

TDK-dolgozat

Gyarmati László

AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT THURSTONE MÓDSZER MŰKÖDÉSÉRE VONATKOZÓ FELTÉTELEK ELMÉLETI ÉS SZIMULÁCIÓS VIZSGÁLATA, ALKALMAZÁSSAL

Szerző: Gyarmati László 2. évfolyamos mesterszakos
programtervező informatikus

Témavezető: Dr. Mihálykó Csaba egyetemi docens

Készült: Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Kar
Matematikai Tanszékén

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani ezúton Dr. Mihálykóné dr. Orbán Éva tanárnőnek és témavezetőmnek, Dr. Mihálykó Csaba tanár úrnak, akik útmutatásaikkal, segítségükkel lehetővé tették, hogy ez a dolgozat elkészüljön.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás.....	3
1. Bevezetés.....	5
2. Páros összehasonlítási módszerek.....	7
2.1. Az általánosított Thurstone módszer	9
2.2. A kimenetek valószínűségeinek kiszámítása.....	12
2.3. A loglikelihood függvény maximumhelyének keresése.....	13
3. Feltételrendszerek	14
3.1. Egy minimális (szükséges) feltételrendszer	16
3.2. A Mihálykó-Orbán féle feltételrendszer.....	20
3.3. A Davidson féle feltételrendszer	22
3.4. A Hybrid feltételrendszer	24
3.5. A feltételrendszerek közti összefüggés	29
3.6. A feltételrendszerek vizsgálata szimulációkkal.....	31
4. Ranglisták felállításának informatikai háttere.....	38
4.1. A Nelder-Mead optimalizáló	40
4.2. A loglikelihood függvény	43
5. Alkalmazás	45
5.1. Angol Premier League mérkőzéseinek előrejelzése.....	45
6. Összefoglalás.....	54
7. Jegyzékek	56
7.1. Irodalomjegyzék	56
7.2. Ábrajegyzék.....	58
7.3. Táblázatjegyzék.....	58

1. Bevezetés

Az életünket át- és átszövik a különféle rangsorolások, legyen szó egyetemre való jelentkezésről, munkahelyválasztásról, vagy egy készülék megvételéről, esetleg sportfogadásról. Minél nagyobb horderejű egy ilyen döntés, annál jobban szeretnénk logikailag is alátámasztott rangsor alapján választani. Ebben segítségünkre lehetnek bizonyos matematikai modellek.

Számos esetben páros összehasonlítások segítségével tudunk olyan információkhoz jutni, amiket aztán valamilyen módszerrel feldolgozva képesek leszünk a vizsgált objektumokat rangsorolni, és így megalapozott döntést hozni arról, hogy melyik objektumot/terméket/versenyzőt tekintjük a legerősebbnek (vagy legmegbízhatóbbnak, legjobbnak stb.).

Ezek közül a módszerek közül az egyik a Thurstone módszer, illetve annak általánosításai, amely valószínűségi megalapozottsága miatt nem csak rangsorolni képes az objektumokat, illetve erősségük (megbízhatóságuk, jóságuk stb.) mértékét számszerűsíteni, hanem számos valós probléma esetében az igényelt előrejelzés során valószínűséget is képes adni a jövőbeli összehasonlítások kimenetelének esélyeire.

Azonban az általánosított Thurstone módszer, mint bármely páros összehasonlításokon alapuló rangsoroló módszer, csak bizonyos feltételek megléte esetén képes az objektumokat rangsorolni. Ilyen - triviálisnak - mondható szükséges feltétel például az, hogy a rangsorolandó objektumok mindegyike össze legyen hasonlítva legalább egy másik objektummal. Az irodalomból megismerhetünk bizonyított elégséges feltételrendszert a Thurstone módszerhez kettő és több opció esetére, illetve szükséges és elégséges feltételrendszert a nagyon hasonló Bradley-Terry modellben két opció esetére. Továbbá létezik - ugyan egzakt bizonyítás nélkül - elégséges feltételrendszer a Davidson által módosított Bradley-Terry modellben három opció esetére, de a két – illetve háromopciós általánosított Thurstone módszerhez nincs még megadva szükséges és elégséges feltételrendszer. Pedig ennek ismerete nagyban növelné a módszer alkalmazhatóságát, mert lehetővé

tenné a páros összehasonlítások olyan módon való megtervezését, hogy a lehető legkevesebb összehasonlítást kelljen végrehajtani, ami sok objektum rangsorolása esetében akár a rangsorolás kivitelezhetőségének biztosításában is nagy szerepet játszhat.

TDK dolgozatom első, nagyobbik részében a háromopciós általánosított Thurstone módszer esetében megadok néhány szükséges, illetve elégséges feltételrendszert, majd elméleti és szimulációs módszerekkel elemzem, hogy milyen hatékonyak ezek a feltételrendszerek. Kimondok egy sejtést arra vonatkozóan, hogy ezek közül az egyik, általam kidolgozott feltételrendszer szükséges és elégséges feltételrendszer, és ezt a sejtésemet alátámasztom néhány matematikai megfontolással, illetve szimulációs eredménnyel. Az elemzés során összehasonlítom különféle helyzetekben az eltérő feltételrendszereket, hogy megtudjam, valóban jobb-e az új, általam kidolgozott feltételrendszer, illetve hogyan viszonyul más feltételrendszerekhez.

Munkám második részében ennek felhasználásával az angol labdarúgóbajnokság első osztályának (Premier League) 2020/21-es idényét végigkövetem a módszer segítségével, és felhasználva a valószínűségszámítási háttérét a módszernek előrejelzéseket adok a mérkőzések kimenetelére. Az általánosított Thurstone módszerből származó előrejelző módszer mellett kontrollként alkalmazom a jólismert sorösszeg módszer szerinti előrejelzést is, megmutatva, hogy a módszerem előnye az előrejelzés során mindvégig fennáll. Ezenkívül vizsgáltam az előrejelzés során azt is, hogy a felhasznált páros összehasonlítások (a csapatok közötti mérkőzések) időben való súlyozása által jobb eredményt kapok-e, azaz, hogy érdemes-e jobban figyelembe venni az időben közelebbi mérkőzéseket, mint a távolibbakat. Eredményeim azt jelzik, hogy bizonyos mértékben igen, lehet javítani így az előrejelzések pontosságán.

Elsődleges célom tehát az volt, hogy találjak egy olyan feltételrendszert, mely sokkal jobban alkalmazható, mint az ismert feltételrendszerek, bízva abban, hogy ez szükséges és elégséges feltételrendszer lesz. Továbbá azt is szerettem volna igazolni munkámmal, hogy a Thurstone módszer kimondottan alkalmas rangsorolásra és jövőbeli páros összehasonlítások kimenetelének előrejelzésére.

2. Páros összehasonlítási módszerek

Mindig megvolt arra az igény, hogy rangsoroljunk különböző objektumokat és erősségeket, „jóságot” határozzunk meg hozzájuk, hogy ez által jobb döntést hozhassunk, legyen szó egy beruházásról, vagy csak egy termék megvételéről. Már pár objektum rangsorolása is nehézségekbe ütközhet, de több tíz objektum esetén rendkívül bonyolulttá válhat ez a feladat. Tovább nehezítheti az objektív összehasonlítást, ha „körbeverés” alakul ki egyes objektumok között. Erre a problémára kínálnak megoldást a páros összehasonlítási módszerek, amiket az élet számos területén (pszichológia [8], pénzügy [14], kommunikáció [24], politika [2] stb.) alkalmaznak előszeretettel.

A fejezetcímbe is említett módszerek esetén páronként hasonlítjuk össze az objektumokat (a dolgozatomban szereplő konkrét alkalmazás esetén a futball csapatokat), majd ezen összehasonlítások eredményeit felhasználva, valamilyen matematikai módszer segítségével rangsort képeznek és erősségeket rendelnek az egyes objektumokhoz, csapatokhoz.

Ezen módszerek között az egyik legismertebb a Saaty által bevezetett Analytical Hierarchy Process (AHP) elnevezésű módszer [20], amelyben a párokban szereplő objektumokra megadott arányszámokból (az i -dik objektum hányszor jobb, mint a j -dik) összeállított páros összehasonlítási mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó egyre normált sajátvektora adja meg az egyes objektumok súlyát és azokon keresztül a sorrendjüket. Ez a módszer nagyon népszerű, dacára gyengeségeinek: nem konzisztens arányszámok esetén jelentősen gyengül a megbízhatósága, bizonyos esetekben nagyon szubjektív az arányszámok meghatározása, és főképp, hogy sok objektum, illetve bizonyos problémakörök esetében nagyon nehéz biztosítani, hogy minden arányszám rendelkezésre álljon. Ez utóbbi esetben (nem teljes összehasonlítás során) azonban nem lehetséges a kiértékelés említett módját végrehajtani, nem adhatók meg a súlyok és így a sorrend sem.

Ezt a problémát hidalta át Bozóki Sándor szerzőtársaival [1], akik a logaritmikusan legkisebb négyzetek módszer segítségével ezeknek az eseteknek a

nagy részében meg tudták adni a sorrendet és a súlyokat. Azonban az arányszámok szubjektivitása és inkonzisztenciája ennél a módszernél is probléma. Hiányossága továbbá (amiben osztozik az AHP-vel), hogy nem lévén valószínűségszámítási háttérük, nem lehet segítségükkel megalapozott módon megadni bizonyos jövőbeli összehasonlítások kimeneteleinek esélyét.

Mindenképp meg kell még említeni az úgynevezett sorösszeg módszert (általánosabb formájában kvóciens módszer), amit előszeretettel használnak például sportbajnokságok rangsorai megállapításakor [10]. Ez egy nagyon könnyen számolható módszer (többnyire az összehasonlítást megnyerő objektum 2 pontot kap, a vesztes 0 pontot, míg döntetlen esetén 1-1 pont jár mindkét objektumnak, amiket összegezve alakul ki a sorrend) és a laikusok számára is egyszerűen ellenőrizhető, így széleskörű elfogadottsággal bír. Bizonyos esetekben eltérnek az említett pontozástól más célok érdekében, ami azonban már némileg gyengíti a módszer matematikai stabilitását, de általában az elfogadottságát nem. Kimondott gyengesége, hogy nincs tekintettel arra, hogy milyen erősségű objektum ellen szereztek 2 pontot, a leggyengébbek elleni is ugyanannyit ér, mint a legerősebbek elleni, ami azonban komoly problémát okoz, ha nincs teljeskörű összehasonlítás (például svájci rendszerben lebonyolított versenyek esetében). Ilyenkor és a gyakori holtversenyek eldöntése miatt különböző párkijelölési stratégiákra van szükség, illetve különféle egyéb szempontok figyelembe vételére (egymás elleni eredmény, gólarány stb.).

A páros összehasonlítást alkalmazó módszerek közül kitűnik a sok területen bizonyított általánosított Thurstone módszer [10,11,12,13,14,15,16,17,18], amely nem csak arra képes, hogy rangsort és súlyokat adjon, hanem arra is, hogy egyes objektumok jövőbeli összehasonlításának esetére valószínűségeket biztosítson a lehetséges kimenetekre. Ahogy bevezetőmben már írtam, ezért is esett erre a módszerre a választásom. Munkámban kontroll módszerként az előrejelzésre használni fogom az egyszerű, de mindemellett jó matematikai tulajdonságokkal bíró sorösszeg módszert.

2.1. Az általánosított Thurstone módszer

Gyakran alkalmazott páros összehasonlítási módszer a Thurstone módszer [23]. A módszer valószínűségszámítási alapokon nyugszik, oly módon, hogy minden egyes objektumhoz egy látens valószínűségi változót rendelünk.

Minden egyes összehasonlításkor két objektumot kell összehasonlítani. Ekkor arról születik döntés, hogy milyen kategóriába esik a döntés (melyik opció valósul meg). A Thurstone által kidolgozott módszer két opciót engedett meg: jobbat és rosszabbat, és munkája során normális eloszlású valószínűségi változókat használt. Ennek egy általánosított verzióját fogom használni, olyan modellt, amelyben általános, 0-ra szimmetrikus és szigorúan logkonkáv sűrűségfüggvényű eloszlások használhatók (a standard normális és a logisztikus eloszlás is ilyen), továbbá három opció lehetséges: rosszabb, egyforma és jobb.

Mindhárom opcióhoz egy-egy, egymást kizáró intervallum tartozik: a rosszabbhoz az $I_1 = (-\infty, -h]$, az egyformához az $I_2 = (-h, h)$ és a jobbhoz az $I_3 = [h, \infty)$, melyeknek uniója kiteszi a teljes számegyeneset. Amikor döntés születik két objektum között, akkor lényegében arról döntünk, hogy a két objektum mögött megbújó valószínűségi változók különbsége melyik intervallumba esik. Ezekről a különbségekről feltételezzük az általános esetben, hogy logkonkáv sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségű változók [16]. Ha normális eloszlást használunk, akkor Thurstone eredeti elgondolásáról van szó, míg ha a különbség logisztikus eloszlású, akkor egy másik gyakran használt modell, a Bradley-Terry modell jut szerephez [14], de használtak már gamma eloszlásokat [7], illetve alkalmazható, főleg biztosítási területen, a Chen és a Gompertz eloszlás is [21, 25].

Az objektumokat jellemző valószínűségi változók együttesét a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ vektorral jelöljük. Az i -edik objektumot jellemzi a ξ_i , melynek várható értéke m_i , ezt tekintjük az i -edik objektum átlagos erősségének. Ezeket az átlagos erősségeket kell megbecsülnünk, hogy megkapjuk az objektumok erőssorrendjét. Ezt a maximum likelihood módszert alkalmazva tesszük meg. Háromopciós modell esetén a következőképpen írható fel a likelihood függvény:

$$L(A|m_1, \dots, m_n, I_1, I_2, I_3) = \prod_{k=1}^3 \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n \left(P(\xi_i - \xi_j \in I_k) \right)^{A_{i,j,k}} \quad (1)$$

A képletben az I -k intervallumokat jelölnek, $A_{i,j,k}$ azt jelenti, hogy az i -edik és j -edik objektum között hányszor született meg a C_k döntés. A döntések sorra a következők: $k = 1$ esetében az i -dik objektum a rosszabb, $k = 2$ esetén egyformák, $k = 3$ -nál az i -dik a jobb. Tekintettel arra, hogy az intervallumok egy paraméter (h) segítségével megadhatók, így úgy tekinthetjük, hogy a célfüggvény $n+1$ változótól függ. Ez azonban n -re redukálható, tekintettel arra, hogy a célfüggvény csak az $m_i - m_j$ különbségektől függ (ez a részletes kifejtés után (2)-ben látható), így megtehetők, hogy ezek közül valamelyiket, vagy az összegüket 0-nak választva eggyel csökkentjük a változók számát. Thurstone eredeti elképzelése szerint a képletben normális eloszlásfüggvény szerepelne, de mint korábban említettem, az általánosítással egy lényegesen tágabb eloszláscsalád is használható, a szigorúan logkonkáv sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlások családja. Ha az alkalmazott általános, 0-ra szimmetrikus és szigorúan logkonkáv sűrűségfüggvényű eloszlás eloszlásfüggvényét F -fel jelöljük, akkor a likelihood függvény az alábbi alakú lesz:

$$\begin{aligned} L(A|m_1, \dots, m_n, h) = & \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n \left(F(-h + m_j - m_i) \right)^{A_{i,j,1}} \\ & \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n \left(F(h + m_j - m_i) - F(-h + m_j - m_i) \right)^{A_{i,j,2}} \\ & \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n \left(1 - F(h + m_j - m_i) \right)^{A_{i,j,3}} \end{aligned} \quad (2)$$

Ez a függvény nem más, mint az általunk ismert $A_{i,j,k}$ adatokkal jellemzett eredmény-együttes előfordulási valószínűsége a paraméterek függvényében. Ezt a függvényt szeretnénk maximalizálni. Ezáltal lényegében azt keressük, hogy milyen várható értékek és $0 < h$ paraméter esetében a legvalószínűbb a rendelkezésünkre álló $A_{i,j,k}$ adathalmaz előfordulása. Nyilvánvaló, hogy ez a módszer csak akkor működik, ha ennek a célfüggvénynek létezik és egyértelmű a maximumhelye, ellenkező esetben ezzel a módszerrel nem tudjuk becsülni az m_i erősségeket és/vagy a h értékét. Ezek hiányában azonban nem határozható meg a becslés alapján

a rangsor, valamint a (4)-(6) valószínűségek, így sok egyéb mellett a módszer alapján történő előrejelzés lehetősége is elvész.

Éppen ezért kulcsfontosságú, hogy meg tudjuk mondani milyen feltételek mellett létezik és egyértelmű a likelihood függvénynek a maximumhelye, az ezzel kapcsolatos szükséges és/vagy elégséges feltételrendszerek kiemelt figyelemre tarthatnak számot.

Ha a likelihood függvénynek a logaritmusát vesszük, akkor a maximumhelye ugyanott lesz, de szorzatok összeadásokká, a hatványozások szorzásokká szelődülnek, aminek hála könnyebben és gyorsabban lehet számolni a függvényt. Ekképpen írható fel a fentebb bemutatott likelihood függvény logaritmusos verziója:

$$\begin{aligned} \ln L(A|m_1, \dots, m_n, h) = & \\ & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \ln \left(F(-h + m_j - m_i) \right) \cdot A_{i,j,1} \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \ln \left(F(h + m_j - m_i) - F(-h + m_j - m_i) \right) \cdot A_{i,j,2} \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \ln \left(1 - F(h + m_j - m_i) \right) \cdot A_{i,j,3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Megjegyzem, hogy a maximum likelihood módszer alkalmazásához fel kell tennünk, hogy a döntések (eredmények) egymástól függetlenek, ami azonban a tapasztalatok alapján jó közelítéssel elfogadható feltételezés.

2.2. A kimenetek valószínűségeinek kiszámítása

A páros összehasonlítási módszerek közül egyedülálló az általánosított Thurstone módszer a tekintetben, hogy képes valószínűséget megadni jövőbeli összehasonlítások kimenetelére.

A munkámban használt háromopciós modellre írom fel a képleteket, mellyel számolni lehet a valószínűségeket. A képletben a likelihood függvény maximumhelyeként kapott (becsült) $\hat{m}_i$ várható értékek, illetve $\hat{h}$ szerepel.

Ha az i -dik objektum rosszabb, mint a j -dik, akkor a valószínűség:

$$F(-\hat{h} - (\hat{m}_i - \hat{m}_j)); \quad (4)$$

ha az i -dik objektum egyforma a j -dikkel, akkor a valószínűség:

$$F(\hat{h} - (\hat{m}_i - \hat{m}_j)) - F(-\hat{h} - (\hat{m}_i - \hat{m}_j)); \quad (5)$$

és végül ha az i -dik objektum jobb, mint j -dik, akkor pedig a valószínűség:

$$1 - F(\hat{h} - (\hat{m}_i - \hat{m}_j)). \quad (6)$$

2.3. A loglikelihood függvény maximumhelyének keresése

A likelihood függvénynek a logaritmusát használtam, így a soktényezős szorzat helyett a logaritmusok összegét kellett vizsgálnom. Mivel a két függvény maximumhelye megegyezik, bár a maximumok értéke eltérő, így alkalmas arra, hogy használjam, ugyanis a maximumhely a fontos számunkra.

Hogy megtaláljam a maximumhelyet, ehhez a Nelder-Mead módszert használtam numerikus optimalizálóként, mellyel gyors és pontos eredményt tudtam kapni.

A loglikelihood függvény számításigénye közepes, a Nelder-Mead féle optimalizálásnak hála 4000-6000 iteráció után 5 tizedesjegy pontossággal megkaptuk a függvény maximumértékét a tesztfuttatásokkor értékelni kívánt 6 objektum esetén, de az alkalmazás során használt 20 objektumos esetben sem kellett több mint 10000 iteráció. Későbbi fejezetekben erről még részletesebben írok.

Az optimalizálás az $m_i - m_j$ -ről dönt, így egy várható értéket rögzíthetünk (pl. nullának), vagy megtehetjük, hogy a várható értékek összegét tekintjük nullának, anélkül, hogy ez az általánosság megszorítását jelentené.

3. Feltételrendszerek

Az előző fejezetben szó esett a loglikelihood függvényről és arról, hogy ennek a függvénynek a maximumhelyét kell megkeresni, hogy megkapjam az egyes objektumokat jellemző erősségeket. Ahhoz, hogy helyes eredményt kaphassak, illetve, hogy egyáltalán használható legyen a módszer, szükséges, hogy létezzen a maximumhely és az egyértelmű legyen.

Itt jönnek képbe a feltételrendszerek, melyek biztosítják, hogy egyértelmű eredmény születhessen a kiértékelés során. Többen foglalkoztak már különféle módszerek esetében azzal, hogy milyen feltételrendszer garantálja, hogy létezzen egyértelmű eredmény az adott módszer esetében. A legegyszerűbb szükséges és elégséges feltétel a sorösszeg módszer működéséhez adható: legyen minden objektum legalább egy másik objektummal összehasonlítva. Ez az általánosabb kvóciens módszer esetében is így van. Szükséges és elégséges feltételt adtak Bozókiék a logaritmus legkisebb négyzetek módszere esetén a célfüggvényük minimumának létezéséhez és egyértelműségéhez [1]. Ez a feltétel a következő: gráfot képezünk az összehasonlításokból oly módon, hogy a gráf csúcsai legyenek az értékelni kívánt objektumok és akkor van két csúcspont között él behúzva, ha van köztük összehasonlítás. Ha az így kapott gráf összefüggő, akkor van egyértelmű szélsőérték hely, és a módszer helyesen alkalmazható. Megjegyezzük, hogy könnyen látható, hogy az AHP működéséhez az összefüggőségénél több kell, a gráfnak teljesnek kell lennie.

Ford a kétopciós Bradley-Terry modellhez (azaz logisztikus eloszlás esetére) a következő szükséges és elégséges feltételt adta és bizonyította a maximumhely létezésére és egyértelműségére [4]:

Legyenek az értékelni kívánt objektumok egy irányított gráf csúcsai, amely gráfban akkor van irányított él egyik objektumból a másikba, ha ő legyőzte a másikat. A feltétel a következő: Az így kapott gráf csúcsainak halmazát akárhogyan bontjuk ketté két nemüres diszjunkt halmazra, mindig van az egyik halmazból a másikba és a másikkól az egyikbe haladó él. Megjegyezném, hogy a Bradley-Terry modell esetén a likelihood függvény egyszerűbb például a Thurstone modell

likelihood függvényénél, mivel a győzelmek/vereségek valószínűségei explicit módon tört alakban kifejezhetők a várható értékek segítségével. Más, általánosabb módszerrel bizonyítottuk azonban, hogy ez a feltétel a logkonkáv sűrűségfüggvényű eloszlással rendelkező kétopcións Thurstone módszer esetében is szükséges és elégséges feltétel.

Davidson cikkében [19] a háromopcións Bradley-Terry modellhez hasonló modellhez adott meg a Ford féle feltételrendszerrel analóg elégséges, de nem szükséges feltételrendszert. Erre majd a következő alfejezetben részletesen kitérek. Mihálykóék munkáikban [15,16] megadtak a kettő, illetve többopcións általánosított Thurstone módszer alkalmazhatóságára elégséges feltételt, ezt is bemutatom részletesen egy későbbi alfejezetben.

Mivel a háromopcións eset rendkívül gyakori, és a dolgozatomban egy ilyenre, egy labdarúgó bajnokság eredményeire szeretném alkalmazni a Thurstone módszert, így háromopcións esetre keresek szükséges és/vagy elégséges feltételrendszert. A konkrét alkalmazás miatt a későbbiekben az „ i jobb, mint j helyett” az „ i legyőzi j -t”, az „ i egyforma j -vel” helyett döntetlen az eredmény, míg a rosszabb helyett a kikap, vagy vereséget szenved kifejezéseket fogom időnként használni.

Munkám során szerettem volna megfogalmazni egy olyan feltételrendszert, amely a lehető legtöbb esetben tudja jelezni helyesen azt, hogy az adott adatokból kapható loglikelihood függvénynek van egyértelmű maximumhelye. Ahhoz, hogy ezt elérjem, két elégséges feltételrendszert vettem alapul: Mihálykóékét, illetve a Davidson félét, melyekből megkonstruáltam a saját Hybrid névre keresztelt feltételrendszeremet. Ez általánosítása az előbb említett mindkét feltételrendszernek.

TDK dolgozatomban bemutatom az egyes feltételrendszerek alkalmazhatóságát, megfelelőségét, egymáshoz viszonyított erősségeiket. Nagyszámú (millió elemű) szimulációs tesztet futtattam különböző esetekre, hogy megkapjam melyik a legjobb, és hogy valóban sikerült-e elérni a célokat, sikerült-e egy nagyon jó feltételrendszert megalkotnom.

3.1. Egy minimális (szükséges) feltételrendszer

Ebben az alfejezetben egy olyan feltételrendszert adok meg, amely ha nem teljesül, akkor biztosan nincs egyértelmű maximumhely. Ez a feltételrendszer nem elégséges, de szükséges.

A feltételrendszer három részből áll:

- Az első feltétel az, hogy az összehasonlított objektumok által meghatározott, úgynevezett összehasonlítási gráf összefüggő legyen. Ebben az esetben a gráfot a következőképpen definiáljuk: legyenek a csúcsok az összehasonlítani kívánt objektumok és akkor van él két csúcs között behúзва, ha volt köztük összehasonlítás. Ha az így kapott gráf összefüggő, akkor teljesült a feltételrendszer első feltétele.
- A második feltétel az, hogy legyen legalább egy egyforma (döntetlen) eredményt adó összehasonlítás.
- A harmadik feltétel az, hogy legyen legalább egy győzelem is.
- A negyedik feltétel az, hogy minden objektumnak kell lennie döntetlenjének vagy győzelmének és vereségének is.

Ha a fent említett négy feltétel mindegyike teljesül, akkor beszélhetünk a minimális feltételrendszer teljesüléséről, mely szükséges, de nem elégséges.

A szükségesség könnyen látható a következő gondolatmenet alapján.

Ha nem összefüggő a gráf, akkor az elkülönülő részek között nincs összehasonlítás, vagyis nem tudjuk megmondani, hogy az elkülönülő részekben lévő objektumokhoz tartozó valószínűségi változók várható értéke hogyan viszonyul egymáshoz, még rangsorolni sem tudjuk az objektumokat, nemhogy meg tudnánk adni az erősségüket.

Ha nincs egyetlen egyforma opciót eredményező összehasonlítás se, akkor nem tudjuk meghatározni az általánosított Thurstone modellben az egyforma opcióhoz tartozó intervallum határát jelölő pozitív h paramétert, mivel a loglikelihood függvény szigorúan monoton növekszik, amint ez a paraméter a nullához tart. Vagyis lényegében áttérnénk a kétopciós modellre (ami érthető is,

hiszen ha nincs döntetlen, akkor az eredmények is csak kétfélék). Erre egy nagyon egyszerű példa, amikor két objektum van és két összehasonlítás, amiknek eredménye szerint egyszer az egyik jobb a másiknál, egyszer pedig a másik jobb az egyiknél. Az eredmények szimmetriája miatt nyilvánvaló, hogy a két objektumnak egyforma erősségűnek kell lennie, így a várható értékek megegyeznek (azaz, ha az egyiket nullának rögzítjük, akkor a másik is az), de a loglikelihood függvénynek nincs egyértelmű maximuma h -ban, mert ha h tart nullához, akkor a függvény értéke szigorúan monoton nő. A határérték, amit azonban nem vesz fel, $-2\ln(2)$. (Itt felhasználtuk, hogy a sűrűségfüggvény 0-ra szimmetrikus.) Ezt könnyen ellenőrizhetjük, ha felírjuk a loglikelihood függvényt (itt figyelembe vettük, hogy az összehasonlítások eredményének szimmetriája miatt $m_1 = m_2 = 0$):

$$\ln(1 - F(h)) + \ln(F(-h)). \quad (7)$$

Ebben az esetben ugyan tudunk rangsort és erősségeket adni (egyformák, 0 erősségűek az objektumok és ezért holtverseny van), de nem tudjuk megadni se a döntetlen valószínűségét $\hat{h}$ ismerete hiányában, se a másik két lehetőség valószínűségét. Ez pedig az előrejelzés szempontjából fontos lenne. Nyilvánvaló, hogy hasonló módon kiterjeszthető a példa n objektum esetére is.

Ha nincs győzelem, akkor szintén abba a problémába ütközünk, hogy nem adható meg a h értéke, mert most h végtelenhez való növekedésekor nő szigorúan monoton módon a loglikelihood függvény. Ismét egy nagyon egyszerű példa adható erre az esetre. Megint két objektumot akarunk rangsorolni, amelyek egymás ellen mindig döntetlent játszottak. Ekkor ismét az eredmények szimmetriája miatt nyilvánvaló, hogy a két objektum egyforma erősségű, így a várható értékek megegyeznek (azaz, ha az egyiket nullának rögzítjük, akkor a másik is az), de a loglikelihood függvénynek ismét nincs egyértelmű maximuma h -ban, mert ha h tart végtelenbe, akkor a függvény értéke szigorúan monoton nő (most a határérték, amit nem vesz fel, 0). Ezt is könnyen ellenőrizhetjük, ha felírjuk a loglikelihood függvényt (a felírásakor már figyelembe vettük, hogy a szimmetria miatt $m_1 = m_2 = 0$ és az egyszerűség kedvéért csak egy döntetlennel számolunk):

$$\ln(F(h) - F(-h)). \quad (8)$$

Most sem tudjuk megadni a döntetlen, illetve a másik két lehetőség valószínűségét $\hat{h}$ hiányában. Nyilvánvaló, hogy hasonló módon n objektum esetére is kiterjeszthető a példa.

Arra, hogy a negyedik feltétel is szükséges, szintén egy egyszerű példát lehet adni. Három objektum rangsorolásakor tekintsük azt az esetet, amikor az első és a második között van egy döntetlen, míg a harmadik megveri mind a kettőt. Ez esetben látható, hogy az első három feltétel teljesül, de a negyedik nem. Ismét az eredmények szimmetriája miatt szükségeszerű, hogy az első kettő egyforma erősségű legyen, így feltehetjük, hogy mindkettő erőssége 0. Ezek után felírva a loglikelihood függvényt és véve az m_3 szerinti parciális deriváltját, a következő kifejezést kapjuk, ahol f -fel jelöltem a sűrűségfüggvényt (az F eloszlásfüggvénynek a deriváltját):

$$2 \frac{f(-h+m_3)}{F(-h+m_3)}. \quad (9)$$

Ismert, hogy differenciálható függvénynek akkor lehet egy adott pontban szélsőértéke, ha ott a parciális deriváltjai nullák. Mivel azonban a fenti parciális derivált pozitív, így nem lehet optimuma a loglikelihood függvénynek. Általában is elmondható, hogy ha egy objektumnak csak győzelme (veresége) van, akkor az ő várható értéke szerinti parciális derivált pozitív (negatív), így optimum biztosan nem lehet.

Arra, hogy a fenti feltételrendszer nem elégséges, a következő példát szeretném bemutatni (1. ábra).

Ismét két objektumot hasonlítunk össze, aminek eredménye szerint az első objektum egyszer győzött, egyszer pedig döntelent játszott a második objektummal. Az ábrához magyarázat: a pontok objektumokat jelölnek, a nyíl egy

1. ábra Minimális feltételt teljesítő eset



győztes mérkőzést jelent közöttük (a nyíl a vesztes felé mutat), míg a hullámos vonal egy döntetlen eredményt jelent.

Ebben az esetben teljesül a minimális feltételrendszer mindegyik feltétele, mégis maximumhely.

Ennek bizonyítására ismét írjuk fel a loglikelihood függvényt, majd vegyük a parciális deriváltjait. A képletekben m_2 -vel jelöltem a második objektum erősségét. Az első objektum erőssége m_1 lenne, de mivel ezt rögzíthetem nullának az általánosság megszorítása nélkül, így ez nem fog megjelenni a képletben. A loglikelihood függvény:

$$\ln(F(h + m_2) - F(-h + m_2)) + \ln(F(-h + m_2)) \quad (10)$$

Ennek h szerinti parciális deriváltja a következő:

$$\frac{f(h+m_2)+f(-h+m_2)}{F(h+m_2)-F(-h+m_2)} - \frac{f(-h+m_2)}{F(-h+m_2)} \quad (11)$$

m_2 szerinti parciális deriváltja pedig:

$$\frac{f(h+m_2)-f(-h+m_2)}{F(h+m_2)-F(-h+m_2)} + \frac{f(-h+m_2)}{F(-h+m_2)}. \quad (12)$$

A kettő összege a következő:

$$\frac{2f(h+m_2)}{F(h+m_2)-F(-h+m_2)} \quad (13)$$

Jól látható, hogy ez nem lehet nulla, ami miatt a parciális deriváltak egyszerre nem lehetnek nullák, vagyis a maximumhely biztosan nem létezik. Az is kiderült, hogy a loglikelihood függvény az $(1,1)$ irányban szigorúan monoton nő.

3.2. A Mihálykó-Orbán féle feltételrendszer

Ebben az alfejezetben egy ismert elégséges feltételrendszert mutatok be [16], amely általános, 0-ra szimmetrikus, logkonkáv sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlásokra alkalmazható. A későbbiekben bemutatom, hogy ez nem szükséges feltételrendszer.

A feltételrendszer három részből áll, melyek a következők:

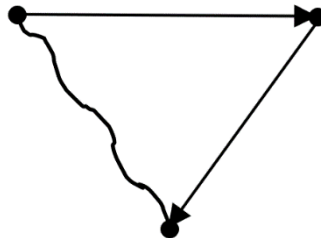
- Az első feltétel az, hogy az összehasonlított objektumok eredményei által meghatározott gráf összefüggő legyen. Ebben az esetben a gráfot a következőképpen definiáljuk: legyenek a csúcsok az összehasonlítani kívánt objektumok. Akkor van két objektum között él behúzva, ha vagy született döntetlen eredmény a két objektum között, vagy ha mind győzelem, mind vereség előfordult a két objektum között. Megjegyzem, hogy ez a gráf különbözik az előző fejezetben definiált összehasonlítási gráftól: lehet, hogy van összehasonlítás két objektum között, de ha mindig egyoldalú (mindig jobb vagy rosszabb) az összehasonlítás eredménye, akkor a két objektum között az eredmény-gráfban nincs él.
- A második feltétel az, hogy legyen legalább egy döntetlen. (Ez a feltétel ismét azt biztosítja, hogy ne lehessen kétopciós modellre redukálni a dolgot.)
- A harmadik feltétel az, hogy legyen legalább egy olyan objektumpár, amelynek tagjai között legyen mind győzelem, mind vereség az összehasonlítások során.

A harmadik feltételből egyértelműen következik, hogy a feltételrendszer csak akkor működik, ha legalább egy objektumpár esetében legalább két összehasonlítás történik. Sportversenyek esetében ez azt jelenti, hogy van visszavágó, ami nem mindig áll fenn (pl. svájci rendszerű sakkversenyek esetében), tehát ilyenkor a feltételrendszer nem használható. A labdarúgóbajnokságok során ugyan van visszavágó, de általában csak a szezon második felében, így csak ilyenkor állhat fenn ez a feltételrendszer, ezért ilyen esetekben korlátozottan használható. Ez egyértelműen hátrányos, viszont látni fogjuk, hogy a

feltételrendszer előnyének tekinthető, hogy a döntetleneket is jól fel tudja használni az eredmény-gráf összefüggősége szempontjából.

A feltételrendszer elégségességének bizonyítása megtalálható [16]-ban, ugyanitt találhatók példák arra is, amik azt bizonyítják, hogy elégséges, de nem szükséges a feltételrendszer. Egy ilyen egyszerű példa a következő: három objektum összehasonlításakor az első megveri a másodikat, az megveri a harmadikat és az első a harmadikkal döntetlent játszik (2. ábra). Ekkor a fenti feltételrendszer nem teljesül (a harmadik feltétel miatt), azonban mégis van egyértelmű maximumhely.

2. ábra A Mihálykó-Orbán feltételrendszert nem teljesítő eset



A 3. ábrán látható eset az előző példának egy kicsit módosított változata, amikor a feltételrendszer teljesülése miatt létezik az egyértelmű maximumhelye a loglikelihood függvénynek.

3. ábra A Mihálykó-Orbán feltételrendszert teljesítő eset



3.3. A Davidson féle feltételrendszer

A Davidson féle feltételrendszer eredetileg egy logisztikus eloszlást alkalmazó háromopciós modellre van bevezetve [19]. Ez a feltételrendszer két részből áll, melyek a következők:

- Legyenek az értékelni kívánt objektumok egy irányított gráf csúcsai, amely gráfban akkor van irányított él egyik objektumból a másikba, ha ő legyőzte a másikat. Az első feltétel a következő: Az így kapott gráf csúcsainak halmazát akárhogy bontjuk ketté két nemüres diszjunkt halmazra, mindig van az egyik halmazból a másikba és a másiból az egyikbe mutató él.
- A második feltétel ismét az, hogy van legalább egy döntetlen.

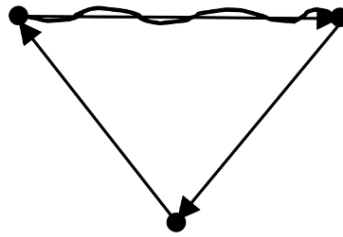
Erről a feltételrendszerről állította Davidson [19], hogy a Bradley-Terry modellhez nagyon hasonló esetben a maximumhely egyértelmű létezéséhez elégséges, de nem szükséges, bár egzakt bizonyítást nem adott rá.

Sejtésem szerint a feltételrendszer az általános Thurstone módszer esetében is egy elégséges, de nem szükséges feltételrendszer. Ezt a sejtést alátámasztja, hogy [16]-ban a szerzők bebizonyították, hogy többopciós modellnél a ML becslés egyértelműsége nem az eloszlásfüggvény alakján, hanem a hozzátartozó sűrűségfüggvény szigorú logkonkávitásán múlik. Szimulációs teszteredményeim szintén a sejtésem megalapozott voltát erősítik.

Ez a feltételrendszer alkalmazható olyan esetekben is, amikor nincs visszavágó két objektum között, ebben a tulajdonságában jobb a Mihálykó-Orbán féle feltételrendszernél. A feltételrendszer hátránya viszont, hogy a döntetleneket nem tudja beépíteni a gráf-összefüggőség vizsgálatába, így nagyszámú döntetlen és kevés győzelem esetén ennek a feltételrendszernek gondot okozhat kimutatni a maximumhely egyértelmű létezését, ellentétben a Mihálykó-Orbán félével.

A 4. ábra egy egyszerű esetet mutat, amikor teljesül a Davidson féle feltételrendszer:

4. ábra A Davidson féle feltételrendszert teljesítő eset



Látható, hogy ez az eset teljesíti a feltételrendszert, de a Mihálykó-Orbán féle feltételrendszer nem teljesül, így ez utóbbi ebben az esetben nem tudja jelezni a maximumhely létezését, pedig az létezik.

Az előbbi alfejezetben bemutatott 3. ábra esetében viszont a fordított helyzetet láthatjuk, ott a Mihálykó-Orbán féle feltételrendszer alapján tudjuk állítani, hogy van egyértelmű maximumhelye a loglikelihood függvénynek, míg a Davidson féle nem teljesül, így a maximumhely jelzésére ott nem alkalmas. Ez egyúttal azt is bizonyítja, hogy a Davidson féle feltételrendszer nem lehet szükséges.

A 5. ábrán látható esetben mindkét feltételrendszer teljesül.

5. ábra A Davidson és a Mihálykó-Orbán feltételrendszert is teljesítő eset



Megállapítható tehát, hogy sem a Mihálykó-Orbán féle, sem a Davidson féle feltételrendszer nem jobb egyértelműen a másiknál.

3.4. A Hybrid feltételrendszer

Az előbbi alfejezetek gráfjait és egyéb eseteket elemezve született az az elképzelés, hogy keressünk egy olyan feltételrendszert, mely a Mihálykó-Orbán és a Davidson féle feltételrendszerek előnyös tulajdonságait magában foglalja és így jobban alkalmazható, mint a másik kettő. Az alapötlet az volt, hogy a Davidson első feltétele helyett egy általánosabbat használjunk:

Definiáljunk egy gráfot a következőképpen: minden egyes csúcs egy értékelni kívánt objektum. A gráfban irányított élek vannak behúzva, melyeket a következőképpen adunk meg: Ha döntetlen van két objektum között, akkor annak reprezentálására van közöttük egy oda-vissza mutató (döntetlen) él, ha pedig az egyik legyőzte a másikat, akkor annak reprezentálására van a győztestől a veszteshez mutató (győztes) él. Ezek után az általánosabb első feltétel a következő: az így kapott gráf csúcspontjait akárhogy bontjuk szét két nemüres diszjunkt halmazra, a két halmaz csúcsai között vagy van döntetlen él; vagy van az egyik halmazból a másik halmazba mutató győztes él és a másik halmazból az egyik halmazba mutató győztes él is.

A Davidson féle második feltételt megőriztem, így ez a kettő adta a feltételrendszert.

Erről a feltételrendszerről azonban hamar kiderült, hogy nem elégséges, mert találtam több olyan esetet, amikor ugyan teljesült, viszont bizonyíthatóan nincs maximum (lásd például az 1. ábrán szereplő esetet). Viszont a szimulációk alapján azt tapasztaltam, hogy nagyon sok esetben (jóval többször, mint a másik kettő) valóban jól jelezte a maximumhely meglétét. Megvizsgálva azokat az eseteket, amikor fals jelzést adott (vagyis nem volt maximumhely), kiderült, hogy ilyenkor sosem volt olyan kör a kapcsolódó gráfokban, amikor a körben több lett volna a győzelem, mint a döntetlen (vagy egyáltalán nem volt kör). Emiatt kiegészítettem a két feltételt egy harmadikkal és így kaptam az általam Hybridnek elnevezett feltételrendszert.

Az előbb elmondottak szerint a Hybrid feltételrendszer három feltételből áll, melyek a következők:

- Definiáljunk egy gráfot a következőképpen: minden egyes csúcs egy értékelni kívánt objektum. A gráfban irányított élek vannak behúzva, melyeket a következőképpen adunk meg: Ha döntetlen van két objektum között, akkor annak reprezentálására van közöttük egy oda-vissza mutató (döntetlen) él, ha pedig az egyik legyőzte a másikat, akkor annak reprezentálására van a győztestől a veszteshez mutató (győztes) él. Nevezzük el ezt a gráfot hybrid gráfnak. Az első feltétel a következő: az így kapott hybrid gráf csúcspontjait akárhogy bontjuk szét két nemüres diszjunkt halmazra, a két halmaz csúcsai között vagy van döntetlen él; vagy van az egyik halmazból a másik halmazba mutató győztes él és a másik halmazból az egyik halmazba mutató győztes él is.
- A második feltétel, hogy van legalább egy döntetlen.
- A harmadik feltétel az, hogy legyen a gráfban legalább egy olyan irányított kör, amely esetében döntetlen élek és/vagy győzelem élek mentén körbe tudunk érni, valamint, hogy ebben a körben legyen a győzelmek száma több mint a döntetlenek száma.

Megjegyzem, hogy az első feltétel a Davidson féle feltételrendszer első feltételének nagyfokú általánosítása, míg a harmadik feltétel a Mihálykó-Orbán feltételrendszer harmadik feltételének nagyfokú általánosítása, hiszen a harmadik feltételnek megfelelő az az eset, ha van olyan pár, amely esetén mindegyik legyőzi a másikat legalább egyszer.

A feltételrendszer jobb alkalmazhatósága miatt az első feltétellel ekvivalens olyan feltételt fogalmazok meg, ami sokkal egyszerűbben ellenőrizhető.

Az ekvivalens feltétel a következő: a gráf bármely csúcspontjából kiindulva bármely csúcspontjába el tudunk jutni döntetlen és/vagy győzelem élek mentén.

Könnyen belátható, ha ez a feltétel teljesül, akkor bárhogy osztom két nemüres diszjunkt halmazra a gráf csúcsait, azok között lesz döntetlen vagy győzelem él is, ugyanis az egyik halmazban lévő bármely csúcsból van út a másik halmazban lévő bármely csúcsba és fordítva. Fordított esetben tegyük fel, hogy az eredeti feltétel fennáll és mutassuk meg, hogy van út bármely csúcsból bármely

csúcsba. Induljunk ki tetszőleges két csúcs esetében a keresett út elején lévő csúcsból álló egyelemű halmazból, és a többi csúcsot tartalmazó komplementer halmazból. A feltétel szerint az egyelemű halmazból vezet vagy döntetlen, vagy győzelem él a másik halmazba. Ha ez az él a kívánt másik csúccsal köt össze, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor ezzel a csúccsal bővítjük ki az előző egyelemű halmazt elvéve ezt a csúcsot a másik halmazból, és ezt az eljárást ismételjük addig, amíg el nem fogy a második halmaz, vagy elő nem állt a kívánt út. Akár így, akár úgy, végül előáll a kívánt út, vagyis ezzel igazoltuk a feltevést, hogy a két feltétel ekvivalens egymással. Az utóbbi feltétel lényegében a szélességi bejárással megegyező eljárást jelenti.

Ez azért nagyon kedvező számunkra, mert az utóbbi feltétel ellenőrzésénél a kód futási ideje $O(n^2)$, míg az eredeti feltétel ellenőrzése esetén $O(2^n)$, tehát nagy n csúcsszám esetében ez utóbbinak végrehajtása nagyon nehéz (már $n=20$ esetében is, mint a dolgozatban szereplő alkalmazáskor), vagy adott esetben akár szinte lehetetlen is.

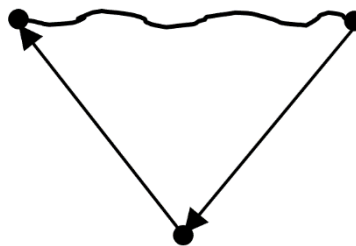
Könnyen belátható, hogy a feltételrendszer tudja detektálni az előző két alfejezetben bemutatott összes olyan esetben a maximumhelyet, amikor az létezett. Ez azért is könnyen látható, mert ha akár a Davidson féle, akár a Mihálykó-Orbán féle feltételrendszer teljesül, akkor teljesül a Hybrid féle is. Az első állítást tekintve triviális, hogy a Davidson első és második feltétele teljesülése maga után vonja a Hybrid féle első és második feltétel teljesülését. A harmadik feltétel pedig fent kell álljon, ha a Davidson féle feltételrendszer teljesül, mert a korábbi bizonyításhoz hasonlóan megmutatható, hogy ha teljesül a Davidson féle első feltétel, akkor bármely csúcsból bármely csúcsba vezet győzelmeken keresztül él, vagyis van győzelmekből álló kör is, vagyis teljesül a Hybrid harmadik feltétele is.

A második állításhoz pedig csak azt kell észrevenni, hogy ha az első feltétele teljesül a Mihálykó-Orbán feltételrendszernek, akkor teljesül a Hybrid feltételrendszernek is az első feltétele, ugyanis így a gráf bármely csúcspontjából kiindulva bármely csúcspontjába el tudunk jutni döntetlen és/vagy győzelem élek mentén. Végül két csúcs közötti oda-vissza győzelem megfelel egy kettő hosszúság

győzelem élekből álló körnek, így a Hybrid harmadik feltétele is fennáll, ha teljesül a Mihálykó-Orbán harmadik feltétele.

A 6. ábrán látható esetben a Hybrid feltételrendszere teljesül, míg sem a Mihálykó-Orbán féle, sem a Davidson féle nem, így csak a Hybrid képes kimutatni az ebben az esetben létező egyértelmű maximumhelyet, a másik kettő értelemszerűen nem képes erre.

6. ábra A Hybrid feltételrendszert teljesítő eset



Az is könnyen látható, hogy az előző alfejezetek olyan példáiban, amikor nem volt egyértelmű maximumhely, akkor a Hybrid feltételrendszer utolsó két feltételéből legalább az egyik feltétel nem teljesült. Arra, hogy az első feltétel is szükséges, szintén egy egyszerű példát lehet adni. Három objektum rangsorolásakor tekintjük azt az esetet, amikor az első győz és ki is kap a másodiktól és van köztük egy döntetlen is, míg a harmadik megveri mind a kettőt. Ez esetben látható, hogy a második és a harmadik feltétel teljesül, de az első nem. Ismét az eredmények szimmetriája miatt szükséges, hogy az első kettő egyforma erősségű legyen, így feltehetjük, hogy mindkettő erőssége 0. Ezek után felírva a loglikelihood függvényt és véve m_3 szerinti parciális deriváltját, a következő kifejezést kapjuk:

$$2 \frac{f(-h+m_3)}{F(-h+m_3)} \quad (14)$$

Mivel ez pozitív, így nem lehet optima a loglikelihood függvénynek, sőt további elemzéssel az is kiderülne, hogy m_3 számára nincs felső korlát - ami intuitíve érezhető, hiszen a harmadik objektumnak mindkét másik objektummal szemben csak győzelme van – mert növelve m_3 értékét a loglikelihood függvény szigorúan

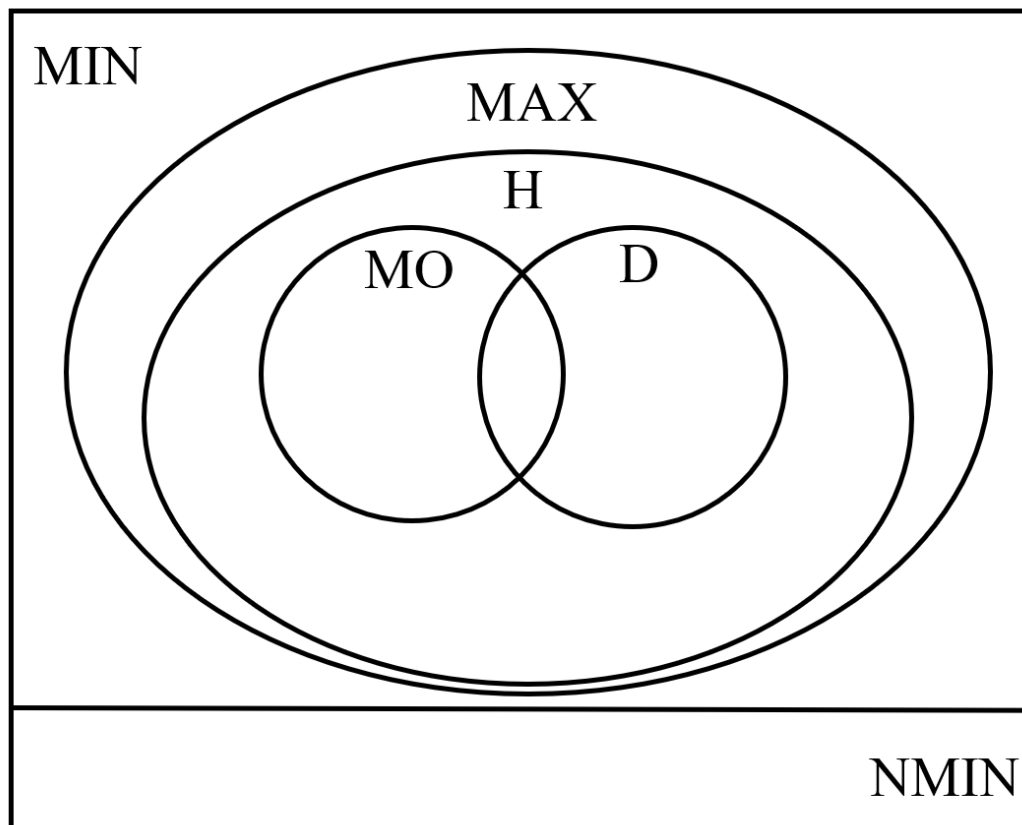
monoton nő. Egyébként ez általában is megfogalmazható jelenség: ha felbontható a csúcsok halmaza két olyan halmazra, amelynél az egyikből csak győzelem élek húzhatók a másikba, akkor ez utóbbiban szereplők várható értékeire nincs felső korlát (amennyiben a másik halmazban szereplő valamelyik objektum várható értékét tekintjük 0-nak).

A gyakorlati alkalmazást segíti az, hogy ha az első két feltétel teljesül, akkor már bizonyos részgráfok megléte biztosítja a maximumhely létezését. Ilyenek például a „győzelem-körök”, vagy a 6. ábrán látható gráf.

3.5. A feltételrendszerek közti összefüggés

Ebben az alfejezetben bemutatom, illetve a 7. ábrával szemléltetem az egyes feltételrendszerek közti összefüggéseket.

7. ábra A feltételrendszerek közti összefüggés



Az összes esetet két diszjunkt halmazra osztom szét. Egyik halmaz az NMIN-nel jelölt, amikor biztosan nincs maximumhely, mivel a minimális feltételrendszer sem teljesül, a másik MIN-nel jelölt, a minimális feltételrendszernek eleget tevők halmaza, itt létezhet már egyértelmű maximumhely. MAX-szal jelölöm azon eseteket, amelyekben létezik egyértelmű maximumhely. H-t használok a Hybrid, MO-t a Mihálykó-Orbán féle, illetve D-t a Davidson féle feltételrendszernek eleget tevő esetek halmazának jelölésére. Jól látható, hogy mivel, mint az előző alfejezetben kifejtettem, a Hybrid általánosítása a Mihálykó-Orbán illetve a Davidson feltételrendszernek, tehát az általa jelzett esetekbe beletartoznak a másik két feltételrendszer által jelzett esetek. Mint az ábrán is jól látható, az MO-val és D-vel jelölt halmazoknak van nemüres metszete,

de vannak olyan elemek is, melyek csak az egyik halmaznak az elemei. A Mihálykó-Orbán bizonyítottan elégséges feltételrendszer, tehát az MO halmazban lévők esetén biztosan létezik egyértelmű maximumhelye a loglikelihood függvénynek.

Reméltem, hogy ha matematikailag nem is tudom egyelőre bizonyítani, a szimulációs tesztek megerősítik azt a sejtésemet, hogy a Davidson elégséges, és a Hybrid szükséges és elégséges feltételrendszer, így a H-n kívüli eseteknél már nem létezik maximum, tehát a H és a MAX halmaz megegyezik egymással. Ezzel kapcsolatos eredményeimet a következő alfejezetben mutatom be.

3.6. A feltételrendszerek vizsgálata szimulációkkal

Munkámban szerettem volna átfogó vizsgálatokat végezni az egyes feltételrendszerek vizsgálatára. Ehhez szükséges volt eldönteni, hogy hány objektumot szeretnék és hányszor összehasonlítani, továbbá, hogy az egyes objektumok erőssége mekkora legyen, illetve a h értékét is meg kellett határoznom. 6 objektumra esett a választásom, ugyanis egyrészt ekkora elemszám esetén már komplex gráfok létrejöhetnek az összehasonlítások eredményeként, másrészt mivel szerettem volna rengeteg tesztet lefuttatni, így nagyobb elemszámnál már túlságosan hosszú lett volna a futási idő. 20 összehasonlítás véletlen szimulálása mellett döntöttem, abból adódóan, hogy már 5 mérkőzés hatására összefüggő gráfot lehet kapni, és így 20 összehasonlítás már elég sok ahhoz, hogy elég komplex gráfok képződjenek. Szerettem volna kellően nagy szimulációs számra tesztelni a feltételrendszereket, így egymilliószor futtattam le egy-egy 20 összehasonlításos esetet, hogy nagyon sok lehetőség előfordulása létrejöhessen. Minden összehasonlításkor az objektumok várható értéke szerint számítható valószínűségek alapján véletlenszerűen döntöttem el, hogy mi legyen az összehasonlítás eredménye (győzelem, döntetlen, vagy vereség) és így haladtam az első összehasonlítástól a huszadikig. Szintén véletlenül lett minden lépésnél kiválasztva az összehasonlítandó két objektum (így szélsőséges esetben előfordult, hogy ugyanaz a két objektum akár 4-szer is össze lett hasonlítva). A tesztek során szerettem volna átfogó képet kapni a feltételrendszerek alkalmazhatóságáról, így olyan tesztek készítését, melyben az egyes feltételrendszerek különbözőképpen tudnak szerepelni.

Ehhez, végiggondolva a feltételrendszerek egyes feltételeit, az alábbi intuitíve könnyen adódó megállapításokat vettem kiindulópontként:

- A Mihálykó-Orbán feltételrendszernek kedvez a sok döntetlen és a relatíve (a győzelempárokhoz viszonyítva) sok oda-vissza győzelem. (Ez az első és a harmadik feltétel alapján adódik.)
- A Davidson feltételrendszernek kedvez a kevés döntetlen és a relatíve sok oda-vissza győzelem. (Ez az első feltétel miatt valószínűsíthető, illetve amiatt, hogy elegendő egy döntetlen.)

- A Hybrid feltételrendszernek kedvez a sok döntetlen és a relatíve sok oda-vissza győzelem. (Ez az első és a harmadik feltétel miatt feltételezhető.)
- A Mihálykó-Orbán feltételrendszernek nem kedvez a kevés döntetlen és a relatíve kevés oda-vissza győzelem. (Szintén az első és a harmadik feltétel miatt.)
- A Davidson feltételrendszernek nem kedvez a sok döntetlen és a relatíve kevés oda-vissza győzelem. (Az első feltétel figyelembe vételével adódik.)
- A Hybrid feltételrendszernek nem kedvez a kevés döntetlen és a relatíve kevés oda-vissza győzelem. (Ugyancsak az első és a harmadik feltétel alapján várható.)

A fenti megállapítások igazolására szükségem volt olyan esetre, mikor sok döntetlen születik (ez modellezi például a sportágak közül a sakkot és a futballt), és olyanra, ahol nagyon kevés van (pl. ilyen a kézilabda). Ezt h nagy, illetve kis értéke tudja biztosítani. Ezen felül szükségem volt olyanra, ahol hasonló erősségűek az összehasonlított objektumok, mert ekkor átlagosan sok oda-vissza győzelem történik (például amikor nagyjából egyforma erősségű kézilabda csapatok játszanak oda-vissza egymással) és olyan esetre, amikor az erősségekben nagy eltérés van, mert ilyenkor átlagosan kevés oda-vissza győzelem születik (pl. a kézilabda Bajnokok Ligája csoportfordulója). Így összesen négyféle kombinációt állítottam össze a fent említett lehetőségeket figyelembe véve, ezeket nevezem majd szituációknak (1. táblázat). Ahhoz, hogy összehasonlításokat tudjak ténylegesen elvégezni, szükségem volt még az egyes objektumok konkrét erősségére és a h paraméter konkrét értékére. A h paramétert és a csapatok erősségeit úgy választottam meg némi kísérletezés után, hogy legyen olyan eset, amikor sok, illetve kevés a döntetlen, és legyen olyan, amikor relatíve sok, illetve kevés az oda-vissza győzelem. Ezek az értékek az 1. táblázatban láthatók.

Mind a négy szituációnál az első objektum erősségét nullának rögzítettem, és az ezt követő objektumokat mindig egy meghatározott erősséggel növeltem, ezt

mdiff-nek nevezem a későbbiekben. A következő táblázatban részletezem a négy szituáció tulajdonságait és bemeneti paramétereit:

1. táblázat A különböző esetek bemeneti paramétereit és tulajdonságait

szituáció	h	$mdiff$	döntetlenek aránya	oda-vissza győzelmek aránya a győzelempárokban belül
I	0,5	0,1	nagyobb	nagyobb
II	0,1	0,1	kisebb	nagyobb
III	0,5	0,5	nagyobb	kisebb
IV	0,1	0,5	kisebb	kisebb

A döntetlen valószínűsége egyforma erősségű objektumok összehasonlításakor $h=0,1$, illetve $0,5$ esetén $0,08$ -nak, illetve $0,38$ -nak adódik, normális eloszlást használva, vagyis elmondható, hogy az első esetben átlagosan kevés, a második esetben sok döntetlen várható. Hasonlóan kiszámítható, hogy lényegesen nagyobb a feltételes valószínűsége mindkét h esetén az oda-vissza győzelemnek két győztes összehasonlítás esetén, ha az *mdiff* $0,1$, mintha $0,5$, de itt ez nyilván nagyobb változatosságot mutat, attól függően, hogy milyen távol vannak egymástól erősségben az összehasonlítandó objektumok.

A szimulációktól azt vártam, hogy a korábbi intuitív megállapításokat igazolva megmutassa, hogy a Mihálykó-Orbán feltételrendszer a legjobb az I-es szituációban lesz és legrosszabb a IV-ben; a Davidson feltételrendszer a II-ben lesz a legjobb, míg a III-ban a legrosszabb; és végül a Hybrid feltételrendszer a Mihálykó-Orbán feltételrendszerhez hasonlóan az I-ben lesz a legjobb és a IV-ben lesz a legrosszabb.

A 2. táblázatban részletezem a szimulációk eredményeit, melyek megmutatják, hogy az egyes összehasonlítás-számok esetén hány teszt teljesítette az egyes feltételrendszereket. Minden esetben egymillió szimuláció történt, összesen $4 \times 20 \times 10^6$ és az eredményeket normális eloszlást használva kaptam.

Az első oszlopban az összehasonlítások száma szerepel, MIN-nel jelöltem a minimumfeltételrendszert teljesítő szimulációs esetek darabszámát, H-val a

Hybrid feltételrendszert teljesítők darabszámát, H/MIN-nel jelöltem a Hybrid és a Minimum feltételt teljesítő tesztek arányszámát, MO/H-val a Mihálykó-Orbán és a Hybrid arányszámát, míg D/H-val a Davidson és a Hybrid arányszámát. Azért az 5. összehasonlítástól kezdtem megjeleníteni a táblázatot, mert előtte nem lehetséges, hogy bármelyik feltételrendszer is teljesüljön (nem is teljesült, hiszen nem teljesült a minimális feltételrendszer első feltétele). Az is nyilvánvaló, hogy a Hybrid feltételrendszer legkorábban a hatodik összehasonlítást követően teljesülhet, a feltételrendszer harmadik feltételéből adódóan, ahogy ez látszik is a 2. táblázatból.

2. táblázat Szimulációk eredményei I, II szituációk esetében

	I					II				
	MIN	H	H/MIN	MO/H	D/H	MIN	H	H/MIN	MO/H	D/H
5	9560	0	0	-	-	142	0	0	-	-
6	43613	4777	0,1095	0,1532	0	1961	334	0,1703	0,009	0
7	103717	27402	0,2642	0,1444	0,0004	8578	2883	0,3361	0,0087	0,0087
8	184817	78749	0,4261	0,159	0,002	23730	11655	0,4912	0,0114	0,0405
9	278750	159120	0,5708	0,1835	0,0047	49451	30163	0,61	0,0151	0,0893
10	377536	260110	0,689	0,2167	0,0088	85959	60339	0,702	0,0222	0,1495
11	473592	369275	0,7797	0,2589	0,0144	131730	101883	0,7734	0,0328	0,2121
12	561522	475309	0,8465	0,3063	0,0229	184315	152258	0,8261	0,0468	0,2808
13	639588	572026	0,8944	0,3587	0,0332	241798	209341	0,8658	0,0666	0,3461
14	707146	656468	0,9283	0,4149	0,0462	301347	270380	0,8972	0,0917	0,4106
15	763451	726862	0,9521	0,4723	0,062	360613	331904	0,9204	0,1228	0,4701
16	810278	784266	0,9679	0,53	0,0811	418401	392724	0,9386	0,1591	0,5264
17	848471	830483	0,9788	0,5859	0,1034	473506	451170	0,9528	0,2011	0,5782
18	879358	867112	0,9861	0,6392	0,1286	524901	505858	0,9637	0,2472	0,626
19	903719	895464	0,9909	0,6885	0,1562	572178	556113	0,9719	0,2968	0,6691
20	923761	918198	0,994	0,7335	0,1864	615598	602253	0,9783	0,3482	0,7075

3. táblázat Szimulációk eredményei III, IV szituációk esetében

	III					IV				
	MIN	H	H/MIN	MO/H	D/H	MIN	H	H/MIN	MO/H	D/H
5	1723	0	0	-	-	31	0	0	-	-
6	7568	289	0,0382	0,128	0	278	23	0,0827	0	0
7	19092	2058	0,1078	0,0914	0,0005	1184	211	0,1782	0	0,0047
8	36981	6930	0,1874	0,0903	0,0012	3077	802	0,2606	0,0037	0,0262
9	61494	16625	0,2704	0,1047	0,0019	6561	2182	0,3326	0,0096	0,0527
10	91599	31429	0,3431	0,1164	0,0029	11776	4600	0,3906	0,0137	0,0757
11	126244	51549	0,4083	0,1349	0,004	19118	8336	0,436	0,017	0,0994
12	164681	77044	0,4678	0,1569	0,0053	28535	13499	0,4731	0,0224	0,1236
13	205697	107227	0,5213	0,1812	0,0066	39847	20060	0,5034	0,0312	0,1499
14	247817	141094	0,5693	0,2062	0,0084	53092	28310	0,5332	0,04	0,1729
15	290716	177919	0,612	0,234	0,01	68051	38027	0,5588	0,0507	0,1997
16	333110	216789	0,6508	0,2631	0,012	84507	49116	0,5812	0,064	0,2236
17	374483	256742	0,6856	0,2929	0,0138	102259	61648	0,6029	0,0792	0,2471
18	414437	297292	0,7173	0,3242	0,0159	120932	75295	0,6226	0,097	0,2674
19	453036	337703	0,7454	0,3567	0,0179	140637	89895	0,6392	0,1173	0,2879
20	490064	377782	0,7709	0,3889	0,0201	160807	105453	0,6558	0,139	0,3077

A táblázatban külön nem jelöltem az egyértelmű maximumhellyel rendelkező esetek számát, ugyanis ezek mindig egybeestek a Hybrid feltételrendszert kielégítő esetekkel, tehát akkor és csak akkor volt a programom szerint is maximumhely, amikor teljesült a Hybrid feltételrendszer. Így feltételezésünk szerint állítható, hogy a H mindig megegyezik a maximumhellyel rendelkező esetek számával.

Ezek alapján kijelenthető az, hogy szimulációim megerősítették azt a sejtést, miszerint a Hybrid feltételrendszer szükséges és elégséges feltételrendszer!

Mivel minden olyan esetben, amikor a Davidson feltételrendszer teljesült, a program szerint volt maximumhely, így a szimulációim megerősítették azt a sejtést is, hogy a Davidson feltételrendszer elégséges!

A 4. táblázatban részletezem a huszadik összehasonlítás után az egyes feltételrendszerek szerint a szimulációk adatait a szituációk szerint csökkenő sorrendben. O-val jelölöm az összes esetet (mindig egymillió volt).

4. táblázat Feltételrendszerek és szituációk közti összefüggések

Feltételrendszer	Kedvez			Nem kedvez
Mihálykó-Orbán	I	III	II	IV
MO/H	0,734	0,389	0,348	0,139
Davidson	II	IV	I	III
D/H	0,703	0,308	0,186	0,020
Hybrid	I	II	III	IV
H/O	0,918	0,602	0,378	0,105

Látható, hogy ahogy azt vártuk, a MO/H az I szituáció esetén a legnagyobb és IV esetén a legkisebb, ami alátámasztja a Mihálykó-Orbán feltételrendszerre vonatkozó korábbi megállapításainkat. Ugyanígy teljesülnek a megállapításaink a Davidson és a Hybrid feltételrendszer vonatkozásában (lsd. a D/H, illetve a H/O arányszámokat). Megfigyelhető, hogy igen komoly hatása van a szituáció jellegének mind a három feltételrendszer hatékonysága tekintetében (de kimondottan a Davidson félénel).

Látható, hogy míg az I-es szituáció esetében az esetek majdnem 92%-ban lett maximumhely a huszadik összehasonlítást követően, addig a IV-es szituáció esetében ez még a 11%-ot sem éri el, vagyis e tekintetben is nagy a szituáció jellegének a hatása.

Mindezek alapján egyértelműen megállapítható, hogy a döntetlenek és az oda-vissza győzelmek sokasága kedvez a maximumhely létezésének!

A táblázatokból jól kiolvasható, hogy a Mihálykó-Orbán és a Davidson feltételrendszer viszonya a következő: ahol a döntetlenek száma magasabb, ott az MO/H a nagyobb (az I-es és III-as szituációkban), vagyis az előbbi teljesít jobban. Míg ahol a döntetlenek száma kevés, ott a D/H arányszám a nagyobb (a II-es és IV-es esetekben), vagyis az utóbbi teljesít jobban, ami teljesen megfelel a feltételrendszerek jellegének. Ezzel egyúttal az is bebizonyosodott, hogy sem a Mihálykó-Orbán, sem a Davidson feltételrendszer nem okvetlen jobb a másiknál, erősségük a szituációtól függ.

Kiolvasható az is a 2. táblázatból, hogy a 8. összehasonlítást követően mind a négy szituáció esetében nő a H/MIN, az MO/H és a D/H arányszám, tehát egyre jobban teljesít a Hybrid, a Mihálykó-Orbán és a Davidson feltételrendszer is, azonban a 20. összehasonlításig jutva sem tudott a Hybrid 100%-ot, míg a Mihálykó-Orbán, illetve a Davidson feltételrendszer 74%-ot elérően teljesíteni a Hybriddel szemben. Kérdés, hogy van-e aszimptotikus határértéke az arányszámoknak, ha az összehasonlítások számával tartunk a végtelenbe, és melyik szituáció esetében mennyi ez a határérték? Ezt nem vizsgáltam, ez egy későbbi kutatás feladata lehet. Sejtésem, hogy a Hybrid minden határon túl meg tudja közelíteni a 100%-t mindegyik szituációban, még ha elérni teljesen soha sem tudja.

Az előzőekből az is kiderül, hogy minél kevesebb összehasonlításunk van, annál hatékonyabb a Hybrid feltételrendszer a másik két feltételrendszerhez képest.

4. Ranglisták felállításának informatikai háttere

Az általam készített alkalmazásokat C# nyelven, a NET Core keretrendszer segítségével készítettem el. Emellett döntésemet több dolog is indokolta, részint mert ezen a nyelven gyorsan lehet optimális, gyors kódot írni, mely átlátható. Részint ezzel a nyelvvel kapcsolatban már sok tapasztalatom van és nagyon szeretem is a szintaktikáját.

Munkám első lépéseként le kellett töltenem az all sports [6] adatbázisából az angol elsőosztályú labdarúgóbajnokság 2020/2021-es idény mérkőzéseinek eredményeit. Ezt az all sport api segítségével tettem meg. JSON formában voltak találhatóak az adatok, így a Newtonsoft.Json függvénykönyvtárat hívtam segítségül az adatok deserializálásához. Az adatokat ezután tisztítottam, illetve ellenőriztem, hogy helyesek az adatok, a 380 mérkőzés eredményeinek ellenőrzése fokozott figyelmet igényelt. A megtisztított és a program számára fontos információkat tartalmazó adathalmazt új formában elmentettem a későbbi használatra.

Nagy munka volt az optimalizáló elkészítése. Mivel az elemzett bajnokságban 20 csapat van, a függvény 21 változós, amely változók közül egy rögzíthető. Így a maximalizálandó loglikelihood függvény 20 változós. Azért is kellett jól használható, gyors optimalizálót írnom, mert egymillió szimuláció számláló teszt esetén, amikor szimulációnként 20 optimumot kell megtalálni, még gyors kóddal is rengeteg időt vesz igénybe a számítás. Mint korábban említettem, a szélsőérték megtalálásához a Nelder-Mead módszert választottam, mely gyorsan képes megtalálni a szélsőértékét a többváltozós loglikelihood függvénynek. A módszert egy későbbi fejezetben részletezem. Szerettem volna emellett kihasználni a modern számítógépek adta lehetőséget: a több magot és szálát. Ehhez párhuzamosítottam nagy tesztek esetén a kódot, melynek segítségével szinte lineáris gyorsulást értem el a kód futásában, így egy 12 magot és 20 szálát számláló i7 csúcsprocesszorral 5-6 óra alatt elkészült egy egymillió elemet számláló nagyteszt.

Az általam használt módszer másik fontos részét a loglikelihood függvény adja, melyet az általánosított Thurstone módszerhez használtam, ezen függvényt későbbi alfejezetben részletezem.

A kiszámított eredményeket először JSON serializálás segítségével json fájlba mentettem el későbbi felhasználásra.

Táblázatok segítségével szerettem volna megjeleníteni az eredményeket, ehhez a MigraDoc-ot használtam. Ezen függvénykönyvtár segítségével, gyorsan és szépen lehet rtf dokumentumot készíteni C# kódból.

Azáltal, hogy automatikusan lettek generálva a táblázatok, nem csak azok megbízhatóságát, hibamentességét tudtam biztosítani, de az ezek elkészítéséhez szükséges idő is jelentősen csökkent.

A teljes programot kis függvényekre bontottam, melyek jól paraméterezhetők lettek és könnyen lehet őket több helyen is meghívni az általánosságuk miatt. Nagymértékben automatizáltam a programot, hogy minél kevesebb felhasználói interakcióval a lehető leggyorsabban lehessen különböző tesztek, számításokat futtatni.

4.1. A Nelder-Mead optimalizáló

A fent említett módszert a [5]-ben található leírás alapján készítettem el.

A globális szélsőérték kereső általában minden egyes iterációval közelebb kerül az optimumhoz, míg végül azt nagyon nagy pontossággal megtalálja. Ennek a pontosságát vizsgáltam, 10000 iterációt követően 20 változós függvény optimumát 5 tizedesjegy pontosságra biztosan képes megadni, átlagos esetben még ennél is jobban teljesít, ezt későbbiekben részletezem.

Az algoritmus kezdetben felvesz $n+1$ pontot az n dimenziós térben, melyek egy nem elfajuló szimplexet határoznak meg a térben. Minden egyes iterációval általában egyre közelebb kerülnek az újonnan kiszámított szimplex csúcsai az optimumhoz. A futtatás végével konvergencia esetén az n dimenzióban lévő pontok egymásnak kis ε sugarú környezetében helyezkednek el. Az általam használt Nelder-Mead optimalizáló minimumhelyet keres, így a kiértékelni kívánt loglikelihood függvény ellentettjét vettem.

Úgy készítettem el a programot, hogy kiszűrhesse azon eseteket az optimalizáló, amikor helytelenül találná meg az optimum helyét. Ezt úgy tettem, hogy több különböző pontból indítottam el az optimalizálást, és a végeredménynél elvártam, hogy a különböző optimalizálások eredményei legalább 4 tizedesjegy pontosságra megegyezzenek, ennek hiányában úgy tekintettem, hogy nem konvergens az eljárás és nincs optimumhely.

A változók nevei és értelmei a következők, IterCount adja meg a maximális iterációszámot. Ha ezt nullának kapja a program, akkor 5 tizedesjegy pontosság elérése után áll le az optimalizálás. A *full* tömböt az *AllMiPoints* osztályok alkotják, melyekben eltárolom a változók értékeit, illetve a hozzájuk tartozó függvényértéket.

Az optimalizálás sebességét/igényét több tényező is befolyásolja. Az első ilyen tényező, hogy milyen komplex az optimalizálni kívánt függvény, a második ilyen tényező, hogy hány változós a függvény, harmadik az, hogy sikerül-e „jó” kiinduló szimplexet találni, végül, de nem utolsó sorban az is fontos kérdés,

milyen pontosságra törekszünk. Minél jobbra, annál tovább fog futni az optimalizáló. 20 változós függvény esetén a 5 tizedesjegy pontosságot biztosan eléri, de átlagosan 10 tizedesjegy pontos eredményt képes adni 10000 iteráció alatt.

Munkám során két megállítási kritériumot használtam, az egyik a korábban említett konstans maximális iterációs szám használata volt, de ennél jobb eredményt adott a következő: ha 5 tizedesjegyre megegyeztek a Nelder-Mead módszer által számított pontok a térben, akkor megállítottam az optimalizálást. Ez háromopciós modell esetén 6 objektum értékelésénél nagyjából 1000-6000 iterációs számot igényelt, 20 objektummal számolva 3000-9000 iterációra volt szükség.

8. ábra Nelder-Mead optimalizáló

```

while ((IterCount == 0 && !same) || g < IterCount)
{
    if (g % 1000 == 0)
    {
        same = true;
        int l = 0;
        while (same && l < full[0].point.Length)
        {
            int h = 1;
            while (h < full.Length && same)
            {
                if (same)
                {
                    same = (Math.Round(full[h].point[l], 5) == Math.Round(full[h - 1].point[l], 5));
                }
                h++;
            }
            l++;
        }
        if (same)
        {
            g = IterCount - 1;
        }
    }
    g++;
    if (g % 10000 == 0)
    {
        Console.WriteLine(g);
    }
    double[] xc = new double[N];
    for (int i = 0; i < N; i++)
    {
        double sum = 0;
        for (int j = 0; j < N; j++)
        {
            sum += full[j].point[i];
        }
        xc[i] = sum / N;
    }
    double[] xr = new double[N];
    for (int i = 0; i < N; i++)
    {
        xr[i] = 2 * xc[i] - full[N].point[i];
    }
    double new_res = modelType == 0 ? Functions.LogLikeliHoodFunction(xr, matrix, teamCount, advantagesType, optionsCount, isNormal, dSize) : Functions.LLSM(xr, matrix, teamCount, sportType);
    if (new_res <= full[0].result)
    {
        double[] xe = new double[N];
        for (int i = 0; i < N; i++)
        {
            xe[i] = xc[i] + 1.8 * (xr[i] - xc[i]);
        }
        double new_res2 = modelType == 0 ? Functions.LogLikeliHoodFunction(xe, matrix, teamCount, advantagesType, optionsCount, isNormal, dSize) : Functions.LLSM(xe, matrix, teamCount, sportType);
        if (new_res2 < full[0].result)
        {
            temp.result = new_res2;
            temp.point = xe;
            full[N] = temp;
        }
        else
        {
            temp.result = new_res;
            temp.point = xr;
            full[N] = temp;
        }
    }
    else if (full[0].result < new_res && new_res < full[N - 1].result)
    {
        temp.result = new_res;
        temp.point = xr;
        full[N] = temp;
    }
    else if (full[N - 1].result <= new_res)
    {
        double[] xz = new double[N];
        if (full[N].result < new_res)
        {
            for (int i = 0; i < N; i++)
            {
                xz[i] = 1.6 * xc[i] - 0.6 * xr[i];
            }
        }
        else
        {
            for (int i = 0; i < N; i++)
            {
                xz[i] = 0.4 * xc[i] + 0.6 * xr[i];
            }
        }
        double new_res3 = modelType == 0 ? Functions.LogLikeliHoodFunction(xz, matrix, teamCount, advantagesType, optionsCount, isNormal, dSize) : Functions.LLSM(xz, matrix, teamCount, sportType);
        if (new_res3 < new_res && new_res3 < full[N].result)
        {
            temp.result = new_res3;
            temp.point = xz;
            full[N] = temp;
        }
        else
        {
            for (int i = 1; i < N + 1; i++)
            {
                double[] xh = new double[N];
                for (int j = 0; j < N; j++)
                {
                    xh[j] = 0.5 * full[0].point[j] + 0.5 * full[i].point[j];
                }
                double new_res4 = modelType == 0 ? Functions.LogLikeliHoodFunction(xh, matrix, teamCount, advantagesType, optionsCount, isNormal, dSize) : Functions.LLSM(xh, matrix, teamCount, sportType);
                temp.result = new_res4;
                temp.point = xh;
                full[i] = temp;
            }
        }
    }
    Array.Sort<AllMiPoints>(full, (x, y) => x.result.CompareTo(y.result));
}

```

4.2. A loglikelihood függvény

Ebben a fejezetben bemutatom a háromopciós loglikelihood függvényt.

A módszer esetén használt bemeneti mátrixot a `help_matrix` jelenti. Ahogy a nevében is benne van, ez egy segédmátrix. A futtatás előtt kigyűjtöm egy egyszerűsített mátrixba az adatokat, hogy az optimalizálás közben időt nyerjek. Ezen háromdimenziós mátrix első két koordinátája arról dönt, hogy melyik két objektum volt összehasonlítva (i, j). A harmadik koordinátája jelezte az összehasonlítás eredményét. Az 1-es index esetén az i vereségeinek száma van megadva j -vel szemben (rosszabb volt nála). Ha a harmadik index értéke 2, akkor a mátrixelem döntetlenek számát tartalmazza a két objektum között (egyformák voltak), ha pedig az index értéke 3, akkor a mátrixelem az a szám, ahányszor i győzött j -vel szemben (jobb volt nála). A két csapat között történt összes összehasonlítás számát a mátrix harmadik koordinátájának 0-s értékén tárolom. Ennek az az oka, hogy ne kelljen a tömb több elemét is ellenőrizni, hogy nem nulla-e, ha el akarom dönteni, kell-e számításokat elvégezni.

A `points` nevű vektor tárolja az optimalizálni kívánt változókat, először sorban az objektumok erősségeit, majd a határoló pontot.

A függvényt úgy készítettem el, hogy mind normális, mind logisztikus eloszlást tudjak vele számítani paraméter függvényében, ehhez külső függvénykönyvtárakat használtam fel. Ez bármikor bővíthető egyéb eloszlással szükség esetén. A dolgozatomban található futtatási eredmények számítása során normális eloszlással futtattam a kódokat.

A kódban jól látható, hogy végigmegyünk a lehetséges (i, j) párokon, és ha volt köztük összehasonlítás, akkor kiszámoljuk a határolópontokhoz tartozó valószínűségeket, vagyis az $a10, a11, a12, a13$ értékeket.

Ezután kiszámoljuk az egyes intervallumba esésnek a valószínűségeit és ezeket megszorozzuk azzal a számmal ahányszor megszületett ez a döntés.

A függvény végén visszaadjuk a `sum` változóban a függvény értékét.

Teszteléseim során megállapítottam, hogy a loglikelihood függvényt igen nagy számban képes kiértékelni 1 másodperc alatt, a segédmátrixnak hála. 6 objektum esetén átlagosan 10 összehasonlítással számolva ~0.8 millió futtatást hajt végre egy szálon a számítógépem, 20 objektum esetén ez a szám már csak ~0.16 millió.

9. ábra *LogLikeliHood* függvény érdemi része

```
double h = points[teamCount];
for (int i = 0; i < teamCount - 1; i++)
{
    for (int j = i + 1; j < teamCount; j++)
    {
        if (help_matrix[i][j][0]>0)
        {
            double a10;
            double a11;
            double a12;
            double a13;
            if (isNormal)
            {
                a10 = normal.CumulativeDistribution(Double.NegativeInfinity);
                a11 = normal.CumulativeDistribution(-Math.Exp(h) + points[j] - points[i]);
                a12 = normal.CumulativeDistribution(Math.Exp(h) + points[j] - points[i]);
                a13 = normal.CumulativeDistribution(Double.PositiveInfinity);
            }
            else
            {
                a10 = logistic.DistributionFunction(Double.NegativeInfinity);
                a11 = logistic.DistributionFunction(-Math.Exp(h) + points[j] - points[i]);
                a12 = logistic.DistributionFunction(Math.Exp(h) + points[j] - points[i]);
                a13 = logistic.DistributionFunction(Double.PositiveInfinity);
            }
            double lose = Math.Log(a11 - a10);
            double draw = Math.Log(a12 - a11);
            double win = Math.Log(a13 - a12);
            if (help_matrix[i][j][1]> 0)
            {
                sum += help_matrix[i][j][1] * lose;
            }
            if (help_matrix[i][j][2] > 0)
            {
                sum += help_matrix[i][j][2] * draw;
            }
            if (help_matrix[i][j][3] > 0)
            {
                sum += help_matrix[i][j][3] * win;
            }
        }
    }
}
```

5. Alkalmazás

5.1. Angol Premier League mérkőzéseinek előrejelzése

Szerettem volna előrejelezni az angol elsőosztályú labdarúgóbajnokság 2020/21-es idényének eredményeit, ehhez szükségem volt arra, mikor lehet megfelelően alkalmazni az általánosított Thurstone módszert. Munkám során fordulónként szerettem volna kiértékelni az eredményeket, ugyanis egy forduló mérkőzései időben nagyjából egyszerre játszódnak le, ráadásul ha külön vennénk minden egyes meccset, akkor 380 elemű előrejelzési listát kéne bemutatnom, ami nehezen áttekinthető.

Felhasználva a 3. fejezet eredményeit, megállapítható volt, hogy a Hybrid feltételrendszer a 7-dik fordulóban teljesült először, a Davidson a 18-dikban, míg a Mihálykó-Orbán a 20-dik fordulóban. Az utóbbi várható is volt, hiszen akkor voltak az első visszavágó mérkőzések. Ami meglepő volt, hogy a Davidson csak a 18-dik fordulóban teljesült először, aminek azonban nyilván az az oka, hogy lényegét tekintve a bajnokság a 18-dik fordulóig a III-as szituációnak felelt meg (viszonylag sok döntetlen és kevés, pontosabban nulla darab oda-vissza győzelem).

Tehát az általánosított Thurstone módszer segítségével csak a 7-dik fordulót követően lehetett erősségeket számítani és így onnantól kezdve lehetett a jövőbeli mérkőzések eredményeit a segítségével előre jelezni.

A 5. táblázat mutatja meg a normális eloszlást alkalmazó általánosított Thurstone módszer által kapott eredményeket, illetve a bajnokságban elért helyezéseket és pontszámot.

5. táblázat Az angol bajnokság eredményei

Helyezés	Név	m_i	Hivatalos helyezés	Pontszám
1	Manchester City	0,83536	1	86
2	Manchester Utd	0,536396	2	74
3	Liverpool	0,384172	3	69
4	Chelsea	0,352004	4	67
5	Leicester	0,294137	5	66
6	West Ham	0,289697	6	65
7	Tottenham	0,217392	7	62
8	Arsenal	0,179876	8	61
9	Everton	0,142748	10	59
10	Leeds	0,141982	9	59
11	Aston Villa	0,022173	11	55
12	Newcastle	-0,1802	12	45
13	Wolves	-0,18174	13	45
14	Crystal Palace	-0,20273	14	44
15	Brighton	-0,21818	16	41
16	Southampton	-0,24562	15	43
17	Burnley	-0,3378	17	39
18	Fulham	-0,5278	18	28
19	West Brom	-0,59606	19	26
20	Sheffield Utd	-0,9058	20	23

Az m_i -k jelentik a táblázatban az egyes csapatok mögött levő valószínűségi változók várható értékét (átlagos erősségüket) azzal a feltétellel, hogy az összegük nulla. Az utolsó két oszlopban található a bajnokság hivatalos rangsora és az egyes csapatok által szerzett pontok. Mint jól látható, összesen két helyen van helycsere az általánosított Thurstone módszer által adott rangsor, illetve a hivatalos rangsor között, az is csak az első harmad után, vagyis az erősségek nagyon jól korrelálnak a szerzett pontszámokkal. Mondható, hogy a módosított sorösszeg módszer (a győzelemért nem 2, hanem 3 pont járt) és az általánosított Thurstone módszer lényegében ugyanazt a rangsort adta. Ami azonban figyelemre méltó, hogy pár helyen a pontszámok kis eltérése és a sorrend egyezése ellenére az erősségben viszonylag nagy különbség van, például a 4. és az 5. helyezett csapat esetében. Akkor, amikor nem egyezik a sorrend, akkor mind az erősségekben, mind a pontszámokban igen kevés volt az eltérés az érintett csapatok között.

Kiszámoltam az otthoni győzelem, döntetlen, vereség relatív gyakoriságát, melyek közül az első hét forduló alatti 70 mérkőzésre és az összesre (380-ra) vonatkozót az 6. táblázatban megadom. Az első adat azért érdekes, mert innentől kezdve tudtam előre jelezni a további fordulók eredményeit és az előrejelzés során volt, amikor erre szükség volt, a második pedig a teljesség miatt érdekes. Meglepő módon az angol bajnokságban a hazai pálya összességében hátrányt jelent a relatív gyakoriságok tükrében, ugyanis az otthoni vereségnek van a legnagyobb relatív gyakorisága, még ha nem is sokkal több, mint a hazai győzelemnek. Jól látható, hogy a döntetlenek is viszonylag gyakoriak, a meccseknek több mint ötöde lett az.

6. táblázat Hazai győzelem, döntetlen, vereség relatív valószínűsége

Forduló	Győzelem	Döntetlen	Vereség
7	0,357	0,186	0,457
38	0,379	0,218	0,403

Mint azt korábban említettem, az általánosított Thurstone módszer segítségével szerettem volna előre jelezni az következő forduló mérkőzéseinek eredményeit. Ehhez négy módszer alkalmaztam, melyeket sorra T1, T2, T3, T4-el jelölök, ebből az első kettő a Thurstone módszeren alapszik, míg a második kettő kontroll módszer.

- A T2-es módszer a 2.2.-es alfejezetben bemutatott jövőbeli valószínűségekre támaszkodik. Az előző fordulók alapján meghatározott (becsült) aktuális $\hat{m}_i$ várható értékek, illetve $\hat{h}$ segítségével a (4)-(6) képletek alapján azt az eredményt jelezzük előre, aminek a legnagyobb a valószínűsége.
- A T1-es módszer finomított verziója a T2-esnek. Ezen előrejelzésnél figyelembe vesszük az előző módszer által kiszámított valószínűségek nagyságát és az alapján egy bonyolultabb módon meghatározott döntést hozunk. Először, ha a legnagyobb valószínűség egy bizonyos korlát felett van, akkor azt az eredményt jelezzük előre, amelyiknek a valószínűsége a legnagyobb. Ha a legnagyobb valószínűség nincs efelett

a korlát felett, de a másik kettő valószínűségének összege meghalad egy bizonyos (másik) értéket, akkor e kettő közül azt választom ki, amelyiknek a valószínűsége a nagyobb. Amennyiben ez sem áll fenn, akkor ebben az esetben döntetlent jelzek előre. Ehhez a módszerhez meg kell határozni az előzőekben említett két korlátot.

- A T3-as előrejelzés a sorösszeg módszeren alapszik, ezen esetben az egyes csapatok esetén összeadjuk az általuk szerzett pontokat a következőképpen: a győzelem 2-t, a döntetlen 1-t ér. Ha a két összehasonlítani kívánt objektum közül az egyiknek nagyobb az így kapott pontszáma, akkor annak a győzelmét jelezzük előre, ha pedig azonosak, akkor döntetlent jelzünk előre.
- A T4-es módszer esetén a következő fordulóban játszódó mérkőzés esetén arra az eredményre fogadtam, melynek az addigi fordulók alapján a relatív gyakorisága a lehető legnagyobb volt, tehát ha idegen győzelem volt addig a legtöbb mérkőzés eredménye, akkor mindig arra tippeltem.

A T1-es módszerhez tartozó optimális két korlátot a rácsmódszert alkalmazva határoztam meg, amelynél az első korlát esetében a változót 0,3333-tól 0,4133-ig, 0,002-es lépésközzel léptettem. A második korlát esetében a változót 0,6666-tól 0,7466-ig ugyancsak 0,002-es lépésközzel változtattam. A két kezdőértéket a három eshetőség egyenlő valószínűségű (0,3333) előfordulásához, illetve annak duplájához igazítottam, mindkét esetben 0,002-vel megnövelve azt. A rácsmódszer segítségével megkerestem az a pontot, ahol az össztalálat a lehető legnagyobb volt az első 23 forduló tekintetében. Mivel ezen mérkőzéseket a paraméterek meghatározására használtam, így csak az utolsó 15 fordulót jeleztem előre. Ez az optimum a (0,3913, 0,6966) párnál volt. Ezt használtam a későbbiekben a T1 módszer esetében.

A fentiekkel azt akartam kideríteni és megmutatni, hogy van-e szerepe a két korlátnak és érdemes-e ebből a szempontból vizsgálni, javítható-e így a találati arány. Az eredmények azt mutatták, hogy érdemes ilyen módon javítani a T2 módszert és annak is van szerepe, hogy mekkora a két korlát.

Ezek után azt feltételeztem, ha időben súlyozom a mérkőzéseket, akkor jobb előrejelzést érhetek el, mert úgy gondoltam, hogy az aktuális erősségek meghatározásakor az időben közelebbi meccsek fontosabbak, mint a távolabbiak. Ezt úgy kívántam figyelembe venni, hogy a legutóbbi forduló mérkőzéseinek súlyát mindig egynek vettem, az azt megelőző fordulókban lévők súlyát pedig a következő képlettel számoltam:

$$q^{n-i}, \quad (16)$$

ahol q jelenti az elévülés mértékét, n jelenti a legutóbbi forduló sorszámát, i pedig azt, hogy hányadik fordulóban volt a mérkőzés. Munkám során a következő q értékeket használtam: 1; 0,975; 0,95; 0,925; 0,9 és 0,7, ismét abból a célból, hogy kiderítsem van-e hatása az időbeli súlyozásnak a találati arányra.

A 7. táblázatban részletezem az egyes módszerek és q -k használata során a 150 előre jelzett mérkőzésből eltalált mérkőzések számát, illetve azt is, ha az elejétől fogva alkalmaztuk volna az egyes módszereket, akkor hány találatunk lenne 310 mérkőzésből.

7. táblázat Az egyes módszerek és q -k szerinti találatszámok

módszer\ q	1	0,975	0,95	0,925	0,9	0,7
T1	77/159	80/163	81/159	78/157	79/155	72/147
T2	78/158	79/158	78/153	79/151	78/149	72/146
T3	80/157	80/157	79/152	77/149	77/149	68/140
T4	61/121	61/115	60/115	60/115	55/113	55/110

Jól leolvasható a táblázatból, hogy a T1-es módszer összesítve minden esetben jobb, mint a többi módszer, vagyis a két korlát szerepeltetésének van hatása és az is látszik a táblázatból, hogy a q -nak is van szerepe. A T1 $q = 0,95$ esetén 81 mérkőzést tudott volna helyesen előre jelezni a 150-ből, ami azt jelenti, hogy a mérkőzések 54%-t helyesen találta el.

Ezt követően csak a T1-es módszer előrejelzésére fókuszálok és ezzel kapcsolatban mutatom be részletesebben az eredményeket.

A 8. táblázatban találhatóak az egyes q -k szerint fordulónként az eredmények, az hogy 10-10 mérkőzésből hányat talált el a T1-es módszer.

8. táblázat T1 módszer találati számai egyes fordulókban q -k szerint

forduló\ q	1	0,975	0,95	0,925	0,9	0,7
24	4	5	6	6	6	6
25	5	6	6	6	6	6
26	5	5	5	4	4	4
27	4	4	4	4	4	5
28	5	5	6	6	5	3
29	5	6	6	5	5	3
30	6	6	5	4	4	4
31	5	5	5	5	7	6
32	4	4	4	4	4	3
33	5	5	5	5	5	6
34	5	5	5	5	5	3
35	6	5	5	5	5	4
36	5	5	5	5	5	4
37	6	7	7	7	7	7
38	7	7	7	7	7	8

Most részleteiben is látható, hogy általában fordulónként a $q=0,95$ adja a legtöbb találatot. Az is látható, hogy fordulóról fordulóra haladva – nem túl látványosan, de trendszerűen – javul a találati arány. Ezt sokkal jobban mutatja a 9. táblázat, amelyben megjelenítem az egyes q -k és az utolsó 15, 10, 5 illetve 3 fordulóra vonatkozó előrejelzések százalékos eredményét.

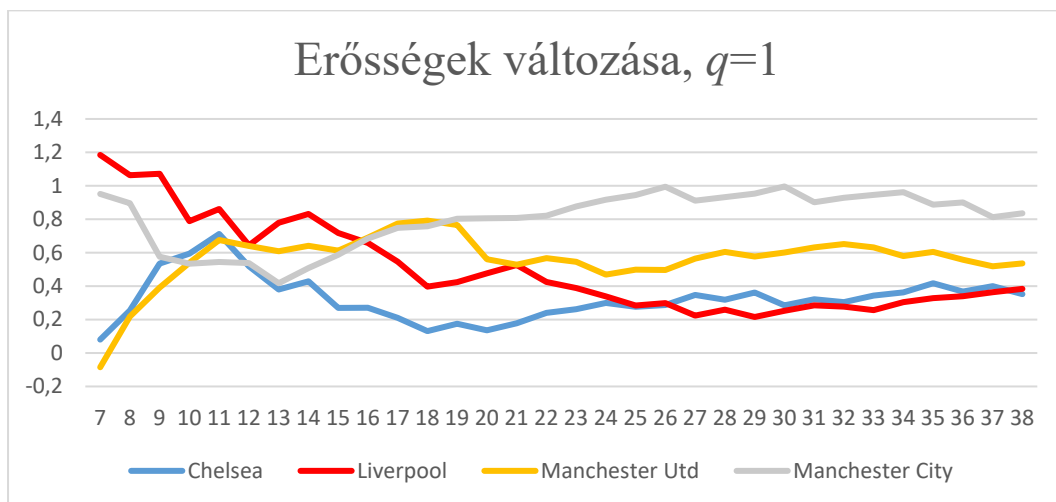
9. táblázat A T1 módszer előrejelzésének pontossága a q -k és az utolsó fordulók szerint százalékban

q \fordulók	utolsó 15	utolsó 10	utolsó 5	utolsó 3
1	51,33%	54,00%	58,00%	60,00%
0,975	53,33%	55,00%	58,00%	63,33%
0,95	54,00%	54,00%	58,00%	63,33%
0,925	52,00%	52,00%	58,00%	63,33%
0,9	52,67%	54,00%	58,00%	63,33%
0,7	48,00%	48,00%	52,00%	63,33%

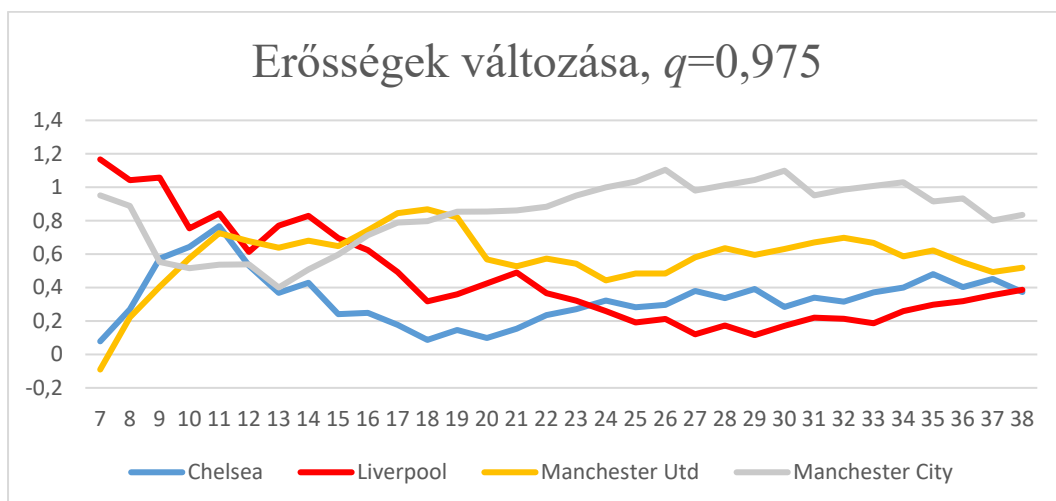
Azt gondolhatnánk, hogy a $q = 0,95$ esetén elért 54% nem sok, de nemzetközi összehasonlításban igenis megállja a helyét. A [9, 22]-es cikkekben a szerzők jóval összetettebb (gólok számát és a hazai pálya hatását is erőteljesen figyelembe vevő) módszereket használva is legjobb esetben legfeljebb 53,52%-os valószínűséggel tudták előre jelezni az eredményeket. Ezt figyelembe véve valóban jónak mondható az 54%-os előrejelzés. Csak az utolsó fordulót tekintve az előrejelzés pontossága tovább nőtt (és szinte q -tól függetlenné vált), és jól látható, hogy a $q = 0,95$ esetén az utolsó 50 mérkőzést tekintve kapott 58%-os, és az utolsó 30 mérkőzés esetén adódott 63.33%-os eredmény nemzetközi viszonylatban is igencsak versenyképes. Ha pedig csak a legutolsó 2 forduló 20 mérkőzését nézzük, akkor már elérjük a 70%-t! Az ilyen típusú előrejelzések esetén pedig minden százaléknövekedésnek nagy hatása lehet a nyereményre, már amennyiben ezt a módszert fogadásra kívánnánk használni.

A következő ábrákon szeretném bemutatni azt is, hogy hogyan változik a legjobb négy csapat erőssége a $q = 1; 0,975$ és $0,95$ -nél fordulóról fordulóra haladva. Részint azért csak négy csapat erősségét ábrázoltam, hogy áttekinthetők legyenek az ábrák, részint mert a negyedik után erősségben egy viszonylag nagy csökkenés történt az 5. táblázat tanúsága szerint. Az összehasonlíthatóság érdekében a csapatok összerősségét nullának vettem, így az egymáshoz való viszonyuk időbeli változása jól leolvasható az ábrákról. Azt vártam, hogy a q csökkenésével jobban fognak változni a csapatok erősségei, illetve, hogy a kezdeti eredmények változékonysága után csökkenni fognak a kilengések.

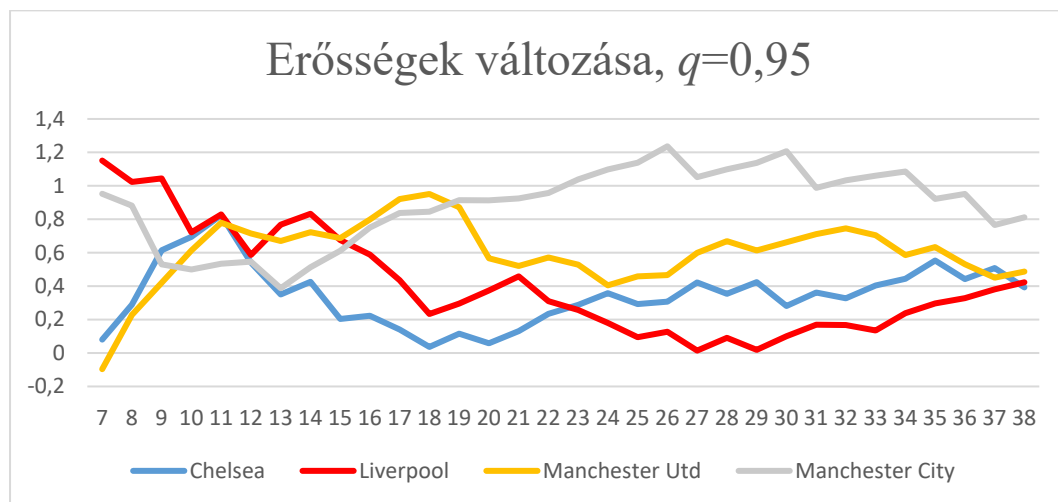
10. ábra A négy legerősebb csapat erősségeinek változása $q=1$ esetén



11. ábra A négy legerősebb csapat erősségeinek változása $q=0,975$ esetén



12. ábra A négy legerősebb csapat erősségeinek változása $q=0,95$ esetén



Ahogy vártuk, minél nagyobb a q , annál kisebb az erősségek változása, annál időtállóbb egy csapat erőssége. Tehát ha q kicsi, akkor jobban figyelembe veszi az időben közelebbi mérkőzéseket, így egy olyan mérkőzészseredmény mely az erősség alapján nem volt várható, jobban befolyásolja a csapat jövőbeli erősségét. Míg ha q nagyobb, akkor kevésbé befolyásolja az ilyen fajta mérkőzés a csapat erősségének változását. Az is látható, hogy a vártak megfelelően a kezdeti nagyobb fordulóról-fordulóra történő ingadozás lecsökkent, ahogy haladtak időben előre a csapatok.

6. Összefoglalás

Az általánosított Thurstone módszer loglikelihood függvénye kiértékelhetőségével kapcsolatban bemutattam és matematikai módszerekkel elemeztem egy általam kidolgozott szükséges, és egy feltételezetten szükséges és elégséges feltételrendszert. Összevettem ezeket két korábbi ismert elégséges feltételrendszerrel. Megmutattam, hogy a Hybrid rendszer általánosítása a másik kettőnek.

Nagyon nagyszámú véletlen szimuláción alapuló tesztekkel alátámasztottam azokat az elméleti megfontolásokat, amelyek azt sejtették, hogy a Hybrid feltételrendszer egy szükséges és elégséges feltételrendszer, így most már nagyon valószínűnek mondható ennek a sejtésnek az igaz volta. Emellett kiderült az is a tesztekől, hogy esetenként közel egy nagyságrenddel jobb a másik két korábban ismert elégséges feltételrendszerénél, amelyek viszont - a körülményektől függően - az előzetes elméleti megfontolásoknak megfelelően bizonyultak jobbnak, vagy rosszabbnak egymásnál. Sikert az a sejtést is alátámasztani, hogy a döntetlenek, illetve az oda-vissza győzelmeknek az aránya nagy hatással van a feltételrendszerek hatékonyságára. A fentiek alapján lehetőség nyílik a későbbiekben olyan eljárást kidolgozni, ami minimalizálhatja az aktuális szituációkor szükséges összehasonlítási számot.

A fent említett feltételrendszerek alkalmazhatóságát egy konkrét alkalmazásban is megmutattam, nevezetesen az angol elsőosztályú bajnokság, a Premier League esetében. Ebben az alkalmazásban az általánosított Thurstone módszer is bizonyított, számos előnyére fény derült. Sikert többek között fordulóról fordulóra haladva a csapatok időben változó erősségét kiszámítani, az abból adódó valószínűségek segítségével hatékonyan előre jelezni a jövőbeli mérkőzések kimeneteleit. A jobb találati arány érdekében időben is súlyoztam az egyes mérkőzéseket, azaz az időben közelebbi mérkőzéseket jobban figyelembe véve javítottam az alaplátványt. Összeségében már nemzetközi kitekintésben is versenyképes módszert sikerült kidolgoznom, dacára annak, hogy a hazai pálya hatását csak közvetetten és korlátozottan vettem figyelembe, míg a gólkülönbséggel

egyáltalán nem növeltem az előrejelzés információs bázisát. A későbbiekben ezek beépítésével és az időfaktor, valamint a háttérben meghúzódó valószínűségi eloszlás optimális megválasztásával esély látszik egy még pontosabb eljárás megalkotására.

Sikerült elérnem, hogy a program nagyságrendekkel gyorsabb legyen az előző verzióknál, melyet párhuzamosítással, optimalizálás segítségével értem el. Nagymértékben automatizáltam a tesztek, és megoldottam, hogy minden egyes teszt újra kiértékelhető legyen, amennyiben erre szükség van.

A jövőbeli terveim között legfőbb célként szerepel, hogy matematikai úton bizonyítsam a Hybrid feltételrendszer szükséges és elégséges voltát és erre alapozva egy optimális összehasonlítási eljárást dolgozzak ki.

A jövőben szeretnék általános s opciós esetekre is találni szükséges és/vagy elégséges feltételrendszereket, az előnykezelést alkalmazó modellek esetében is.

Szeretném az előrejelző módszeremet abban az értelemben is tovább fejleszteni, hogy az előző évi bajnokság eredményeit figyelembe véve hamarabb meg tudjam állapítani a csapatok erősségét, és így korábbi fordulóban tudjak már erősségeket megadni, hogy így növelhető legyen az előrejelzés hatékonysága.

Végezetül szeretném a fordulóról-fordulóra történő előrejelzésbe beépíteni és alkalmazni az általánosított Thurstone módszer előnyt is alkalmazó verzióit és figyelembe venni pár, az előrejelzést komolyabban befolyásoló tényezőt is, hogy ezzel is tudjam az előrejelzés pontosságát növelni.

7. Jegyzékek

7.1. Irodalomjegyzék

- [1] Bozóki, S., Fülöp, J., Rónyai, L. (2010). On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1), 318-333.
- [2] Carlsson, C., & Walden, P. (1995). AHP in political group decisions: A study in the art of possibilities. *Interfaces*, 25(4), 14-29.
- [3] Fahrmeir, L., Heumann, C., Künstler, R., Pigeot, I., Tutz, G. (2004). *Statistik*, Springer
- [4] Ford, L. R., Jr., (1957). Solution of a Ranking Problem from Binary Comparisons, *American Mathematical Monthly*, 54, 28-33.
- [5] Hartung, F. (2004). Bevezetés a numerikus analízisbe, Veszprémi Egyetemi Kiadó, Veszprém
- [6] <https://allsportsapi.com/> (letöltés dátuma 2021. november 15.) All Sports API
- [7] H. Stern, (1990). A continuum of paired comparisons models. *Biometrika*, 77(2), 265-273
- [8] Hwang, J.W.; Kim, J.Y. A study on industrial security psychology. In *Proceedings of the 2020 IEEE International Conference on Big Data and Smart Computing (BigComp)*, Pusan, Korea, 19–22 February 2020; pp. 500–506.
- [9] Jan Lasek, Marek Gagolewski, (2021). Interpretable sports team rating models based on the gradient descent algorithm, *International Journal of Forecasting*, 37(3), 1061-1071
- [10] J. González-Díaz, Ruud Hendrickx, Edwin Lohmann, (2014). Paired comparisons analysis: an axiomatic approach to ranking methods, *Soc. Choice Welfare*. 42(1), 139-169
- [11] Mihálykóné Orbán, É., Mihálykó, Cs., Kajtár, P., (2019). Általánosított Thurstone-módszer alkalmazásokkal, *Alk. Mat. Lapok*, 36(2), 255-262.
- [12] Mihálykóné Orbán, É., Mihálykó, Cs., (2021). Thurstone módszer általánosítása előnyök figyelembe vételére, *Sigma* 52(1), 47-60
- [13] Mihálykó, Cs., Mihálykóné Orbán, É., Gyarmati L., (2021). Thurstone módszer általánosításai, *Alk. Mat. Lapok*, 38(1), 127-140.
- [14] Montequín, V.R.; Balsera, J.M.V.; Piloñeta, M.D.; Pérez, C.Á. A Bradley-Terry model-based approach to prioritize the balance scorecard driving factors: The case study of a financial software factory. *Mathematics* 2020, 8, 276.
- [15] Orbán-Mihálykó, É., Mihálykó, C., Koltay, L. (2019). A generalization of the Thurstone method for multiple choice and

- incomplete paired comparisons. Central European Journal of Operations Research, 27(1), 133-159.
- [16] Orbán-Mihálykó, É., Mihálykó, C., Koltay, L. (2019). Incomplete paired comparisons in case of multiple choice and general log-concave probability density functions. Central European Journal of Operations Research, 27(1), 515-532.
- [17] Orbán-Mihálykó Éva; Mihálykó Csaba; Gyarmati László, (2022). Application of the Generalized Thurstone Method for Evaluations of Sports Tournaments' Results, Knowledge, 2(1),157-166
- [18] Orbán-Mihálykó É. , Mihálykó Cs., Gyarmati L., (2021). The evaluation of sports tournaments' results by Thurstone methods, in Book of Abstracts of 91st online meeting of the EURO Working Group in Multi Criteria Decision Aiding (EWG-MCDA), pp. 32-33
- [19] Roger R. Davidson, (1970). On Extending the Bradley-Terry Model to Accommodate Ties in Paired Comparison Experiments, Journal of the American Statistical Association, 65,317-328
- [20] Saaty, T. L., (1990). How to make a decision: the analytic hierarchy process, European Journal of Operational Research, 48(1), 9-26.
- [21] Siyi Chen, Wehao Gui, (2020). Statistical Analysis of a Lifetime Distribution with a Bathtub-Shaped Failure Rate Function under Adaptive Progressive Type-II Censoring, Mathematics, 8(5),670
- [22] Siem Jan Koopman, (2019). Forecasting football match results in national league competitions using score-driven time series models, International Journal of Forecasting, 35(2),797-809
- [23] Thurstone, L. L., (1927). A law of comparative judgement. Psychol. Rev. 34(4), 273-286.
- [24] Wang, X.Y.; Li, G.; Tu, J.F.; Nguyen, K.T.T.; Chang, C.Y. Sustainable education using new communication technology: Assessment with analytical hierarchy process (AHP). Sustainability 2021, 13, 9640.
- [25] Yuan Ma, Wenhao Gui, (2021). Competing Risks Step-Stress Model with Lagged Effect under Gompertz Distribution, Mathematics, 9(24), 3206

7.2. Ábrajegyzék

1. ábra Minimális feltételt teljesítő eset	18
2. ábra A Mihálykó-Orbán feltételrendszert nem teljesítő eset.....	21
3. ábra A Mihálykó-Orbán feltételrendszert teljesítő eset.....	21
4. ábra A Davidson féle feltételrendszert teljesítő eset	23
5. ábra A Davidson és a Mihálykó-Orbán feltételrendszert is teljesítő eset	23
6. ábra A Hybrid feltételrendszert teljesítő eset	27
7. ábra A feltételrendszerek közti összefüggés	29
8. ábra Nelder-Mead optimalizáló.....	42
9. ábra LogLikeliHood függvény érdemi része.....	44
10. ábra A négy legerősebb csapat erősségeinek változása $q=1$ esetén	52
11. ábra A négy legerősebb csapat erősségeinek változása $q=0,975$ esetén	52
12. ábra A négy legerősebb csapat erősségeinek változása $q=0,95$ esetén	53

7.3. Táblázatjegyzék

1. táblázat A különböző esetek bemeneti paraméterei és tulajdonságai ...	33
2. táblázat Szimulációk eredményei I, II szituációk esetében.....	34
3. táblázat Szimulációk eredményei III, IV szituációk esetében.....	35
4. táblázat Feltételrendszerek és szituációk közti összefüggések	36
5. táblázat Az angol bajnokság eredményei	46
6. táblázat Hazai győzelem, döntetlen, vereség relatív valószínűsége.....	47
7. táblázat Az egyes módszerek és q -k szerinti találatszámok	49
8. táblázat T1 módszer találati számai egyes fordulóknál q -k szerint.....	50
9. táblázat A T1 módszer előrejelzésének pontossága a q -k és az utolsó fordulók szerint százalékban	50