

TDK dolgozat

Kuczik Anna

Debrecen, 2022

Debreceni Egyetem, Informatikai Kar, Számítógéptudományi Tanszék

Életlen grammatikák, életlen automaták, életlen nyelvek

Dr. Vaszil György

Témavezető

Kuczik Anna

Szerző

Debrecen, 2022

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Életlen halmazok és életlen nyelvek	5
2.1. Életlen halmaz	5
2.2. Életlen grammatika	8
2.3. Életlen nyelv	9
2.3.1. Egy példa életlen nyelvre	10
2.3.2. Életlen nyelv megadása életlen grammatikával	11
2.3.3. Az életlen nyelvek egy speciális esete	11
3. Életlen automaták	14
3.1. Az életlen automata definíciója	14
3.1.1. Az életlen automata működése	15
3.2. Életlen automaták és életlen nyelvek	17
3.3. Az életlen automaták egy másik megközelítése	20
4. Életlen automaták egyszerűsítése	21
5. Összefoglalás	28
Irodalomjegyzék	29
Saját munka leírása	31
Köszönetnyilvánítás	32

1. fejezet

Bevezetés

Az életlen halmazok az informatika számos területén hasznosnak bizonyulnak, több helyen jelennek meg, mint potenciális lehetőség olyan kérdések kezelésére, amelyekben a bizonytalanság előfordul. Az életlen halmazok matematikai szempontból is érdekesek, de hasznos alkalmazásra találhatnak olyan területeken, mint amilyen a mesterséges intelligencia, kognitív tudomány, filozófia azon részei, ahol a bizonytalanság megjelenik valamilyen formában, amire az életlen halmazok által megoldást adhatunk, mint például az intelligens rendszerek, induktív érvelés, mintafelismerés, döntéselemzés, szakértői rendszerek.

Annak szemlélésére, hogy milyen értelemben beszélünk bizonytalanságról, vegyünk egy példát az orvostudomány területéről, ahol szintén megjelenik a bizonytalanság kérdése. Rengeteg olyan tünet tapasztalható, amelyek alapján nem lehet biztosan beazonosítani egy adott betegséget további vizsgálatok nélkül. Ezzel szemben vannak olyan tünetek, tünet együttesek, amelyek egyértelművé teszik, hogy a páciens milyen betegségben szenved. Ennek oka, hogy egyes tünetek több problémára is utalhatnak, így elsőre nem állítható biztosan, mely probléma okozza őket. Összességében, vannak olyan tünetkombinációk, amelyekből egyértelműen meghatározható, hogy az adott betegségről van szó, míg vannak olyanok, amelyekből biztosan nem tudjuk eldönteni, hogy az adott betegség okozza-e, de fennáll az esélye, hogy igen.

Példa lehet erre, a leggyakrabban gyerekeknél, 3 és 10 éves kor között megjelenő bárányhimlő. Általában zárt közösségekben okoz járványt, őszi-téli hónapokban. Kezdeti tünetei náthához, influenzához hasonlóak, orrfolyás, fejfájás, hőemelkedés, és a legjobban szembetűnő a kipirosodott kiütések. Mivel hűvösebb időszakokban gyakori a nátha és influenza, ezért ezen tünetek mellett nem lehet biztosan megállapítani a betegséget, de a lehetőség fennáll, hogy bá-

rányhimlő legyen, hiszen elsődleges tünetei ezek. Egyes esetekben a kiütések kezdeti tünetek nélkül jelennek meg, ilyenkor fennállhat annak az esélye, hogy akár allergiás kiütések jelent meg, de még mindig meg van annak az esélye, hogy bárányhimlő okozza. Megemlíthetjük a zárt körökben könnyen terjedő atka okozta kiütéseket is, amelyek ugyan náthához hasonló tünetekkel nem járnak, de a hasonló piros, viszkető kiütései miatt akár összetéveszthetőek lehetnek.

Állíthatjuk azt, hogy kiütések és náthához hasonló tünetek együttese egyértelműen körülírja a bárányhimlő betegséget. Nátha, influenza tünetei mellett fennállhat az esély a bárányhimlőre, további kivizsgálások szükségesek a pontos meghatározására. Ha kezdeti tünetek nélkül jelennek meg piros kiütések, ekkor fennáll az esély a bárányhimlőre, de lehetséges, hogy más okozza ezeket. Vannak tehát olyan tünet együttesek, amelyekről biztosan meghatározható a betegség, de olyanok is, amelyekből nem állítható biztosan. Ha a tünetek alapján akarjuk meghatározni a betegek halmazát, nevezhetjük a biztosan betegeket tartalmazó részt a halmaz alsó közelítésének, azt a részt pedig, ami a lehetséges betegeket tartalmazza, a halmaz felső közelítésének.

Az orvostudományban rengeteg ilyen példa fellelhető, de az élet számos más területén is megjelenik a bizonytalanság.

Ebben a dolgozatban ehhez hasonló problémák kezelésére alkalmas formális eszközöket szeretnék megvizsgálni.

Ismert, hogy a formális nyelvek lényeges problémáit meg tudjuk oldani automaták segítségével. Véges determinisztikus, nemdeterminisztikus automatákkal megannyi kérdésre tudunk válaszolni. Különböző bemenetek esetén az automata eldönti, hogy elfogadja vagy sem, így az adott nyelv által reprezentált kérdésre pontos választ ad.

Az előző példa alapján is látszik, hogy feltehetőek olyan kérdések, amelyekre nem feltétlen egyértelmű a válasz minden esetben, lehetséges, hogy egy adott bemenet egyszer elfogadható, egyszer pedig nem. Ilyen esetekben egy egyszerű automata nem fogja tudni ezt a kettősséget szemléltetni. Ezen kérdések vizsgálata esetében érdemes életlen automatákkal megoldani a problémát.

A „hagyományos” automatákkal szemben az életlen automaták képesek arra, hogy egy-egy bemenet esetén jelezzék, hogy biztosan elfogadó állapotba érnek, lehetséges, hogy elfogadó állapotba érnek, vagy pedig nem érnek elfogadó állapotba. Ezáltal az ilyen automaták két csoportja osztják az elfogadott halmazokat, a biztosan elfogadottakra, és a lehetségesen elfogadottakra. (Később látni fogjuk, hogy ezek megfeleltethetőek az automatákkal megadott nyelv alsó

és felső közelítésének.)

A bizonytalanság kezelésére az életlen halmazok (rough sets), életlen formális nyelvek elméletének eszközeit fogjuk használni. Életlen nyelvnek nevezzük az olyan nyelveket, amelyekben valamilyen okból vannak olyan elemek, amelyek egy, vagy több másik elemtől megkülönböztethetetlenek, azaz az ilyen elemekről nem tudjuk pontosan eldönteni, hogy a nyelv melyik eleméről van szó. Az elemeknek vagy az elemek „összetevőinek” ez a fajta megkülönböztethetlensége okozza a bizonytalanság megjelenését, az eldönthetőség nehézségét.

Dolgozatom célja bemutatni az életlen halmazokat, és az azokat használó életlen automatákat. Az olvasó számára definiálni és példákkal demonstrálni szeretném az automaták működését, valamint ezeken felül az életlen nyelveket és életlen grammatikákat.

Először szeretném röviden összefoglalni, hogy hogyan is működnek az életlen grammatikák, halmazok, nyelvek és automaták, miben mások a hagyományosan definiált társaikhoz képest. Szeretném pár példával szemléltetni a használatukat.

Ezután azt a kérdést szeretném megvizsgálni, hogy nem lehetne-e az életlen automatákat egyszerűsíteni. Minél egyszerűbb egy automata működése, annál könnyebb annak megértése és használata, ezért fontosnak gondolom ennek tanulmányozását. A kérdés vizsgálatához az [1, 2] cikkekben ismertetett automatát szeretném egyszerűsíteni a [3] cikkben megfogalmazott speciális eset felhasználásának segítségével. Ezek az automaták azért életlenek, mert életlen állapotalmazzal rendelkeznek, az első kérdés tehát az, hogy nem lenne-e lehetséges az állapotokon definiált összetéveszthetőségi ekvivalencia relációt egyszerűbben megadni, úgy, hogy az ekvivalencia osztályok minél kevesebb állapotot tartalmazzanak.

2. fejezet

Életlen halmazok és életlen nyelvek

A matematikában a halmaz az alapfogalmak egyike, így nem szükséges definiálni, feltesszük, hogy mindannyian tudjuk, mit jelent ha egy halmaz elemeiről beszélünk.

2.1. Életlen halmaz

Életlen halmazok esetében a halmazba tartozás fogalma már kevésbé egyértelmű. Tartalmazás szempontjából egy ilyen halmazra nézve az univerzum elemeit 3 kategóriába sorolhatjuk. Egyik ilyen csoportjába sorolhatóak a halmaz azon elemei, melyeknél biztosan tudjuk, hogy a halmaz részei. A második csoportban azok az objektumok vannak, amikről biztosan tudjuk, hogy a halmaznak nem elemei. Ez hasonló az alap halmazelméletben megtanultakhoz, ha ezen csoportok tagja egy elem, akkor az biztosan eleme vagy nem eleme a halmaznak.

Ezzel szemben a harmadik csoport elemeinél már nem ennyire nyilvánvaló a hovatartozásuk. Ezen csoport elemei azok, amelyeket nem sikerült az előző kettőbe besorolni. Úgy nézhetünk ezen elemekre, mint ha a halmaz határrégiójára tekintenénk, szokás elmosódott halmaz határnak is nevezni. Az ide tartozó értékek esetében, olyan elemekről beszélünk, amelyek biztosan megkülönböztethetetlenek egy (vagy több) hozzájuk hasonló elemtől, amelyek nem tartoznak a halmaz elemei közé. Legegyszerűbben, egy elempárról beszélünk, amely egyik tagja a halmaz eleme, a másik viszont nem eleme. Ezen két tag egymástól megkülönböztethetetlen, azaz bármelyiket megkapva a kettő közül, nem tudjuk eldönteni, hogy melyik az, ennél fogva abban se lehetünk biztosak, hogy a halmaz eleme, vagy sem. Ilyen elemek alkotják az életlen halmaz határrégióját.

Az előzőekben említett megkülönböztethetlenség matematikai leírására alkalmazzuk az elemek közötti ekvivalencia relációt. Ennél fogva az életlen halmazelmélet alapja az egyes elemek közötti ekvivalencia, egyenértékűség.

A szükséges definíciók ismertetését kezdjük az ekvivalencia reláció segítségével a [4] cikkben definiált approximációs tér bemutatásával.

1. Definíció. *Halmaz approximációs térnek nevezünk egy (X, R) párt, amelyből X egy nemüres halmaz és R egy ekvivalencia reláció az X halmaz felett. Ha $x \in X$, akkor $[x]$ jelölje azt a halmazt, amely $\{y \in X \mid x \sim y\}$, ahol $x \sim y$ azt jelöli, hogy $(x, y) \in R$, azaz, hogy x és y között fennáll az R reláció, vagyis $[x]$ az x elemet tartalmazó ekvivalencia osztály. Legyen továbbá $X/R = \{[x] \mid x \in X\}$.*

Egy $D \subseteq X$ halmazt definiálhatónak nevezünk, ha előáll R szerinti ekvivalencia osztályok uniójaként, azaz ha létezik olyan $I \subseteq X$, melyre $D = \bigcup_{x \in I} [x]$.

Tekintsünk vissza a bevezetésben leírt példára, arra, hogy ott mi alapján vannak a relációk. A betegek különböző halmazokba sorolhatóak a tüneteik alapján. Ezen tünetek okozzák a közöttük lévő ekvivalenciát, így például a lázas emberek halmaza tartozik egy relációba egymással. Ugyanis a náthától lázas ember, valamint a bárányhimlőtől lázas ember számunkra egyszerűen lázas ember, nem megkülönböztethetőek egymástól ebből a szempontból.

Tehát, ugyanazon ekvivalencia osztályba fognak tartozni az azonos tünetekkel rendelkező betegek.

Későbbiekben az életlen automaták működésében fontos szerepet játszanak majd ezek a hasonlóságok, ezek okozzák majd azt a kettőséget, amelyek miatt nem lesz pontosan meghatározható, egy adott bemenetre adott válasz.

2. Definíció. *Ha az (X, R) approximációs térben $A \subseteq X$, akkor $\underline{A}$ az alsó közelítése A -nak, és $\overline{A}$ a felső közelítése A -nak, amelyeket a következőképpen definiálunk:*

$$\underline{A} = \bigcup \{[x] \in X/R \mid [x] \subseteq A\},$$

$$\overline{A} = \bigcup \{[x] \in X/R \mid [x] \cap A \neq \emptyset\},$$

az $(\underline{A}, \overline{A})$ pár pedig egy életlen halmaz.

Tehát x az alsó közelítésbe tartozik, ha minden vele ekvivalencia relációban álló elem, benne van A -ban, x a felső közelítéshez tartozik, ha a vele ekvivalens elemekből legalább egy nem eleme A -nak.

Megállapíthatjuk, hogy $\underline{A}$ tartalmazza azokat az elemeket, amelyek biztosan A -ba tartoznak, és $\overline{A}$ tartalmazza azokat az elemeket, amelyek lehetséges, hogy az A -ba tartoznak.

Ha $\underline{A} = \overline{A}$, akkor A pontosan meghatározható, azaz nincs olyan eleme, amelyről ne lehetne biztosan megmondani, hogy eleme-e A -nak.

Előző példánkat ezen definiálás alapján a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Legyen xRy , ha x -nek és y -nak azonosak a tüneteik. Bizonyos tünetek mellett mindenki bárányhimlős, bizonyos tünetek esetén, van aki bárányhimlős és van aki nem, bizonyos tünetekkel senki nem bárányhimlős.

Ezen relációk mellett, $\underline{A}$ -ba, azaz az alsó közelítésbe fognak azok a relációk tartozni, amelyek minden eleméről biztosan állítható, hogy bárányhimlős, azaz bizonyos tünetekhez tartozó relációk.

$\overline{A}$ -ba, a felső közelítésbe fognak azok a relációk tartozni, amelyek elemei között van olyan, aki bárányhimlős, de másik eleme a relációnak nem bárányhimlős, azonos tünetek mellett.

Nem fognak egyik közelítésbe se beletartozni, azok a relációk, amelyek olyan tüneteket tartalmaznak, amelyek mellett senki nem bárányhimlős.

Előző példánkat a fenti definíció alapján a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Legyen $x \sim_R y$, ha x -nek és y -nak azonosak a tüneteik. Bizonyos tünetek mellett mindenki bárányhimlős, bizonyos tünetek esetén, van aki bárányhimlős és van aki nem, bizonyos tünetekkel senki nem bárányhimlős.

Ezen relációk mellett, $\underline{A}$ -ba, azaz az alsó közelítésbe fognak azok a tünet együttesek tartozni, amelyekről biztosan állítható, hogy az illető beteg bárányhimlős. Ide tartoznak azok a betegek, akiknek kiütéseik és náthához hasonló tüneteik vannak.

$\overline{A}$ -ba, a felső közelítésbe fognak azok a tünet együttesek tartozni, amelyeket produkáló betegek között van olyan, aki bárányhimlős, de van olyan is, aki nem bárányhimlős. Ide tartoznak azok a betegek, akinek láza van, de más tünete nincsenek.

Nem fognak egyik közelítésbe se beletartozni, azok a tünet együttesek, amelyek olyan tüneteket tartalmaznak, amelyek mellett senki nem bárányhimlős. A lehetséges betegek halmazán kívülre fognak esni azok a tünet együttesek, melyek nem felelnek meg a náthának és kiütéseket sem tartalmaznak. Azok, például, akiknek gyomorfájdalmaik vannak a halmazon kívülre fognak esni.

2.2. Életlen grammatika

Életlen nyelveket életlen grammatikák is generálhatnak, ennél fogva az életlen nyelvek definiálásához szükséges az életlen grammatikák definiálása is.

Legyen V egy véges ábécé, jelölje ekkor V^* a V -beli szimbólumokból képezhető sztringek halmazát, az üres (nulla hosszúságú) sztringet pedig jelölje ε .

$G = (N, \Sigma, P, S)$ generatív nyelvtannak nevezünk egy olyan négyest, amelyben Σ a terminálisok, N a nemterminálisok ábécéje, S a kezdőszimbólum, P pedig a produkciós szabályok egy halmaza, amely segítségével a nyelvtan által definiált nyelv szavait generálhatjuk.

A $G = (N, \Sigma, P, S)$ generatív nyelvtan által generált nyelven a Σ^* -beli szavak következő halmazát értjük: $L(G) = \{w \mid w \in \Sigma^* \text{ és } S \Rightarrow^* w\}$, ahol $\Rightarrow^*$ a P szabályai szerint történő, ismételt sztring átírásokat jelöl.

Életlen nyelvtan definiálásához át kellett alakítani ezt a definíciót. A [1] cikkben definiált életlen nyelvtan megkülönböztethetetlenséget definiál a nyelvtan elemei között. Mind a terminálisok és nemterminálisok között fenn állhat megegyezőségi kapcsolat, ezek figyelembe vételét approximációs terek definiálásával tehetjük meg. Legyen (Σ, R_Σ) a terminálisokra vonatkozó approximációs tér, melyben Σ a terminálisok nemüres, véges halmaza, R_Σ pedig Σ feletti ekvivalencia reláció. Hasonlóan definiálható a nemterminálisok approximációs tere, (N, R_N) , ahol N a nemüres, véges nemterminálisok halmaza, R_N pedig N feletti ekvivalencia relációk halmaza. Legyen K a terminálisok és nem terminálisok uniója, ekkor a $Prod = K^* \times K^*$ párokon a nyelvtan összes lehetséges produkciós szabályát értjük. Mivel a terminálisok, és nemterminálisok között is definiáltunk ekvivalencia relációt, így $Prod$ elemeire is szükséges, legyen ez R_P .

Legyen $(\underline{N}, \overline{N})$ egy életlen halmaz a (N, R_N) felett. Legyen $(\underline{\Sigma}, \overline{\Sigma})$ egy életlen halmaz a (Σ, R_Σ) felett. Legyen $p_i^1, p_j^2 \in Prod, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$, valamint

$$P_1 = \bigcup_{i=1}^k [p_i^1]$$

és

$$P_2 = \bigcup_{j=1}^n [p_j^2],$$

ahol a szögletes zárójelek az R_P szerinti ekvivalencia osztályokat jelölik.

Legyen $\underline{P}_1 = P_1 \cap (\underline{N} \cup \underline{\Sigma})^* \times (\underline{N} \cup \underline{\Sigma})^*$, valamint $\overline{P}_2 = P_2 \cap (\overline{N} \cup \overline{\Sigma})^* \times (\overline{N} \cup \overline{\Sigma})^*$ és legyen $(\underline{S}, \overline{S})$ egy életlen halmaz (N, R_N) -ben, ahol $\underline{S} \subseteq \underline{N}$, $\overline{S} \subseteq \overline{N}$.

3. Definíció. A $G = (\underline{G}, \overline{G})$ párt *életlen grammatikának* nevezzük, ahol $\underline{G} = (\underline{N}, \underline{\Sigma}, \underline{P}_1, \underline{S})$ és $\overline{G} = (\overline{N}, \overline{\Sigma}, \overline{P}_2, \overline{S})$.

Ha minden ekvivalencia osztály R_N -ben és R_{Σ} -ban egy elemű, akkor az alsó és felső közelítéseink páronként megegyeznek majd. Ha ezen kívül $\underline{S} = \overline{S} = \{S\}$ és $P_1 = P_2 = P$, akkor a grammatika alsó és felső közelítése megegyezik egymással, valamint a következő „éles” grammatikával, azaz $(N, \Sigma, P, \{S\})$.

2.3. Életlen nyelv

A formális nyelvek definíciójuk szerint egy véges ábécéből generálható, véges hosszúságú szavak halmazai. Az életlen nyelvek abban különböznek ezen formális nyelvektől, hogy a szavak között valamilyen hasonlóság jelenik meg.

Egy életlen nyelv a nem életlen nyelvekhez hasonlóan egy véges ábécéből vett véges hosszúságú szavak halmaza. A nyelv szavai között valamilyen megadott szabály alapján ekvivalencia relációkat definiálhatunk. Az azonos ekvivalencia osztályba tartozó szavakat egymástól megkülönböztethetetlennek, ugyanolyannak tekintjük, ennél fogva ezen szavakra mint ekvivalencia osztályokra tudunk állításokat megadni. Egy adott reláció mellett így az egyes ekvivalencia osztályokba tartozó szavakra nem tudunk külön állításokat megadni, csak mint a csoport tagjára tudunk ezekre hivatkozni, és egységesen jellemezzük őket.

Az ekvivalencia osztályokat három csoportba oszthatjuk. Egy nyelv definiálása mellett lesznek olyan osztályok, amelyek összes tagja eleme a nyelvnek, lesznek olyan osztályok, amelyek elemei biztosan nem elemei a nyelvnek, és lesznek azok az osztályok, amelyek egyes tagjai elemei a nyelvnek, egyes tagjai viszont nem elemei. A hasonlóság miatt, viszont nem eldönthető pontosan melyik elem megfelelő, és melyik elem nem, ennél fogva az életlen nyelv szavait alsó és felső közelítésként adjuk meg. Alsó közelítés fogja tartalmazni a szavak azon ekvivalencia osztályait, amelyek minden eleme egy adott kritériumnak megfelelő, azaz a reláció összes tagja eleget tesz azoknak. Felső közelítés fogja tartalmazni a szavak azon osztályait, amelyekben vannak olyan elemek, amelyek megfelelnek az adott kritériumnak, de amelyekben találhatóak

olyan elemek is, amelyek nem teljesítik azt. Nem fognak egyik halmazba sem tartozni azok az ekvivalencia osztályok, amelyek egyik eleme sem teljesíti a feltételeket.

2.3.1. Egy példa életlen nyelvre

Tekintsünk egy általános példát életlen nyelvre.

Vizsgáljuk egy szóhalmazt az $\{a, b\}$ ábécé fölött. Nyelvünk alaphalmazba tartalmazza tehát az összes $\{a, b\}$ betűkből alkotott véges hosszúságú szót.

Tételezzük fel, hogy csak azt tudjuk megállapítani egy szóról, hogy milyen hosszú, hogy milyen betűvel kezdődik és milyen betűvel végződik. Ezen ismeretek alapján a szavak ekvivalencia osztályokba sorolhatóak. Megkülönböztethetlenségi reláció álljon tehát fenn azon elemek között, amelyek ugyanazon betűvel kezdődnek és végződnek, valamint ugyanolyan hosszúak.

Ebből kiindulva, mondhatjuk például, hogy aba valamint aaa relációban áll egymással, mivel azonosan a betűvel kezdődnek és végződnek, valamint ugyanúgy 3 karakter hosszúak. Az egymással relációban álló elemek halmazát jelöljük a következőképpen $[aaa, aba]$.

Határozzuk most meg a palindrómák nyelvének alsó és felső közelítését. Defináljuk ezt a nyelvet, jelöljük a nyelvet L -lel, alsó közelítését $\underline{L}$ -lel, felső közelítését pedig $\bar{L}$ -lel, ekkor $L = (\underline{L}, \bar{L})$.

Legyen $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^{-1} \text{ és } w \text{ hosszabb mint } 2\}$ az a nyelv, amely az a, b karakterekből származtatott palindrómákat tartalmazza (w^{-1} a w szó megfordítását jelöli).

A nyelv alsó közelítésébe, $\underline{L}$, tartoznak azok az ábécé felett alkotott szavak, amelyek biztosan palindrómák. Ha kizárólag a szóhosszt, és a kezdő valamint az utolsó karaktert ismerjük, akkor állíthatjuk, hogy egy szó biztosan palindróma, ha a szó azonos betűvel kezdődik és végződik, valamint a hossza 2 betű hosszú, vagy pedig 3 betű hosszú. Minden ilyen esetben palindrómáról beszélünk. Az alsó közelítés elemei tehát $\underline{L} = \{aa, bb, aba, aaa, bab, bbb\}$, ezen elemek között ekvivalencia reláció áll fenn az aaa és aba szavak között, valamint ekvivalencia reláció áll fenn bab és bbb szavak között.

Nem tartoznak sem az alsó sem a felső közelítésbe azok a szavak, amelyek biztosan nem palindrómák. Akkor mondhatjuk, hogy egy szó biztosan nem palindróma, ha különböző betűvel kezdődik és végződik. Nem tartozik tehát a nyelvbe például az $[abb, aab]$ szavak ekvivalencia osztálya, hiszen különböző betűkkel kezdődnek és végződnek.

A felső közelítésébe, $\bar{L}$, tartoznak azok a szavak, amelyek lehetséges, hogy palindrómák. Minden 3 karakternél hosszabb szó ilyen, ami azonos betűvel kezdődik és végződik. Ekkor egy ekvivalencia osztály például $[aaaa, aaba, abaa, abba]$, ahol látható, hogy az osztály két eleme megfelel a palindróma kritériumának, de többi eleme nem, tehát ezek a szavak a megkülönböztethetlenség miatt a felső közelítéshez fognak tartozni.

2.3.2. Életlen nyelv megadása életlen grammatikával

Vizsgáljunk meg egy életlen nyelv definiálást a [1] cikkben megfogalmazott módon.

Legyen $G = (\underline{G}, \bar{G})$ egy életlen grammatika, használjuk ezt a nyelvtant az életlen nyelv generálásához.

Életlen nyelv generálásakor is figyelembe kell venni, hogy két csoportra, alsó közelítés és felső közelítés, oszthatóak a halmaz elemei. A nyelvet is hasonlóan két halmazra kell leképezni. Alsó közelítés, valamint felső közelítésre.

4. Definíció. Legyen $G = (\underline{G}, \bar{G})$ és legyen $\underline{L}$, az a nyelv, amelyet $\underline{G}$ generál

$$\underline{L} = L(\underline{G}) = \{w \mid w \in \Sigma^* \text{ és létezik } s \in \underline{S}, s \Rightarrow_{\underline{G}}^* w\},$$

valamint legyen $\bar{L}$ az a nyelv, amelyet $\bar{G}$ generál

$$\bar{L} = L(\bar{G}) = \{w \mid w \in \Sigma^* \text{ és létezik } s \in \bar{S}, s \Rightarrow_{\bar{G}}^* w\}.$$

Ekkor $L(G)$ -t a G életlen nyelvtan által generált életlen nyelvnek nevezzük, ha $L(G) = (\underline{L}, \bar{L})$.

Az előző szakaszban példaként bemutatott életlen nyelvet a következő grammatikával adhatjuk meg. Legyen $N = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, valamint (R_Σ, Σ) , (R_N, N) ahol R_N és Σ_N az identitás reláció, azaz $\underline{\Sigma} = \bar{\Sigma} = \Sigma$ és $\underline{N} = \bar{N} = N$. Ha

$$P_1 = \{S \rightarrow aa, S \rightarrow bb, S \rightarrow aaa, S \rightarrow aba, S \rightarrow bbb, S \rightarrow bab\} \text{ és}$$

$$P_2 = P_1 \cup \{S \rightarrow aSa, S \rightarrow bSb\},$$

valamint a szabályokon értelmezett R_P reláció szintén az identitás, akkor $\underline{P}_1 = P_1$, $\bar{P}_2 = P_2$, azaz a $G = (\underline{G}, \bar{G})$ életlen grammatika, ahol $\underline{G} = (\underline{N}, \underline{\Sigma}, \underline{P}_1, \underline{S})$ és $\bar{G} = (\bar{N}, \bar{\Sigma}, \bar{P}_2, \bar{S})$, éppen a 2.3.1 szakaszban tárgyalt életlen nyelvet generálja.

2.3.3. Az életlen nyelvek egy speciális esete

Definiálták az életlen nyelvek egy speciális esetét, amelyekben a szavak hasonlóságának alapjául a betűk megkülönböztetethetősége szolgál. A [3] cikkben nem a szavakra definiálták a relá-

ciókat, hanem az ábécé betűire. Úgy definiálták a relációkat, hogy azok alapját a betűk hasonlósága adja (lehetnek például azok a betűk megkülönböztethetetlenek, amelyek írásalakja közel áll egymáshoz). A betűk hasonlósága miatt a szavak között is megjelennek hasonlóságok.

Egy ilyen speciális életlen nyelv esetén meg kell határoznunk, mely betűk között áll fent a hasonlóság. Egymástól nem elkülöníthető betűket, valamilyen közös betű halmazba kell definiálnunk, hogy később a szavak esetén egyértelmű legyen a hasonlóság.

Definiáljuk az ekvivalencia relációkat erre a speciális esetre a [3] cikkben megfogalmazott definíció szerint.

5. Definíció. Legyen Σ egy ábécé, és legyen R ekvivalencia reláció Σ felett. Ekkor bármely $a \in \Sigma$ betűre, az a -hoz hasonló karakterek halmaza legyen $\sigma(a) = \{b \mid b \in \Sigma, (a, b) \in R\}$. Bármely $w \in \Sigma^*$ -ra, legyen $\sigma(w) = \{a'_1, \dots, a'_n \mid w = a_1 \dots a_n, a_i \in \Sigma, \text{ és } a'_i \in \sigma(a_i), 1 \leq i \leq n\}$ a w -vel ekvivalens elemek halmaza, valamint legyen $\sigma(\Sigma^*) = \{\sigma(w) \mid w \in \Sigma^*\}$.

Ezen definíció miatt mondhatjuk azt, hogy $\sigma_R(\alpha)$ halmaz tartalmazza az összes α -hoz hasonló szót, R reláció szerint.

Példa speciális életlen nyelvre

Vegyük példának, azt a nyelvet, amely elemei az angol ábécé nagy betűi, valamint 0-tól 9-ig a számok. Legyen ez a halmaz Σ , ahol $\Sigma = \{A, B, C, \dots, X, Y, Z, 0, 1, \dots, 8, 9\}$, alaphalmazunk tehát az ezen betűkből alkotott összes véges szó.

Ezen halmaz elemei között definiálhatóak ekvivalencia relációk. Relációk alapjának tekintjük ez elemek közötti hasonló írásmódot, legyen ekvivalencia relációban Z valamint a 2 , és legyen egy másik ekvivalencia relációban a O és a 0 , többi elem ne legyen relációban egyik másikkal sem. Ekkor Z -t és 2 -t megkülönböztethetetlenek tekintjük, valamint O -t és 0 -t is.

Relációban álló szavak halmaza, azt jelenti, hogy bármely a halmazon belüli elemet kiválasztva nem tudjuk pontosan, melyik betű az. Ha például a Z betű jelenik meg egy szóban, akkor nem tudjuk, hogy az valójában Z vagy pedig 2 , a $[Z, 2]$ ekvivalencia osztályba tartozásuk miatt.

Ezen relációk mellett, tekintsünk egy konkrét példát. A $ZAB, 2AB$ szavak egymástól megkülönböztethetetlenek. Hasonlóan az $OTZ, 0TZ, OT2, 0T2$ szavak is. Látható, hogy a szavak

mindegyike különböző, de a megfelelő helyen tartalmazznak olyan elemeket, amelyek relációban vannak, ezért összességében megkülönböztethetetlenek egymástól.

Milyen esetben okozhat gondot?

Tegyük fel, hogy a nyelv betűiből olyan szavakat szeretnénk előállítani, amelyek számmal kezdődnek, azaz $\{0, 1, \dots, 9\}$ betűk szerepeljenek a szó első karaktereként. Ekkor mivel, a 0 és az O , valamint a Z és a 2 megkülönböztethetetlenek, előfordulhat, hogy nem tudjuk eldönteni egy szóról, hogy eleme-e ennek a nyelvnek.

A nyelv alsó közelítésébe azok a szavak tartoznak, amelyek biztosan szám karakterrel kezdődnek, és sem az alsó, sem a felső közelítésbe nem tartoznak azok a szavak, amelyek biztosan nem számmal kezdődnek. A nyelv felső közelítésébe tartoznak, azok a szavak, amelyek az előző két halmaznak nem elemei.

Tehát a nyelv alsó közelítésébe tartozik minden olyan szó, amely a $\{0, 1, \dots, 9\}$ halmaz egy olyan karakterével kezdődik, amely nem összekeverhető az $\{A, B, C, \dots, X, Y, Z\}$ halmazból származó karakterrel. Azaz azok a szavak fognak az alsó közelítésbe tartozni, amelyek első betűje az $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmazból származik, a szavak további karakterei már az alaphalmaz, Σ , bármely elemei lehetnek.

Alsó közelítés ezzel kiküszöböli, hogy olyan szavak legyenek benne, amelyek megkülönböztethetetlenek egy vagy több olyan másik szótól, amely nem felel meg a kritériumnak. Tehát az alsó közelítés elemei azok a szavak, amelyeket a következő reguláris kifejezés ír le: $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cdot \Sigma^*$.

A felső közelítésbe bele fognak tartozni azon szavak is, amelyek, egy olyan számmal kezdődnek, ami felcserélhető egy betűvel. Azaz a felső közelítésbe tartozik minden olyan szó, amely kezdőbetűje a $\{0, O, 1, 2, Z, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ elemek valamelyike. A közelítésbeli szavak további karakterei már az alaphalmaz, Σ , bármely elemei lehetnek. Tehát a felső közelítés elemei azok a szavak, amelyek alakja a következő: $\{0, O, 1, 2, Z, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \cdot \Sigma^*$.

Nem tartoznak sem az alsó, sem a felső közelítésbe azok az elemek, amelyek olyan betűvel, $\{A, B, C, \dots, X, Y, Z\}$, kezdődnek, amelyek nem összekeverhetők egyetlen számmal sem. Nem elemei tehát, azok a szavak amelyek a $\Sigma - \{0, O, 1, 2, Z, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmaz betűivel kezdődnek. Ezek a szavak a $(\Sigma - \{0, O, 1, 2, Z, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}) \cdot \Sigma^*$ reguláris kifejezéssel írhatók le.

3. fejezet

Életlen automaták

3.1. Az életlen automata definíciója

A formális nyelvek feldolgozásához használhatóak véges állapotú determinisztikus automaták, vagy véges állapotú nemdeterminisztikus automaták. Ezek bejövő szavakat dolgoznak fel, és azt állapítják meg, hogy a bemenetek elfogadottak vagy sem. Egy szó karaktereit egyesével kapják meg, és minden karakter után a megadott állapotátmenet függvény alapján megváltoztatják állapotukat. A hagyományos automaták egy bemenetet vagy elfogadnak, vagy visszautasítanak.

Az életlen automaták nem kettő csoportba osztják a sztringeket, hanem megjelenik egy harmadik csoport, amelynek tagjai a nyelv azon szavai, amelyek az eddigi két csoport egyikébe sem illettek bele, azaz nem elfogadottak, de nem is visszautasítottak. Az életlen automaták tehát az előzőekben említett életlen nyelvek szó tartalmazási problémájára adnak eredményt. Ezen automaták figyelembe veszik a nyelvbéli elemek közötti hasonlóságokat, működésüket ez különbözteti meg a hagyományos automatáktól.

Tudjuk, hogy az életlen nyelvekben az egyes szavak egy megkülönböztethetlenségi reláció alapján ekvivalencia osztályokba csoportosíthatóak. Az életlen automatákban is megjelenik a reláció, aminek alapján az állapotok halmazát osztjuk ekvivalencia osztályokra. Az automata működése során az állapot osztályokon „halad” keresztül, azaz egy adott bemenő jel alapján a gép több különböző (de ekvivalens, azaz „megkülönböztethetetlen”) állapotot is elérhet.

Az életlen véges automata definícióit a [4, 5] cikkekben megadott leírásnak megfelelően a következő módon adjuk meg.

6. Definíció. Az *életlen véges automata* egy $M = (Q, R, \Sigma, \delta)$ négyes, ahol Q egy nemüres véges halmaz, a gép állapotainak halmaza, $R \subseteq Q \times Q$ ekvivalencia reláció az állapotok felett, Σ nemüres véges halmaz, a gépbe beérkező inputok szavak ábécéje, δ pedig az életlen állapot átmenet függvény.

Ha $A \subseteq 2^Q$ a (Q, R) halmaz approximációs tér definiálható halmazait jelöli, akkor az állapot átmenet függvény $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow A \times A$, ahol minden $q \in Q$ és $\sigma \in \Sigma$ esetén $\delta(q, \sigma) = (D_1, D_2)$ egy életlen halmaz, azaz $\underline{\delta(q, \sigma)} = D_1$, $\overline{\delta(q, \sigma)} = D_2$, $D_1, D_2 \in A$.

Az iménti definícióban szereplő δ határozza meg, hogy az egyes beérkező inputokra, az automata miképpen működjön. Az automata működése két szálon halad, egy $\underline{\delta(q, a)}$ által megadott alsó „közelítő működés”, és egy $\overline{\delta(q, a)}$ által adott felső „közelítő működés” szerint.

7. Definíció. Az állapot átmenet függvényt kiterjeszthetjük állapot „blokkokra”, azaz állapotok ekvivalencia osztályaira is, $\delta^D : A \times \Sigma \rightarrow A \times A$, ahol $A \subseteq 2^Q$ a definiálható halmazokat jelöli. Ekkor $\delta^D([q], \sigma) = (\underline{\delta^D([q], \sigma)}, \overline{\delta^D([q], \sigma)})$, ahol

$$\underline{\delta^D([q], \sigma)} = \bigcup_{q' \in [q]} \underline{\delta^D(q', \sigma)} \text{ és } \overline{\delta^D([q], \sigma)} = \bigcup_{q' \in [q]} \overline{\delta^D(q', \sigma)},$$

továbbá $B \in A$ esetén $\delta^D(B, \sigma) = (\underline{\delta^D(B, \sigma)}, \overline{\delta^D(B, \sigma)})$, ahol

$$\underline{\delta^D(B, \sigma)} = \bigcup_{[q] \subseteq B} \underline{\delta^D([q], \sigma)} \text{ és } \overline{\delta^D(B, \sigma)} = \bigcup_{[q] \subseteq B} \overline{\delta^D([q], \sigma)}.$$

3.1.1. Az életlen automata működése

1. Példa. Vizsgáljunk meg egy egyszerű példát életlen automata állapot átmeneteire és blokk átmeneteire a [4] cikk alapján.

Legyen $M = (Q, R, \Sigma, \delta)$ az automata, ahol $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ az állapotok halmaza, és ekvivalencia reláció áll fenn q_1 és q_3 között, valamint q_4 és q_5 között azaz $Q/R = \{\{q_1, q_3\}, \{q_2\}, \{q_4, q_5\}\}$. A bemeneti jelek ábécéje legyen $\Sigma = \{a, b\}$, a δ állapot átmeneteit tartalmazza a 3.1-es táblázat, a δ^D blokk állapot átmeneteit, tartalmazza a 3.2-es táblázat.

Látható a két táblázatból az állapotátmenetek és a blokk átmenetek közti különbség. Blokk átmenet esetében nem állapotonként adjuk meg, hogy az egyes bemenő jelekre az automata milyen állapotba lép tovább, hanem a táblázat az állapot átmenetek által elérhető állapot blokkokból elérhető állapot blokkokat mutatja.

Vegyünk egy-egy konkrét példát a 3.1 és 3.2 táblázatból. Legyen a bemenet ab , ekkor az állapotátmenet táblázatban látszik, hogy felső közelítésben kezdetben, a jel után, a q_1 állapotból

Q	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
q_1	$(\emptyset, \{q_1, q_3\})$	$(\{q_2\}, \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\})$
q_2	$(\{q_1, q_3\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\})$	$(\{q_4, q_5\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_4, q_5\})$
q_3	$(\emptyset, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\})$	$(\{q_2\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\})$
q_4	$(\{q_4, q_5\}, \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\})$	$(\{q_2\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\})$
q_5	$(\{q_2\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\})$	$(\{q_1, q_3\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\})$

3.1. táblázat. Állapot átmenet táblázat.

B	$\delta^D(B, a)$	$\delta^D(B, b)$
$\{q_1, q_3\} \cup \{q_2\}$	$(\{q_1, q_3\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\})$	$(\{q_2\} \cup \{q_4, q_5\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\})$
$\{q_2\} \cup \{q_4, q_5\}$	$(\{q_1, q_3\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\})$	$(\{q_1, q_3\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\})$
$\{q_1, q_3\} \cup \{q_4, q_5\}$	$(\{q_2\} \cup \{q_4, q_5\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\})$	$(\{q_1, q_3\} \cup \{q_2\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\})$
$\{q_1, q_3\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\}$	$(\{q_1, q_3\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\})$	$(\{q_1, q_3\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\}, \{q_1, q_3\} \cup \{q_2\} \cup \{q_4, q_5\})$

3.2. táblázat. Blokk átmenet táblázat.

indulva a $\{q_1, q_3\}$ állapotba érkezik az automata. Ezután egy b jelet kap, ekkor már figyelembe kell venni, mind a q_1 -ből és q_3 -ból következő új állapotokat: q_1 -ből b -re a felső közelítő átmenet mentén $\{q_2\} \cup \{q_4, q_5\}$ állapot blokkba megy az automata, q_3 -ból pedig a $\{q_2\} \cup \{q_1, q_3\}$ állapot blokkba jut az automata. Ezen állapotblokkok együttes működését definiálja a blokk átmenet táblázat.

8. Definíció. Legyen (Q, R, Σ, δ) egy élelten automata. Defináljuk δ^* -ot a következőképpen, $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow A \times A$, ahol $A \subseteq 2^Q$ a (Q, R) approximációs tér szerinti definiálható állapothalmazokat jelöli. Ekkor

1. $\delta^*(q, \varepsilon) = ([q], [q])$ minden $q \in Q$ esetén, valamint
2. $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ és $a \in \Sigma$ esetén $\delta^*(q, wa) = (\underline{\delta^*(q, wa)}, \overline{\delta^*(q, wa)})$, ahol
 $\underline{\delta^*(q, wa)} = \underline{\delta^D(\underline{\delta^*(q, w)}, a)}$ és $\overline{\delta^*(q, wa)} = \overline{\delta^D(\overline{\delta^*(q, w)}, a)}$.

Az előzőekben felírt, $\delta^*(q, wa)$, kiterjeszthető a blokk transzformációkra is, $\delta^{*D}(B, wa)$, ahol $B \in A$ (azaz B definiálható), valamint $w \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.

A továbbiakban δ^* és δ^{*D} helyett használjuk az δ és δ^D jelöléseket is.

3.2. Életlen automaták és életlen nyelvek

A következőkben azt ismertetjük, hogy miként lehet az életlen automatákkal életlen nyelveket megadni a [4] cikkben leírtak szerint.

9. Definíció. *Nyelvet elfogadó életlen véges automatának nevezzük az $M = (Q, R, \Sigma, \delta, I, H)$, hatost ha a következők teljesülnek. A Q, R, Σ halmazok és a δ átmenet függvény megegyezik az életlen véges automatánál definiáltakkal, azaz Q tartalmazza a gép állapotait, R az állapotokra vonatkozó ekvivalencia reláció, Σ pedig a bemenet jelek halmaza. Ezen kívül $I \subseteq Q$ tartalmazza a kezdőállapotot, azt az állapotot, ahonnan a gép működése elindul, és $H \subseteq Q$ pedig az elfogadó állapotok halmaza.*

Életlen automatáknál külön beszélünk „alsó” és „felső működéséről”, ennél fogva az elfogadás feltételét is meg kell határoznunk mindkét ágra, tehát szükséges külön az alsó és külön a felső működésre is definiálni, hasonlóan a [4]-ben megadottak alapján.

10. Definíció. *Egy nyelvet elfogadó M életlen véges automata a következő szavak hatására biztosan elfogadó állapotba jut:*

$$\underline{L(M)} = \{x \in \Sigma^* \mid \underline{\delta(I, x)} \cap H \neq \emptyset\},$$

azaz ha egy bemenetre a gép alsó működése mentén legalább egy esetben olyan állapotban áll meg, amely a H halmaz egy állapota, azaz elfogadó állapot.

Egy nyelvet elfogadó M életlen véges automata a következő szavak hatására lehetséges, hogy elfogadó állapotba jut:

$$\overline{L(M)} = \{x \in \Sigma^* \mid \overline{\delta(I, x)} \cap H \neq \emptyset\},$$

azaz hasonlóan az alsó közelítéshez, ha felső működés során legalább egyszer elfogadó állapotban áll meg az automata.

Elmondhatjuk, hogy $\underline{L(M)}$ meghatározza, hogy az alsó működés mely szavakat fogadja el, $\overline{L(M)}$ meghatározza, hogy a felső működés mely szavakat fogadja el, az $(\underline{L(M)}, \overline{L(M)})$ párt pedig az automata viselkedésének, vagy az automata által elfogadott nyelvnek nevezzük, és $L(M)$ -mel jelöljük.

2. Példa. Tekintsünk most [4] alapján egy példát ilyen gép működésére. Legyenek a lehetséges bemenetek 1 vagy 2 karakter hosszú szavak, a bemeneti karakterek a 0 vagy 1 lehetnek.

Az automata kívánt működését az alábbi döntési tábla alapján szeretnénk megkonstruálni. A tábla oszlopait felfoghatjuk úgy, mint ami a sorokban szereplő egyedek valamilyen attribútumának meglétét vagy nemlétét jelzi, a kérdés pedig az, hogy az első két oszlop attribútumai alapján meg tudjuk-e jósolni a harmadik oszlopban jelzett tulajdonság teljesülését.

1. bemeneti jel	2. bemeneti jel	Elfogadás
1	1	1
0	1	1
0	1	0
0	0	0
1	0	1
1	0	0

3.3. táblázat. Döntési tábla

Legyen $M = (Q, R, \Sigma, \delta, I, H)$, ahol az állapotok halmaza $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$, az R reláció szerint

$Q/R = \{\{q_0\}, \{q_1, q_2\}, \{q_3, q_5\}, \{q_6\}, \{q_4, q_7\}\}$, valamint

$\Sigma = \{0, 1\}$ a bemeneti ábécé,

$I = \{q_0\}$ a kezdőállapot, és

$H = \{q_1, q_4, q_6\}$ az elfogadó állapotok halmaza.

Ahhoz, hogy definiáljuk milyen bemeneteket fogadjon el az alsó és felső közelítés, szükséges megadni $\underline{L}(M)$ -et, a biztosan elfogadott bemenet(ek)et, és $\overline{L}(M)$ -et, a lehetségesen elfogadott bemenet(ek)et. A táblázat alapján ezek a következők:

$$\underline{L}(M) = \{11\},$$

azaz az automata abban az egy esetben fogad el bemenetet az alsó közelítésen, ha az megegyezik 11-gyel,

$$\overline{L}(M) = \{0, 1, 01, 10, 11\},$$

azaz ezen bemenetek mellett az automata felső működése elfogadó állapotba jut legalább egy úton. Ezek az inputok, azok, amelyek a halmaz határrégióját képezik.

Vegyük példának a 01-et. A döntési táblából látható, hogy 01 bemenet esetén az elfogadás egyszer 0, azaz nem fogadja el, egyszer pedig 1, azaz elfogadja a bemenetet. Mivel ugyanarra a bemenetre két különböző döntés szerepel, így a 01 bemenet státusza nem egyértelmű.

Állapot átmeneteket a 3.4 táblázat szemlélteti.

Az első oszlopban találhatóak az állapotok, a második oszlopban van a gép működése, abban

Q	$\delta(q, 0)$	$\delta(q, 1)$
q_0	$(\emptyset, \{q_1, q_2\})$	$(\{q_3, q_5\}, \{q_3, q_5\} \cup \{q_6\})$
q_2	$(\emptyset, \{q_3, q_5\})$	$(\emptyset, \{q_4, q_7\})$
q_5	$(\emptyset, \{q_6\})$	$(\{q_6\}, \{q_6\})$

3.4. táblázat. Állapot átmenet tábla.

az esetben ha a bemenet 0, a harmadik oszlopban pedig az 1 bemeneti jelre történő működés látható.

Tekintsünk egy-egy példát az $L(M)$, azaz az alsó közelítésben elfogadott nyelv szavaira, és az $\overline{L(M)}$, azaz a felső közelítésben elfogadott nyelv szavaira.

Legyen a bemenet 11. Az automata alsó közelítéshez tartozó működése a következő:

$\delta(q_0, 1) = \{q_3, q_5\}$, azaz kezdőállapotból indulva 1-et kap bemenetnek, ekkor az állapot átmenetek szerint a $\{q_3, q_5\}$ állapot(ok)ba érkezik meg, q_3 és q_5 egymással ekvivalencia relációban állnak, azaz megkülönböztethetetlenek, ezért a gép valamilyen módon „egyszerre érkezik” mindkét állapotba. Állapot átmenet táblázatunk ugyan a q_3 -ból való utat nem tartalmazza, de a q_5 -ből valót igen, ebben az esetben látszik, hogy $\delta(q_5, 1)$ alapján q_5 állapotból, 1 bemenetre a q_6 állapotba jutunk, $q_6 \in H$, azaz q_6 elfogadó állapot. Látszik tehát, hogy az alsó működés során az 11 bemenettel elfogadó állapotba jut a gép, így eleget a tesz a döntési táblázatban megfogalmazott feltételnek

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \delta(I, x) \cap H \neq \emptyset\},$$

hiszen amint láttuk, $\delta(q_0, 11) \cap H = \{q_6\}$. A felső működésre szintén elmondható, hogy az automata elfogadó állapotba ér, azaz $\overline{\delta(q_0, 11)} = \{q_6\}$.

Legyen most a bemenet 01. Az alsó közelítéshez tartozó működés a következő:

$\delta(q_0, 0) = \emptyset$, azaz az első bemeneti jelnél a 0-nál megáll a gép és nem fogja elfogadni az alsó működés mellett egyetlen esetben sem ezt a bemenetet. A felső közelítéshez tartozó működés mellett azonban már nem áll meg az első lépés után a gépünk, hiszen $\overline{\delta(q_0, 0)} = \{q_1, q_2\}$, azaz a kezdőállapotból kiindulva egy 0-s jelre „egyszerre” érkezik a q_1 és q_2 állapotokba. A q_2 állapothoz is tartozik átmenet a táblázatban így azzal is folytathatjuk, $\delta(q_2, 1) = \{q_4, q_7\}$, azaz a 0 bemenet után megkapott 1 bemenetre a q_2 állapotból a q_4 és q_7 állapotokba megy az automata. A q_4 állapotról tudjuk, hogy $q_4 \in H$, azaz elfogadó állapot, tehát 01 inputra legalább egy úton elfogadó állapotba jut a felső közelítés működése, azaz szót elfogadja az automata, mivel eleget a tesz feltételnek

$\overline{L(M)} = \{x \in \Sigma^* \mid \overline{\delta(I, x)} \cap H \neq \emptyset\},$
hiszen $\{q_4\} \subseteq \overline{\delta(q_0, 01)} \cap H.$

3.3. Az életlen automaták egy másik megközelítése

Az életlen nyelvek ismertetésekor a 2.3.3 részben bevezettünk egy speciális esetet, amikor a szavak ekvivalencia osztályai az ábécé hasonlóságán alapultak.

Ismerjük tehát most meg az életlen automatáknak egy másik lehetséges definícióját. Az előzőekben úgy definiáltunk egy életlen automatákat, hogy az valahogyan egyszerre, párhuzamosan működött egy alsó ágon valamint egy felsőn. Mindkét ágon ugyanazon bementi sztringgel végig ment az automata működése, és ez a két működés határozta meg, hogy az automata biztosan elfogadja a bementet, vagy lehetséges, hogy elfogadja, de nem biztos. Ha alsó ágon elfogadja a bemenetet akkor, a felső ágon is elfogadja, viszont ha csak a felső ág fogadja el a bemenetet, akkor lehetséges, hogy megfelelő, valamint az is lehetséges, hogy nem.

A most bemutatandó megközelítésben az automata egy ágon fut, de két különböző elfogadási módot használ. Ezen megközelítés mellett a [3] cikk szerint a következő módon definiáljuk az automatát, amely elfogadó állapotaiban különbözteti meg az alsó és felső közelítéseket.

11. Definíció. Legyen M egy determinisztikus véges automata, $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Q az állapotok halmaza, Σ az ábécé halmaz, ahol ha $a \in \Sigma$, akkor $\sigma(a) \subseteq \Sigma$ olyan, hogy $\sigma(a)$ halmaz tartalmazza az a -val ekvivalens karaktereket az R reláció szerint. Legyen $Q' = 2^Q$, és definiáljuk a $\delta' : Q' \times \Sigma \rightarrow Q'$ a következőképpen:

$$\delta'(S, a) = \{r \in Q \mid r = \delta(q, a') \text{ valamilyen } q \in S, a' \in \sigma(a) \text{ esetén}\}.$$

Az automatánk két külön automatára bontása:

Legyen $M_1 = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F_1)$, ahol $F_1 = 2^F$, az M automata alsó közelítése, egy nemdeterminisztikus automata. Akkor fogad el az M_1 automata egy bemenetet, ha az minden lehetséges úton elfogadó állapotba jut.

Legyen $M_2 = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F_2)$, ahol $F_2 = \{S \in Q' \mid \text{létezik } q \in S, \text{ hogy } q \in F\}$, az M automata felső közelítése, egy nemdeterminisztikus automata. Akkor fogad el az M_2 automata egy bemenetet, ha ugyanazon a bemeneten az M egy lehetséges úton elfogadó állapotba jut.

4. fejezet

Életlen automaták egyszerűsítése

Azt a kérdést szeretnénk vizsgálni, hogy nem lehetne-e az életlen automatákat egyszerűsíteni. Nem lenne-e lehetséges az állapotokon definiált ekvivalencia relációt egyszerűbben megadni, úgy, hogy az ekvivalencia osztályok minél kevesebb állapotot tartalmazzanak. A kérdés vizsgálatához foglalkozunk az [3] cikkben vizsgált speciális esettel, amikor az életlen nyelv szavain értelmezett ekvivalencia reláció az ábécé egyes betűinek megkülönböztethetlenségén alapszik.

Vizsgáljuk először meg azt, hogy az életlen grammatikák esetében a reláció specialitása milyen egyszerűsítésekre ad lehetőséget. A 2.2-es pontban definiált életlen grammatikát vizsgáljuk ezen célból.

A következőkben, $X \sim_R Y$ legyen jelölése annak, hogy két elem egymással ekvivalencia relációban állnak, ebben az esetben X és Y relációban állnak egymással egy R reláció szerint.

A következő definícióhoz felhasználok az 1. definícióban megadott approximációs tér definícióját.

12. Definíció. Legyen S egy véges ábécé, és (S, R_S) az S halmazon értelmezett approximációs tér.

Azt mondjuk, hogy

- S éles halmaz, ha $\underline{S} = \overline{S}$, és
- S hagyományos halmaz, ha R_S ekvivalencia osztályainak számossága minden $a \in S$ esetében $|[a]| = 1$, azaz ha tetszőleges $a, b \in S$ esetén $a \sim_{R_N} b$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a = b$.

Azaz S , abban az esetben éles halmaz, ha minden ekvivalencia osztálya az alsó közelítésben megegyezik a felső közelítésben lévő ekvivalencia osztályokkal, és fordítva.

S hagyományos halmaz, ha egyik eleme sem megkülönböztethetetlen egy másiktól, azaz egy elem sincs másikkal. ekvivalencia relációban.

Megjegyzés. Hagományos halmazok esetén a fenti feltételeket teljesítő reláció jelölése a továbbiakban legyen R_{id} . Világos, hogy ha egy halmaz a fentiek szerint hagyományos halmaz, akkor egyben éles halmaz is. Vegyük észre azt is, hogy a [3] cikk szerinti módon egy Σ ábécé betűinek megkülönböztethetlenségét leíró R_Σ segítségével definiált (Σ, R_Σ) és (Σ^*, R) approximációs terekben a Σ ábécé éles halmaz.

A következő definícióhoz felhasználok az 2.2-es pontban megadott életlen grammatikát.

13. Definíció. Legyen $G = (\underline{G}, \overline{G})$ életlen grammatika, ahol $\underline{G} = (\underline{N}, \underline{\Sigma}, \underline{P}, \underline{S})$ és $\overline{G} = (\overline{N}, \overline{\Sigma}, \overline{P}, \overline{S})$ és legyen (N, R_N) a nemterminálisokon (vagy (Σ, R_Σ) a terminálisokon) értelmezett approximációs tér.

Azt mondjuk, hogy G -ben a nemterminálisok (vagy a terminálisok) halmaza éles halmaz, ha N (vagy Σ) éles halmaz.

Azt mondjuk, hogy G -ben a nemterminálisok (vagy a terminálisok) halmaza hagyományos halmaz, ha N (vagy Σ) hagyományos halmaz.

Életlen grammatika nemterminálisok (terminálisok) halmaza éles, ha a nemterminálisok alsó közelítése megegyezik a nemterminálisok felső közelítésével (terminálisok alsó közelítése megegyezik a terminális felső közelítésével).

Életlen grammatika nemterminális (terminális) halmaza hagyományos, ha egyetlen ekvivalencia reláció számossága sem nagyobb mint 1 a nemterminális halmazában (terminálisok halmazában).

A következő tételhez előzetes tudásnak használok az 1. definícióban megadott approximációs tér definícióját, valamint a 2.2-es pontban megadott életlen grammatikát. A bizonyításban felhasználtam a 4. definícióban bevezetett $\sigma(\alpha)$ jelölést.

1. Tétel. Legyen (Σ^*, R) a Σ ábécé feletti sztringeken értelmezett approximációs tér, ahol az R reláció a Σ ábécé egyes betűinek megkülönböztethetlenségén alapszik, és legyen $L = L(G)$ egy G reguláris grammatika által generált nyelv.

Ekkor konstruálható olyan $G' = (\underline{G}', \overline{G}')$ élelten grammatika, melyre $\underline{G}'$ és $\overline{G}'$ is reguláris grammatika, $L(G') = (\underline{L}, \overline{L})$ és amelyben a nemterminálisok halmaza hagyományos halmaz.

Bizonyítás. Legyen $L = L(G)$, ahol $G = (N, \Sigma, P, S)$, és legyen R_Σ az ábécé betűinek megkülönböztethetlenségét leíró ekvivalencia reláció. Az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy ha $A, B, B' \in N$ és $a \in \Sigma$, akkor $A \rightarrow aB$, $A \rightarrow aB' \in P$ esetén $B = B'$. (Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor a nemdeterminisztikus véges automaták determinisztikussá alakításához hasonló módszerrel a grammatika „megjavítható”.) A $G' = (\underline{G}', \overline{G}')$ élelten grammatikát a következőképpen konstruáljuk meg.

Legyen $\underline{G} = (\underline{N}, \underline{\Sigma}, \underline{P}, \underline{S})$ és $\overline{G} = (\overline{N}, \overline{\Sigma}, \overline{P}, \overline{S})$, ahol $\underline{N} = \overline{N} = N$ és $R_N = R_{id}$ (azaz N hagyományos halmaz), $\underline{\Sigma} = \overline{\Sigma} = \Sigma$ és $\underline{S} = \overline{S} = S \in N$, továbbá

$$\overline{P} = \{A \rightarrow \alpha' \mid \text{ahol } A \rightarrow \alpha \in P \text{ és } \alpha' \in \sigma_{R_\Sigma}(\alpha)\},$$

a $\underline{P}$ halmazt pedig a következő eljárással határozzuk meg.

Legyen Σ/R_Σ az ábécé ekvivalencia osztályainak halmaza, és vegyünk minden $[x] \in \Sigma/R_\Sigma$ osztályhoz egy $H_{[x]} \subseteq N$ halmazt, mely kezdetben üres, majd kövessük a következő lépéseket, melyek során nemterminálisokat adunk ezekhez a halmazokhoz és szabályokat adunk az $\underline{P}$ halmazhoz.

1. Ha egy $a \in \Sigma$ terminális szimbólumra $A \rightarrow a' \in P$ minden $a' \in \sigma(a)$ esetén, akkor adjuk hozzá az A nemterminálist a $H_{[a]}$ halmazhoz, valamint adjuk hozzá az $A \rightarrow a'$, $a' \in \sigma(a)$ alakú szabályokat a $\underline{P}$ halmazhoz. Ha ezen a módon nem tudjuk a szabályhalmazt tovább bővíteni, térjünk át a 2. pontra.
2. Ha egy $a \in \Sigma$ terminális szimbólumra $A \rightarrow a'X_{a'} \in P$ minden $a' \in \sigma(a)$ esetén valamilyen $X_{a'} \in N$ szimbólumra, úgy, hogy $X_{a'} \in H_{[y]}$ ugyanarra az adott $[y]$ ekvivalencia osztályra minden $a' \in \sigma(a)$ esetén, akkor adjuk az A nemterminálist a $H_{[a]}$ halmazhoz, valamint adjuk hozzá az $A \rightarrow a'X_{a'}$, $a' \in \sigma(a)$ alakú szabályokat a $\underline{P}$ halmazhoz. Ha ezen a módon nem tudjuk a $\underline{P}$ szabályhalmazt tovább bővíteni, készen vagyunk.

Az viszonylag könnyen látható, hogy $\overline{L} = L(\overline{G})$, az alsó közelítés esete azonban több magyarázatra szorul.

Mutassuk tehát meg, hogy $\underline{L} = L(\underline{G})$.

Amellett érvelünk, hogy ha $S \Rightarrow^* \alpha A$, akkor minden $\alpha' \in \sigma(\alpha)$ sztringhez létezik olyan B nemterminális, ami ugyanabban a $H_{X,Y}$ halmazban van mint A és $S \Rightarrow^* \alpha' B$. Az egy lépéses levezetésekénél ez teljesül, hiszen $S \rightarrow \alpha A$ csak ekkor kerülhetett bele a szabályhalmaz alsó közelítésébe. Ha most feltesszük, hogy legfeljebb k lépéses levezetésekre a fenti tulajdonság teljesül, akkor teljesülnie kell a $k+1$ lépéses levezetésekre is, hiszen A és B ugyanabban a $H_{X,Y}$ halmazban van, tehát az általuk generált terminális szimbólumok megkülönböztethetlenségi ekvivalencia osztályának minden eleme generálható mindkettőjükből, ráadásul úgy, hogy az ehhez felhasznált szabályok jobb oldalán álló nemterminálisok ugyanabban a $H_{X',Y'}$ halmazban vannak.

Az előző bekezdésben említett tulajdonság megléte elegendő, hiszen a levezetést akkor lehet befejezni, ha A benne van valamelyik $H_{X,\varepsilon}$ halmazban. De ekkor a feltétel szerint B is benne van $H_{X,\varepsilon}$ -ben, vagyis ha az első levezetés az $A \rightarrow a$ szabállyal befejezhető, akkor az így kapott αa sztringet tekintve $\alpha \sigma(a)$ minden eleme levezethető αA -ból és $\alpha' \sigma(a)$ minden eleme levezethető $\alpha' B$ -ből, azaz $\sigma(\alpha a)$ minden eleme levezethető S -ből.

3. Példa. Legyen $\Sigma = \{a, b, d, e, x, y, z\}$ és legyen (Σ^*, R) az az approximációs tér, ahol R az R_Σ megkülönböztethetlenségi reláció alapján definiált: $a \sim_{R_\Sigma} b$, $d \sim_{R_\Sigma} e$ és $x \sim_{R_\Sigma} y$, azaz $\Sigma/R_\Sigma = \{[a, b], [d, e], [x, y], [z]\}$. Tekintsük a $G = (N, \Sigma, P, S)$ grammatikát, ahol $N = \{S, A, C, D, X, Y, Z\}$, és

$$P = \{S \rightarrow aX, S \rightarrow aY, S \rightarrow bZ, X \rightarrow xA, X \rightarrow yD, Y \rightarrow zC, Z \rightarrow zC, A \rightarrow a, A \rightarrow b, \\ C \rightarrow d, C \rightarrow e, D \rightarrow a, D \rightarrow b, Y \rightarrow a, Y \rightarrow b\}$$

A generált nyelv $L(G) = \{aa, ab, axa, axb, aya, ayb, azd, aze, bzd, bze\}$, ennek (Σ^*, R) szerinti alsó közelítése és felső közelítése pedig

$$\underline{L}(G) = \{azd, aze, bzd, bze\},$$

$$\bar{L}(G) = \{aa, ab, ba, bb, axa, axb, bxa, bxb, aya, ayb, bya, byb, azd, aze, bzd, bze\}.$$

A fenti eljárás 1. pontja szerint $H_{[a],\varepsilon} = \{A, D, Y\}$, $H_{[d],\varepsilon} = \{C\}$, majd a 2. pont szerint $H_{[x],[a]} = \{X\}$, $H_{[z],[d]} = \{Y, Z\}$, $H_{[a],[z]} = \{S\}$.

Ennek alapján $N' = \{S_{[a],[z]}, A_{[a],\varepsilon}, D_{[a],\varepsilon}, Y_{[a],\varepsilon}, C_{[d],\varepsilon}, X_{[x],[a]}, Z_{[z],[d]}, Y_{[z][d]}\}$, és

$$\begin{aligned} P' = & \{S_{[a],[z]} \rightarrow aX_{[x],[a]}, S_{[a],[z]} \rightarrow aY_{[z],[d]}, S_{[a],[z]} \rightarrow bZ_{[z],[d]}, X_{[x],[a]} \rightarrow xA_{[a],\varepsilon}, \\ & X_{[x],[a]} \rightarrow xD_{[a],\varepsilon}, X_{[x],[a]} \rightarrow yD_{[a],\varepsilon}, X_{[x],[a]} \rightarrow yA_{[a],\varepsilon}, Y_{[z][d]} \rightarrow zC_{[d],\varepsilon}, \\ & Z_{[z],[d]} \rightarrow zC_{[d],\varepsilon}, A_{[a],\varepsilon} \rightarrow a, A_{[a],\varepsilon} \rightarrow b, C_{[d],\varepsilon} \rightarrow d, C_{[d],\varepsilon} \rightarrow e, \\ & D_{[a],\varepsilon} \rightarrow a, D_{[a],\varepsilon} \rightarrow b, Y_{[a],\varepsilon} \rightarrow a, Y_{[a],\varepsilon} \rightarrow b, S_{[a],[z]} \rightarrow aY_{[a],\varepsilon}, \\ & Y_{[a],\varepsilon} \rightarrow zC_{[d],\varepsilon}, S_{[a],[z]} \rightarrow aZ_{[z],[d]}, S_{[a],[z]} \rightarrow bY_{[z],[d]}\} \end{aligned}$$

melynek alsó és felső közelítése

$$\begin{aligned} \underline{P}' = & \{S_{[a],[z]} \rightarrow aY_{[z],[d]}, S_{[a],[z]} \rightarrow bZ_{[z],[d]}, X_{[x],[a]} \rightarrow xA_{[a],\varepsilon}, \\ & X_{[x],[a]} \rightarrow xD_{[a],\varepsilon}, X_{[x],[a]} \rightarrow yD_{[a],\varepsilon}, X_{[x],[a]} \rightarrow yA_{[a],\varepsilon}, Y_{[z][d]} \rightarrow zC_{[d],\varepsilon}, \\ & Z_{[z],[d]} \rightarrow zC_{[d],\varepsilon}, A_{[a],\varepsilon} \rightarrow a, A_{[a],\varepsilon} \rightarrow b, C_{[d],\varepsilon} \rightarrow d, C_{[d],\varepsilon} \rightarrow e, \\ & D_{[a],\varepsilon} \rightarrow a, D_{[a],\varepsilon} \rightarrow b, Y_{[a],\varepsilon} \rightarrow a, Y_{[a],\varepsilon} \rightarrow b, \\ & Y_{[a],\varepsilon} \rightarrow zC_{[d],\varepsilon}, S_{[a],[z]} \rightarrow aZ_{[z],[d]}, S_{[a],[z]} \rightarrow bY_{[z],[d]}\}, \\ \overline{P}' = & \{S_{[a],[z]} \rightarrow aX_{[x],[a]}, S_{[a],[z]} \rightarrow aY_{[z],[d]}, S_{[a],[z]} \rightarrow bZ_{[z],[d]}, X_{[x],[a]} \rightarrow xA_{[a],\varepsilon}, \\ & X_{[x],[a]} \rightarrow xD_{[a],\varepsilon}, X_{[x],[a]} \rightarrow yD_{[a],\varepsilon}, X_{[x],[a]} \rightarrow yA_{[a],\varepsilon}, Y_{[z][d]} \rightarrow zC_{[d],\varepsilon}, \\ & Z_{[z],[d]} \rightarrow zC_{[d],\varepsilon}, A_{[a],\varepsilon} \rightarrow a, A_{[a],\varepsilon} \rightarrow b, C_{[d],\varepsilon} \rightarrow d, C_{[d],\varepsilon} \rightarrow e, \\ & D_{[a],\varepsilon} \rightarrow a, D_{[a],\varepsilon} \rightarrow b, Y_{[a],\varepsilon} \rightarrow a, Y_{[a],\varepsilon} \rightarrow b, S_{[a],[z]} \rightarrow aY_{[a],\varepsilon}, \\ & Y_{[a],\varepsilon} \rightarrow zC_{[d],\varepsilon}, S_{[a],[z]} \rightarrow aZ_{[z],[d]}, S_{[a],[z]} \rightarrow bY_{[z],[d]}, \\ & S_{[a],[z]} \rightarrow bX_{[x],[a]}, S_{[a],[z]} \rightarrow bY_{[a],\varepsilon}\}. \end{aligned}$$

Annak ellenőrzését az olvasóra bízunk, hogy $G' = (\underline{G}', \overline{G}')$, ahol $\underline{G}' = (N', \Sigma, \underline{P}', S)$, $\overline{G}' = (N', \Sigma, \overline{P}', S)$ esetén $L(G') = (\underline{L}, \overline{L})$.

A következő tételhez felhasználom az 12. definícióban megadott hagyományos halmazt, valamint az 1. definícióban megadott approximációs teret.

2. Tétel. Legyen (Σ^*, R) a Σ ábécé feletti sztringeken értelmezett approximációs tér, ahol az R reláció a Σ ábécé egyes betűinek megkülönböztethetlenségén alapszik, és legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy reguláris nyelv.

Ekkor konstruálható olyan $M = (Q, \Sigma, R, \delta, I, F)$ életlen véges automata, melyre $L(M) = (\underline{L}, \bar{L})$, és amelyben $R = R_{id}$, azaz az állapotok Q halmaza hagyományos halmaz, valamint $|I| = 1$.

Bizonyítás. Tekintsük azt az 1. tétel szerint létező $G = (\underline{G}, \bar{G})$ életlen grammatikát, melyre $\underline{G}$ és $\bar{G}$ is reguláris grammatika, $L(G) = (\underline{L}, \bar{L})$, és amelyben a nemterminálisok halmaza hagyományos halmaz, azaz $\underline{G} = (N, \Sigma, \underline{P}, S)$, $\bar{G} = (N, \Sigma, \bar{P}, S)$.

Legyen $M = (Q, \Sigma, R_{id}, \delta, S, F)$, ahol $Q = N \cup \{q_F\}$ és az állapot átmenet reláció a következőképpen definiált. Minden $X \in N$ és $a \in \Sigma$ esetén

$$\underline{\delta}(X, a) = \begin{cases} \emptyset, & \text{ha } X \rightarrow aY \notin \underline{P}, \\ Y, & \text{ha } X \rightarrow aY \in \underline{P}, \\ q_F, & \text{ha } X \rightarrow a \in \underline{P}, \end{cases} \quad \text{és} \quad \bar{\delta}(X, a) = \begin{cases} \emptyset, & \text{ha } X \rightarrow aY \notin \bar{P}, \\ Y, & \text{ha } X \rightarrow aY \in \bar{P}, \\ q_F, & \text{ha } X \rightarrow a \in \bar{P}. \end{cases}$$

A elfogadó állapotok halmaza pedig $F = \{q_F\}$.

A konstrukció hasonló módon működik, mint a hagyományos, reguláris grammatika alapján véges automatát előállító eljárás, olyan mintha két automatát készítenénk, egyet a nyelv alsó, egyet pedig a felső közelítéséhez. Ha az „alsó” vagy a „felső” automata egy bemenetre elfogadó állapotba kerül, akkor a kérdéses bemenet benne van a nyelv alsó vagy felső közelítésében.

A következő definícióhoz felhasználom az 12. definícióban megadott hagyományos halmazt, valamint a 10. definícióban megadott elfogadás definícióját átalakítva.

14. Definíció. Tekintsük az $M = (Q, \Sigma, R, \delta, I, F)$ életlen véges automatát. Azt mondjuk, hogy az M automata állapot átmenet relációja hagyományos, ha $\underline{\delta}(q, a) = \bar{\delta}(q, a)$ minden $q \in Q$ és $a \in \Sigma$ esetén (jelöljük úgy, hogy $\delta(q, a)$), valamint $|I| = |\{q_I\}| = 1$.

Ilyenkor $L(M) = (\underline{L}, \bar{L})$, ahol

$$\begin{aligned} \underline{L} &= \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_I, w) \cap \underline{F} \neq \emptyset \text{ és } \delta^*(q_I, w) \cap \bar{F} \neq \emptyset\}, \\ \bar{L} &= \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_I, w) \cap \underline{F} = \emptyset \text{ és } \delta^*(q_I, w) \cap \bar{F} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

A következő tételben felhasználom az 1. definícióban megadott approximációs tér definícióját, valamint a 12. definícióban megadott hagyományos halmaz definícióját.

3. Tétel. Legyen (Σ^*, R) a Σ ábécé feletti sztringeken értelmezett approximációs tér, ahol az R reláció a Σ ábécé egyes betűinek megkülönböztethetetlenségén alapszik, legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy

reguláris nyelv.

Ekkor konstruálható olyan $M = (Q, \Sigma, R, \delta, I, F)$ életlen véges automata, melynek állapot átmenet relációja hagyományos, és amelyre $L(M) = (\underline{L}, \bar{L})$.

Bizonyítás. Tekintsük azt a 2. tétel szerint létező $M = (Q, \Sigma, R, \delta, I, F)$ életlen véges automatát, melyre $L(M) = (\underline{L}, \bar{L})$, és amelyben $R = R_{id}$, azaz az állapotok Q halmaza hagyományos halmaz, valamint $|I| = |\{q_I\}| = 1$. Konstruáljuk meg az $M' = (Q', \Sigma, R', \delta', I', F')$ életlen automatát, ahol $Q' = (Q \cup \{\emptyset\}) \times (Q \cup \{\emptyset\})$, $I = \{(q_I, q_I)\}$ és minden $(q_1, q_2) \in Q'$, $a \in \Sigma$ esetén

$$\delta'((q_1, q_2), a) = (\underline{\delta}(q_1, a), \bar{\delta}(q_2, a)).$$

Ha most az R' relációt úgy definiáljuk, hogy $(q, \emptyset) \sim_{R'} (\emptyset, q)$, valamint $F' = \{(\emptyset, q), (q, q) \mid q \in F\}$, akkor $\underline{F}' = \{(q, q) \mid q \in F\}$ és $\bar{F}' = \{(\emptyset, q), (q, q), (q, \emptyset) \mid q \in F\}$, azaz a 14. definíció szerint $L(M) = (\underline{L}, \bar{L})$ (hiszen az életlen grammatika tulajdonságai miatt az automata számára a $(q, \emptyset)$ típusú állapotok nem elérhetőek).

5. fejezet

Összefoglalás

Számos olyan valós probléma fellelhető az életben, melyeknél a bizonytalansági tényező megjelenik. Ezen problémák megoldására a kutatók életlen halmazokat, életlen automatákat definiáltak, melyekben a megkülönböztethetlenség, bizonytalanság kérdése is kezelve van. Legfőképpen ezen automatákkal foglalkoztam dolgozatom során.

Összefoglaltam és ismertettem az életlen automatákhoz tartozó legfontosabb definíciókat, amelyek a téma megértéshez elengedhetetlenek. Életlen automatáink alapjait az életlen nyelvet, életlen halmazokat valamint életlen grammatikákat is röviden definiáltam a [2], [1] cikkekben leírt módszerek alapján, valamint a [3] cikkben feldolgozott speciális esetekre definiált automatákat mutattam be. Példákkal is demonstráltam ezek működését.

Dolgozatomban lényegi részében azt vizsgálom meg, hogy a két ismert definíció mellett lehetséges lenne-e az ekvivalencia relációkat egyszerűbben megadni. A [2] cikkben valamint [4]-ben az életlen automaták elfogadott állapotait egy hagyományos halmazban definiálták nem pedig életlenben. Az ezekben definiált automaták működésük szerint két ágon, alsó közelítés és felső közelítés futnak, elfogadó állapotuk egy hagyományos halmaz. A [3] cikkben definiált automata két külön automataként működik, külön-külön definiált elfogadó állapothalmazokkal. Dolgozatomban ezzel a háttértudással definiáltam egy új automatát, amely működésében az eddig ismert kettő típusú életlen automaták működését használja fel. Az elfogadás feltételének megváltoztatásával egyszerűsítettem az automata működését, mégpedig úgy, hogy az elfogadó állapotokat tartalmazó halmazt életlen halmaznak tekintem, amely alsó közelítése fogja azokat az elfogadó állapotokat tartalmazni, amelyeket a biztosan elfogadott szavak elérnek, valamint felső közelítése tartalmazza azokat az állapotokat, amelyeket a felső közelítéshez tartozó szavak

elérnek. Fontos kikötés ezen a ponton, hogy amit az alsó közelítés elfogad, azt a felső közelítésnek is el kell fogadnia. Fordítva viszont ez nem teljesül, amit a felső elfogad, azt az alsó közelítés nem feltétlenül fogadja el.

Ezzel a módszerrel egyszerűsíteni tudtam az életlen automaták ekvivalencia osztályainak számosságát, azaz kevesebb elem lesz ekvivalens más elemekkel, ami megkönnyítheti a feladat megoldását ezen módszerrel.

Irodalomjegyzék

- [1] Basu, S. Rough grammar and rough language. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, 28 (2003) 129-140
- [2] Basu, S. Rough finite-state automata. *Cybernetics and Systems*, 36:2 (2005) 107-124
- [3] Battyányi, P., Mihálydeák, T., Vaszil, Gy. Rough-set-like approximation spaces for formal languages. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, to appear.
- [4] Sharan, S., Arun, K.S., Tiwari, S.P. Characterizations of rough finite state automata. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 8 (2017) 721-730
- [5] Sharan, S., Tiwari, S.P. Products of rough finite state machines *arXiv:1210.7575 [math.LO]*, (2012)

Saját munka leírása

Életlen automata kétféle definiálásának ismertetése és különbségeinek bemutatása újonnan kitalált példa alapján a bevezetésben, valamint a 2.3.1 fejezetben.

Egy új típusú automata megalkotása, amely az előzőekben definiáltkánál egyszerűbbé megoldást nyújt. A 3.4-es pontban leírt definíciók és tételek.

Szám szerint ezek a következők:

- a 11. definíció
- a 12. definíció
- az 1. tétel és bizonyítása
- a 3. példa
- a 2. tétel és bizonyítása
- a 13. definíció
- a 3. tétel és bizonyítása

Köszönetnyilvánítás

Elsődlegesen szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Vaszil Györgynek a közös munkát, támogatását és segítségét, amely nélkül nem jöhetett volna létre ez a dolgozat ilyen formában. Köszönöm, hogy megismerkedhettem az életlen halmazok elméletével, és ez által szélesítettem szakmai ismereteimet.

Továbbá szeretném megköszönni a családomnak és barátaimnak a megannyi támogatást és biztatást.