

OTDK-Dolgozat

Valós szimmetrikus intervallummátrixok extremális sajátérték-intervallumainak vizsgálata - Éles korlátok és diszjunktság

Szerző: Faragó Gábor Zoltán

Témavezető: Dr. Vajda Róbert

SZTE TTIK

Bolyai Intézet

2023. tavasz

Absztrakt

Az OTDK-dolgozatban valós szimmetrikus intervallummátrixok sajátérték-problémáját vizsgáljuk először 2×2 -es, majd általánosan $n \times n$ -es intervallummátrixok esetében. A téma aktívan kutatott, jelen dolgozat elsősorban D. Hertz és J. Rohn eredményeihez kapcsolódik.

Ahogy látni fogjuk, a sajátértékhalmoz n véges zárt intervallum egyesítése. Természetes az igény, hogy az intervallumok végpontjaira könnyen számítható becslést adjunk vagy ha lehet, azokat egészen pontosan karakterizáljuk. Dolgozatunk első részében a 2×2 -es esetben mind a 4 intervallumvégpontot, és egyúttal a 2 sajátérték-intervallum diszjunkt-ságát is megvizsgáljuk.

Kezdeti eredményként megmutatjuk, hogy 2×2 -es esetben a 2 sajátérték-intervallum mind a 4 végpontját egzaktan meg tudjuk határozni. Azonban ezek nem feltétlenül csúcsmátrix sajátértékeként állnak elő. Viszont ekkor az eredeti intervallummátrixból konstruálhatunk olyat, amely 1-1 csúcsmátrixának legkisebb vagy legnagyobb sajátértéke megegyezik egy keresendő végponttal. Továbbá a sajátérték-intervallumok diszjunkt-ságára szükséges és elegendő feltételt is adunk az intervallummátrixot alkotó intervallumok kölcsönös helyzetétől függően.

Dolgozatunk második részében az $n \times n$ -es általános eset felé fordulunk. Hertz munkássága nyomán tudjuk, hogy az $n \times n$ -es szimmetrikus intervallummátrixok legnagyobb sajátértékeinek maximuma egybeesik 2^{n-1} speciális csúcsmátrix legnagyobb sajátértékének maximumával, míg a legkisebb sajátértékek minimumára is hasonló állítás teljesül. Ezenkívül Xin eredményei alapján Hertz azt is felismerte, hogy ha az offdiagonális intervallumok jobb végpontjai nem kisebbek, mint a bal végpontok abszolút értékei, azaz, ha a diagonálison kívüli intervallumközepek nemnegatívak, akkor a jobb végpontokból képzett mátrix legnagyobb sajátértéke megadja a legnagyobb sajátértékek maximumát. Ezt általánosítva megmutatjuk, hogy az intervallummátrixot alkotó intervallumok bizonyos előjelmintázata esetén exponenciálisan sok helyett 1 csúcsmátrix is meghatározza a legnagyobb sajátértékek maximumát. Ezenkívül kezdeti eredményként megállapítjuk, hogy az említett speciális előjelmintázatok esetén, ha egyik offdiagonális intervallumnak sem belső pontja a 0, akkor a legnagyobb sajátértékek minimuma is egzaktan megadható. Speciális előjelmátrixok egy másik rendszerére vonatkozólag a legkisebb sajátértékek korlátjaira is hasonló összefüggések állnak fenn.

Végezetül az elért eredményeket alkalmazva intervallummátrixok stabilitását vizsgáljuk.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Alapvető jelölések és összefüggések	4
3. Hertz-tétel	5
4. 2×2 -es valós szimmetrikus intervallummátrixok sajátérték-intervallumainak vizsgálata	10
4.1. Közbülső korlátok	10
4.2. Sajátérték-intervallumok diszjunktsága	12
5. $n \times n$ -es valós szimmetrikus intervallummátrixok extremális sajátérték-intervallumainak vizsgálata	19
5.1. Extremális sajátértékkorlátok	19
5.2. Sajátérték-intervallumok becslése és diszjunktsága	26
6. Lineáris rendszerek	28
7. Összegzés és kitekintés	29
Irodalomjegyzék	30

1. Bevezetés

Számos valós életbeli probléma kapcsán találkozunk valamilyen bizonytalansággal, ami lehet mérési pontatlanság, gyártási hiba vagy éppen a gépi számábrázolásból adódó akadály. Ezek kezelésének egyik lehetséges módja intervallumok alkalmazása. Az intervallumanalízis a múlt század második felében indult útjára és ma is dinamikusan fejlődő terület. Ez idő alatt kiderült, hogy egy igen erős eszköz változó rendszerek tanulmányozására. Egyik legnagyobb előnye, hogy egy rendszer összes állapotának tulajdonságaira kapunk választ.

A dolgozatban az intervallumanalízis egyik területével, szimmetrikus intervallummátrixok sajátértékeinek vizsgálatával foglalkozunk, ami a 90-es évek óta kutatott. Deif [3] vetette fel először az intervallummátrixok sajátérték-problémáját, majd Hertz [5, 6] és Rohn [7, 10] is kutatott a témában, akiknek a jelentősebb eredményeit be is mutatjuk. Feltesszük, hogy a mátrix elemei korlátos, zárt intervallumokon belül változhatnak, és a célunk, hogy a sajátérték-intervallumokat karakterizáljuk. Új eredményeinket a dolgozatban a 12., 14., 15., 16., 20., 27., 29. és 30. Tételek tartalmazzák.

2. Alapvető jelölések és összefüggések

A téma megértéséhez először bevezetünk néhány definíciót és jelölést, valamint közöljük az alapvető összefüggéseket.

Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ekkor $A \leq B$, ha $a_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Definiáljuk az $\mathbf{A}$ valós négyzetes intervallummátrixot, valamint az $\mathbf{A}^S$ és $\mathcal{S}[P, Q]$ szimbólumokkal jelölt valós szimmetrikus intervallummátrixot a következők szerint:

$$\mathbf{A} := [P, Q] = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T, Q = Q^T, P \leq A \leq Q \right\}$$

és

$$\mathbf{A}^S = \mathcal{S}[P, Q] := \left\{ A \in \mathbf{A} : A = A^T \right\}.$$

$\mathbf{A}$ közép-, illetve sugármátrixát

$$A_c := \frac{1}{2}(P + Q)$$

és

$$A_\Delta := \frac{1}{2}(Q - P)$$

jelölik.

1. Lemma. Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixnak n valós sajátértéke van.

Ezeket nemnövekvő sorrendbe rendezzük: $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$. $\lambda_1(A)$ -t és $\lambda_n(A)$ -t az A négyzetes mátrix extrémális sajátértékeinek nevezzük, amikre teljesül a következő.

2. Lemma. $\max_{\|x\|_2=1} x^T A x = \lambda_1(A)$ és $\min_{\|x\|_2=1} x^T A x = \lambda_n(A)$, ahol A szimmetrikus.

Jelölje $\rho(A)$ az A szimmetrikus mátrix spektrálsugarát, azaz $\rho(A) = \max\{\lambda_1(A), -\lambda_n(A)\}$. A sajátértékre vonatkozó jelölést kiterjesztve, az $\mathbf{A}^S$ szimmetrikus intervallummátrix j . sajátértékhalmozát $\lambda_j(\mathbf{A}^S) := \{\lambda_j(A) : A \in \mathbf{A}^S\}$ formában definiáljuk.

3. Lemma. $\lambda_j(\mathbf{A}^S)$ véges zárt intervallum $\forall j = 1, \dots, n$ esetén.

Bizonyítás. A karakterisztikus polinom egy folytonos függvény, így a gyökei folytonosan változnak az $\mathbf{A}^S$ kompakt halmazon.

□

A sajátérték-intervallumokat $\lambda_j(\mathbf{A}^S) = [\underline{\lambda}_j(\mathbf{A}^S), \overline{\lambda}_j(\mathbf{A}^S)]$ ($j = 1, \dots, n$) szerint jelöljük.

3. Hertz-tétel

A következőkben Hertz $\overline{\lambda}_1(A^S)$ és $\underline{\lambda}_n(A^S)$ korlátokra vonatkozó tételét közöljük. Eszerint egyenként elég 2^{n-1} szimmetrikus csúcsmátrix extrémális sajátértékét kiszámítani az egzakt korlát meghatározásához. Azonban ahhoz, hogy a tételt precízen kimondhassuk, érdemes a következő jelöléseket bevezetni.

Legyen $V[P, Q]$ a P és Q szimmetrikus mátrixok által meghatározott szimmetrikus csúcsmátrixok halmaza, jelöléssel

$$V[P, Q] := \{A \in \mathcal{S}[P, Q] : a_{kl} \in \{p_{kl}, q_{kl}\}\}.$$

Legyen $\{o_i\}_{i=1}^{2^{n-1}} = \{1\} \times \{\pm 1\}^{n-1}$, ahol aszerint rendezünk fordított bináris sorrendbe, hogy a -1-et 0-nak feleltetjük meg. Jelölje $\{O_i\}_{i=1}^{2^{n-1}}$ az ortáns párok halmazát, ahol a zárt ortánsokat az ellentettjükkel állítjuk párba, azaz $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ esetén $O_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall k \ o_i(k)x_k \geq 0 \text{ vagy } \forall k \ -o_i(k)x_k \geq 0\}$. B^n jelöli az n -dimenziós egységgömbfelületet euklideszi normában és legyen

$$B_i := B^n \cap O_i, \quad 1 \leq i \leq 2^{n-1}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$B^n = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} B_i.$$

Az $\overline{A}^i$ ($1 \leq i \leq 2^{n-1}$) mátrixokat definiáljuk a következőképpen:

$$\overline{a}_{kl}^i := \begin{cases} q_{kk}, & \text{ha } l = k \\ q_{kl}, & \text{ha } o_i(k)o_i(l) = 1, \ l \neq k \\ p_{kl}, & \text{ha } o_i(k)o_i(l) = -1, \ l \neq k \end{cases}. \quad (1)$$

Tehát

$$\overline{A}^i \in V[P, Q].$$

Mivel egy szimmetrikus A mátrixra

$$x^T A x = \sum_{k=1}^n a_{kk} x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{kl} x_k x_l, \quad (2)$$

észrevehetjük, hogy $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ és $\forall x \in B_i$ esetén

$$\overline{A}^i \in \operatorname{argmax}_{A \in \mathcal{A}^S} f_1(A), \quad (3)$$

ahol $f_1(A) = x^T A x$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus, és $x \in B^n$ rögzített, így $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ esetén

$$\overline{A}^i \in \operatorname{argmax}_{\substack{A \in \mathcal{A}^S \\ x \in B_i}} f_2(A, x), \quad (4)$$

ahol $f_2(A, x) = x^T A x$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus, és $x \in B^n$. Azaz $\overline{A}^i$ egy olyan szimmetrikus csúcsmátrix, ami $\forall x \in B_i$ esetén maximalizálja a (2)-beli kvadratikus alakot, ezért

$$\max_{\substack{A \in \mathcal{A}^S \\ x \in B_i}} x^T A x = \max_{x \in B_i} x^T \overline{A}^i x.$$

4. Megjegyzés. Hertz [5]-ben a (4)-beli kifejezés jobb oldalával definiálta az $\overline{A}^i$ mátrixokat, azonban ez nem egyértelmű. Ehhez vegyük az

$$\mathbf{A}^S = \begin{pmatrix} [-2, 3] & [-4, -3] \\ [-4, -3] & [2, 6] \end{pmatrix}$$

szimmetrikus intervallummátrixot. Az 1. síknegyedben (4) szerint az

$$\overline{A}^1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

mátrix maximalizál. Ezt az

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorra teszi. Ekkor

$$x^T \overline{A}^1 x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6.$$

Másrésről

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6.$$

Tehát a $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & 6 \end{pmatrix}$ mátrix is maximalizál az 1. síknegyedben, ami nem csúcsmátrix.

Másrésről [4]-ben nyílt ortánsok segítségével definiálta az $\overline{A}^i$ mátrixokat, ami a mi jelöléseinkkel az alábbi:

$1 \leq i \leq 2^{n-1}$ és $\forall x \in \text{int}(B_i)$ esetén

$$\overline{A}^i := \operatorname{argmax}_{A \in \mathbf{A}^S} f_1(A), \quad (5)$$

ahol $\text{int}(B_i)$ B_i belseje.

5. Lemma. Az (5)-beli kifejezés jobb oldala egyértelmű, és egybeesik az (1)-ben definiált $\overline{A}^i$ mátrixszal.

Bizonyítás. Legyen $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ tetszőleges, de rögzített. Ha $\exists A^{(0)}, A^{(1)} \in \mathbf{A}^S$, amikre $\forall x \in \text{int}(B_i)$ esetén

$$A^{(0)}, A^{(1)} \in \operatorname{argmax}_{A \in \mathbf{A}^S} f_1(A),$$

és

$$A^{(0)} \neq A^{(1)},$$

akkor $\exists k, l$ indexek, amikre

$$a_{kl}^{(0)} \neq a_{kl}^{(1)}.$$

Ekkor fennáll, hogy $\forall x \in \text{int}(B_i)$ esetén

$$a_{kl}^{(0)} x_k x_l \neq a_{kl}^{(1)} x_k x_l,$$

mivel $x_k x_l \neq 0$. Azaz $A^{(0)}$ és $A^{(1)}$ közül az egyik nem maximalizálhat. Így ellentmondásra jutunk, tehát $\forall x \in \text{int}(B_i)$ esetén az $\operatorname{argmax}_{A \in \mathbf{A}^S} f_1(A)$ kifejezés egyértelmű. Másfelől belátjuk,

hogy az (1)-ben definiált $\overline{A}^i$ mátrixra teljesül, hogy $\forall x \in \text{int}(B_i)$ esetén

$$\overline{A}^i = \operatorname{argmax}_{A \in \mathbf{A}^S} f_1(A).$$

Legyen $A^{(0)}$ az egyértelmű maximalizáló mátrix. Belátjuk, hogy

$$\overline{A}^i = A^{(0)}.$$

Mivel $a_{kl}^{(0)} \leq q_{kl}$, ezért

$$a_{kk}^{(0)} x_k^2 \leq q_{kl} x_k^2.$$

Ha $x_k x_l > 0$, akkor

$$a_{kl}^{(0)} x_k x_l \leq q_{kl} x_k x_l.$$

Ha $x_k x_l < 0$, akkor

$$a_{kl}^{(0)} x_k x_l \leq p_{kl} x_k x_l.$$

Mivel $\forall x \in \text{int}(B_i)$ esetén $\arg\max_{A \in \mathbf{A}^S} f_1(A)$ egyértelmű, ezért a fenti egyenlőtlenségekben egyenlőségek állnak fenn. Így $\overline{A}^i = A^{(0)}$, hiszen $x_k x_l \neq 0$.

□

Hasonlóan $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ esetén legyen

$$\underline{a}_{kl}^i = \begin{cases} p_{kk}, & \text{ha } l = k \\ p_{kl}, & \text{ha } o_i(k)o_i(l) = 1, l \neq k \\ q_{kl}, & \text{ha } o_i(k)o_i(l) = -1, l \neq k \end{cases}. \quad (6)$$

Tehát

$$\underline{A}^i \in V[P, Q].$$

Előzőhöz hasonlóan $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ és $\forall x \in B_i$ esetén

$$\underline{A}^i \in \arg\min_{A \in \mathbf{A}^S} f_1(A), \quad (7)$$

így $1 \leq i \leq 2^{n-1}$ esetén

$$\underline{A}^i \in \arg\min_{\substack{A \in \mathbf{A}^S \\ x \in B_i}} f_2(A, x). \quad (8)$$

Ezáltal már minden adott a tétel megfogalmazásához.

6. Tétel (Hertz-tétel, [4]-ben az 1. Tétel, [5]-ben az 1. és 2. Tétel).

$$\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \max_{1 \leq i \leq 2^{n-1}} \lambda_1(\overline{A}^i) \quad (9)$$

$$\underline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S) = \min_{1 \leq i \leq 2^{n-1}} \lambda_n(\underline{A}^i) \quad (10)$$

7. Megjegyzés. Az extrémális sajátérték-intervallumok végpontjait természetes módon kifejezhetjük optimalizációs problémák megoldásaiként:

$$\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \max_{A \in \mathbf{A}^S} \max_{x \in B^n} x^T A x \quad (11)$$

$$\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \min_{A \in \mathbf{A}^S} \max_{x \in B^n} x^T A x \quad (12)$$

$$\overline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S) = \max_{A \in \mathbf{A}^S} \min_{x \in B^n} x^T A x \quad (13)$$

$$\underline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S) = \min_{A \in \mathbf{A}^S} \min_{x \in B^n} x^T A x \quad (14)$$

8. Megjegyzés. [4]-ben az extrémális sajátértékek másik két korlátját is megadták az alábbiak szerint:

$$\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \min_{1 \leq i \leq 2^{n-1}} \lambda_1(\underline{A}^i) \quad (15)$$

$$\overline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S) = \max_{1 \leq i \leq 2^{n-1}} \lambda_n(\overline{A}^i) \quad (16)$$

Azonban a fenti (15) és (16) formulák általánosan nem érvényesek, ugyanis az extrémális sajátértékek (12) és (13) korlátjait nem feltétlenül szimmetrikus csúcsmátrixok sajátértékeiként érjük el, amit az alábbi példa is mutat. 2×2 -es szimmetrikus intervallummátrixok esetén a (15) és (16) formulák akkor és csak akkor teljesülnek, ha a 0 nem belső pontja az offdiagonális intervallumnak, ahogy azt a későbbiekben megmutatjuk.

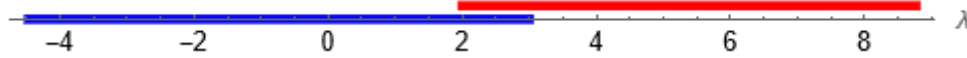
9. Példa. Legyen

$$\mathbf{A}^S = \begin{pmatrix} [-2, 3] & [-3, 4] \\ [-3, 4] & [2, 6] \end{pmatrix}.$$

Ekkor a sajátérték-intervallumok:

$$[\underline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S), \overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S)] = [-2\sqrt{5}, 3], \quad (17)$$

$$[\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S), \overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)] = \left[2, \frac{1}{2}(9 + \sqrt{73})\right]. \quad (18)$$



1. Ábra. $\mathbf{A}^S$ sajátérték-intervallumai

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} \max_{A \in V[P, Q]} \lambda_2(A) &= \frac{1}{2}(9 - 3\sqrt{5}) \approx 1.1459 < \overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S), \\ \min_{A \in V[P, Q]} \lambda_1(A) &= \sqrt{13} \approx 3.6056 > \underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S). \end{aligned}$$

Tehát a (15) és (16) formulák nem állhatnak fenn.

10. Megjegyzés. A számítások megvalósításához a Wolfram Mathematica programcsomagot használtuk [9]. Ennek segítségével főleg valós kvantoreliminációs feladatokként fogalmaztuk meg a sajátérték-problémákat, amiket megoldva megállapítottuk a sajátérték-intervallumokat [1, 2, 12].

A sajátértékkorlátokra vonatkozó vizsgálódást kiterjeszthetjük nem extrémális sajátértékekre is. Ennek szemléltetéséhez egy 3×3 -as példát közlünk, ami mutatja, hogy a középső sajátérték-intervallum jobb végpontja nem egy szimmetrikus csúcsmátrix középső sajátértéke.

11. Példa ([4]-ben a 3. Példa). Legyen

$$\mathbf{A}^S = \begin{pmatrix} [2, 6] & [1, 2] & [-7, -2] \\ [1, 2] & [3, 11] & [-1, 7] \\ [-7, -2] & [-1, 7] & [-1, 5] \end{pmatrix}.$$

A szimmetrikus csúcsmátrixok középső sajátértékeinek maximuma 10.1549. Azonban $\lambda_2(M) \approx 11.3514 \leq \overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S)$, ahol

$$M = \begin{pmatrix} 5.2054 & 1.6556 & -6.8321 \\ 1.6556 & 10.9244 & 1.9721 \\ -6.8321 & 1.9721 & 4.6703 \end{pmatrix}.$$

Tehát a középső sajátérték-intervallum felső korlátját nem érjük el szimmetrikus csúcsmátrix sajátértékeként.

4. 2×2 -es valós szimmetrikus intervallummátrixok sajátérték-intervallumainak vizsgálata

A Hertz-tétel értelmében bizonyos csúcsmátrixok legkisebb vagy legnagyobb sajátértékeinek minimuma vagy maximuma megadja a $\underline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S)$ vagy $\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ éles korlátot, ahol $\mathbf{A}^S$ valós szimmetrikus intervallummátrix.

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy 2×2 -es valós szimmetrikus intervallummátrixokat vizsgálva, egyes esetekben a (15) és (16) formulák is fennállnak, azaz speciális csúcsmátrixok legnagyobb vagy legkisebb sajátértékeinek minimuma vagy maximuma éppen $\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ vagy $\overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S)$. Ugyanakkor, ahogy a fenti 9. Példa is mutatja, nem biztos, hogy ezeket a korlátokat csúcsmátrixok sajátértékeiként érjük el. Viszont ezekben az esetekben is tudunk eredményt felmutatni, hiszen ilyenkor előállíthatunk egy intervallummátrixot, amire érvényesek a (15) és (16) formulák, valamint sajátértékkorlátjai megegyeznek az eredetiével.

A fejezet további részében a sajátérték-intervallumok kölcsönös helyzetével foglalkozunk. Etekintetben elmondhatjuk, hogy az intervallummátrix diagonális intervallumainak egymáshoz viszonyított helyzetétől és az offdiagonális intervallum előjelétől függően, szükséges és elegendő feltételt is adhatunk a sajátérték-intervallumok diszjunktságára.

4.1. Közbülső korlátok

Ezen alfejezetben a $\overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S)$ és $\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ végpontokra vonatkozó eredményeinket mutatjuk be. Valamint a fejezet hátralevő részében az

$$\mathbf{A}^S = \begin{pmatrix} [a_1, a_2] & [b_1, b_2] \\ [b_1, b_2] & [c_1, c_2] \end{pmatrix}$$

jelöléssel élünk.

12. Tétel.

$$\overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) = \begin{cases} \min\{a_2, c_2\}, & \text{ha } b_1 < 0 < b_2 \\ \lambda_2(A), & \text{ha } 0 \leq b_1 \leq b_2, \text{ ahol } A = \begin{pmatrix} a_2 & b_1 \\ b_1 & c_2 \end{pmatrix} \\ \lambda_2(A), & \text{ha } b_1 \leq b_2 \leq 0, \text{ ahol } A = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (19)$$

és

$$\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \begin{cases} \max\{a_1, c_1\}, & \text{ha } b_1 < 0 < b_2 \\ \lambda_1(A), & \text{ha } 0 \leq b_1 \leq b_2, \text{ ahol } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \\ \lambda_1(A), & \text{ha } b_1 \leq b_2 \leq 0, \text{ ahol } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 \\ b_2 & c_1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (20)$$

Bizonyítás.

1) $b_1 < 0 < b_2$

Az $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbf{A}^S$ mátrix karakterisztikus polinomja $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2$, így a sajátértékei $\lambda_{1,2}(A) = \frac{a+c \pm \sqrt{4b^2 + (a-c)^2}}{2}$. Ezért $\lambda_2(A)$ $b = 0$ -ra veszi fel a maximumát. Továbbá

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) &= \max_{A \in \mathbf{A}^S} \lambda_2(A) = \max \frac{a + c - \sqrt{4b^2 + (a-c)^2}}{2} = \\ &= \max \frac{a + c - |a - c|}{2} = \begin{cases} a_2, & \text{ha } a_2 \leq c_2 \\ c_2, & \text{ha } a_2 > c_2 \end{cases} = \min\{a_2, c_2\}. \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \max\{a_1, c_1\}.$$

2) $0 \leq b_1 \leq b_2$

Ha $b > 0$, akkor a parciális deriváltakra fennáll, hogy $\frac{\partial \lambda_2}{\partial a} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a-c}{\sqrt{4b^2 + (a-c)^2}}\right) > 0$ és $\frac{\partial \lambda_2}{\partial c} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a-c}{\sqrt{4b^2 + (a-c)^2}}\right) > 0$. Ha $b = 0$, akkor tekintsük a parciális deriváltak folytonos kiterjesztését, így $\frac{\partial \lambda_2}{\partial a} = \frac{1}{2} (1 - \text{sign}(a - c)) \geq 0$ és $\frac{\partial \lambda_2}{\partial c} = \frac{1}{2} (1 + \text{sign}(a - c)) \geq 0$. Ezáltal a megfelelő szekciófüggvények mindkét esetben monoton növekszenek (nem szigorú értelemben). Tehát a maximumot elérjük $a = a_2$ és $c = c_2$ esetén. Ebből adódóan elég b -re optimalizálni, és b_1 maximalizálni. Így

$$\overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) = \lambda_2(A), \text{ ahol } A = \begin{pmatrix} a_2 & b_1 \\ b_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan

$$\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \lambda_1(A), \text{ ahol } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}.$$

3) $b_1 \leq b_2 \leq 0$

Az előzőhöz hasonló.

□

13. Megjegyzés. Ha $0 \notin (b_1, b_2)$, akkor a 2×2 -es esetben a (15), (16) formulák is érvényesek, amit az előző tételbeli mátrixok igazolnak. Emellett egyszerű, hogy a Hertz-tételbeli korlátok megállapításához is elég egy-egy csúsmátrix megfelelő sajátértékét kiszámolni. Ezek $\underline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) = \lambda_2(A)$ és $\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \lambda_1(B)$, ahol

$$A = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 & b_2 \\ b_2 & c_1 \end{pmatrix}, & \text{ha } |b_1| \leq |b_2| \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, & \text{ha } |b_1| > |b_2| \end{cases} \quad \text{és } B = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}, & \text{ha } |b_1| \leq |b_2| \\ \begin{pmatrix} a_2 & b_1 \\ b_1 & c_2 \end{pmatrix}, & \text{ha } |b_1| > |b_2| \end{cases}.$$

Ha $0 \in (b_1, b_2)$, akkor konstruálhatunk olyan intervallummátrixot, amire fennállnak a (15) és (16) formulák, valamint a sajátértékkorlátjai megegyeznek az eredeti intervallummátrixéival.

14. Tétel. *Legyen $0 \in (b_1, b_2)$ és*

$$\tilde{\mathbf{A}}^S = \begin{pmatrix} [a_1, a_2] & [0, \max\{|b_1|, b_2\}] \\ [0, \max\{|b_1|, b_2\}] & [c_1, c_2] \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\mathbf{A}^S$ és $\tilde{\mathbf{A}}^S$ sajátértékkorlátjai megegyeznek.

Bizonyítás.

A 13. Megjegyzés és a sajátértékek $\lambda_{1,2}(A) = \frac{a+c \pm \sqrt{4b^2+(a-c)^2}}{2}$ explicit képletei alapján (ahol látható, hogy $\pm b$ -re ugyanazok a sajátértékek)

$$\overline{\lambda}_1(\tilde{\mathbf{A}}^S) = \lambda_1(A_1) = \overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S), \quad \underline{\lambda}_2(\tilde{\mathbf{A}}^S) = \lambda_2(A_2) = \underline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S),$$

ahol

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_2 & \max\{|b_1|, b_2\} \\ \max\{|b_1|, b_2\} & c_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & \max\{|b_1|, b_2\} \\ \max\{|b_1|, b_2\} & c_1 \end{pmatrix}.$$

A 12. Tétel alapján

$$\underline{\lambda}_1(\tilde{\mathbf{A}}^S) = \underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \lambda_1(A_3), \quad \overline{\lambda}_2(\tilde{\mathbf{A}}^S) = \overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) = \lambda_2(A_4),$$

ahol

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

□

Tehát $\tilde{\mathbf{A}}^S$ néhány speciális csúcsmátrixa meghatározza $\mathbf{A}^S$ sajátértékkorlátjait.

4.2. Sajátérték-intervallumok diszjunktsága

A következőkben a 2×2 -es valós szimmetrikus intervallummátrixok sajátérték-intervallumainak diszjunktságát vizsgáljuk. Etekintetben szükséges és elegendő feltételeket fogalmazunk meg.

15. Tétel. *Ha $0 \in [b_1, b_2]$, akkor az $[a_1, a_2]$ és $[c_1, c_2]$ intervallumok diszjunktsága elegendő és szükséges feltétel a sajátérték-intervallumok diszjunktságára. Ha $0 \notin [b_1, b_2]$, akkor csak elegendő, de nem szükséges.*

Bizonyítás.

1) $b_1 \leq 0 \leq b_2$

Szükségesség:

$$\min\{a_2, c_2\} = \overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) < \underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \max\{a_1, c_1\}$$

$\Downarrow$

$$a_2 < c_1 \text{ vagy } c_2 < a_1$$

$\Downarrow$

$[a_1, a_2]$ és $[c_1, c_2]$ diszjunktak.

Elégségesség:

I) $a_2 < c_1$

$$a_2 < c_1 \implies \overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) = a_2, \underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = c_1$$

II) $c_2 < a_1$

$$c_2 < a_1 \implies \overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) = c_2, \underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = a_1$$

Tehát a sajátértékintervallumok mindkét esetben diszjunktak.

2) $0 < b_1 \leq b_2$

Elégségesség:

I) $a_1 \leq a_2 < c_1 \leq c_2$

$$\begin{aligned} c_2 - c_1 &< \sqrt{4b_1^2 + (a_2 - c_2)^2} \\ a_2 - a_1 &< \sqrt{4b_1^2 + (a_1 - c_1)^2} \\ c_2 - c_1 + a_2 - a_1 &< \sqrt{4b_1^2 + (a_2 - c_2)^2} + \sqrt{4b_1^2 + (a_1 - c_1)^2} \\ \overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) &= \frac{1}{2} \left(a_2 + c_2 - \sqrt{4b_1^2 + (a_2 - c_2)^2} \right) < \\ &< \frac{1}{2} \left(a_1 + c_1 + \sqrt{4b_1^2 + (a_1 - c_1)^2} \right) = \underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) \end{aligned}$$

II) $c_1 \leq c_2 < a_1 \leq a_2$

Előzőhöz hasonló.

3) $b_1 \leq b_2 < 0$

Előzőhöz hasonló.

Ha $0 \notin [b_1, b_2]$, akkor a diagonális intervallumok diszjunktága nem szükséges feltétele a sajátérték-intervallumok diszjunktágának. Ezt szemlélteti a következő példa. Legyen

$$\mathbf{A}^S = \begin{pmatrix} [\frac{1}{2}, 2] & [2, 3] \\ [2, 3] & [1, 4] \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \underline{A}^1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \lambda_2(\underline{A}^1) &= \frac{1}{4} (3 - \sqrt{65}) \\ \underline{A}^2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \lambda_2(\underline{A}^2) &= \frac{1}{4} (3 - \sqrt{145}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{A}^1 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \lambda_1(\bar{A}^1) &= 3 + \sqrt{10} \\ \bar{A}^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \lambda_1(\bar{A}^2) &= 3 + \sqrt{5},\end{aligned}$$

így a Hertz-tétel alapján

$$\underline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) = \min \left\{ \frac{1}{4} (3 - \sqrt{65}), \frac{1}{4} (3 - \sqrt{145}) \right\} = \frac{1}{4} (3 - \sqrt{145}),$$

valamint

$$\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \max \{3 + \sqrt{10}, 3 + \sqrt{5}\} = 3 + \sqrt{10}.$$

Továbbá a 12. Tétel szerint

$$\overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) = \lambda_2 \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right) = 3 - \sqrt{5}$$

és

$$\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \lambda_1 \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4} (3 + \sqrt{65}).$$

Ezáltal a sajátérték-intervallumok:

$$\lambda_2(\mathbf{A}^S) = \left[\frac{1}{4} (3 - \sqrt{145}), 3 - \sqrt{5} \right] \approx [-2.2604, 0.7639]$$

és

$$\lambda_1(\mathbf{A}^S) = \left[\frac{1}{4} (3 + \sqrt{65}), 3 + \sqrt{10} \right] \approx [2.7656, 6.1623].$$

□

Láttuk, hogy a diagonális intervallumok diszjunkttsága nem minden esetben szükséges feltétel. Viszont ekkor az offdiagonális intervallum végpontjaira tudunk elegendő és szükséges feltételt is adni a sajátérték-intervallumok diszjunkttségének tekintetében feltéve, hogy $[a_1, a_2]$ és $[c_1, c_2]$ metszik egymást.

16. Tétel. *Ha a nemelfajuló $[a_1, a_2]$ és $[c_1, c_2]$ intervallumok metszik egymást, akkor*

$$\overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) < \underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) \iff \begin{cases} b_1 > \frac{\sqrt{(a_2-a_1)(a_2-c_1)(c_2-a_1)(c_2-c_1)}}{a_2-a_1+c_2-c_1} \\ \text{vagy} \\ b_2 < -\frac{\sqrt{(a_2-a_1)(a_2-c_1)(c_2-a_1)(c_2-c_1)}}{a_2-a_1+c_2-c_1} \end{cases}$$

Ha $0 \notin [b_1, b_2]$, és legalább az egyik diagonális intervallum elfajuló, akkor akár metszik egymást, akár nem, fennáll a sajátérték-intervallumok diszjunkttsága.

17. Megjegyzés. A $\frac{\sqrt{(a_2-a_1)(a_2-c_1)(c_2-a_1)(c_2-c_1)}}{a_2-a_1+c_2-c_1}$ kifejezés jól definiált, mivel az $(a_2-a_1)(a_2-c_1)(c_2-a_1)(c_2-c_1)$ szorzat nemnegatív és a nevező pozitív az átfedő, valamint nemelfajuló diagonális intervallumok végett.

Bizonyítás.

1. $0 < b_1 \leq b_2$

Ekkor a 12. Tétel alapján

$$\overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) = \lambda_2 \left(\begin{pmatrix} a_2 & b_1 \\ b_1 & c_2 \end{pmatrix} \right), \text{ és } \underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \lambda_1 \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \right),$$

azaz

$$\overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) = \frac{a_2 + c_2 - \sqrt{4b_1^2 + (a_2 - c_2)^2}}{2},$$

és

$$\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \frac{a_1 + c_1 + \sqrt{4b_1^2 + (a_1 - c_1)^2}}{2}.$$

(21)

I) Legalább az egyik diagonális intervallum elfajuló.

i) $a := a_1 = a_2$

$$c_2 - c_1 \leq |a - c_2| + |a - c_1| = \sqrt{(a - c_2)^2} + \sqrt{(a - c_1)^2}$$

$$c_2 - c_1 < \sqrt{4b_1^2 + (a - c_2)^2} + \sqrt{4b_1^2 + (a - c_1)^2}$$

$$\overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) = \frac{a + c_2 - \sqrt{4b_1^2 + (a - c_2)^2}}{2} < \frac{a + c_1 + \sqrt{4b_1^2 + (a - c_1)^2}}{2} = \underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$$

ii) $c := c_1 = c_2$

$$a_2 - a_1 < \sqrt{4b_1^2 + (a_2 - c)^2} + \sqrt{4b_1^2 + (a_1 - c)^2}$$

$$\overline{\lambda}_2(\mathbf{A}^S) = \frac{a_2 + c - \sqrt{4b_1^2 + (a_2 - c)^2}}{2} < \frac{a_1 + c + \sqrt{4b_1^2 + (a_1 - c)^2}}{2} = \underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$$

II) Nemelfajuló diagonális intervallumok

i) Érintik egymást.

a) $a_1 < a_2 = c_1 < c_2$

(21)-et 2-vel szorozva és rendezve adódik, hogy

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 + c_2 - c_1 &< \sqrt{4b_1^2 + (a_1 - c_1)^2} + \sqrt{4b_1^2 + (a_2 - c_2)^2} = \\ &= \sqrt{4b_1^2 + (a_1 - a_2)^2} + \sqrt{4b_1^2 + (c_1 - c_2)^2}, \end{aligned}$$

ami minden $b_1 > 0$ esetén fennáll.

b) $c_1 < c_2 = a_1 < a_2$

Előzőhöz hasonló

ii) Egnél több metszéspont

(21)-et 2-vel szorozva, rendezve, majd négyzetre emelve, adódik, hogy

$$a_2 - a_1 + c_2 - c_1 < \sqrt{4b_1^2 + (a_1 - c_1)^2} + \sqrt{4b_1^2 + (a_2 - c_2)^2} \quad /()^2$$

$$(a_2 - a_1 + c_2 - c_1)^2 < 8b_1^2 + (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + 2\sqrt{(4b_1^2 + (a_1 - c_1)^2)(4b_1^2 + (a_2 - c_2)^2)}.$$

Felhasználva az alábbi azonosságot,

$$\begin{aligned}
(a_2 - a_1 + c_2 - c_1)^2 &= ((a_2 - c_2) + c_2 - a_1 + c_2 + (a_1 - c_1) - a_1)^2 = \\
&= (((a_2 - c_2) + (a_1 - c_1)) + 2(c_2 - a_1))^2 = (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + \\
&+ 2(a_1 - c_1)(a_2 - c_2) + 4(c_2 - a_1)(a_1 - c_1 + a_2 - c_2) + 4(c_2 - a_1)^2 = \\
&= (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + 2(a_1 - c_1)(a_2 - c_2) + 4(c_2 - a_1)(a_2 - c_1)
\end{aligned}$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(a_1 - c_1)(a_2 - c_2) + 2(c_2 - a_1)(a_2 - c_1) - 4b_1^2 &< \\
&< \sqrt{(4b_1^2 + (a_1 - c_1)^2)(4b_1^2 + (a_2 - c_2)^2)}. \tag{22}
\end{aligned}$$

Belátjuk, hogy (22)-ben a bal oldal abszolút értéke kisebb, mint a jobb oldalé. Ha a bal oldal nemnegatív, akkor teljesül. Ha negatív, akkor, mivel $(c_2 - a_1)(a_2 - c_1) > 0$, fennáll, hogy

$$(a_1 - c_1)(a_2 - c_2) + 2(c_2 - a_1)(a_2 - c_1) - 4b_1^2 > (a_1 - c_1)(a_2 - c_2) - 4b_1^2.$$

Ezt felhasználva,

$$\begin{aligned}
(4b_1^2 + (a_1 - c_1)^2)(4b_1^2 + (a_2 - c_2)^2) - ((a_1 - c_1)(a_2 - c_2) - 4b_1^2)^2 &= \\
= 16b_1^4 + (a_1 - c_1)^2(a_2 - c_2)^2 + 4b_1^2((a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2) - & \\
- (16b_1^4 + (a_1 - c_1)^2(a_2 - c_2)^2 - 8b_1^2(a_1 - c_1)(a_2 - c_2)) &= \\
= 4b_1^2((a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + 2(a_1 - c_1)(a_2 - c_2)) &= \\
= 4b_1^2((a_1 - c_1) + (a_2 - c_2))^2 \geq 0, & \tag{23}
\end{aligned}$$

tehát (22)-ben a bal oldal abszolút értéke kisebb a jobb oldalénál. (22)-ből és (23)-ból következik, hogy

$$\begin{aligned}
0 &< (4b_1^2 + (a_1 - c_1)^2)(4b_1^2 + (a_2 - c_2)^2) - \\
&- ((a_1 - c_1)(a_2 - c_2) + 2(a_2 - c_1)(c_2 - a_1) - 4b_1^2)^2 = 16b_1^4 + \\
&+ 4b_1^2((a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2) + (a_1 - c_1)^2(a_2 - c_2)^2 - \\
&- ((a_1 - c_1)^2(a_2 - c_2)^2 + 4(a_2 - c_1)^2(c_2 - a_1)^2 + 16b_1^4 + \\
&+ 4(a_1 - c_1)(a_2 - c_2)(a_2 - c_1)(c_2 - a_1) - \\
&- 8b_1^2(a_1 - c_1)(a_2 - c_2) - 16b_1^2(a_2 - c_1)(c_2 - a_1)).
\end{aligned}$$

4-gyel osztva,

$$\begin{aligned}
0 &< b_1^2 \left((a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 \right) - (a_2 - c_1)^2 (c_2 - a_1)^2 - \\
&\quad - (a_1 - c_1)(a_2 - c_2)(a_2 - c_1)(c_2 - a_1) + \\
&\quad + 2b_1^2(a_1 - c_1)(a_2 - c_2) + 4b_1^2(a_2 - c_1)(c_2 - a_1) = \\
&= b_1^2 \left((a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2(a_1 - c_1)(a_2 - c_2) + 4(a_2 - c_1)(c_2 - a_1) \right) - \\
&\quad - (a_2 - c_1)^2 (c_2 - a_1)^2 - (a_1 - c_1)(a_2 - c_2)(a_2 - c_1)(c_2 - a_1) = \\
&= b_1^2 \left((a_1 - c_1 + a_2 - c_2)^2 + 4(a_2 - c_1)(c_2 - a_1) \right) - \\
&\quad - (a_2 - c_1)(c_2 - a_1) \left((a_2 - c_1)(c_2 - a_1) + (a_1 - c_1)(a_2 - c_2) \right) = \\
&= b_1^2 \left((a_2 - c_1) + (c_2 - a_1) \right)^2 - \\
&\quad - (a_2 - c_1)(c_2 - a_1)(a_2 c_2 + a_1 c_1 - a_1 c_2 - a_2 c_1) = \\
&= b_1^2 \left((a_2 - c_1) + (c_2 - a_1) \right)^2 - (a_2 - c_1)(c_2 - a_1)(a_2 - a_1)(c_2 - c_1)
\end{aligned} \tag{24}$$

adódik. (24)-et rendezve, majd gyököt vonva, kapjuk, hogy

$$b_1 > \frac{\sqrt{(a_2 - a_1)(a_2 - c_1)(c_2 - a_1)(c_2 - c_1)}}{a_2 - a_1 + c_2 - c_1}.$$

Az ekvivalencia másik iránya az előző lépések alapján látható be.

2. $b_1 \leq b_2 < 0$
Előzőhöz hasonló

□

18. Példa. A 16. Tétel szemléltetéséhez vegyük az

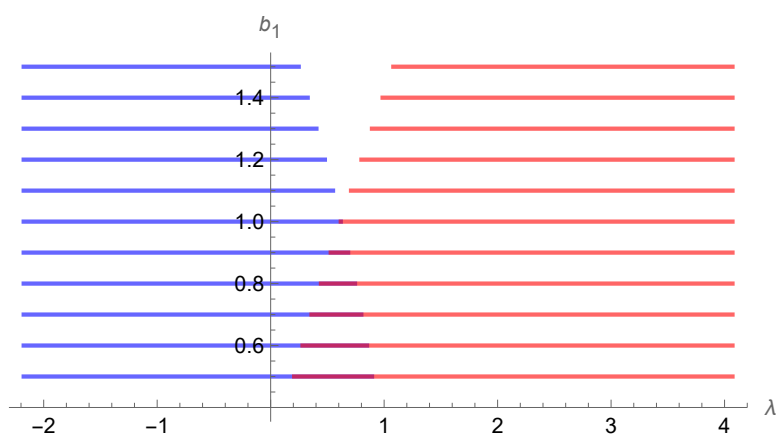
$$\mathbf{A}^S = \begin{pmatrix} [-1, 1] & \left[b_1, \frac{8}{5}\right] \\ \left[b_1, \frac{8}{5}\right] & [0, 1 + \sqrt{5}] \end{pmatrix}$$

szimmetrikus intervallummátrixot. Ekkor

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(a_2 - a_1)(a_2 - c_1)(c_2 - a_1)(c_2 - c_1)}}{a_2 - a_1 + c_2 - c_1} &= \frac{\sqrt{2 \cdot 1 \cdot (2 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2(7 + 3\sqrt{5})}}{3 + \sqrt{5}} = \\
&= \frac{\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}}{3 + \sqrt{5}} = 1,
\end{aligned}$$

azaz, ha $b_1 > 1$, akkor a sajátérték-intervallumok diszjunktak, különben egymásba met-

szenek. Ez látható a következő ábrán.



2. Ábra. $\mathbf{A}^S$ sajátérték-intervallumai különböző b_1 értékekre

5. $n \times n$ -es valós szimmetrikus intervallummátrixok extremális sajátérték-intervallumainak vizsgálata

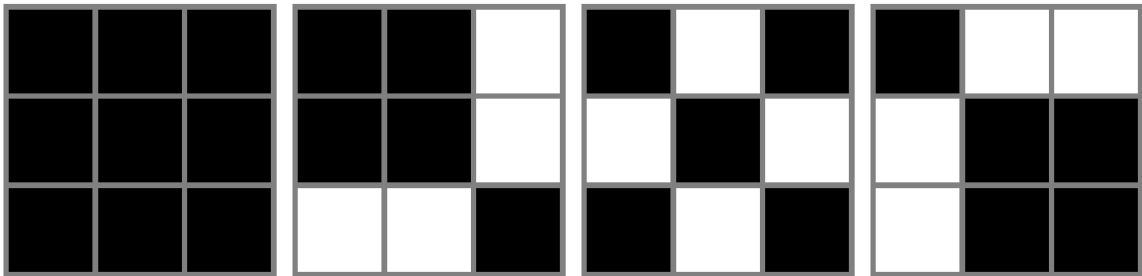
Ebben a fejezetben az $n \times n$ -es általános esetben vizsgáljuk az extremális sajátérték-korlátokat. Eredményünk mozgatórugója Hertz egy cikke [6]. A benne foglaltak szerint az intervallummátrix intervallumainak egy speciális előjelmintázata esetén megadhatjuk azt az egy csúcsmátrixot, aminek a legnagyobb sajátértéke egybeesik a $\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ éles korláttal. Ezen eredményt sikerült általánosítanunk és kiterjesztenünk a $\underline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S)$ egzakt korlátra is. Továbbá speciális előjelmintázatok esetén az extremális sajátérték-intervallumok másik két korlátját, azaz $\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ -t és $\overline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S)$ -t is megadjuk, feltéve, hogy a 0 nem belső pontja az offdiagonális intervallumoknak.

A fejezet további részében Rohn egy eredményét ismertetjük, ami szerint könnyen számítható becslést adhatunk a sajátérték-intervallumokra. Azonnali következményként a sajátérték-intervallumok diszjunktágának egy elegendő feltételét is közöljük.

5.1. Extremális sajátértékkorlátok

A Hertz-tétel alapján tudjuk, hogy elegendő néhány csúcsmátrix sajátértékét kiszámítani a $\underline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S)$, $\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ éles korlátok megállapításához. Xin [14] eredményei alapján Hertz egy speciális esetben még ennél is többet mond, mégpedig azt, hogy ha az offdiagonális intervallumok jobb végpontjai nem kisebbek, mint a bal végpontok abszolút értékei, akkor $\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ éppen a jobb végpontokból képzett mátrix, azaz $\overline{\mathbf{A}}^1$ legnagyobb sajátértéke [6]. Ezen eredményt az intervallumközepek által mutatott előjelmintázat felhasználásával általánosíthatjuk. Figyeljük meg, hogy az O_i ($i = 1, \dots, 2^{n-1}$) ortáns párok megőrzik az $xx^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($x \in B^n$) külső szorzat előjelmátrixát. Tehát az egy ortáns párba tartozó vektorok önmagukkal vett külső szorzatainak előjelei megegyeznek, míg ha eltérő ortáns párba esnek, akkor különböznek. Ezt észrevéve felismertük, ha az intervallummátrix középmátrixának előjelmátrixa hasonló az ortáns párok által megőrzött előjelmintázatok legalább egyikéhez, akkor megadhatjuk azt az egy (vagy esetleg több) $\overline{\mathbf{A}}^{j_0} \in \{\overline{\mathbf{A}}^i\}_{i=1, \dots, 2^{n-1}}$ mátrixot, amire $\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \lambda_1(\overline{\mathbf{A}}^{j_0})$. (Ez az $\overline{\mathbf{A}}^{j_0}$ abban az ortánsban maximalizál, amely előjelvektora az előjelmátrix 1. sora vagy oszlopa.) Továbbá, ha az offdiagonális intervallumok egyikének sem belső pontja a 0, akkor $\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ korlát is meghatározható a fent említett előjelmintázatok esetén. Ahogy majd látni fogjuk, a $\underline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S)$ és $\overline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S)$ korlátokra is hasonló állítások állnak fenn.

Alább a $\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ és $\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ korlátokra vonatkozó mintázatok láthatók 3×3 -as esetben, amiket az ortáns párokkal megegyezően rendeztünk (1-fekete, -1-fehér).



3. Ábra. Az ortáns párok által megőrzött előjelmintázatok $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ – ban

Az ortánszárak által megőrzött előjelmátrixokat, illetve azok ellentettjeit jelöljük a következőképpen:

$$SP^+ := \{xx^T : x \in \{o_i\}_{i=1}^{2^{n-1}}\},$$

$$SP^- := \{-xx^T : x \in \{o_i\}_{i=1}^{2^{n-1}}\}.$$

Mielőtt a tételt kimondanánk, tekintsük a következő lemmát.

19. Lemma. *Legyen $S \in \{\pm 1\}^{n \times n}$. Ekkor*

$$S \in SP^+ \iff s_{kl} = s_{k1}s_{l1},$$

és

$$S \in SP^- \iff s_{kl} = -s_{k1}s_{l1}.$$

Bizonyítás.

Legyen $S \in \{\pm 1\}^{n \times n}$.

Ha $S \in SP^+$, akkor valamilyen i indexre $S = o_i o_i^T$. Mivel $o_i(1) = 1$, ezért $S_{*1} = o_i$, ahol S_{*1} az S mátrix 1. oszlopa. Ekkor

$$s_{kl} = o_i(k)o_i^T(l) = o_i(k)o_i(l) = s_{k1}s_{l1}.$$

Másfelől tegyük fel, hogy $s_{kl} = s_{k1}s_{l1}$. Mivel

$$s_{k1}s_{l1} = s_{l1}s_{k1} = s_{lk},$$

teljesül, hogy $s_{kl} = s_{lk}$, azaz S szimmetrikus. Így

$$s_{kl} = s_{k1}s_{l1} = s_{k1}s_{1l},$$

azaz

$$S = S_{*1}S_{*1}^T,$$

tehát $S \in SP^+$.

A másik ekvivalencia hasonlóan látható be.

□

Most már minden adott a tétel megfogalmazásához és bizonyításához.

20. Tétel. *Legyen*

$$S_{kl}^\pm := \begin{cases} \text{sign}((A_c)_{kl}), & \text{ha } k \neq l \\ 1, & \text{ha } k = l \end{cases}.$$

*Ha az $A^S = \mathcal{S}[P, Q]$ valós szimmetrikus intervallummátrix A_c közép mátrixa speciális mintázatot mutat, esetleg a diagonális intervallumok kivételével, azaz, ha $S^\pm \in SP^+$, akkor azt az $i \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$ indexet tekintve, melyre $S_{*1}^\pm = o_i$, fennáll, hogy*

$$\overline{\lambda}_1(A^S) = \lambda_1(\overline{A}^i).$$

21. Megjegyzés. A 20. Tételben a fő hangsúly az A_c közép mátrix offdiagonális elemeinek az előjelen van, amit a bizonyításban is láthatunk.

22. Megjegyzés. A 20. Tétel azt állítja, hogy speciális előjelmintázat esetén megadható az az $\overline{A}^i$ mátrix, ami meghatározza a $\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ korlátot.

Bizonyítás. Mivel az $x^T A x$ kvadratikus alak folytonos az $\mathbf{A}^S \times B^n$ kompakt halmazon, ezért felveszi a $\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ maximumot valamilyen $x^{(0)} \in B^n$ -re és $A^{(0)} \in \mathbf{A}^S$ -re. Indirekten tegyük fel, hogy

$$\overline{x}^T \overline{A}^i \overline{x} < x^{(0)T} A^{(0)} x^{(0)}, \quad (25)$$

ahol i az az index, amire $S_{*1}^\pm = o_i$, és $\overline{x}$ a $\lambda_1(\overline{A}^i)$ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Legyen $S^\pm = (s_{kl})$ és $y^{(0)} = (s_{11}|x_1^{(0)}|, s_{21}|x_2^{(0)}|, \dots, s_{n1}|x_n^{(0)}|)^T$. Ekkor egyszerűen adódik, hogy

$$y^{(0)T} \overline{A}^i y^{(0)} \leq \overline{x}^T \overline{A}^i \overline{x} < x^{(0)T} A^{(0)} x^{(0)},$$

valamint alább belátjuk, hogy

$$x^{(0)T} A^{(0)} x^{(0)} \leq y^{(0)T} \overline{A}^i y^{(0)},$$

amivel ellentmondásra jutunk.

Először kifejtjük a kvadratikus alakot, majd tagonként felülről becsljük.

$$x^{(0)T} A^{(0)} x^{(0)} = \sum_{k=1}^n a_{kk}^{(0)} x_k^{(0)2} + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{kl}^{(0)} x_k^{(0)} x_l^{(0)}$$

Ekkor

$$a_{kk}^{(0)} x_k^{(0)2} \leq q_{kk} y_k^{(0)2}. \quad (26)$$

Továbbá, ha $k \neq l$ és $s_{kl} = 1$, akkor a 19. Lemmát felhasználva

$$y_k^{(0)} y_l^{(0)} = s_{k1} |x_k^{(0)}| s_{l1} |x_l^{(0)}| = s_{kl} |x_k^{(0)}| |x_l^{(0)}| \geq 0.$$

Valamint

$$|a_{kl}^{(0)}| \in [p_{kl}, q_{kl}].$$

Hiszen, ha $a_{kl}^{(0)} < 0$, akkor $p_{kl} < 0$, így $|a_{kl}^{(0)}| \leq |p_{kl}|$, és $|p_{kl}| < q_{kl}$, mivel $s_{kl} = 1$, tehát $p_{kl} < |a_{kl}^{(0)}| < q_{kl}$. Ha $a_{kl}^{(0)} \geq 0$, akkor $p_{kl} \leq |a_{kl}^{(0)}| \leq q_{kl}$. Ezáltal

$$a_{kl}^{(0)} x_k^{(0)} x_l^{(0)} \leq |a_{kl}^{(0)}| y_k^{(0)} y_l^{(0)} \leq q_{kl} y_k^{(0)} y_l^{(0)}. \quad (27)$$

Ha $k \neq l$ és $s_{kl} = -1$, akkor

$$y_k^{(0)} y_l^{(0)} = s_{k1} |x_k^{(0)}| s_{l1} |x_l^{(0)}| = s_{kl} |x_k^{(0)}| |x_l^{(0)}| \leq 0,$$

és

$$-|a_{kl}^{(0)}| \in [p_{kl}, q_{kl}].$$

Hiszen, ha $a_{kl}^{(0)} < 0$, akkor $-|a_{kl}^{(0)}| = a_{kl}^{(0)}$, ezáltal $p_{kl} \leq -|a_{kl}^{(0)}| \leq q_{kl}$. Ha $a_{kl}^{(0)} \geq 0$, akkor $q_{kl} \geq 0$, így $a_{kl}^{(0)} \leq q_{kl}$, és $q_{kl} < |p_{kl}|$, mivel $s_{kl} = -1$, tehát $p_{kl} < -|a_{kl}^{(0)}| < q_{kl}$. Ezért

$$a_{kl}^{(0)} x_k^{(0)} x_l^{(0)} \leq -|a_{kl}^{(0)}| y_k^{(0)} y_l^{(0)} \leq p_{kl} y_k^{(0)} y_l^{(0)} \quad (28)$$

Ezáltal ha $s_{kl} = 1$, akkor a jobb végpontot választjuk, különben a balt. Így megkapjuk az $\overline{A}^i$ mátrixot. (27) és (28) alapján

$$x^{(0)T} A^{(0)} x^{(0)} \leq y^{(0)T} \overline{A}^i y^{(0)},$$

ami ellentmondáshoz vezet, azaz (25) nem állhat fenn.

□

23. Megjegyzés. Ha néhány intervallum közepe 0, de van olyan előjelmintázat (akár több is), ami a 0-kon kívül megegyezik $S^\pm$ -szal, azaz az adott intervallummátrixhoz tartozó közép mátrix módosított előjelmátrixával, akkor ezen mintázat szerint véve az intervallumok megfelelő végpontjait megkapjuk a maximalizáló $\bar{A}^i$ mátrixot. Ugyanis ekkor a bizonyításbeli (26), (27) és (28) egyenlőtlenségek ugyanúgy fennállnak. (Ha több előjelmintázat is megfelel, akkor a hozzájuk tartozó $\bar{A}^i$ mátrixok mindegyike maximalizál.)

Alább a 20. Tétel és 23. Megjegyzés eredményeit szemléltetjük. Ennek során a $\bar{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ éles korlát megállapításához harmadfokú polinomok gyökeit számítottuk ki. Ezeket az összetett alakjuk miatt $\text{Root}[p, k]$ alakban adtuk meg, ahol p egy polinom és a k , valós gyökök esetén, a növekvő sorrendjük szerinti sorszám.

24. Példa. Legyen

$$\mathbf{A}^S = \begin{pmatrix} [-3, -1] & [2, 3] & [-2, 1] \\ [2, 3] & [2, 4] & [-2, -1] \\ [-2, 1] & [-2, -1] & [-3, 4] \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$S^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ami a 3. Ábra 2. mintázatával egyezik meg, így a 20. Tétel alapján az

$$\bar{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix legnagyobb sajátértéke adja meg a $\bar{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ éles korlátot. Valóban, mivel

$$\begin{aligned} \bar{A}^1 &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} & \lambda_1(\bar{A}^1) &= \text{Root}[x^3 - 7x^2 - 3x + 61, 3] \approx 5.58 \\ \bar{A}^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} & \lambda_1(\bar{A}^2) &= \text{Root}[x^3 - 7x^2 - 9x + 40, 3] \approx 7.49 \\ \bar{A}^3 &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} & \lambda_1(\bar{A}^3) &= \text{Root}[x^3 - 7x^2 - x + 40, 3] \approx 6.08 \\ \bar{A}^4 &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} & \lambda_1(\bar{A}^4) &= 2 + \sqrt{17} \approx 6.12, \end{aligned}$$

ezért

a Hertz-tétel szerint

$$\bar{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \max \{ \lambda_1(\bar{A}^1), \lambda_1(\bar{A}^2), \lambda_1(\bar{A}^3), \lambda_1(\bar{A}^4) \} = \lambda_1(\bar{A}^2).$$

25. Példa. Legyen

$$\mathbf{A}^S = \begin{pmatrix} [-3, -1] & [-3, 3] & [-2, 1] \\ [-3, 3] & [2, 4] & [-5, 5] \\ [-2, 1] & [-5, 5] & [-3, 4] \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$S^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

így 2 speciális előjelmintázat is van, ami a 0-kon kívül megegyezik $S^\pm$ -szal, ezek

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát a 23. Megjegyzés értelmében

$$\overline{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \overline{A}^4 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrixok legnagyobb sajátértékei megegyeznek a $\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ éles korláttal. Ez teljesül, hiszen

$$\begin{aligned} \overline{A}^1 &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} & \lambda_1(\overline{A}^1) &= \text{Root}[x^3 - 7x^2 - 27x + 1, 3] \approx 9.76 \\ \overline{A}^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} & \lambda_1(\overline{A}^2) &= \text{Root}[x^3 - 7x^2 - 30x - 17, 3] \approx 10.13 \\ \overline{A}^3 &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix} & \lambda_1(\overline{A}^3) &= \text{Root}[x^3 - 7x^2 - 27x + 1, 3] \approx 9.76 \\ \overline{A}^4 &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} & \lambda_1(\overline{A}^4) &= \text{Root}[x^3 - 7x^2 - 30x - 17, 3] \approx 10.13, \end{aligned}$$

így a Hertz-tétel alapján

$$\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \max \{ \lambda_1(\overline{A}^1), \lambda_1(\overline{A}^2), \lambda_1(\overline{A}^3), \lambda_1(\overline{A}^4) \} = \lambda_1(\overline{A}^2) = \lambda_1(\overline{A}^4).$$

A következő példa arra mutat rá, hogy ha az intervallummátrix előjelmintázata általános, akkor pusztán az előjelmintázat alapján nem lehet a Hertz-tételnél erősebbet megfogalmazni.

26. Példa. Legyen

$$\mathbf{A}^S = \begin{pmatrix} [-2, 1] & [2, 4] & [-2, 1] \\ [2, 4] & [-1, 3] & [-2, 5] \\ [-2, 1] & [-2, 5] & [2, 4] \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{B}^S = \begin{pmatrix} [-2, 1] & [2, 4] & [-8, 1] \\ [2, 4] & [-1, 3] & [-2, 5] \\ [-8, 1] & [-2, 5] & [2, 4] \end{pmatrix}.$$

Ekkor a két intervallummátrix közép mátrixának módosított előjel mátrixa megegyezik, ami

$$S^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$\bar{A}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \lambda_1(\bar{A}^1) = \text{Root}[x^3 - 8x^2 - 23x + 40, 3] \approx 9.91$$

$$\bar{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \lambda_1(\bar{A}^2) = \text{Root}[x^3 - 8x^2 - 5x + 36, 3] \approx 8.07$$

$$\bar{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \lambda_1(\bar{A}^3) = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{5}) \approx 5.62$$

$$\bar{A}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \lambda_1(\bar{A}^4) = \text{Root}[x^3 - 8x^2 - 14x + 81, 3] \approx 8.53$$

$$\bar{B}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \lambda_1(\bar{B}^1) = \text{Root}[x^3 - 8x^2 - 23x + 40, 3] \approx 9.91$$

$$\bar{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 3 & -2 \\ -8 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \lambda_1(\bar{B}^2) = \text{Root}[x^3 - 8x^2 - 65x + 120, 3] \approx 12.45$$

$$\bar{B}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \lambda_1(\bar{B}^3) = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{5}) \approx 5.62$$

$$\bar{B}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & 5 \\ -8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \lambda_1(\bar{B}^4) = \text{Root}[x^3 - 8x^2 - 74x + 381, 3] \approx 11.55,$$

ezért

a Hertz-tétel szerint

$$\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \max \{ \lambda_1(\bar{A}^1), \lambda_1(\bar{A}^2), \lambda_1(\bar{A}^3), \lambda_1(\bar{A}^4) \} = \lambda_1(\bar{A}^1)$$

és

$$\overline{\lambda}_1(\mathbf{B}^S) = \max \{ \lambda_1(\bar{B}^1), \lambda_1(\bar{B}^2), \lambda_1(\bar{B}^3), \lambda_1(\bar{B}^4) \} = \lambda_1(\bar{B}^2).$$

Tehát annak ellenére, hogy az előjel mintázatuk megegyezik, a $\overline{\lambda}_1$ éles korlátot különböző ortánsokban maximalizáló csúcs mátrixok legnagyobb sajátértékeként érjük el.

Alább a 20. Tétel $\underline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S)$ korlátra vonatkozó párját közöljük.

27. Tétel. *Legyen*

$$S_{kl}^{\mp} := \begin{cases} \text{sign}((A_c)_{kl}), & \text{ha } k \neq l \\ -1, & \text{ha } k = l \end{cases}.$$

Ha az $\mathbf{A}^S = \mathcal{S}[P, Q]$ valós szimmetrikus intervallummátrix A_c közép mátrixa speciális mintázatot mutat, esetleg a diagonális intervallumok kivételével, azaz, ha $S^\mp \in SP^-$, akkor azt az $i \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$ indexet tekintve, melyre $S_{*1}^\mp = -o_i$, fennáll, hogy

$$\underline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S) = \lambda_n(\underline{A}^i).$$

Bizonyítás. Az előzőhöz hasonló. □

A 20. és a 27. Tétel ismeretében felmerül a kérdés, hogy mekkora a speciális előjel-mintázatok aránya. A következő megjegyzésben erre adunk választ.

28. Megjegyzés. Feltehetjük, hogy a diagonális intervallumok közepe pozitív, ezáltal a speciális mintázatok száma 2^{n-1} , míg összesen, már csak az offdiagonális intervallumokra összegezve $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ mintázat van, ami a $\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ korlátot illeti. Így kapjuk, hogy a speciális előjel-mintázatok aránya

$$\frac{2^{n-1}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}}.$$

Ugyanez az arány érvényes a $\underline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S)$ korlátot illetőleg is. Tehát 2×2 -es esetben minden mintázat speciális, azaz a $\underline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S)$ és $\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ korlátokhoz mindig meg tudjuk adni azt az 1-1 csúcsmátrixot, aminek az egyik sajátértéke azzal egyezik meg. Ez összhangban áll a 13. Megjegyzés idevonatkozó részével és a 15. Tételbeli példa is ezt támasztja alá. $n = 3$ esetén, a $\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ korlátot tekintve a 8 előjel-mintázat fele speciális, amiket a 3. Ábrán már megmutattunk. Ugyanakkor a szóban forgó arány exponenciálisan csökken n függvényében, $n \geq 6$ esetén, már kisebb, mint 0.001. Továbbá az arányból következik, hogy egy adott valós szimmetrikus intervallummátrix kapcsán mind az $S^\pm$, mind az $S^\mp$ előjel-mintázat csak a 2×2 -es esetben speciális. A 3×3 -as esetben csak az egyik, míg az $n \times n$ -es esetben, $n > 3$, legfeljebb az egyik speciális.

A következőkben megmutatjuk, hogy speciális esetekben az extrémális sajátértékek másik két korlátját, azaz $\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ -t és $\overline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S)$ -t is megadhatjuk.

29. Tétel. Ha az $\mathbf{A}^S = \mathcal{S}[P, Q]$ valós szimmetrikus intervallummátrix offdiagonális intervallumai egyenként nemnegatívak vagy nempozitívak, és az A_c közép mátrix speciális mintázatot mutat, esetleg a diagonális intervallumok kivételével, azaz, ha $S^\pm \in SP^+$, akkor azt az $i \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$ indexet tekintve, melyre $S_{*1}^\pm = o_i$, fennáll, hogy

$$\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \lambda_1(\underline{A}^i).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $S^\pm = o_i o_i^T$, azaz az i . speciális mintázatot mutatja. Az $x^T A x$ kvadratikus alak felveszi a $\underline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S)$ minimumot valamilyen $x^{(0)} \in B^n$ -re és $A^{(0)} \in \mathbf{A}^S$ -re, ahol $x^{(0)}$ a $\lambda_1(A^{(0)})$ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Ekkor

$$x^{(0)T} A^{(0)} x^{(0)} \geq \underline{x}^T A^{(0)} \underline{x} \geq \underline{x}^T \underline{A}^i \underline{x}, \quad (29)$$

ahol $\underline{x}$ a $\lambda_1(\underline{A}^i)$ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Az utolsó egyenlőtlenség a bizonyítandó, amihez a (29)-beli megfelelő kvadratikus alakot kifejtjük, majd alulról becsljük. Ekkor

$$a_{kk}^{(0)} \underline{x}_k^2 \geq p_{kk} \underline{x}_k^2.$$

Észrevehetjük egyrészt azt, hogy az $A \in \mathbf{A}^S$ mátrixok offdiagonális előjelmintázatai invariánsak, mindegyik az i . mintázatnak megfelelő, másrészt azt, hogy a legnagyobb sajátértékekhez tartozó $\tilde{x}$ sajátvektorokra teljesül, hogy $\text{sign}(\tilde{x}\tilde{x}^T) = o_i o_i^T$, ezáltal maximalizálják a kapcsolatos kvadrátikus alakot. Tehát $x^{(0)}$, $\underline{x} \in B_i$, valamint $a_{kl}^{(0)}$ és $\underline{x}_k \underline{x}_l$ előjele megegyezik, esetleg valamelyik 0, ha $k \neq l$. Azaz $a_{kl}^{(0)} \underline{x}_k \underline{x}_l \geq 0$, ha $k \neq l$. Így, ha $\text{sign}(a_{kl}^{(0)}) = 1$, akkor

$$a_{kl}^{(0)} \underline{x}_k \underline{x}_l \geq p_{kl} \underline{x}_k \underline{x}_l,$$

ha $\text{sign}(a_{kl}^{(0)}) = -1$, akkor

$$a_{kl}^{(0)} \underline{x}_k \underline{x}_l \geq q_{kl} \underline{x}_k \underline{x}_l.$$

Ezáltal (29) utolsó egyenlőtlensége is teljesül.

□

30. Tétel. *Ha az $\mathbf{A}^S = \mathcal{S}[P, Q]$ valós szimmetrikus intervallummátrix offdiagonális intervallumai egyenként nemnegatívak vagy nempozitívak, és az A_c közép mátrix speciális mintázatot mutat, esetleg a diagonális intervallumok kivételével, azaz, ha $S^\mp \in SP^-$, akkor azt az $i \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$ indexet tekintve, melyre $S_{*1}^\mp = -o_i$, fennáll, hogy*

$$\overline{\lambda}_n(\mathbf{A}^S) = \lambda_n(\overline{A}^i).$$

Bizonyítás. Az előzőhöz hasonló.

5.2. Sajátérték-intervallumok becslése és diszjunksága

A következőkben Rohn sajátérték-intervallumokra vonatkozó becslését és ennek következményeként a diszjunkság egy elegendő feltételét mutatjuk be.

31. Tétel (Rohn-korlátok [7, 10, 13]). *Legyenek $A_c, A_\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixok és $A \in \mathbf{A}^S$. Ekkor*

$$\lambda_i(A_c) - \rho(A_\Delta) \leq \lambda_i(A) \leq \lambda_i(A_c) + \rho(A_\Delta) \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

A tétel által szolgáltatott korlátok általában elég élesek, viszont a $\lambda_i(\mathbf{A}^S)$ ($1 \leq i \leq n$) intervallumok hossza azonos, ami a formula egy hiányossága. De kárpótol érte a könnyű számíthatóság. Továbbá egy egyszerű következményként elegendő feltételt adhatunk a sajátérték-intervallumok diszjunkságára.

31.1. Következmény ([13]). *A 31. Tétel feltételei mellett ha*

$$\lambda_{i+1}(A_c) + \rho(A_\Delta) < \lambda_i(A_c) - \rho(A_\Delta) \quad \forall 1 \leq i \leq n-1,$$

akkor a sajátérték-intervallumok diszjunktak.

Alább a 31. Tételre és a 31.1. Következményre láthatunk példát.

32. Példa. Legyen

$$\mathbf{A}^S = \begin{pmatrix} [-1, 1] & [-1, 2] \\ [-1, 2] & [-8, -6] \end{pmatrix},$$

ekkor

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -7 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2(A_c) = -\frac{1}{2}(7 + 5\sqrt{2}) \approx -7.04, \quad \lambda_1(A_c) = -\frac{1}{2}(7 - 5\sqrt{2}) \approx 0.04$$

és

$$A_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(A_\Delta) = \frac{5}{2}.$$

Így a sajátérték-intervallumok Rohn-korlátok által meghatározott külső becslései

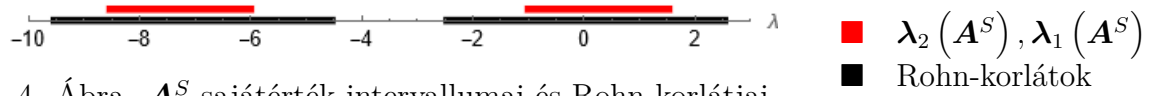
$$[-9.54, -4.54] \text{ és } [-2.46, 2.54],$$

amik diszjunktak. Ezért a sajátérték-intervallumok is diszjunktak. Az egzakt intervallumok az alábbiak:

$$\lambda_2(\mathbf{A}^S) = \left[-\frac{1}{2}(9 + \sqrt{65}), -6 \right] \approx [-8.53, -6]$$

és

$$\lambda_1(\mathbf{A}^S) = \left[-1, -\frac{1}{2}(5 - \sqrt{65}) \right] \approx [-1, 1.53].$$



4. Ábra. $\mathbf{A}^S$ sajátérték-intervallumai és Rohn-korlátjai

6. Lineáris rendszerek

Az irányításelmélet, dinamikus rendszerek területén központi fogalom a stabilitás és nagy jelentőségű annak vizsgálata. Ehhez vegyünk egy

$$x'(t) = Ax(t) \quad (30)$$

folytonos idejű időinvariáns lineáris rendszert, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus és $x'(t), x(t) \in \mathbb{R}^n$. Ezen rendszer stabilitását szeretnénk vizsgálni, de tegyük fel, hogy az A mátrix elemeit nem ismerjük pontosan. Ennek oka lehet például a működési feltételek változása éppúgy, mint az alkatrészek kopása, öregedése. Viszont ekkor az A mátrix elemeit illető bizonytalanság reprezentálható úgy, hogy egy fix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ helyett feltesszük, hogy $A \in \mathbf{A}^S$, ahol $\mathbf{A}^S$ egy szimmetrikus intervallummátrix.

A következőkben a (30) típusú rendszerek esetén vizsgált Hurwitz-stabilitást részletezzük. Egy $\mathbf{A}^S$ intervallummátrix Hurwitz, ha minden $A \in \mathbf{A}^S$ összes λ sajátértékére $\lambda < 0$ teljesül. Tekintsük az

$$\mathbf{A}^S = \begin{pmatrix} [-8, -6] & [-2, 1] & [1, 2] \\ [-2, 1] & [-10, -7] & [-6, -4] \\ [1, 2] & [-6, -4] & [-10, -8] \end{pmatrix}$$

szimmetrikus intervallummátrixot. Ekkor

$$A_c = \begin{pmatrix} -7 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{17}{2} & -5 \\ \frac{3}{2} & -5 & -9 \end{pmatrix}, \quad A_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

és

$$\lambda_1(A_c) = \text{Root}[8x^3 + 196x^2 + 1372x + 2653, 3] \approx -3.22,$$

$$\rho(A_\Delta) = \text{Root}[8x^3 - 28x^2 + 4x + 5, 3] \approx 3.29.$$

A 31. Tételt alkalmazva

$$\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) \leq \lambda_1(A_c) + \rho(A_\Delta) \approx 0.07 > 0, \quad (31)$$

tehát ezzel a módszerrel nem tudjuk a stabilitás kérdését eldönteni. Viszont a középmátrix módosított előjelmátrixa

$$S^\pm = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Így a 20. Tétel szerint

$$\overline{\lambda}_1(\mathbf{A}^S) = \lambda_1 \left(\begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 \\ -2 & -7 & -6 \\ 2 & -6 & -8 \end{pmatrix} \right) = \text{Root}[x^3 + 21x^2 + 102x + 12, 3] \approx -0.12 < 0,$$

ezáltal az $\mathbf{A}^S$ szimmetrikus intervallummátrix stabil.

7. Összegzés és kitekintés

Dolgozatunkban a 2×2 -es speciális eset vizsgálata során megállapítottuk az összes éles sajátértékkorlátot (12. Tétel, 13. Megjegyzés, 14. Tétel). Ezen belül egy esetben olyan intervallummátrixot konstruáltunk, amely csúcsmátrixai által meghatározott sajátérték-intervallumai egybeesnek az eredetiével (14. Tétel). Továbbá szükséges és elegendő feltételeket adtunk a sajátérték-intervallumok diszjunkságára (15., 16. Tétel). Ezt követően áttértünk az $n \times n$ -es általános eset vizsgálatára. Ennek során sikerült megállapítanunk, hogy ha az intervallummátrix közép mátrixának előjelmintázata speciális, akkor megadhatjuk azt a csúcsmátrixot, aminek a legnagyobb sajátértéke a legnagyobb sajátértékek maximuma (20. Tétel). Továbbá a legkisebbek minimumára is hasonló állítást fogalmaztunk meg (27. Tétel). Ezenkívül speciális esetekben az extrémális sajátérték-intervallumok másik két korlátját is meghatároztuk (29., 30. Tétel). Ezt követően a sajátérték-intervallumok egy külső becslésével egy egyszerű elegendő feltételt ismertettünk a diszjunkságukra. Végül az elért eredményeket felhasználva szimmetrikus intervallummátrixok stabilitását vizsgáltuk.

Munkánk során elsősorban Hertz és Rohn eredményeire támaszkodtunk. Előbbi [6] cikkében foglaltakat általánosítva jutottunk el a 20. és 27. Tételekhez, míg utóbbi eredményei [7, 10] által megismertük a sajátérték-intervallumok egy könnyen számítható külső becslését.

A közölt eredményekkel közel sem értünk a sajátérték-probléma vizsgálatának végére, hiszen amellett, hogy főképp az éles korlátok meghatározására törekedtünk, számos algoritmus, iteratív eljárás ismert a sajátértékek becslésére [7, 8, 11]. Némelyikük felhasználja, hogy egy szimmetrikus mátrixnak és egy főminorjának a sajátértékei összefűződnek, azaz felváltva követik egymást. Ezért ezen algoritmusokban megbízható számításokat végeznek a főminorok sajátérték-intervallumainak meghatározásához, amik ezáltal külső becslést szolgáltatnak az intervallummátrix sajátértékkorlátjaira. Ezenkívül egy becslésből indulnak ki, így a szimmetrikus Rohn-korlátok jó kezdeti értékek lehetnek, hogy tovább élesítsük a korlátokat. Más algoritmusokban csúcsmátrixok sajátértékei adnak belső becslést. Emellett intervallumdarabolással és intervallumaritmetikai műveletek alkalmazásával is kezelhető a sajátérték-probléma. Ennek során a probléma részintervallumokon történő megoldása adja a becsléseket. Az intervallumaritmetika technikai támogatottsága eléggé csekély Mathematica-ban, viszont MATLAB-ban az INTLAB-csomagot éppen az intervallum alapú számításokra fejlesztették ki. Ehhez szimmetrikus intervallummátrixok sajátértékintervallumait lefedő függvényeket is implementáltak, amiről bővebben [11]-ben olvashatunk. Emellett a csúcsmátrixok további tanulmányozása is vezethet eredményre. Hiszen habár a 8. Megjegyzés alapján az extrémális sajátértékek másik két korlátjára adott formulák már a 2×2 -es esetben is csak bizonyos feltételek mellett állnak fenn, felmerül a kérdés, hogy az $n \times n$ -es esetben is konstruálhatunk-e egy olyan intervallummátrixot, melynek csúcsmátrixai megadják az extrémális sajátértékek éles korlátjait. Végül, de nem utolsósorban a többi sajátértékintervallum végpontjainak meghatározása is nyitott kérdés.

Irodalomjegyzék

- [1] B. F. Caviness és J. R. Johnson, szerk. *Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition*. Springer Science & Business Media, 2012, 136–151. old.
- [2] G. E. Collins. Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition. *Automata theory and formal languages*. Springer, 1975, 134–183. old.
- [3] A. Deif. The interval eigenvalue problem. *ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 71 (1) (1991), 61–64. old.
- [4] D. Hertz. Interval Analysis: Eigenvalue bounds of interval matrices. *Encyclopedia of optimization*. Szerk. C. A. Floudas és P. M. Pardalos. Springer Science & Business Media, 2008, 1689–1692. old.
- [5] D. Hertz. The extreme eigenvalues and stability of real symmetric interval matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control* 37 (4) (1992), 532–535. old.
- [6] D. Hertz. The maximal eigenvalue and stability of a class of real symmetric interval matrices. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 40 (1) (1993), 56–57. old.
- [7] M. Hladik, D. Daney és E. Tsigaridas. Bounds on real eigenvalues and singular values of interval matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 31 (4) (2010), 2116–2129. old.
- [8] M. Hladik, D. Daney és E. Tsigaridas. Characterizing and approximating eigenvalue sets of symmetric interval matrices. *Computers & Mathematics with Applications* 62 (8) (2011), 3152–3163. old.
- [9] Wolfram Research Inc. *Mathematica, Version 13.0*. Champaign, IL. (2021).
- [10] J. Rohn. A Handbook of Results on Interval Linear Problems pp. 29. URL: <http://uivtx.cs.cas.cz/~rohn/publist/!aahandbook.pdf>. elérési idő: 2022. 09. 27.
- [11] N. Stoyanov Kaleyski. Eigenvalues of symmetric interval matrices. (2014). BSc szakdolgozat, Témavezető: M. Hladik, Charles University.
- [12] A. Strzebonski. Solving algebraic inequalities. *Mathematica Journal* 7 (2000), 525–541. old.
- [13] F. Su és tsai. Analysis of eigenvalue bounds for real symmetric interval matrices. *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications* 5 (1) (2010), 197–207. old.
- [14] L. X. Xin. Necessary and sufficient conditions for stability of a class of interval matrices. *International Journal of Control* 45 (1) (1987), 211–214. old.