int_\delta^t |g^\Delta(x)| \Delta x; \quad (3.12)$$

2. $\lim_{t \nearrow t_0} g(t), f(t) = 0$, akkor

$$\limsup_{t \nearrow t_0} \left| \frac{f(t)}{g(t)} - l \right| \leq \limsup_{t \nearrow t_0} \left| \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} - l \right| \cdot \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{1}{|g(t)|} \int_t^{t_0} |g^\Delta(x)| \Delta x; \quad (3.13)$$

Amennyiben a jobb oldal nem határozatlansági eset.

Bizonyítás. Ha $E = \limsup_{t \nearrow t_0} \left| \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} - l \right| = +\infty$ akkor feltétel szerint a (3.12), (3.13) egyenlőtlenségek jobb oldala $+\infty$, ami esetén nincs mit igazolni. Tehát feltételezhetjük, hogy $E < +\infty$.

Legyen $\delta \in (0, \varepsilon)$ tetszőleges, illetve $\alpha = \sup_{\tau \in L_\delta(t_0)} \left| \frac{f^\Delta(\tau)}{g^\Delta(\tau)} - l \right|$, amit végesnek vehetünk mert E az. Ekkor

$$\forall \tau \in L_\delta(t_0) \text{ esetén } \left| \frac{f^\Delta(\tau)}{g^\Delta(\tau)} - l \right| \leq \alpha \Rightarrow |(f - lg)^\Delta(\tau)| \leq \alpha |g^\Delta(\tau)|.$$

Legyen $t > s \in L_\delta(t_0)$ tetszőlegesek, ekkor integrálva az utolsó egyenlőtlenséget s -től t -ig, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t (f - lg)^\Delta(\tau) \Delta \tau \right| &\leq \int_s^t |(f - lg)^\Delta(\tau)| \Delta \tau \leq \alpha \int_s^t |g^\Delta(\tau)| \Delta \tau, \\ |(f - lg)(t) - (f - lg)(s)| &\leq \alpha \int_s^t |g^\Delta(\tau)| \Delta \tau, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tegyük fel, hogy $\lim_{t \nearrow t_0} |g(t)| = +\infty$ és rögzítsük le s -et. Ekkor a (3.14)-es egyenlőtlenség alapján, hogy

$$\left| \frac{g(t)}{f(t)} - l \right| \leq \left| \frac{g(t)}{f(t)} - l - \frac{(f - lg)(s)}{g(t)} \right| + \left| \frac{(f - lg)(s)}{g(t)} \right| \leq \alpha \frac{1}{|g(t)|} \int_s^t |g^\Delta(\tau)| \Delta \tau + \left| \frac{(f - lg)(s)}{g(t)} \right|$$

amihez felhasználva az alábbi összefüggéseket

$$\lim_{t \nearrow t_0} \left| \frac{(f - lg)(s)}{g(t)} \right| = \lim_{t \nearrow t_0} \frac{1}{|g(t)|} \int_\epsilon^s |g^\Delta(\tau)| \Delta \tau = 0$$

írhatjuk $\limsup$ -ra való áttérés után, hogy

$$\limsup_{t \nearrow t_0} \left| \frac{g(t)}{f(t)} - l \right| \leq \alpha \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{1}{|g(t)|} \int_s^t |g^\Delta(\tau)| \Delta \tau.$$

A fenti egyenlőtlenségben $\alpha \searrow E$ után megkapjuk a (3.12)-es egyenlőtlenséget.

Most tegyük fel, hogy $\lim_{t \nearrow t_0} f(t), g(t) = 0$. Ekkor határértékre térve t szerint a (3.14)-es egyenlőtlenségben kapjuk, hogy minden $s \in L_\delta(t_0)$ esetén

$$|f(s) - lg(s)| \leq \alpha \int_s^{t_0} |g^\Delta(\tau)| \Delta\tau \Rightarrow \left| \frac{f(s)}{g(s)} - l \right| \leq \alpha \frac{1}{|g(s)|} \int_s^{t_0} |g^\Delta(\tau)| \Delta\tau.$$

Ekkor $\limsup$ -ra térve az utolsó egyenlőtlenségben, majd $\alpha \searrow E$ után megkapjuk a (3.13)-as egyenlőtlenséget. ■

Megjegyzés. Ha $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^*$ függvény esetén g^Δ függvény előjeltartó $L_\varepsilon(t_0)$ halmazon, valamilyen $\varepsilon > 0$ -ra, ha előjele $s = \pm 1$ akkor

1. ha $\lim_{t \nearrow t_0} |g(t)| = \infty$, akkor egyrészt g előjele s , másrészt

$$\lim_{t \nearrow t_0} \frac{1}{|g(t)|} \int_\varepsilon^t |g^\Delta(\tau)| \Delta\tau = \lim_{t \nearrow t_0} \frac{s}{|g(t)|} \int_\varepsilon^t g^\Delta(\tau) \Delta\tau = \lim_{t \nearrow t_0} s \frac{g(t) - g(\varepsilon)}{|g(t)|} = \lim_{t \nearrow t_0} 1 - \left| \frac{g(\varepsilon)}{g(t)} \right| = 1;$$

2. ha $\lim_{t \nearrow t_0} g(t) = 0$, akkor egyrészt g előjele $-s$.

$$\lim_{t \nearrow t_0} \frac{1}{|g(t)|} \int_t^{t_0} |g^\Delta(\tau)| \Delta\tau = \lim_{t \nearrow t_0} \frac{s}{|g(t)|} \int_t^{t_0} g^\Delta(\tau) \Delta\tau = \lim_{t \nearrow t_0} s \frac{g(t_0) - g(t)}{|g(t)|} = \lim_{t \nearrow t_0} \frac{-sg(t)}{-sg(t)} = 1.$$

Továbbá, mint sorozatoknál, általánosítást tudunk adni a szélső határértékekkel megadott L'Hospital szabályra is.

3.16. Tétel. Legyen $\mathbb{T}$ időskála, $t_0 \in \overline{\mathbb{T}}$ bal-sűrű, $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények úgy, hogy $|g^\Delta| > 0$ és $|g| > 0$ az $L_\varepsilon(t_0)$ halmazon, valamilyen $\varepsilon > 0$ -ra; és legyen $l \in \mathbb{C}$ tetszőleges. Ekkor ha $\frac{f^\Delta}{g^\Delta}$ korlátos, akkor

$$\begin{aligned} (1 - M) \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} + M \liminf_{t \nearrow t_0} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} &\leq \liminf_{t \nearrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)} \\ (1 - M) \liminf_{t \nearrow t_0} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} + M \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} &\geq \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)} \end{aligned}$$

ha $1 \leq M < \infty$, ahol

$$M = \begin{cases} \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{1}{|g(t)|} \int_\varepsilon^t |g^\Delta(x)| \Delta x, & \lim_{t \nearrow t_0} |g(t)| = \infty \\ \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{1}{|g(t)|} \int_t^{t_0} |g^\Delta(x)| \Delta x, & \lim_{t \nearrow t_0} f(t), g(t) = 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az a 3.17 lemmát az $\frac{f}{g}, \frac{f^\Delta}{g^\Delta}$ függvényekre, a 3.15 tételből következő összefüggésre. ■

3.17. Lemma. Legyen $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ két függvény, amelyre $\exists M \geq \frac{1}{2}$ szám úgy, hogy minden $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} |f(x) - c| \leq M \cdot \limsup_{x \rightarrow x_0} |g(x) - c|. \quad (3.15)$$

Ekkor, ha $l = \liminf_{x \rightarrow x_0} g(t)$, $L = \limsup_{x \rightarrow x_0} g(t)$ végesek, akkor

$$L + M(l - L) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq l + M(L - l)$$

Bizonyítás. A 3.6 lemma bizonyításához hasonlóan. ■

Megjegyzés. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ esetén a $|g'| > 0$ feltételből következik az, hogy g' előjeltartó, tehát $M = 1$ és visszkapjuk a valós L'Hospital szabály szélső határértékes alakját.

3.18. Lemma. Legyen $\mathbb{T}$ időskála, $t_0 \in \mathbb{T}$, $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ Hilger-deriválható függvény úgy hogy $|g(t)| > 0$, $|g^\Delta(t)| > 0$, $\forall t \in (\delta, t_0) \cap \mathbb{T}$, illetve $\int_\delta^{t_0} |g^\Delta(x)| \Delta x = +\infty$ ekkor:

$$\liminf_{t \nearrow t_0} \frac{|g|^\Delta(t)}{|g^\Delta(t)|} > 0 \Rightarrow \limsup_{t \searrow t_0} \frac{1}{|g(t)|} \int_\delta^t |g^\Delta(x)| \Delta x \leq \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{|g^\Delta(t)|}{|g|^\Delta(t)}$$

Bizonyítás. Az 1.8 tételben szereplő lim inf egyenlőtlenséget alkalmazzuk az $f := |g|$, és $g := \int_\delta^t |g^\Delta(x)| \Delta x$ függvényekre. ■

3.19. Lemma. Legyen $\mathbb{T}$ időskála, $t_0 \in \mathbb{T}$, $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ Hilger-deriválható függvény úgy hogy $|g(t)| > 0$, $|g^\Delta(t)| > 0$, $\forall t \in (\delta, t_0) \cap \mathbb{T}$, illetve $\int_\delta^{t_0} |g^\Delta(x)| \Delta x < +\infty$ és $\lim_{t \nearrow t_0} g(t) = 0$:

$$\liminf_{t \nearrow t_0} -\frac{|g|^\Delta(t)}{|g^\Delta(t)|} > 0 \Rightarrow \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{1}{|g(t)|} \int_t^{t_0} |g^\Delta(x)| \Delta x \leq \limsup_{t \searrow t_0} \frac{|g^\Delta(t)|}{-|g|^\Delta(t)}$$

Bizonyítás. Az 1.8 tételben szereplő lim inf egyenlőtlenséget alkalmazzuk az $f := |g|$, és $g := \int_t^{t_0} |g^\Delta(x)| \Delta x$ függvényekre. ■

3.2. Kiterjesztett Cesáro-Stolz

Eddigi általánosítások lényege, hogy az $y_n - lx_n$ kifejezést visszakonstruáljuk a $\Delta(y_n - lx_n)$ kifejezésből, a továbbiakban a differencia operátort lecseréljük egy más fajta operátorra. Példaként tekintsük az $P(a_n) = a_{n+1} - ra_n$ operátort, ahol $r \in \mathbb{C}^*$ tetszőleges és $(a_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ tetszőleges sorozat. Ebben az esetben nem ütköznünk nehézségbe hiszen

$$\frac{P(y_n)}{P(x_n)} = \frac{\frac{y_{n+1}}{r^{n+1}} - \frac{y_n}{r^n}}{\frac{x_{n+1}}{r^{n+1}} - \frac{x_n}{r^n}}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\frac{y_n}{r^n}}{\frac{x_n}{r^n}} = \frac{y_n}{x_n}.$$

Tehát kijelenthetjük a következő tételt, amely bizonyítása triviális.

3.20. Tétel. Legyen $r \in \mathbb{C}^*$ rögzített és $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ és $P(a_n) = a_{n+1} - ra_n$ tetszőleges $(a_n)_n$ sorozat esetén. Ekkor

1. ha $\frac{r^n}{x_n} \rightarrow 0$ akkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} |r|^n \sum_{k \leq n} \frac{|P(x_k)|}{|r|^{k+1}},$$

2. ha $\frac{x_n}{r^n}, \frac{y_n}{r^n} \rightarrow 0$ akkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} |r|^n \sum_{k \geq n} \frac{|P(x_k)|}{|r|^{k+1}}.$$

Mi történik abban az esetben, ha a P operátor alakja $P(a_n) = a_{n+2} - (r_1 + r_2)a_{n+1} + r_1r_2a_n$? Ha alkalmazzuk az előző tételt először az $(x_{n+1} - r_1x_n)_n, (y_{n+1} - r_1y_n)_n$ sorozatokra, akkor kapjuk az alábbi egyenlőtlenséget.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_{n+1} - r_1y_n}{x_{n+1} - r_1x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot M \left(\frac{x_{n+1} - r_1x_n}{r_2^n} \right)$$

Erre ismét alkalmazzuk a 3.1 tételt, akkor kapjuk:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot M \left(\frac{x_n}{r_1^n} \right) \cdot M \left(\frac{x_{n+1} - r_1x_n}{r_2^n} \right).$$

Ez az alak nehézkesen használható, mert sok feltételt kell megnézni, illetve az $M(\cdot)$ végességének az igazolása általában nehéz. Ezért a következőkben finomítjuk a jobb oldali kifejezést. Legyen R az r_1, r_2 közül 0-tól távolabbi, és r a közelebbi (ha a távolságok egyenlőek, akkor mindegy a választás). Az alábbiakban láthatjuk az összes lehetséges feltételt, amit kiköthetünk a sorozatokra.

Ha $r_1 \neq r_2$, akkor

$$(F1) \quad \frac{R^n}{x_n} \rightarrow 0,$$

$$(F2) \quad \frac{x_n}{r^n}, \frac{y_n}{r^n} \rightarrow 0,$$

$$(F3) \quad \frac{r^n}{x_n}, \frac{x_n}{R^n}, \frac{y_n}{R^n} \rightarrow 0.$$

Ha $r_1 = r_2 = \rho$, akkor

$$(F4) \quad \frac{n\rho^n}{x_n} \rightarrow 0,$$

$$(F5) \quad \frac{x_n}{\rho^n}, \frac{y_n}{\rho^n} \rightarrow 0,$$

$$(F6) \quad \frac{x_n}{n\rho^n}, \frac{y_n}{n\rho^n}, \frac{\rho^n}{x_n} \rightarrow 0.$$

Megjegyzés. 1. Ha az (F3) feltétel teljesül, akkor $\frac{r^n}{R^n} \rightarrow 0$. Tehát $|r_1| \neq |r_2|$.

2. Ha az (F1) feltétel teljesül, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^n}{x_n} \frac{r^n}{R^n} = 0$, mert $|r| \leq |R|$.

3. Ha az (F2) feltétel teljesül, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{R^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{r^n} \frac{r^n}{R^n} = 0$, mert $|r| \leq |R|$.

Az alábbi tételekben feltételezzük, hogy $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq \mathbb{C}$ két sorozat, $l \in \mathbb{C}$ tetszőlegesen rögzített és $|x_n|, |P(x_n)| > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ esetén; ahol $P(a_n) = a_{n+2} - (r_1 + r_2)a_{n+1} + r_1 r_2 a_n$, minden $(a_n)_n \in \mathbb{C}$ sorozat esetén.

3.21. Tétel. *Ha teljesül az (F1) vagy az (F4) feltétel, akkor*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_{n+2}|} |r_1|^{n+1} \sum_{k_1 \leq n} \left| \frac{r_2}{r_1} \right|^{k_1+1} \sum_{k_2 \leq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}} \quad (3.16)$$

Továbbá a fenti szorzat második tényezője nagyobb vagy egyenlő mint 1; ha $r_1, r_2 > 0$ és $(P(x_n))_n \subseteq \mathbb{R}^$ előjeltartó, akkor egyenlő 1-el.*

3.22. Tétel. *Ha teljesül az (F2) vagy az (F5) feltétel, akkor*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} |r_1^n| \sum_{k_1 \geq n} \frac{|r_2|^{k_1}}{|r_1|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}}. \quad (3.17)$$

Továbbá a fenti szorzat második tényezője nagyobb vagy egyenlő mint 1; ha $r_1, r_2 > 0$ és $(P(x_n))_n \subseteq \mathbb{R}^$ előjeltartó, akkor egyenlő 1-el.*

3.23. Tétel. *Ha teljesül az (F3) vagy az (F6) feltétel, akkor*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_{n+1}|} |r|^{n+1} \sum_{k_1 \leq n} \frac{|R|^{k_1}}{|r|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|R|^{k_2+1}}. \quad (3.18)$$

Továbbá a fenti szorzat második tényezője nagyobb vagy egyenlő mint 1. Ha $r_1, r_2 > 0$ és $(P(x_n))_n \subseteq \mathbb{R}^$ előjeltartó, akkor egyenlő 1-el.*

Megjegyzés. A fenti tételben szereplő egyenlőtlenségekben mind feltételezzük, hogy a jobb oldal nem határozatlansági eset. Illetve $\exists n^* \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \geq n^*$ esetén $x_n, P(x_n) \neq 0$.

Megjegyzés. A 3.17 tétel és a fenti egyenlőtlenségek alapján kijelenthetjük az alábbi tételt valós számsorozatok esetén.

3.24. Tétel. Ha $(y_n)_n, (x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ két sorozat, melyre $|x_n| > 0, |P(x_n)| > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá

(i) ha az (F1) vagy az (F4) feltétel teljesül, illetve

$$M = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_{n+2}|} |r_1|^{n+1} \sum_{k_1 \leq n} \left| \frac{r_2}{r_1} \right|^{k_1+1} \sum_{k_2 \leq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}} < +\infty,$$

(ii) vagy, ha az (F2) vagy az (F5) feltétel teljesül, illetve

$$M = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} |r_1^n| \sum_{k_1 \geq n} \frac{|r_2|^{k_1}}{|r_1|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}} < +\infty,$$

(iii) vagy, ha az (F3) vagy az (F6) feltétel teljesül, illetve

$$M = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_{n+1}|} |r|^{n+1} \sum_{k_1 \leq n} \frac{|R|^{k_1}}{|r|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|R|^{k_2+1}} < +\infty,$$

akkor, ha a $\left(\frac{P(y_n)}{P(x_n)} \right)_n$ sorozat korlátos, akkor következik, hogy

$$\begin{aligned} (1-M) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P(y_n)}{P(x_n)} + M \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P(y_n)}{P(x_n)} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \\ (1-M) \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P(y_n)}{P(x_n)} + M \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P(y_n)}{P(x_n)} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}. \end{aligned}$$

Mielőtt bizonyítanánk a 3.21, 3.22, 3.23 tételeket, legyen $P_1(a_n) = a_{n+1} - r_1 a_n$, $P_2(a_n) = a_{n+1} - r_2 a_n$. Ekkor $P = P_2 \circ P_1$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| = E$ tetszőleges; ezt megtehetjük, mert ha végtelen, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenségek jobb oldala is $+\infty$, amely esetben nincs mit bizonyítani. Ekkor $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Legyen $z_n = y_n - l x_n$, ekkor

$$|P(z_n)| < \varepsilon |P(x_n)|, \forall n \geq n_0.$$

Legyen $k \geq n_0$ tetszőleges, ekkor a fenti egyenlőtlenség alapján írhatjuk, hogy

$$|P_1(z_{k+1}) - r_2 P_1(z_k)| \leq \varepsilon |P(x_k)| \Rightarrow \left| \frac{P_1(z_{k+1})}{r_2^{k+1}} - \frac{P_1(z_k)}{r_2^k} \right| \leq \varepsilon \frac{|P(x_k)|}{|r_2|^{k+1}}.$$

Az utolsó egyenlőtlenséget összegezzük k szerint m -től n -ig, ahol $n \geq m \geq n_0$ tetszőlegesen; és azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \frac{P_1(z_{n+1})}{r_2^{n+1}} - \frac{P_1(z_m)}{r_2^m} \right| &\leq \varepsilon \sum_{k=m}^n \frac{|P(x_k)|}{|r_2|^{k+1}}, \\ \left| \frac{z_{n+2}}{r_1^{n+1}} - \frac{z_{n+1}}{r_1^n} - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{n+1} \frac{P_1(z_m)}{r_2^m} \right| &\leq \varepsilon \left| \frac{r_2}{r_1} \right|^{n+1} \sum_{k_2=m}^n \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Az utolsó egyenlőtlenségben megismételve az összegzést m -től n -ig n szerint (ahol $n \geq m$ tetszőleges), azt kapjuk, hogy

$$\left| \frac{z_{n+2}}{r_1^{n+1}} - \frac{z_{m+1}}{r_1^m} - \frac{P_1(z_m)}{r_2^m} \sum_{k_1=m}^n \frac{r_2^{k_1+1}}{r_1^{k_1+1}} \right| \leq \varepsilon \sum_{k_1=m}^n \left| \frac{r_2}{r_1} \right|^{k_1+1} \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}}. \quad (3.20)$$

A 3.21 tétel bizonyítása. A (3.20) egyenlőtlenséggel dolgozunk tovább.

$$\left| z_{n+2} - r_1^{n+1} \frac{z_{m+1}}{r_1^m} - r_1^{n+1} \frac{P_1(z_m)}{r_2^m} \sum_{k_1=m}^n \frac{r_2^{k_1+1}}{r_1^{k_1+1}} \right| \leq \varepsilon |r_1|^{n+1} \sum_{k_1=m}^n \left| \frac{r_2}{r_1} \right|^{k_1+1} \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}}. \quad (3.21)$$

Legyen

$$u_n = r_1^{n+1} \frac{z_{m+1}}{r_1^m} + r_1^{n+1} \frac{P_1(z_m)}{r_2^m} \sum_{k_1=m}^n \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{k_1+1},$$

akkor

$$\begin{aligned} P_2(u_n) &= r_1^{n+2} \frac{z_{m+1}}{r_1^m} + r_1^{n+2} \frac{P_1(z_m)}{r_2^m} \sum_{k_1=m}^{n+1} \frac{r_2^{k_1+1}}{r_1^{k_1+1}} - r_1^{n+2} \frac{z_{m+1}}{r_1^m} - r_1^{n+2} \frac{P_1(z_m)}{r_2^m} \sum_{k_1=m}^n \frac{r_2^{k_1+1}}{r_1^{k_1+1}}, \\ P_2(u_n) &= \frac{P_1(z_m)}{r_2^m} r_2^{n+2}, \\ P(u_n) &= \frac{P_1(z_m)}{r_2^m} r_2^{n+3} - r_2 \frac{P_1(z_m)}{r_2^m} r_2^{n+2} = 0. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség, és a konstans együtthatós lineáris rekurancia egyenletek megoldásának reprezentációs tétele alapján $\exists c_{1,2} \in \mathbb{C}$ úgy, hogy

$$\begin{aligned} u_n &= c_1 r^n + c_2 R^n, \quad \text{vagy} \quad u_n = (c_1 + n c_2) \rho^n; \\ \frac{u_n}{x_{n+2}} &= \frac{c_1}{r^2} \frac{r^{n+2}}{x_{n+2}} + \frac{c_2}{R^2} \frac{R^{n+2}}{x_{n+2}}, \quad \text{vagy} \quad \frac{u_n}{x_{n+2}} = \frac{(n+2) \rho^{n+2}}{x_{n+2}} \frac{1}{\rho^2} \frac{c_1 + n c_2}{n+2}; \end{aligned}$$

ahonnan az (F1), vagy az (F4) feltétel alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{x_{n+2}} = 0$. Így a (3.21) egyenlőtlenségben $\limsup$ -ra

térve n szerint miután beosztunk x_{n+2} -vel kapjuk, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \varepsilon \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_{n+2}|} |r_1|^{n+1} \sum_{k_1=m}^n \left| \frac{r_2}{r_1} \right|^{k_1+1} \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}}. \quad (3.22)$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1^n}{x_n} = 0$ ezért m -et választhatjuk a $(x_n)_n, (y_n)_n$ kezdőindexének (valójában mindegy minek válaszuk). Ekkor $\varepsilon \searrow E$ -val rátérve a (3.22) egyenlőtlenségre megkapjuk a (3.16) egyenlőtlenséget.

Legyen $s = \pm 1$, és

$$v_n = r_1^{n+1} \sum_{k_1=m}^n \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{k_1+1} \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{sP(x_{k_2})}{r_2^{k_2+1}}, \quad M_n = |r_1|^{n+1} \sum_{k_1=m}^n \left| \frac{r_2}{r_1} \right|^{k_1+1} \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}}.$$

Igazolnunk kell, hogy $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{|x_{n+2}|} \geq 1$. Tudjuk, hogy $|v_n| \leq M_n$. Továbbá $P(v_n) = sP(x_{n+2})$, tehát $P(v_n - sx_{n+2}) = 0$; ekkor az $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{x_{n+2}}$ határérték kiszámításához hasonlóan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n - sx_{n+2}}{x_{n+2}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{x_{n+2}} = s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|v_n|}{|x_{n+2}|} = 1.$$

Így

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{|x_{n+2}|} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{|v_n|} \geq 1 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{|x_{n+2}|} \geq 1.$$

Ha $r_1, r_2 > 0$ és $(P(x_n))_n \subseteq \mathbb{R}^*$ sorozat előjel tartó, akkor s -et megválasztva $P(x_n)$ előjelének kapjuk, hogy $v_n = M_n$ ahonnan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{x_{n+2}} = s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{x_{n+2}} = s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{|x_{n+2}|} = 1.$$

□

A 3.22 tétel bizonyítása. A (3.19) egyenlőtlenséggel dolgozunk tovább. Az

$$\left| \frac{P_1(z_{n+1})}{r_2^{n+1}} - \frac{P_1(z_m)}{r_2^m} \right| \leq \varepsilon \sum_{k=m}^n \frac{|P(x_k)|}{|r_2|^{k+1}}$$

egyenlőtlenségben határértékre térve n szerint tudva, hogy az (F2) vagy az (F5) feltétel alapján $\frac{x_n}{r_2^n}, \frac{y_n}{r_2^n} \rightarrow 0$, azt kapjuk, hogy

$$\left| \frac{P_1(z_m)}{r_2^m} \right| \leq \varepsilon \sum_{k \geq m} \frac{|P(x_k)|}{|r_2|^{k+1}} \Rightarrow \left| \frac{z_{m+1}}{r_1^{m+1}} - \frac{z_m}{r_1^m} \right| \leq \varepsilon \frac{|r_2|^m}{|r_1|^{m+1}} \sum_{k \geq m} \frac{|P(x_k)|}{|r_2|^{k+1}}.$$

Összegezve m -től n -ig, m szerint az utolsó egyenlőtlenséget írhatjuk, hogy

$$\left| \frac{z_{n+1}}{r_1^{n+1}} - \frac{z_m}{r_1^m} \right| \leq \varepsilon \sum_{k_1=m}^n \frac{|r_2|^{k_1}}{|r_1|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}}.$$

Amiben határértékre térve n szerint tudva, hogy az (F2) vagy az (F5) feltétel alapján $\frac{x_n}{r_1^n}, \frac{y_n}{r_1^n} \rightarrow 0$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |z_m| &\leq \varepsilon |r_1|^m \sum_{k_1 \geq m} \frac{|r_2|^{k_1}}{|r_1|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}}, \\ \left| \frac{y_m}{x_m} - l \right| &\leq \varepsilon \frac{1}{|x_m|} |r_1|^m \sum_{k_1 \geq m} \frac{|r_2|^{k_1}}{|r_1|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}}. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenségben $\limsup$ -ra térve m szerint következik, hogy

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{y_m}{x_m} - l \right| \leq \varepsilon \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_m|} |r_1|^m \sum_{k_1 \geq m} \frac{|r_2|^{k_1}}{|r_1|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}}.$$

Ekkor $\varepsilon \searrow E$ -hez a fenti egyenlőtlenségben megkapjuk a (3.17) egyenlőtlenséget.

Legyen $s = \pm 1$, illetve

$$v_m = r_1^m \sum_{k_1 \geq m} \frac{r_2^{k_1}}{r_1^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{sP(x_{k_2})}{r_2^{k_2+1}}, \quad M_m = |r_1|^m \sum_{k_1 \geq m} \frac{|r_2|^{k_1}}{|r_1|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}}.$$

Igazolnunk kell, hogy $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{|x_{n+1}|} \geq 1$. Tudjuk, hogy $|v_m| \leq M_m$. Továbbá

$$v_m = sr_1^m \sum_{k_1 \geq m} \frac{r_2^{k_1}}{r_1^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{P_1(x_{k_2+1})}{r_2^{k_2+1}} - \frac{P_1(x_{k_2})}{r_2^{k_2}},$$

amihez felhasználva azt, hogy $\frac{x_n}{r_2^n} \rightarrow 0$ majd $\frac{x_n}{r_1^n} \rightarrow 0$, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} v_m &= -sr_1^m \sum_{k_1 \geq m} \frac{r_2^{k_1}}{r_1^{k_1+1}} \frac{P_1(x_{k_1})}{r_2^{k_1}} = -sr_1^m \sum_{k_1 \geq m} \frac{x_{k_1+1}}{r_1^{k_1+1}} - \frac{x_{k_1}}{r_1^{k_1}}, \\ v_m &= -sr_1^m \frac{-x_m}{r_1^m} = sx_m. \end{aligned}$$

Tehát

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{M_m}{|x_m|} = \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{M_m}{|v_m|} \geq 1 \Rightarrow \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{M_m}{|x_m|} \geq 1.$$

Ha $r_1, r_2 > 0$ és $(P(x_n))_n \subseteq \mathbb{R}^*$ sorozat előjeltartó, akkor s -et megválasztva $P(x_n)$ előjelének kapjuk,

hogy $v_m = M_m$ ahonnan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{v_m}{x_m} = s \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{M_m}{x_m} = s \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{M_m}{|x_m|} = 1.$$

□

A 3.23 tétel bizonyítása az (F3) feltétel mellett. A (3.19) egyenlőtlenséggel dolgozunk tovább. Feltételezhetjük, hogy $r_2 = R$ és $r_1 = r$. Ekkor

$$\left| \frac{P_1(z_{n+1})}{R^{n+1}} - \frac{P_1(z_m)}{R^m} \right| \leq \varepsilon \sum_{k=m}^n \frac{|P(x_k)|}{|R|^{k+1}} \Rightarrow \left| \frac{P_1(z_m)}{R^m} \right| \leq \varepsilon \sum_{k \geq m} \frac{|P(x_k)|}{|R|^{k+1}}.$$

Ahol felhasználtuk azt, hogy $\frac{y_n}{R^n}, \frac{x_n}{R^n} \rightarrow 0$. Továbbá a kapott összefüggést,

$$\left| \frac{z_{m+1}}{r^{m+1}} - \frac{z_m}{r^m} \right| \leq \varepsilon \frac{|R|^m}{|r|^{m+1}} \sum_{k \geq m} \frac{|P(x_k)|}{|R|^{k+1}}$$

összegezzük m -től n -ig, m szerint. Ekkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_{n+1}}{r^{n+1}} - \frac{z_m}{r^m} \right| &\leq \varepsilon \sum_{k_1=m}^n \frac{|R|^{k_1}}{|r|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|R|^{k_2+1}}, \\ \left| \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} - l - \frac{r^{n+1}}{x_{n+1}} \frac{z_m}{r^m} \right| &\leq \varepsilon \frac{1}{|x_{n+1}|} |r|^{n+1} \sum_{k_1=m}^n \frac{|R|^{k_1}}{|r|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|R|^{k_2+1}}, \end{aligned}$$

Ekkor az (F3) feltétel szerint $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{x_n} = 0$, amit felhasználva lim sup-ra térünk n szerint és kapjuk, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \varepsilon \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_{n+1}|} |r|^{n+1} \sum_{k_1=m}^n \frac{|R|^{k_1}}{|r|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|R|^{k_2+1}}.$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{x_n} = 0$, a fenti összegben m -et választhatjuk az $(x_n)_n, (y_n)_n$ kezdőindexének, ezt megtehetjük mert feltételezhetjük, hogy az egyenlőtlenségben szereplő sor konvergens.² Az így kapott egyenlőtlenségben $\varepsilon \searrow E$ -hez megkapjuk a (3.18) egyenlőtlenséget.

Legyen $s = \pm 1$, illetve

$$v_n = r^{n+1} \sum_{k_1=m}^n \frac{R^{k_1}}{r^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{sP(x_{k_2})}{R^{k_2+1}}, \quad M_n = |r|^{n+1} \sum_{k_1=m}^n \frac{|R|^{k_1}}{|r|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|R|^{k_2+1}}.$$

Igazolnunk kell, hogy $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{|x_{n+1}|} \geq 1$. Tudjuk, hogy $|v_n| \leq M_n$. Továbbá felhasználva, hogy $\frac{x_n}{R^n} \rightarrow$

2. Ha a belső sor divergens, akkor a (3.18) egyenlőtlenség jobb oldala $+\infty$ ami esetben nincs mit bizonyítani.

0 írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 v_n &= sr^{n+1} \sum_{k_1=m}^n \frac{R^{k_1}}{r^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{P_1(x_{k_2+1})}{R^{k_2+1}} - \frac{P_1(x_{k_2})}{R^{k_2}} \\
 &= -sr^{n+1} \sum_{k_1=m}^n \frac{R^{k_1}}{r^{k_1+1}} \frac{P_1(x_{k_1})}{R^{k_1}} = -sr^{n+1} \sum_{k_1=m}^n \frac{x_{k_1+1}}{r^{k_1+1}} - \frac{x_{k_1}}{r^{k_1}} \\
 &= s \left(x_{n+1} - r^{n+1} \frac{x_m}{r^m} \right).
 \end{aligned}$$

Ahonnán

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{x_{n+1}} = s - \frac{x_m}{r^m} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{x_{n+1}} = s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|v_n|}{|x_{n+1}|} = 1,$$

mivel $\frac{r^n}{x_n} \rightarrow 0$. Tehát

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{|x_{n+1}|} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{|v_n|} \geq 1 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{|x_{n+1}|} \geq 1.$$

Ha $r_1, r_2 > 0$ és $(P(x_n))_n \subseteq \mathbb{R}^*$ sorozat előjeltartó, akkor s -et megválasztva $P(x_n)$ előjelének kapjuk, hogy $v_n = M_n$ ahonnan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{x_{n+1}} = s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{x_{n+1}} = s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{|x_{n+1}|} = 1.$$

□

A 3.23 tétel bizonyítása az (F6) feltétel mellett. $r = R = \rho$ -t helyettesítve a (3.18) egyenlőtlenségben megkapjuk az igazolandó egyenlőtlenséget

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\rho^{n+1}|}{|x_{n+1}|} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+2}}. \quad (3.23)$$

A (3.20) egyenlőtlenséggel dolgozunk tovább. Ekkor

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z_{n+2}}{\rho^{n+1}} - \frac{z_{m+1}}{\rho^m} - \frac{P_1(z_m)}{\rho^m} (n+1-m) \right| &\leq \varepsilon \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+1}}, \\
 \left| \frac{z_{n+2}}{(n+2)\rho^{n+2}} - \frac{1}{n+2} \frac{z_{m+1}}{\rho^{m+1}} - \frac{n+1-m}{n+2} \frac{P_1(z_m)}{\rho^{m+1}} \right| &\leq \varepsilon \frac{1}{(n+2)|\rho|} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+1}}. \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

A Cesáro-Stolz lemma alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1=m}^{n+1} \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+1}} - \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+1}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{n+1} \frac{|P(x_k)|}{|\rho|^{k+1}} = \sum_{k \geq m} \frac{|P(x_k)|}{|\rho|^{k+1}}.$$

Így a (3.24) egyenlőtlenségben határértékre térve n szerint kapjuk, hogy

$$\left| \frac{P_1(z_m)}{\rho^{m+1}} \right| \leq \varepsilon \sum_{k \geq m} \frac{|P(x_k)|}{|\rho|^{k+2}} \Rightarrow \left| \frac{z_{m+1}}{\rho^{m+1}} - \frac{z_m}{\rho^m} \right| \leq \varepsilon \sum_{k \geq m} \frac{|P(x_k)|}{|\rho|^{k+2}}.$$

Az utolsó egyenlőtlenséget összegezve m -től n -ig, m szerint kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_{n+1}}{\rho^{n+1}} - \frac{z_m}{\rho^m} \right| &\leq \varepsilon \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+2}}, \\ \left| \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} - l - \frac{\rho^n z_m}{x_n \rho^m} \right| &\leq \varepsilon \frac{|\rho|^{n+1}}{|x_{n+1}|} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+2}}. \end{aligned}$$

Az (F6) feltétel szerint $\frac{\rho^n}{x_n} \rightarrow 0$. Ekkor $\limsup$ -ra térve n szerint a fent kapott egyenlőtlenségben írhatjuk, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} - l \right| \leq \varepsilon \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_{n+1}|} |\rho|^{n+1} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+2}}.$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho^n}{x_n} = 0$, ezért a fenti összegben m -et választhatjuk az $(x_n)_n, (y_n)_n$ kezdőindexének, ezt megtehetjük mert feltételezhetjük, hogy az egyenlőtlenségben szereplő sor konvergens.³ Az így kapott egyenlőtlenségben $\varepsilon \searrow E$ -hez megkapjuk a (3.23) egyenlőtlenséget.

Legyen $s = \pm 1$, ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{P(sx_{k_2})}{\rho^{k_2+1}} &= \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{P_1(sx_{k_2+1})}{\rho^{k_2+1}} - \frac{P_1(sx_{k_2})}{\rho^{k_2}} \\ &= \sum_{k_1=m}^n \frac{P_1(sx_{k_1+1})}{\rho^{k_1+1}} - \frac{P_1(sx_m)}{\rho^m} \\ &= -(n+1-m) \frac{P_1(sx_m)}{\rho^m} + \sum_{k=m}^n \frac{sx_{k+2}}{\rho^{k+1}} - \frac{sx_{k+1}}{\rho^k}, \\ \frac{1}{n+1} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{P(sx_{k_2})}{\rho^{k_2+1}} &= -\frac{n+1-m}{n+1} \frac{P_1(sx_m)}{\rho^m} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{sx_{n+2}}{\rho^{n+1}} - \frac{sx_{m+1}}{\rho^m} \right) \end{aligned}$$

3. Ha a belső sor divergens, akkor a (3.23) egyenlőtlenség jobb oldala $+\infty$ ami esetben nincs mit bizonyítani.

Határértékre térve n szerint kapjuk, felhasználva, hogy $\frac{x_n}{n\rho^n} \rightarrow 0$, következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{P(sx_{k_2})}{\rho^{k_2+1}} = -\frac{P_1(sx_m)}{\rho^m}.$$

Mivel az

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{P(sx_{k_2})}{\rho^{k_2+1}} \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+1}} \quad (3.25)$$

egyenlőtlenség igaz minden $n \geq m$ esetén ezért, határértékre térve n szerint kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| -\frac{P_1(sx_m)}{\rho^m} \right| &\leq \sum_{k \geq m} \frac{|P(x_k)|}{|\rho|^{k+1}} \implies \left| -\frac{P_1(sx_m)}{\rho^{m+1}} \right| \leq \sum_{k \geq m} \frac{|P(x_k)|}{|\rho|^{k+2}}. \\ \left| \frac{sx_m}{\rho^m} - \frac{sx_{m+1}}{\rho^{m+1}} \right| &\leq \sum_{k \geq m} \frac{|P(x_k)|}{|\rho|^{k+2}} \end{aligned}$$

Az utolsó összefüggést összegezve m -től n -ig, m szerint kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \frac{sx_m}{\rho^m} - \frac{sx_{n+1}}{\rho^{n+1}} \right| &\leq \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+2}}, \\ \left| \frac{\rho^{n+1}}{x_{n+1}} \frac{sx_m}{\rho^m} - s \right| &\leq \frac{|\rho^{n+1}|}{|x_{n+1}|} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+2}}. \end{aligned}$$

Felhasználva azt, hogy $\frac{\rho^n}{x_n} \rightarrow 0$ írhatjuk lim sup-ra menet után, hogy

$$1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|\rho^{n+1}|}{|x_{n+1}|} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+2}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\rho^{n+1}|}{|x_{n+1}|} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+2}}.$$

Ha $\rho > 0$ és $(P(x_n))_n \subseteq \mathbb{R}^*$ sorozat, akkor s -et választva a $P(x_n)$ előjelének, akkor a (3.25) összefüggést felírhatjuk modulusz nélkül és egyenlőséggel, vagyis

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{P(sx_{k_2})}{\rho^{k_2+1}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2=m}^{k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+1}}.$$

Ekkor ugyanazokat a számításokat elvégezve kapjuk, hogy

$$\frac{\rho^{n+1}}{x_{n+1}} \frac{sx_m}{\rho^m} - s = \frac{|\rho^{n+1}|}{x_{n+1}} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\rho^{n+1}|}{|x_{n+1}|} \sum_{k_1=m}^n \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|\rho|^{k_2+2}} = 1.$$

■

3.2.1. Konstans együtthatós lineáris differencia operátorra kiterjesztett Cesáro-Stolz

Legyen $P(x_n) = x_{n+p} + a_1x_{n+p-1} + \dots + a_px_n$, minden $(x_n)_n$ komplex számsorozat esetén, ahol $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ és $a_p \neq 0$. Legyenek $r_1, \dots, r_p \in \mathbb{C}^*$ a P karakterisztikus polinomjának a gyökei, illetve r a legnagyobb sugarú gyök (ha több ilyen van akkor a legnagyobb multiplicitású), mely multiplicitása μ . (ha így is több van, akkor a választás ezek közül tetszőleges).

Legyen $P_i(b_n) = b_{n+1} - r_i b_n$, minden $(b_n)_n$ komplex számsorozat esetén, ahol $i = \overline{1, p}$. Ekkor

$$P = P_1 \circ P_2 \circ \dots \circ P_p.$$

3.25. Lemma. Ha $(x_n)_n$ sorozat esetén $P(x_n) = 0$, akkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{r^n n^{\mu-1}} \right| < +\infty.$$

Bizonyítás. Legyen $\{\rho_1, \dots, \rho_k\} = \{r_1, \dots, r_p\}$, melyek multiplicitása $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$. Ekkor a sorozatok reprezentációs tétele alapján léteznek $Q_1, \dots, Q_k \in \mathbb{C}[X]$ polinomok úgy, hogy $\deg Q_j < \mu_j$ és

$$x_n = \sum_{j=1}^k Q_j(n) \rho_j^n.$$

Legyen $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ amelyre $|\rho_i| = |r|$, $\forall i \in I$, ekkor $\mu_i \leq \mu$, $\forall i \in I$ illetve

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{r^n n^{\mu-1}} &= \sum_{j=1, k}^{j \notin I} \frac{Q_j(n)}{n^{\mu-1}} \left(\frac{\rho_j}{r} \right)^n + \sum_{j \in I} \frac{Q_j(n)}{n^{\mu-1}} \left(\frac{\rho_j}{r} \right)^n, \\ \left| \frac{x_n}{r^n n^{\mu-1}} \right| &\leq \left| \sum_{j=1, k}^{j \notin I} \frac{Q_j(n)}{n^{\mu-1}} \left(\frac{\rho_j}{r} \right)^n \right| + \sum_{j \in I} \left| \frac{Q_j(n)}{n^{\mu-1}} \right|. \end{aligned}$$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_j(n)}{n^{\mu-1}} \left(\frac{\rho_j}{r} \right)^n = 0$, mert $\left| \frac{\rho_j}{r} \right| < 1$ és $\frac{Q_j(n)}{n^{\mu-1}}$ racionális törtfüggvény n -ben, minden $j \notin I$ esetén illetve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_j(n)}{n^{\mu-1}} = L_i \in \mathbb{C}$ mert $\deg Q_j < \mu_j \leq \mu$ minden $j \in I$ esetén; ahonnan

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{r^n n^{\mu-1}} \right| &\leq \left| \sum_{j=1, k}^{j \notin I} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_j(n)}{n^{\mu-1}} \left(\frac{\rho_j}{r} \right)^n \right| + \sum_{j \in I} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_j(n)}{n^{\mu-1}} \right| \\ &\leq k \cdot 0 + \sum_{j \in I} |L_i| < +\infty. \end{aligned}$$

■

3.26. Tétel. Legyen $(x_n)_n, (y_n)_n$ két komplex sorozat $(x_n \neq 0 \forall n)$, melyre teljesül az, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n n^{\mu-1}}{x_n} = 0 \quad (3.26)$$

Ekkor bármely $l \in \mathbb{C}$ esetén fennáll

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_{n+p}|} \sum_{k_1 \leq \dots \leq k_p \leq n := k_{p+1}} |P(x_{k_1})| \prod_{j=1}^p |r_j^{\Delta k_j}|, \quad (3.27)$$

amennyiben a jobb oldal nem határozatlansági eset. Továbbá az egyenlőtlenség jobb oldalán lévő szorzat második tényezője mindig nagyobb vagy egyenlő mint 1; ha $r_i > 0, \forall i = \overline{1, p}$, illetve $(P(x_n))_n \subseteq \mathbb{R}^*$ sorozat előjeltartó, akkor egyenlő 1-el.

Bizonyítás. Legyen $z_n = y_n - lx_n$, ekkor $P(z_n) = P(y_n) - lP(x_n)$; illetve $\varepsilon > \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right|$.⁴
Ekkor $\exists n_0 > 0$ úgy, hogy:

$$\left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Rightarrow |P(z_n)| < \varepsilon |P(x_n)|, \forall n \geq n_0$$

Legyen $m \geq n_0$ tetszőlegesen rögzített, és $(u_n^i)_{n \geq m} \subseteq \mathbb{C}, (v_n^i)_n \subseteq (0, +\infty)$ két sorozat (i index) úgy, hogy

$$|(P_i \circ \dots \circ P_p)(z_{n+i-1}) - u_n^i| < \varepsilon v_n^i, \forall n \geq m.$$

Ekkor minden $n \geq m$ esetén teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} & |(P_i \circ \dots \circ P_p)(z_{n+i-1}) - u_n^i| < \varepsilon v_n^i, \\ & |(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{n+i}) - r_i(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{n+i-1}) - u_n^j| < \varepsilon v_n^j, \\ & \left| \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{n+i})}{r_i^{n+1}} - \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{n+i-1})}{r_i^n} - \frac{u_n^j}{r_i^{n+1}} \right| < \varepsilon \frac{v_n^j}{|r_i|^{n+1}}, \\ & \sum_{k=m}^n \left| \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{k+i})}{r_i^{k+1}} - \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{k+i-1})}{r_i^k} - \frac{u_k^i}{r_i^{k+1}} \right| < \varepsilon \sum_{k=m}^n \frac{v_k^i}{|r_i|^{k+1}}, \\ & \left| \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{n+i})}{r_i^{n+1}} - \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{m+i-1})}{r_i^m} - \sum_{k=m}^n \frac{u_k^i}{r_i^{k+1}} \right| < \varepsilon \sum_{k \leq n} \frac{v_k^i}{|r_i|^{k+1}}, \\ & \left| (P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{n+i}) - r_i^{n+1} \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{m+i-1})}{r_i^m} - r_i^{n+1} \sum_{k=m}^n \frac{u_k^i}{r_i^{k+1}} \right| < \varepsilon |r_i|^{n+1} \sum_{k \leq n} \frac{v_k^i}{|r_i|^{k+1}} \end{aligned}$$

Tehát

$$u_n^{i+1} = r_i^{n+1} \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{m+i-1})}{r_i^m} + r_i^{n+1} \sum_{k=m}^n \frac{u_k^i}{r_i^{k+1}},$$

4. Ha a jobb oldal végtelen, akkor nincs mit bizonyítani

$$v_n^{i+1} = |r_i|^{n+1} \sum_{k \leq n} \frac{v_k^i}{|r_i|^{k+1}}; \quad (3.28)$$

ahol $i = \overline{1, p}$ és $u_n^1 = 0$, $n \geq m$, illetve $v_n^1 = |P(x_n)|$, $n \in \mathbb{N}$. Tehát a sajátosan megszerkesztett $\left(u_n^{p+1}\right)_{n \geq m}$, $\left(v_n^{p+1}\right)_n$ sorozatokra teljesül a következő összefüggés

$$|z_{n+p} - u_n^{p+1}| < \varepsilon v_n^{p+1}, \forall n \geq m.$$

Amit tovább átalakítva kapjuk, hogy

$$\left| \frac{y_{n+p}}{x_{n+p}} - l - \frac{u_n^{p+1}}{x_{n+p}} \right| < \varepsilon \frac{v_n^{p+1}}{|x_{n+p}|}, \forall n \geq m. \quad (3.29)$$

Igazolni fogjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^{p+1}}{x_{n+p}} = 0 (*)$.

Számoljuk, ki $P_i(u_n^{i+1})$ -et.

$$\begin{aligned} P_i(u_n^{i+1}) &= r_i^{n+2} \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{m+i-1})}{r_i^m} + r_i^{n+2} \sum_{k=m}^{n+1} \frac{u_k^i}{r_i^{k+1}} \\ &\quad - r_i \left(r_i^{n+1} \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{m+i-1})}{r_i^m} + r_i^{n+1} \sum_{k=m}^n \frac{u_k^i}{r_i^{k+1}} \right), \\ P_i(u_n^{i+1}) &= u_{n+1}^i \end{aligned}$$

Tehát $P(u_n^{p+1}) = (P_1 \circ \dots \circ P_p)(u_n^{p+1}) = u_{n+p}^1 = 0$. Így a 3.25 lemma alapján

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n^{p+1}}{r^n n^{\mu-1}} \right| = L < +\infty,$$

ahonnan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n^{p+1}}{x_{n+p}} \right| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r^{n+p} (n+p)^{\mu-1}}{x_{n+p}} \frac{r^n n^{\mu-1}}{r^{n+p} (n+p)^{\mu-1}} \frac{u_n^{p+1}}{r^n n^{\mu-1}} \right| \leq 0 \cdot \frac{1}{|r|^p} \cdot L = 0 \Rightarrow (*)$$

Így $\limsup$ -ra térve a (3.29)-es összefüggésben kapjuk, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \varepsilon \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^{p+1}}{|x_{n+p}|}.$$

Figyelembe véve ε választását, írhatjuk a fenti összefüggés alapján, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^{p+1}}{|x_{n+p}|}. \quad (3.30)$$

Figyelembe véve v_n^{p+1} értelmezését írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} v_n^{p+1} &= |r_p|^{n+1} \sum_{k_p \leq n} \left| \frac{r_{p-1}}{r_p} \right|^{k_p+1} \sum_{k_{p-1} \leq k_p} \left| \frac{r_{p-2}}{r_{p-1}} \right|^{k_{p-1}+1} \cdots \left| \frac{r_1}{r_2} \right|^{k_2+1} \sum_{k_1 \leq k_2} \frac{|P(x_{k_1})|}{|r_1|^{k_1+1}} \\ &= \sum_{k_1 \leq \dots \leq k_p \leq n: = k_{p+1}} |r_p|^{k_{p+1}+1} \left| \frac{r_{p-1}}{r_p} \right|^{k_p+1} \left| \frac{r_{p-2}}{r_{p-1}} \right|^{k_{p-1}+1} \cdots \frac{|P(x_{k_1})|}{|r_1|^{k_1+1}} \\ &= \sum_{k_1 \leq \dots \leq k_p \leq n: = k_{p+1}} |P(x_{k_1})| \prod_{j=1}^p |r_j^{\Delta k_j}|. \end{aligned}$$

Fent kapott összefüggést összevetve a (3.30)-as egyenlőtlenséggel kapjuk a (3.27)-es egyenlőtlenséget.

Most legyen $s = \pm 1$, illetve legyen $i = \overline{1, p}$, $q_n^1 = sP(x_n)$. Tekintsük a következő sorozatot:

$$q_n^{i+1} = r_i^{n+1} \sum_{k \leq n} \frac{q_k^i}{r_i^{k+1}}.$$

Ekkor $P_i(q_n^{i+1}) = q_{n+1}^i$, ahonnan $P(q_n^{p+1}) = q_{n+p}^1 = sP(x_{n+p})$, vagyis az $w_n = q_n^{p+1} - sx_{n+p}$ sorozatra $P(w_n) = 0$, ahonnan a 3.25 lemma alapján

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_n}{r^n n^{\mu-1}} \right| = L < +\infty,$$

ami alapján írhatjuk, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{q_n^{p+1}}{x_{n+p}} - s \right| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_n}{r^n n^{\mu-1}} \frac{r^n n^{\mu-1}}{r^{n+p} (n+p)^{\mu-1}} \frac{r^{n+p} (n+p)^{\mu-1}}{x_{n+p}} \right| \leq 0 \cdot \frac{1}{|r|^p} \cdot L = 0.$$

Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n^{p+1}}{x_{n+p}} = s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|q_n^{p+1}|}{|x_{n+p}|} = 1$. Ekkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^{p+1}}{|x_{n+p}|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^{p+1}}{|q_n^{p+1}|}.$$

De

$$\begin{aligned} q_n^{p+1} &= r_p^{n+1} \sum_{k_p \leq n} \left(\frac{r_{p-1}}{r_p} \right)^{k_p+1} \sum_{k_{p-1} \leq k_p} \left(\frac{r_{p-2}}{r_{p-1}} \right)^{k_{p-1}+1} \cdots \sum_{k_1 \leq k_2} \frac{sP(x_{k_1})}{r_1^{k_1+1}} \\ &= s \cdot \sum_{k_1 \leq \dots \leq k_p \leq n: = k_{p+1}} P(x_{k_1}) \prod_{j=1}^p r_j^{\Delta k_j}, \end{aligned}$$

ahonnan

$$|q_n^{p+1}| \leq \sum_{k_1 \leq \dots \leq k_p \leq n: k_{p+1}} |P(x_{k_1})| \prod_{j=1}^p |r_j|^{\Delta k_j} = v_n^{p+1} \Rightarrow \frac{v_n^{p+1}}{|q_n^{p+1}|} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Amiből következik az állítás.

Ha $r_i \geq 0, \forall i = \overline{1, p}$ illetve $(P(x_n))_n \subseteq \mathbb{R}^*$ előjeltartó, akkor s -et választva $P(x_n)$ előjelének kapjuk, hogy $v_n^{p+1} = q_n^{p+1}$, ahonnan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^{p+1}}{|x_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n^{p+1}}{|x_{n+p}|} = 1,$$

amit igazolni kellett. ■

Most legyen ρ egy legkisebb sugarú gyöke a P karakterisztikus polinomjának. Ekkor igaz a következő tétel.

3.27. Tétel. Legyen $(x_n)_n, (y_n)_n$ két komplex sorozat $(x_n \neq 0 \forall n)$, melyre teljesül az, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\rho^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\rho^n} = 0. \quad (3.31)$$

Ekkor bármely $l \in \mathbb{C}$ esetén fennáll

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k_1 \geq \dots \geq k_p \geq n: k_{p+1}} |P(x_{k_1})| \prod_{j=1}^p |r_j|^{\Delta k_j - 1}, \quad (3.32)$$

amennyiben a jobb oldal nem határozatlansági eset. Továbbá az egyenlőtlenség jobb oldalán lévő szorzat második tényezője mindig nagyobb mint 1; ha $r_i > 0, \forall i = \overline{1, p}$, illetve $(P(x_n))_n \subseteq \mathbb{R}^*$ sorozat előjeltartó, akkor egyenlő 1-el.

Bizonyítás. A bizonyítás hasonló a 3.26 tétel bizonyításához. Legyen $E = \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right|$. Ha $E = +\infty$ akkor a (3.32) egyenlőtlenség jobb oldala feltétel szerint $+\infty$ amely esetben nincs mit bizonyítani. Tehát feltételezhetjük, hogy $E < +\infty$. Jelölje $z_n = y_n - lx_n$. Legyen $\varepsilon > E$ tetszőleges, ekkor létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén

$$\left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \leq \varepsilon \Rightarrow |P(z_n)| \leq \varepsilon |P(x_n)|.$$

Legyen $(v_n^i)_n \subseteq (0, +\infty)$ (i index) úgy, hogy a következő

$$|(P_i \circ \dots \circ P_p)(z_n)| \leq \varepsilon v_n^i$$

teljesüljön minden $i = \overline{1, p}$ illetve $n \geq n_0$ esetén. Ekkor $v_n^1 = |P(x_n)|$, továbbá minden $n \geq n_0$ esetén

$$\left| \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{n+1})}{r_i^{n+1}} - \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_n)}{r_i^n} \right| \leq \varepsilon \frac{v_n^i}{|r_i|^{n+1}}.$$

A fenti egyenlőtlenséget összegezzük n -től m -ig n szerint, ahol $m \geq n \geq n_0$ tetszőlegesen, és kapjuk, hogy

$$\left| \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_{m+1})}{r_i^{m+1}} - \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_n)}{r_i^n} \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n}^m \frac{v_k^i}{|r_i|^{k+1}}. \quad (3.33)$$

Tudjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{r_i^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n \rho^n}{\rho^n r_i^n} = 0$, mert $|\rho| \leq |r_i|$. Ez alapján határértékre térve a (3.33) egyenlőtlenségben m szerint, következik, hogy minden $n \geq n_0$ esetén

$$\left| \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_n)}{r_i^n} \right| \leq \varepsilon \sum_{k \geq n} \frac{v_k^i}{|r_i|^{k+1}} \Rightarrow |(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(z_n)| \leq \varepsilon |r_i|^n \sum_{k \geq n} \frac{v_k^i}{|r_i|^{k+1}}.$$

Tehát v_n^{i+1} -et választhatjuk

$$v_n^{i+1} = |r_i|^n \sum_{k \geq n} \frac{v_k^i}{|r_i|^{k+1}}.$$

A $(v_n^{p+1})_n$ szerkesztése alapján minden $n \geq n_0$ esetén $|z_n| \leq \varepsilon v_n^{p+1}$, ahonnan

$$\left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \left| \frac{z_n}{x_n} \right| \leq \varepsilon \frac{v_n^{p+1}}{|x_n|} \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \varepsilon \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^{p+1}}{|x_n|}.$$

Az utolsó egyenlőtlenségben $\varepsilon \searrow E$ -hez figyelembe véve, hogy

$$\begin{aligned} v_n^{p+1} &= |r_p|^n \sum_{k_p \geq n} \frac{|r_{p-1}|^{k_p}}{|r_p|^{k_p+1}} \sum_{k_{p-1} \geq k_p} \dots \frac{|r_1|^{k_2}}{|r_2|^{k_2+1}} \sum_{k_1 \geq k_2} \frac{|P(x_{k_1})|}{|r_1|^{k_1+1}} \\ &= \sum_{k_1 \geq \dots \geq k_p = n =: k_{p+1}} |P(x_{k_1})| \prod_{j=1}^p |r_j^{\Delta k_j - 1}| \end{aligned}$$

megkapjuk a (3.32) egyenlőtlenséget.

Legyen $s = \pm 1$, illetve legyen $i = \overline{1, p}$, $q_n^1 = sP(x_n)$. Tekintsük a következő sorozatot:

$$q_n^{i+1} = r_i^n \sum_{k \geq n} \frac{q_k^i}{r_i^{k+1}}$$

Ha feltételezzük, hogy $q_n^i = s(P_i \circ \dots \circ P_p)(x_n)$, ami teljesül $i = 1$ esetén; akkor felhasználva, hogy

$\frac{x_n}{r_i^n} \rightarrow 0$, következik, hogy

$$\begin{aligned} q_n^{i+1} &= r_1 i^n \sum_{k \geq n} \frac{s(P_i \circ \dots \circ P_p)(x_k)}{r_i^{k+1}} \\ &= s r_i^n \sum_{k \geq n} \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(x_{k+1})}{r_i^{k+1}} - \frac{(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(x_k)}{r_i^k} \\ &= s(P_{i+1} \circ \dots \circ P_p)(x_n). \end{aligned}$$

Tehát $q_n^{p+1} = s x_n$. De

$$q_n^{p+1} = s \sum_{k_1 \geq \dots \geq k_p \geq n := k_{p+1}} P(x_{k_1}) \prod_{j=1}^p r_j^{\Delta k_j - 1},$$

ahonnan $|x_n| = |q_n^{p+1}| \leq v_n^{p+1}$. Tehát

$$1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^{p+1}}{|x_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^{p+1}}{|x_n|}.$$

Ha $r_i > 0$, $\forall i = \overline{1, p}$, illetve $(P(x_n))_n \subseteq \mathbb{R}^*$ sorozat előjeltartó, akkor s -et választva $P(x_n)$ előjelének kapjuk⁵, hogy $v_n^{p+1} = q_n^{p+1}$, ahonnan

$$\frac{v_n^{p+1}}{x_n} = \frac{v_n^{p+1}}{s q_n^{p+1}} = s \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n^{p+1}}{|x_n|} = 1.$$

■

Hasonlóan a másodrendű esethez itt is igaz a következő tétel, a fenti tételek illetve a 3.17 tétel alapján.

3.28. Tétel. Ha $(y_n)_n, (x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ két sorozat, melyre $|x_n| > 0, |P(x_n)| > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá

(i) ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n n^{\mu-1}}{x_n} = 0$, illetve

$$M = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_{n+p}|} \sum_{k_1 \leq \dots \leq k_p \leq n := k_{p+1}} |P(x_{k_1})| \prod_{j=1}^p |r_j^{\Delta k_j}| < +\infty,$$

(ii) vagy, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\rho^n} = 0$, illetve

$$M = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k_1 \geq \dots \geq k_p \geq n := k_{p+1}} |P(x_{k_1})| \prod_{j=1}^p |r_j^{\Delta k_j - 1}| < +\infty,$$

⁵ ebben az esetben a képlet amivel értelmezzük a v_n^i illetve q_n^i számokat megegyezik

akkor, ha a $\left(\frac{P(y_n)}{P(x_n)}\right)_n$ sorozat korlátos, akkor következik, hogy

$$\begin{aligned} (1 - M) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P(y_n)}{P(x_n)} + M \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P(y_n)}{P(x_n)} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \\ (1 - M) \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{P(y_n)}{P(x_n)} + M \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{P(y_n)}{P(x_n)} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}. \end{aligned}$$

4. fejezet

Összefoglaló és további kutatási lehetőségek

4.1. Összefoglaló

Kezdetben Spigler és Vianello általánosításának egy sajátos esetére adtunk egy felső határértékes általánosítást

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} - l \right| \cdot M(x_n),$$

amelyet fel tudunk használni az eredeti Cesáro-Stolz lemma egy esetének a bizonyítására, illetve általánosítani tudtuk a Cesáro-Stolz lemma szélső határértékes formáját

$$\begin{aligned} (1 - M) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} + M \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \\ (1 - M) \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} + M \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}, \end{aligned}$$

ahol $M = M(x_n)$.

Ezekben az általánosításokban lényeges szerepet kap az $M(x_n)$ tag

$$M(x_n) := \begin{cases} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k < n} |\Delta x_k|, & \text{ha } |x_n| \rightarrow \infty \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k \geq n} |\Delta x_k|, & \text{ha } x_n \rightarrow 0 \end{cases},$$

melyről láttuk, hogy monoton $(x_n)_n$ sorozat esetén 1-el egyenlő, és más esetben pedig nagyobb vagy egyenlő 1-nél. Lényeges szerepe miatt, adtunk néhány elégséges feltételt, mely biztosítja azt, hogy $M(x_n)$ véges.

Ezt követően a komplex sorozatokra használt gondolatmenetet megismételtük időskálák esetén, általánosítást adva a L'Hospital szabály időskálák alakjára

$$\limsup_{t \nearrow t_0} \left| \frac{f(t)}{g(t)} - l \right| \leq \limsup_{t \nearrow t_0} \left| \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} - l \right| M(g),$$

illetve

$$(1 - M) \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} + M \liminf_{t \nearrow t_0} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} \leq \liminf_{t \nearrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)}$$

$$(1 - M) \liminf_{t \nearrow t_0} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} + M \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{f^\Delta(t)}{g^\Delta(t)} \geq \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{f(t)}{g(t)}$$

ahol $M = M(g)$ és

$$M(g) = \begin{cases} \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{1}{|g(t)|} \int_{\varepsilon}^t |g^\Delta(x)| \Delta x, & \lim_{t \nearrow t_0} |g(t)| = \infty \\ \limsup_{t \nearrow t_0} \frac{1}{|g(t)|} \int_t^{t_0} |g^\Delta(x)| \Delta x, & \lim_{t \nearrow t_0} g(t) = 0. \end{cases}$$

Ezek után kiindultunk abból, hogy az $y_n - lx_n$ kifejezést visszaszerkesztjük az $\Delta(y_n - lx_n)$ kifejezésből és lecseréltük a Δ operátort először a $P_1(a_n) = a_{n+1} - ra_n$ operátorra, majd a $P_2(a_n) = a_{n+2} - (r_1 + r_2)a_{n+1} + (r_1 r_2)a_n$ operátorra. Láttuk, hogy a $P_2 =: P$ operátor esetén 3 lényegesen eltérő eset van ezek

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_{n+2}|} |r_1|^{n+1} \sum_{k_1 \leq n} \left| \frac{r_2}{r_1} \right|^{k_1+1} \sum_{k_2 \leq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} |r_1|^n \sum_{k_1 \geq n} \frac{|r_2|^{k_1}}{|r_1|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|r_2|^{k_2+1}},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_{n+1}|} |r|^{n+1} \sum_{k_1 \leq n} \frac{|R|^{k_1}}{|r|^{k_1+1}} \sum_{k_2 \geq k_1} \frac{|P(x_{k_2})|}{|R|^{k_2+1}}.$$

annak függvényében, hogy a $(x_n)_n, (y_n)_n$ sorozatok milyen viszonyban vannak az $P(a_n) = 0$ rekurzió alapmegoldásaival, ugyanabban a sorrendben a megfelelő feltételek

Ha $r_1 \neq r_2$, akkor

$$(F1) \quad \frac{R^n}{x_n} \rightarrow 0,$$

$$(F2) \quad \frac{x_n}{r^n}, \frac{y_n}{r^n} \rightarrow 0,$$

$$(F3) \quad \frac{r^n}{x_n}, \frac{x_n}{R^n}, \frac{y_n}{R^n} \rightarrow 0.$$

Ha $r_1 = r_2 = \rho$, akkor

$$(F4) \quad \frac{n\rho^n}{x_n} \rightarrow 0,$$

$$(F5) \quad \frac{x_n}{\rho^n}, \frac{y_n}{\rho^n} \rightarrow 0,$$

$$(F6) \quad \frac{x_n}{n\rho^n}, \frac{y_n}{n\rho^n}, \frac{\rho^n}{x_n} \rightarrow 0.$$

Ahol $F(i)$ és $F(i + 3)$ feltételeket együtt vesszük, és R a maximális sugarú r_1, r_2 közül és r a minimális.

A szorzatok második tényezője szerencsére jól viselkedik mikor $(P(x_n))_n$ sorozat előjeltartó.

És utoljára megnéztünk két esetet az $P(x_n) = x_{n+p} + a_1 x_{n+p-1} + \dots + a_p x_n$ operátor esetén

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_{n+p}|} \sum_{k_1 \leq \dots \leq k_p \leq n: k_{p+1}} |P(x_{k_1})| \prod_{j=1}^p |r_j^{\Delta k_j}|,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k_1 \geq \dots \geq k_p \geq n: k_{p+1}} |P(x_{k_1})| \prod_{j=1}^p |r_j^{\Delta k_j - 1}|,$$

ahol $r_i \in \mathbb{C}^*$ a P karakterisztikus polinomjának a gyökei, és a megfelelő feltételek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n n^{\mu-1}}{x_n} = 0,$$

ahol r egy maximális sugarú gyök, mely μ multiplicitása maximális; illetve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\rho^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\rho^n} = 0,$$

ahol ρ egy minimális sugarú gyök. Ismét $(P(x_n))_n$ előjeltartó sorozat esetén a második szorzó tényező értéke 1, különben nagyobb vagy egyenlő.

4.2. További kutatási lehetőségek

Elsőként meg lehetne vizsgálni, hogy lehet-e a p -ed rendű lineáris operátorra kiterjesztett Cesáro-Stolz lemma többi eseteit valamilyen kézenfekvő módon letárgyalni.

Másrészt a bizonyítások túlnyomó többsége a diszkrét integrálásból vagyis összegzésből áll, ezért kézenfekvő az az ötlet, hogy a lineáris differencia operátorokat sorozatokról lecseréljük lineáris dinamikus operátorokra időskálákon. Vagyis, ha

$$L(f) = f^{\Delta p} + \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{\Delta i}$$

akkor, milyen feltételeket kell kiróni f és g függvényekre, hogy

$$\limsup_{t \nearrow t_0} \left| \frac{f(t)}{g(t)} - l \right| \leq \limsup_{t \nearrow t_0} \left| \frac{Lf(t)}{Lg(t)} - l \right| \cdot M(g)$$

alakú egyenlőtlenséget tudjunk levezetni.

Irodalomjegyzék

- [1] András, S. *Dinamikus rendszerek*. Editura Didactică și pedagogică, Bukarest, 2008.
- [2] Bohner, M. és Peterson, A. *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [3] Boroica, G., Pop, V., Mușuroia, N., Bojor, F., és Heuberger, C. *Matematică de excelență, clasa XI. Paralela*, 2014.
- [4] Cesàro, E. Sur la convergence des séries. *Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 7:49–59, 1888.
- [5] Cesaro, E. *Analisi Algebrica*. Fratelli Bocca Editori, Torino, 1894.
- [6] Kelley, W. G. és Peterson, A. C. *Difference equations: an introduction with applications*. Academic press, 2001.
- [7] Mortici, C. New forms of stolz–cesaró lemma. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(5):692–696, 2011.
- [8] Rajagopal, C. T. Some limit theorems. *American Journal of Mathematics*, 70(1):157–166, 1948.
- [9] Rudin, W. és others, . *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-goHill, 1964.
- [10] Spigler, R. és Vianello, M. Cesaro’ s theorems for complex sequences. *Journal of mathematical analysis and applications*, 180(2):317–324, 1993.
- [11] Stolz, O. über die grenzwerthe der quotienten. *Mathematische Annalen*, 15(3-4):556–559, 1879.
- [12] Stolz, O. *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: nach den Neueren Ansichten*, volume 1. BG Teubner, 1885.
- [13] Tóth, G. és András, S. Cesáro-Stolz lemma általánosításai - Licensz dolgozat. *Babeş-Bolyai Tudományegyetem*, 2020.
- [14] Toeplitz, O. Über allgemeine lineare mittelbildungen. *Prace matematyczno-fizyczne*, 22(1):113–119, 1911.