

1. VÁLASZOLT KÉRDÉSEK

• Hallgató kérdése: Van-e a Cesaro-Stolz lemmának komplex számsorozatos alakja? (Spiegler & Vianello)

Finomított kérdés: A szélső határértékes alaknak van-e komplex számsorozatos alakja?

- Milyen elégséges feltételek mellett alkalmazható az eredmény?
- Van hasonló eredmény a L'Hospital szabály esetén?
- Vezető tanár kérdése: a kapott egyenlőtlenség használható hatványsorok aránya esetén?
- Vezető tanár ötlete: a kapott eredményeket, módszereket lehet-e alkalmazni az

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+2} + (r_1 + r_2)y_{n+1} + r_1 r_2 y_n}{x_{n+2} + (r_1 + r_2)x_{n+1} + r_1 r_2 x_n}$$

határérték esetén, az

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$$

határtéték helyett? Magasabb rend esetén is ugyanaz a kérdés.

2. SAJÁT EREDMÉNYEK

- (3.1. Tétel) Minden l komplex szám esetén fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq M \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} - l \right|,$$

feltéve, ha $|x_n| \rightarrow \infty$, vagy $x_n, y_n \rightarrow 0$. Ahol $(x_n)_n, (y_n)_n$ komplex számokból álló számsorozatok, és

$$M = \begin{cases} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k < n} |x_{k+1} - x_k| & , \text{ ha } |x_n| \rightarrow \infty \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_n|} \sum_{k \geq n} |x_{k+1} - x_k| & , \text{ ha } |x_n| \rightarrow 0 \end{cases}$$

- A 3.10 és 3.11 lemmák, vagyis M véges, ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \right| > 2; \text{ vagy } x_n \rightarrow 0 \text{ és } \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} \right| < \frac{1}{2},$$

• (3.5. Tétel) A kapott egyenlőtlenséget felhasználva, lehet általánosítani valós számsorozatok esetén a szélső értékes lemmát, vagyis

$$\begin{aligned} (1 - M) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} + M \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \\ (1 - M) \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} + M \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} \end{aligned}$$

- (3.21-24, 3.26 Tételek) Az Cesaro-Stolz általánosításánál használt módszerekkel, levezethető az

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{y_n}{x_n} - l \right| \leq M \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P(y_n)}{P(x_n)} - l \right|$$

típusú egyenlőtlenség, ahol P egy konstans együtthatós lineáris differencia operátor.

3. HASZNÁLT MÓDSZEREK

- Háromszög egyenlőtlenség

$$\left| \sum_k x_{k+1} - x_k \right| \leq \sum_k |x_{k+1} - x_k|$$

- A 3.6. Lemma, amely valós számsorozatok esetén felbontja, a minden l valós esetén teljesülő

$$\limsup |y_n - l| \leq M \cdot \limsup |x_n - l|$$

egyenlőtlenséget.

- Utánaolvasás a közirodalomban.