

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR

BOLYAI INTÉZET
SZTOCHASZTIKA TANSZÉK

Közel-kritikus elágazó folyamatok
OTDK-DOLGOZAT

Készítette: Kubatovics Kata
Alkalmazott Matematikus MSc hallgató

Témavezető: Dr. Kevei Péter
Egyetemi docens
Sztochasztika tanszék

SZEGED, 2022

Absztrakt

A közel-kritikus elágazó folyamatok olyan inhomogén Galton-Watson-folyamatok, ahol az utódeloszlások várható értéke 1-nél kisebb, és 1-hez konvergál. Bár az ilyen folyamatok 1 valószínűséggel kihalnak, nemtriviális határeloszlás-tételt fogalmazhatunk meg, ha a folyamatot azon feltétel mellett vizsgáljuk, hogy az az n . időpontig még nem halt ki. Az ilyen eredményeket Yaglom-típusú határeloszlás tételeknek nevezzük. Megfelelő feltételek mellett a feltételes határeloszlás geometriai eloszlást követ ebben a speciális, közel-kritikus esetben.

Vizsgáljuk továbbá a közel-kritikus elágazó folyamatokat bevándorlással, azaz amikor a fenti folyamat minden generációban véletlen számú bevándorlóval egészül ki. Ekkor a bevándorlás ellensúlyozza a folyamat szubkritikus voltát, és bizonyos feltételek mellett a határeloszlás összetett Poisson eloszlást követ.

Tételeink igazolásához analitikus eszközöket használunk. A bizonyítások alapját a G. Kersting által kidolgozott módszerek (A unifying approach to branching processes in a varying environment, *Journal of Applied Probability*, 2020) adják.

1. Bevezetés

Legyen $X_0 = 1$. Az $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ folyamat *elágazó folyamat változó környezetben*, ha

$$X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ahol $\{\xi_{n,j}\}_{n,j \in \mathbb{N}}$ független, nemnegatív, egész értékű véletlen változók úgy, hogy $\{\xi_{n,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ azonos eloszlásúak. Az X_n változó jelöli a populáció n . generációjának méretét, és $\xi_{n,j}$ az $(n-1)$. generáció j . tagjának utódainak számát. A $\{\xi_{n,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ változók közös eloszlását az n . generáció *utódeloszlásának* nevezzük.

Bár az elágazó folyamatok története a 19. századig nyúlik vissza, a mai napig aktív kutatási terület. Kersting és Vatutin 2017-ben megjelent [8]-as monográfiája és Kersting 2020-ban publikált [7]-es cikke átfogóan tárgyalja a változó környezet esetét. Az általa kidolgozott analitikus módszereket a 2. fejezetben ismertetjük.

Azon elágazó folyamatok esetén, melyek 1 valószínűséggel kihalnak, az $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folyamat aszimptotikus viselkedését az $\{X_n > 0\}$ feltétel mellett vizsgálva határeloszlás-tételeket fogalmazhatunk meg. Az ilyen tételek a kezdeti eredmények, [11], szerzőjéről Yaglom-típusú határeloszlás-tétel néven váltak ismertté. A homogén esetben publikált eredményeket Athreya és Ney [2]-ben ismerteti. A kérdéskör a változó környezetben is aktívan vizsgált, Jagers [6]-beli eredményeit Bhattacharya és Perlman általánosította [3]-ban, továbbá Cardona-Tobón és Palau [4]-ben valószínűségszámítási eszközökkel igazolták Kersting korábbi eredményeit.

Jelölje $f_n(s) = \mathbf{E}(s^{\xi_n})$ az n . generáció utódeloszlásának generátorfüggvényét, és vezessük be az alábbi jelöléseket tetszőleges $s \in [0, 1]$, $0 < \bar{f}_j < \infty$, $j \leq n \in \mathbb{N}_0$ esetén,

$$\begin{aligned} \bar{f}_j &:= f'_j(1), \quad \tilde{f}_j := \frac{f''_j(1)}{f'_j(1)^2}, \\ f_{j,n}(s) &:= f_{j+1} \circ \dots \circ f_n(s), \quad j < n, \quad f_{n,n}(s) = s, \quad \bar{f}_{j,n} := \bar{f}_{j+1} \dots \bar{f}_n, \quad \bar{f}_{n,n} = 1. \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy X_n generátorfüggvénye az $f_{0,n}(s)$ függvénykompozícióval egyezik meg. A [7]-beli 4. Lemma alapján tetszőleges utódeloszlás esetén megadható X_n várható értéke és normalizált második faktoriális momentuma a lánc-, illetve szorzásszabály segítségével.

Mivel

$$f'_{0,n}(s) = \prod_{k=1}^n f'_k(f_{k,n}(s)), \quad f'_{n,n}(s) = 1,$$

így

$$\mathbf{E}(X_n) = f'_{0,n}(1) = \prod_{k=1}^n f'_k(1) = \bar{f}_{0,n}.$$

Továbbá,

$$f''_{0,n}(s) = f'_{0,n}(s)^2 \sum_{k=1}^n \frac{f''_k(f_{k,n}(s))}{f'_k(f_{k,n}(s))^2 \prod_{l=1}^{k-1} f'_l(f_{l,n}(s))}, \quad f''_{n,n}(s) = 0,$$

következésképp

$$\tilde{f}_{0,n} = \frac{f''_{0,n}(1)}{f'_{0,n}(1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{f''_k(1)}{f'_k(1)^2 \prod_{l=1}^{k-1} f'_l(1)} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{f''_k(1)}{f'_k(1)^2}}{\bar{f}_{0,k-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{\tilde{f}_k}{\bar{f}_{0,k-1}}.$$

Az $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ elágazó folyamat *reguláris*, ha létezik olyan $c < \infty$ konstans, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül az alábbi feltétel,

$$\mathbf{E}(X_n^2, X_n \geq 2) \leq c \cdot \mathbf{E}(X_n, X_n \geq 2) \cdot \mathbf{E}(X_n | X_n \geq 1), \quad (1)$$

ahol Y véletlen változó és A esemény esetén $\mathbf{E}(Y, A) = \mathbf{E}(Y I_A)$.

1.1. Tétel (Kersting, [7, Theorem 3.]). *Legyen*

$$a_n := 1 + \bar{f}_{0,n} \sum_{k=1}^n \frac{\tilde{f}_k}{\bar{f}_{0,k-1}},$$

és legyen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy reguláris elágazó folyamat változó környezetben. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $u < \infty$, hogy minden $n \geq 0$ esetén

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{a_n} > u | X_n > 0\right) \leq \varepsilon,$$

továbbá létezik olyan $\theta > 0$ és $u > 0$, hogy minden $n \geq 0$ esetén,

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{a_n} > u | X_n > 0\right) \geq \theta,$$

és létezik olyan $\gamma > 0$ konstans, hogy

$$\gamma a_n \leq \mathbf{E}(X_n | X_n > 0) \leq a_n.$$

1.2. Következmény (Kersting, [7, Corollary 2.]). *Tegyük fel, hogy az (1) feltétel teljesül az $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folyamatra. Ekkor az alábbiak ekvivalensek,*

- (i) *az $(X_n | X_n > 0)$ véletlen változók sorozata feszes,*
- (ii) $\sup_{n \geq 0} \mathbf{E}(X_n | X_n > 0) < \infty,$
- (iii) $\sum_{k=1}^n \frac{\tilde{f}_k}{\bar{f}_{k-1}} = O\left(\frac{1}{\bar{f}_n}\right),$ amint $n \rightarrow \infty$.

A dolgozat olyan elágazó folyamatokkal foglalkozik, ahol az utódeloszlások várható értékére igaz, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\bar{f}_n < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = 1$ és $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \bar{f}_n) = \infty$. Az ilyen folyamatokat *közel-kritikus elágazó folyamatoknak* nevezzük. Mivel ekkor $\mathbf{E}(X_n) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, ebben az esetben az $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folyamat 1 valószínűséggel kihál, a folyamatot az $\{X_n > 0\}$ feltétel mellett vizsgálva nemtriviális határeloszlás-tételt fogalmazhatunk meg. Hasonló eredményeket igazolhatunk, ha a kihálást minden generációban véletlen számú bevándorlóval ellensúlyozzuk.

A 3. fejezet célja olyan feltételek megadása, melyek biztosítják az $(X_n | X_n > 0)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergenciáját. Ebben a részben Yaglom-típusú eredményeket fogalmazunk meg a közel-kritikus esetben. A bizonyítások alapját a Kersting által [7]-ben kidolgozott analitikus eszközök adják.

A 4. fejezetben olyan közel-kritikus elágazó folyamatokkal foglalkozunk, melyekben az egyes generációk véletlen számú bevándorlóval egészülnek ki. Györfi, Ispány, Pap és Varga [5]-ben olyan bevándorlásos közel-kritikus elágazó folyamatokat vizsgáltak, ahol az utóeloszlás Bernoulli-eloszlást követ. Eredményeiket Kevei [9]-ben általánosította, célunk az általa megfogalmazott feltételek gyengítése Kersting analitikus módszereinek segítségével.

2. Az alakfüggvény

Tételeink bizonyításához analitikus eszközöket használunk. Célunk, hogy képet kapjunk az X_n véletlen változó eloszlásáról, annak generátorfüggvényét, $f_{0,n}$ -t vizsgálva. Általában, $f_{0,n}$ meghatározása rendkívül bonyolult, ám a következő, az elágazó folyamatok elméletének kezdete óta ismert, [2]-ben is tárgyalt esetben egyszerű számolással explicit alakra hozható.

2.1. *Példa* (Törtlineáris eloszlás). Egy nemnegatív, egész értékű véletlen változó *törtlineáris eloszlást* követ $0 < a \leq 1$ és $0 \leq q \leq 1$ paraméterekkel, ha valószínűségeloszlása a következő,

$$p_k = a(1 - q)q^{k-1}, \quad k \neq 0.$$

A mértani sor összegképletét alkalmazva adódik, hogy

$$p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 - a,$$

és hasonlóképp belátható, hogy a változó generátorfüggvénye,

$$f(s) = 1 - a \frac{1 - s}{1 - qs},$$

így

$$\bar{f} = \frac{a}{1 - q}, \quad \tilde{f} = \frac{2q}{a}.$$

Tehát algebrai átalakításokkal a generátorfüggvény kifejezhető az $\bar{f}$ és $\tilde{f}$ paraméterek segítségével a következőképp,

$$\frac{1}{1 - f(s)} = \frac{1}{\bar{f}(1 - s)} + \frac{\tilde{f}}{2}.$$

A fenti összefüggés felhasználásával meghatározható az $f_{0,n}$ függvénykompozíció is, hiszen

$$\frac{1}{1 - f_{0,n}(s)} = \frac{1}{1 - f_1(f_{1,n}(s))} = \frac{1}{\bar{f}_1(1 - f_{1,n}(s))} + \frac{\tilde{f}_1}{2},$$

és ezt iterálva a következő összefüggés adódik,

$$\frac{1}{1 - f_{0,n}(s)} = \frac{1}{\bar{f}_1 \dots \bar{f}_n(1 - s)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\tilde{f}_k}{\bar{f}_1 \dots \bar{f}_{k-1}}.$$

Tehát $f_{0,n}$ is törtlineáris, és

$$\bar{f}_{0,n} = \bar{f}_1 \cdots \bar{f}_n, \quad \tilde{f}_{0,n} = \sum_{k=1}^n \frac{\tilde{f}_k}{\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_{k-1}}.$$

Általában ahhoz, hogy a jellemzően nehezen meghatározható $f_{0,n}$ függvénykompozíciót kezelni tudjuk, vezessük be az alábbi, az elágazó folyamatok elméletének kezdete óta alkalmazott eszközt, mely felső korlátja már Agresti 1975-ben publikált [1]-es cikkében is megjelent.

Legyen f egy generátorfüggvény, $0 < \bar{f} < \infty$ várható értékkel. A $\varphi : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(s) := \frac{1}{1 - f(s)} - \frac{1}{\bar{f}(1 - s)}, \quad 0 \leq s < 1$$

függvényt *alakfüggvénynek* nevezzük.

A generátorfüggvény konvexitásából adódóan $\varphi(s) \geq 0$ minden $0 \leq s < 1$ esetén. Továbbá,

$$f(s) = 1 + f'(1)(s - 1) + \frac{1}{2}f''(1)(s - 1)^2, \quad t \in (s, 1),$$

az $f(s)$ generátorfüggvény 1-körüli Taylor-sorfejtését és az $\frac{1}{1-x} \sim 1 + x$ közelítést felhasználva definiálható az alakfüggvény értéke az 1 helyen,

$$\varphi(1) := \lim_{s \rightarrow 1^-} \varphi(s) = \frac{f''(1)}{2f'(1)^2} = \frac{\tilde{f}}{2}.$$

Jelölje φ_j a j . generáció utóeloszlásának generátorfüggvényéhez tartozó alakfüggvényt. A 2.1. példához hasonló számolással a következő egyenlőség írható fel,

$$\frac{1}{1 - f_{j,n}(s)} = \frac{1}{1 - f_{j+1}(f_{j+1,n}(s))} = \frac{1}{\bar{f}_{j+1}(1 - f_{j+1,n}(s))} + \varphi_{j+1}(f_{j+1,n}(s)).$$

Iterálva a fenti formulát, az alábbi összefüggést kapjuk tetszőleges $0 \leq s < 1$ esetén,

$$\frac{1}{1 - f_{j,n}(s)} = \frac{1}{\bar{f}_{j,n}(1 - s)} + \varphi_{j,n}(s), \quad \varphi_{j,n}(s) := \sum_{k=j+1}^n \frac{\varphi_k(f_{k,n}(s))}{\bar{f}_{j,k-1}}. \quad (2)$$

A következő állítás képet nyújt az alakfüggvény nagyságrendjéről.

2.1. Lemma (Kersting, [7, Lemma 1.]). *Tekintsünk egy $f(s)$ generátorfüggvényt, melyre $0 < \bar{f} < \infty$, $f''(1) < \infty$ és legyen $\varphi(s)$ az f -hez tartozó alakfüggvény. Ekkor tetszőleges $0 \leq s \leq 1$ esetén*

$$\frac{1}{2}\varphi(0) \leq \varphi(s) \leq 2\varphi(1).$$

Ha $p_k = 0$ minden $k \geq 2$ esetén, akkor $\varphi(s)$ azonosan 0. Különben $\varphi(0) > 0$, így az alsó korlát szigorúan pozitív.

Ha $s = 1$ vagy $s = 0$, akkor $\frac{\varphi(0)}{2} \leq \varphi(1)$ és $\varphi(0) \leq 2\varphi(1)$ egyenlőtlenségekhez jutunk. Továbbá, amennyiben $f(s) = s^k$, $k \geq 2$, akkor $\varphi(1) = \frac{\varphi(0)}{2}$, így a korlátok nem javíthatóak.

3. Yaglom-típusú határeloszlás-tételek

3.1. Lemma (Kersting, [7, Lemma 6.]). *Az (1) feltétel pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $c' < \infty$, hogy $\varphi_n(1) \leq c' \varphi_n(0)$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.*

A fejezet célja Yaglom-típusú határeloszlás-tételek megfogalmazása a közel kritikus esetben. Mivel

$$\frac{\varphi_n(1)}{\varphi_n(0)} = \frac{f_n''(1)(1 - f_n(0))}{2\bar{f}_n(\bar{f}_n - 1 + f_n(0))},$$

az 1.2. Következmény feltétele pontosan akkor teljesül, ha a fenti kifejezés korlátos.

A következőkben olyan közel-kritikus elágazó folyamatokat vizsgálunk, melyek generátorfüggvényére igaz, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n''(1)}{1 - \bar{f}_n} = \nu \in [0, \infty)$. Ezen feltétel ugyanakkor nem garantálja az (1) feltétel teljesülését.

3.1. *Példa.* Legyen az $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ változók generátorfüggvénye

$$f_n(s) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)s + \frac{1}{n^2}s^{a_n}.$$

Ekkor

$$\bar{f}_n = 1 - \frac{1}{n} + \frac{a_n}{n^2}, \quad f_n''(1) = \frac{a_n(a_n - 1)}{n^2}.$$

Így, amennyiben $a_n \sim \sqrt{n\nu}$, a folyamat teljesíti a közel-kritikus feltételeket, és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n''(1)}{1 - \bar{f}_n} = \nu$.

Ám ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n''(1)(1 - f_n(0))}{\bar{f}_n(\bar{f}_n - 1 + f_n(0))} = \infty,$$

így az (1) feltétel nem teljesül.

3.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy*

$$(i) \quad \bar{f}_n < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \bar{f}_n) = \infty,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n''(1)}{1 - \bar{f}_n} = \nu \in [0, \infty),$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n'''(1)}{1 - \bar{f}_n} = 0, \text{ ha } \nu > 0.$$

Ekkor

$$\frac{1 - f_{0,n}(s)}{\bar{f}_{0,n}} \rightarrow \left(\frac{1}{1 - s} + \frac{\nu}{2} \right)^{-1}, \quad \text{amint } n \rightarrow \infty.$$

A fenti lemma közvetlen következménye az alábbi tétel.

3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy*

$$(i) \quad \bar{f}_n < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = 1, \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \bar{f}_n) = \infty,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n''(1)}{1 - \bar{f}_n} = \nu \in [0, \infty),$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n'''(1)}{1 - \bar{f}_n} = 0, \text{ ha } \nu > 0.$$

Ekkor

$$(X_n | X_n > 0) \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Geom} \left(\frac{2}{2 + \nu} \right), \quad \text{amint } n \rightarrow \infty,$$

ahol $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ az eloszlásbeli konvergenciát jelöli.

3.2. *Példa* (Törtlineáris eloszlás). Tegyük fel, hogy az utóeloszlások törtlineárisak, azaz az egyes generációk utóeloszlásainak generátorfüggvénye, várható értéke és normalizált második faktoriális momentuma a következő,

$$f(s) = 1 - a \frac{1-s}{1-qs}, \quad \bar{f} = \frac{a}{1-q}, \quad \tilde{f} = \frac{2q}{a}.$$

Ekkor

$$\frac{1}{1-f(s)} = \frac{1}{\bar{f}(1-s)} + \frac{\tilde{f}}{2},$$

és

$$\frac{1}{1-f_{0,n}(s)} = \frac{1}{\bar{f}_1 \dots \bar{f}_n(1-s)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\tilde{f}_k}{\bar{f}_1 \dots \bar{f}_{k-1}}.$$

Feltéve, hogy a folyamat közel-kritikus és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n''(1)}{1-\bar{f}_n} = \nu$, az 5.1. Lemma alapján,

$$\frac{1-f_{0,n}(s)}{\bar{f}_{0,n}} = \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{f_k''(1)}{\bar{f}_k(1-\bar{f}_k)} (1-\bar{f}_k) \bar{f}_{k,n} \right)^{-1} \rightarrow \left(\frac{1}{1-s} + \frac{\nu}{2} \right)^{-1},$$

ha $n \rightarrow \infty$, így

$$\mathbf{E}(s^{X_n} | X_n > 0) = \frac{f_{0,n}(s) - f_{0,n}(0)}{1 - f_{0,n}(0)} = 1 - \frac{1 - f_{0,n}(s)}{1 - f_{0,n}(0)} \rightarrow \frac{2}{2 + \nu} \frac{s}{1 - \frac{\nu}{\nu+2}s},$$

ahol a határérték a geometriai eloszlás generátorfüggvénye $\frac{2}{2+\nu}$ paraméterrel.

3.3. *Példa*. Legyen

$$f_n(s) = p_n^{(0)} + p_n^{(1)}s + p_n^{(2)}s^2,$$

ekkor

$$\bar{f}_n = p_n^{(1)} + 2p_n^{(2)}, \quad f_n''(1) = 2p_n^{(2)}, \quad f_n'''(1) = 0.$$

Így amennyiben $p_n^{(0)} + p_n^{(2)} \rightarrow 0$, $p_n^{(0)} > p_n^{(2)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n^{(0)} - p_n^{(2)}) = \infty$ és $\frac{f_n''(1)}{1-\bar{f}_n} \rightarrow \nu \in [0, \infty)$, amint $n \rightarrow \infty$, a 3.3. Tétel feltételei teljesülnek.

4. Közel-kritikus elágazó folyamatok bevándorlással

Legyen $X_0 = 0$, és tekintsük a következő, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elágazó folyamatot változó környezetben, bevándorlással,

$$X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j} + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

ahol $\{\xi_{n,j}, \varepsilon_n\}_{n,j \in \mathbb{N}}$ olyan független, nemnegatív, egész értékű véletlen változók, hogy $\{\xi_{n,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ azonos eloszlásúak. A $\{\xi_{n,j}\}_{n,j \in \mathbb{N}}$ változók az $(n-1)$. generáció j . tagjának utódainak számát, ε_n pedig az n . generáció bevándorlóinak számát jelöli.

Vezessük be az $f_n(s) = \mathbf{E}(s^{\xi_n})$, $g_n(s) = \mathbf{E}(s^{X_n})$ és $h_n(s) = \mathbf{E}(s^{\varepsilon_n})$ jelöléseket. Ekkor az n . generáció generátorfüggvénye kifejezhető az utódeloszlás és a bevándorlás generátorfüggvényének segítségével az alábbi módon,

$$\begin{aligned} g_n(s) &= \mathbf{E} \left(s^{\sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j} + \varepsilon_n} \right) = \mathbf{E} \left(\mathbf{E} \left(s^{\sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j} + \varepsilon_n} \middle| X_{n-1} \right) \right) \\ &= \mathbf{E} (f_n(s)^{X_{n-1}}) h_n(s) = g_{n-1}(f_n(s)) h_n(s), \end{aligned}$$

és indukcióval belátható, hogy

$$g_n(s) = \prod_{j=1}^n h_j(f_{j,n}(s)). \quad (3)$$

Jelölje továbbá

$$m_{n,k} := \mathbf{E}[\varepsilon_n(\varepsilon_n - 1) \dots (\varepsilon_n - k + 1)], \quad k \in \mathbb{N},$$

az ε_n véletlen változó k -adik faktoriális momentumát.

A (2)-ben definiált alakfüggvény segítségével a [9]-beli 5. Tétel általánosításaihoz juthatunk.

4.1. Tétel. *Legyen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy elágazó folyamat változó környezetben, bevándorlással. Tegyük fel, hogy*

- (i) $\bar{f}_n < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \bar{f}_n) = \infty$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n''(1)}{1 - \bar{f}_n} = \nu \in (0, \infty)$,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n'''(1)}{1 - \bar{f}_n} = 0$,
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{n,k}}{k!(1 - \bar{f}_n)} = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots, K$ és $\lambda_K = 0$.

Ekkor

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y, \quad \text{amint } n \rightarrow \infty,$$

ahol az Y véletlen változó generátorfüggvénye,

$$f_Y(s) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right) \right\}.$$

4.1. *Példa.* A $K = 2$ esetben az Y véletlen változó negatív binomiális eloszlást követ $\frac{2\lambda_1}{\nu}$ és $\frac{2}{2+\nu}$ paraméterekkel, hiszen ekkor

$$f_Y(s) = \exp \left\{ -\frac{2\lambda_1}{\nu} \log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) \right\} = \left(\frac{\frac{2}{2+\nu}}{1 - \frac{\nu}{2+\nu}s} \right)^{\frac{2\lambda_1}{\nu}},$$

ez megegyezik [9] 5. Tételének állításával.

4.2. Tétel. Legyen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy elágazó folyamat változó környezetben, bevándorlással. Tegyük fel, hogy

$$(i) \quad \bar{f}_n < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \bar{f}_n) = \infty,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n''(1)}{1 - \bar{f}_n} = \nu \in (0, \infty),$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n'''(1)}{1 - \bar{f}_n} = 0,$$

$$(iv) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{n,k}}{k!(1 - \bar{f}_n)} = \lambda_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k} < \infty.$$

Ekkor

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y, \quad \text{amint } n \rightarrow \infty,$$

ahol az Y véletlen változó generátorfüggvénye,

$$f_Y(s) = \exp \left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right) \right\}.$$

A bizonyítás generátorfüggvények vizsgálatával történik, így a faktoriális momentumok konvergenciája a természetes feltétel, hiszen a k -adik faktoriális momentum éppen a generátorfüggvény k -adik deriváltja az 1 helyen. Ugyanakkor a (iv)-es feltételből következik a valószínűségek vonatkozó aszimptotika, mely fontos a határeloszlás összetett Poisson voltának igazolásánál.

4.3. Lemma. A 4.1., illetve a 4.2. Tétel (iv) feltétele mellett a $\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{n,k}}{k!(1 - \bar{f}_n)}$ határérték létezéséből következik a $q_i := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i^{(n)}}{1 - \bar{f}_n}$ határérték létezése, ahol $p_i^{(n)} = \mathbf{P}(\varepsilon_n = i)$ az ε_n véletlen változó valószínűségeloszlását jelöli.

A 4.1. Tétel bizonyításának módszeréből adódóan a határeloszlás generátorfüggvényét $(1-s)$ -szerinti sorfejtésben adjuk meg. Ezt, megfelelő feltételek mellett s szerint kifejtve, belátható, hogy az együtthatók nemnegatívak, ami éppen azt jelenti, hogy a határeloszlás összetett Poisson-eloszlást követ.

4.4. Tétel. A 4.1. Tétel feltételei mellett a határeloszlás összetett Poisson eloszlást követ.

A tételt a határeloszlás generátorfüggvényének kitevőjében megjelenő összeg tagjainak felcserélésével bizonyítjuk. Amennyiben a 4.2. Tétel feltételei mellett - vagy azokat kiegészítve - biztosítani tudjuk a határeloszlás kitevőjében megjelenő összeg tagjainak felcserélhetőségét, a bizonyítás hasonló gondolatmenettel reprodukálható ebben az esetben is.

5. Bizonyítások

5.1. Előkészületek

Tételeink bizonyításához felhasználjuk az alábbi két, [5] Függelékében szereplő lemmát.

5.1. Lemma. *Tekintsük az $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozatot, melyre $\bar{f}_n \in [0, 1)$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = 1$ és $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \bar{f}_n) = \infty$. Legyen*

$$a_{n,j}^{(k)} = (1 - \bar{f}_j) \prod_{l=j+1}^n \bar{f}_l^k, \quad n, j, k \in \mathbb{N}, \quad j \leq n.$$

Ekkor $a_{n,j}^{(k)} \leq a_{n,j}^{(1)}$ minden $n, j, k \in \mathbb{N}$, $j \leq n$ esetén, és

$$\max_{1 \leq j \leq n} a_{n,j}^{(1)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Továbbá, tetszőleges $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós konvergens sorozat, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén,

$$\sum_{j=1}^n a_{n,j}^{(k)} x_j \rightarrow \frac{x}{k}, \quad n \rightarrow \infty.$$

5.2. Lemma. *Legyen ε nemnegatív, egész értékű véletlen változó, és legyen*

$$m_k := \mathbf{E}[\varepsilon(\varepsilon - 1) \dots (\varepsilon - k + 1)], \quad k \in \mathbb{N},$$

$m_0 := 1$ és $h(s) = \mathbf{E}(s^\varepsilon)$, minden $s \in [-1, 1]$ esetén. Ha $m_l < \infty$ valamely $l \in \mathbb{N}$ -re, akkor $|s| \leq 1$ esetén,

$$h(s) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{m_k}{k!} (s-1)^k + R_l(s), \quad |R_l(s)| \leq \frac{m_l}{l!} |s-1|^l.$$

5.3. Lemma. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^i \frac{(1+a)^i - 1}{i} = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \frac{a^i}{i}.$$

Bizonyítás. A binomiális tételt alkalmazva $(1+a)^i$ -re, az összeg a következőképp írható,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^i \frac{(1+a)^i - 1}{i} &= \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^i \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} a^j \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} a^j \sum_{i=j}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} \frac{1}{i} \binom{i}{j}. \end{aligned}$$

Azt kell belátni tehát, hogy tetszőleges $j \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{i=j}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} \frac{1}{i} \binom{i}{j} = \frac{(-1)^j}{j},$$

azaz

$$\sum_{i=j}^{k-1} (-1)^{i-j} \binom{k-1}{i} \frac{j}{i} \binom{i}{j} = \sum_{i=j}^{k-1} (-1)^{i-j} \binom{k-1}{i} \binom{i-1}{j-1} = 1.$$

Az állítást teljes indukcióval igazoljuk. Mivel $j = 1$ esetén teljesül a fenti összefüggés, tegyük fel, hogy valamely j -re

$$\sum_{i=j}^{k-1} (-1)^{i-j} \binom{k-1}{i} \binom{i-1}{j-1} = 1.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1}^{k-1} (-1)^{i-(j+1)} \binom{k-1}{i} \binom{i-1}{j} &= \sum_{i=j+1}^{k-1} (-1)^{i-(j+1)} \binom{k-1}{i} \left(\binom{i}{j} - \binom{i-1}{j-1} \right) \\ &= \binom{k-1}{j} \sum_{i=j+1}^{k-1} (-1)^{i-(j+1)} \binom{k-1-j}{i-j} + 1 - \binom{k-1}{j} \\ &= \binom{k-1}{j} \cdot 1 + 1 - \binom{k-1}{j} = 1, \end{aligned}$$

ahol a binomiális együtthatók tulajdonságait és az indukciós hipotézist alkalmaztuk. $\square$

5.4. Lemma. *Tetszőleges $n, i \in \mathbb{N}$ és $i \geq n+1$ esetén,*

$$\sum_{k=1}^{i-n} (-1)^{k+1} \frac{i}{k+n} \binom{i-n}{k} = \frac{i}{n} - \frac{1}{\binom{i-1}{n-1}}.$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $i = n+1$ esetén teljesül az állítás, hiszen

$$\frac{n+1}{n} - \frac{1}{\binom{n}{n-1}} = \frac{n+1-1}{n} = 1.$$

Teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az állítás igaz i -re, és vizsgáljuk az $i+1$ esetet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{i+1-n} (-1)^{k+1} \frac{i+1}{k+n} \binom{i+1-n}{k} &= \sum_{k=1}^{i+1-n} (-1)^{k+1} \frac{i+1}{k+n} \left(\binom{i-n}{k} + \binom{i-n}{k-1} \right) \\ &= \frac{i+1}{n} - \frac{1}{\binom{i-1}{n-1}} \cdot \frac{i+1}{i} + \sum_{k=1}^{i+1-n} (-1)^{k+1} \frac{i+1}{k+n} \binom{i-n}{k-1}, \end{aligned}$$

felhasználva a $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ összefüggést és az indukciós hipotézist. Így elegendő igazolni, hogy

$$\sum_{k=1}^{i+1-n} (-1)^{k+1} \frac{i+1}{k+n} \binom{i-n}{k-1} = \frac{1}{\binom{i}{n}},$$

azaz

$$1 = \sum_{k=1}^{i+1-n} (-1)^{k+1} \frac{i+1}{k+n} \binom{i}{i-n} \binom{i-n}{k-1} = \sum_{k=1}^{i+1-n} (-1)^{k+1} \binom{i+1}{k+n} \binom{k+n-1}{n}.$$

Ismét teljes indukcióval bizonyítunk. Mivel $i = n+1$ esetén az állítás nyilván teljesül, tegyük fel,

hogy az állítás igaz i -re, azaz

$$\sum_{k=1}^{i-n} (-1)^{k+1} \binom{i}{k+n} \binom{k+n-1}{n} = 1,$$

és vizsgáljuk az $i+1$ esetet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{i+1-n} (-1)^{k+1} \binom{i+1}{k+n} \binom{k+n-1}{n} &= 1 + \sum_{k=1}^{i+1-n} (-1)^{k+1} \binom{i}{k+n-1} \binom{k+n-1}{n} \\ &= 1 + \binom{i}{n} \sum_{k=1}^{i+1-n} (-1)^{k+1} \binom{i-n}{k-1} = 1, \end{aligned}$$

a $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, illetve $\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}$ összefüggéseket, és az indukciós hipotézist felhasználva. Így

$$\sum_{k=1}^{i+1-n} (-1)^{k+1} \frac{i+1}{k+n} \binom{i+1-n}{k} = \frac{i+1}{n} - \frac{1}{\binom{i-1}{n-1}} \cdot \frac{i+1}{i} + \frac{1}{\binom{i}{n}} = \frac{i+1}{n} - \frac{1}{\binom{i}{n-1}},$$

és ezzel beláttuk az állítást. □

5.5. Lemma. *Tetszőleges $n, i \in \mathbb{N}$ és $i \geq n+1$ esetén,*

$$\sum_{k=1}^n \binom{i}{k} x^k + \sum_{k=n+1}^i (-1)^k \binom{i}{k} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{k-1}{j-1} x(1+x)^{j-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Bizonyítás. Az állítást rögzített n esetén i -szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $i = n+1$, akkor a $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ összefüggést és a binomiális tételt felhasználva,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k - \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j-1} x(1+x)^{j-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k + x(x^n - (1+x)^n) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k + x^{n+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k + x^{n+1} - x^{n+1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy az összefüggés teljesül i -re, azaz

$$\sum_{k=1}^n \binom{i}{k} x^k + \sum_{k=n+1}^i (-1)^k \binom{i}{k} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{k-1}{j-1} x(1+x)^{j-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Ekkor az $\binom{i+1}{k} = \binom{i}{k} + \binom{i}{k-1}$ összefüggést, és az indukciós hipotézist felhasználva,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \binom{i+1}{k} x^k + \sum_{k=n+1}^{i+1} (-1)^k \binom{i+1}{k} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{k-1}{j-1} x(1+x)^{j-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^n \binom{i}{k-1} x^k + \sum_{k=n+1}^{i+1} (-1)^k \binom{i}{k-1} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{k-1}{j-1} x(1+x)^{j-1}. \end{aligned}$$

Így elegendő belátni, hogy

$$\sum_{k=n+1}^{i+1} (-1)^k \binom{i}{k-1} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{k-1}{j-1} x(1+x)^{j-1} + \sum_{k=1}^n x^k \binom{i}{k-1} = 0.$$

Ismét a $\binom{k}{j-1} = \binom{k-1}{j-1} + \binom{k-1}{j-2}$ összefüggést, az indukciós hipotézist, a binomiális tételt és az 5.4. Lemmát alkalmazva,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n+1}^{i+1} (-1)^k \binom{i}{k-1} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{k-1}{j-1} x(1+x)^{j-1} \\ &= \binom{i}{n} (x^{n+1} - x(1+x)^n) - \sum_{k=n+1}^i (-1)^k \binom{i}{k} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{k-1}{j-1} x(1+x)^{j-1} \\ & \quad - (1+x) \sum_{k=n+1}^i (-1)^k \binom{i}{k} \sum_{j=2}^n (-1)^j \binom{k-1}{j-2} x(1+x)^{j-2} \\ &= \binom{i}{n} (x^{n+1} - x(1+x)^n) - (1+x)^n + 1 - \sum_{k=1}^n \binom{i}{k} x^{k+1} + (1+x)((1+x)^n - 1) \\ & \quad - \binom{i-1}{n-1} x(1+x)^n \sum_{k=n+1}^i (-1)^{k-n} \frac{i}{k} \binom{i-n}{k-n} \\ &= \binom{i}{n} (x^{n+1} - x(1+x)^n) - (1+x)^n - \sum_{k=0}^n \binom{i}{k} x^{k+1} + (1+x)^{n+1} \\ & \quad + x(1+x)^n \binom{i-1}{n-1} \sum_{k=1}^{i-n} (-1)^{k+1} \frac{i}{k+n} \binom{i-n}{k} \\ &= \binom{i}{n} x^{n+1} - \binom{i}{n} x(1+x)^n + x(1+x)^n - \sum_{k=0}^n \binom{i}{k} x^{k+1} + \binom{i}{n} x(1+x)^n - x(1+x)^n \\ &= - \sum_{k=1}^n \binom{i}{k-1} x^k. \end{aligned}$$

Tehát,

$$\sum_{k=1}^n \binom{i+1}{k} x^k + \sum_{k=n+1}^{i+1} (-1)^k \binom{i+1}{k} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{k-1}{j-1} x(1+x)^{j-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k,$$

ezzel beláttuk az állítást. □

5.6. Lemma. *Tegyük fel, hogy*

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = 1$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n''(1)}{1 - \bar{f}_n} = \nu \in (0, \infty)$,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n'''(1)}{1 - \bar{f}_n} = 0$,

és legyen φ_n az f_n generátorfüggvényhez tartozó alakfüggvény. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(1) - \varphi_n(s)}{1 - \bar{f}_n} = 0.$$

Bizonyítás. Az $f(s)$ függvény 1-körüli Taylor sorát felhasználva,

$$f(s) = 1 + \bar{f}(s - 1) + \frac{1}{2}f''(1)(s - 1)^2 + \frac{1}{6}f'''(t)(s - 1)^3, \quad t \in (s, 1),$$

az alakfüggvény az alábbi módon írható fel,

$$\varphi(s) = \frac{\bar{f}(1 - s) - 1 + f(s)}{\bar{f}(1 - s)(1 - f(s))} = \frac{\frac{1}{2}f''(1) - \frac{1}{6}f'''(t)(1 - s)}{\bar{f}(\bar{f} - \frac{1}{2}f''(1)(1 - s) + \frac{1}{6}f'''(t)(1 - s)^2)}.$$

Így az állításban szereplő különbség a következő,

$$\frac{\varphi_n(1) - \varphi_n(s)}{1 - \bar{f}_n} = \frac{f_n''(1)}{2\bar{f}_n^2(1 - \bar{f}_n)} \left(1 - \frac{1 - \frac{f_n'''(t)}{3f_n''(1)}(1 - s)}{1 - \frac{f_n''(1)}{2\bar{f}_n}(1 - s) + \frac{f_n'''(t)}{6\bar{f}_n}(1 - s)^2} \right),$$

és a feltételek alapján 0-hoz tart, ha $n \rightarrow \infty$. □

5.2. A 3. fejezet bizonyításai

A 3.2. Lemma bizonyítása. Először a $\nu = 0$ esetben bizonyítjuk az állítást.

A 2.1. és az 5.1. Lemmát alkalmazva,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{0,n}\varphi_{0,n}(s) &= \bar{f}_{0,n} \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_j(f_{j,n}(s))}{\bar{f}_{0,j-1}} \leq \sum_{j=1}^n \bar{f}_{j,n} \frac{f_j''(1)}{\bar{f}_j} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{n,j}^{(1)} \frac{f_j''(1)}{\bar{f}_j(1 - \bar{f}_j)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Mivel $\varphi_{0,n}(s) \geq 0$, (2)-ből következik az állítás.

Vizsgáljuk a $\nu \in (0, \infty)$ esetet.

Egyszerű átalakítással az (2)-ben megjelenő kifejezés a következőképp írható,

$$\sum_{j=1}^n \bar{f}_{j-1,n} \varphi_j(f_{j,n}(s)) = \sum_{j=1}^n \bar{f}_{j-1,n} \varphi_j(1) - \sum_{j=1}^n \bar{f}_{j-1,n} (\varphi_j(1) - \varphi_j(f_{j,n}(s))),$$

ahol az 5.1. Lemma alapján az első tagra teljesül, hogy

$$\sum_{j=1}^n \bar{f}_{j-1,n} \varphi_j(1) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{n,j}^{(1)} \frac{1}{\bar{f}_j} \frac{f_j''(1)}{1 - \bar{f}_j} \rightarrow \frac{\nu}{2}.$$

A második tagra a következő összefüggést kapjuk,

$$\left| \sum_{j=1}^n \bar{f}_{j-1,n} (\varphi_j(1) - \varphi_j(f_{j,n}(s))) \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{n,j}^{(1)} \left| \frac{\bar{f}_j (\varphi_j(1) - \varphi_j(f_{j,n}(s)))}{1 - \bar{f}_j} \right| \rightarrow 0,$$

az 5.1. és az 5.6. Lemma szerint. Így tehát

$$\frac{1 - f_{0,n}(s)}{\bar{f}_{0,n}} \rightarrow \left(\frac{1}{1-s} + \frac{\nu}{2} \right)^{-1}, \quad \text{amint } n \rightarrow \infty.$$

□

A 3.3. Tétel bizonyítása. A 3.2. Lemma feltételei mellett,

$$\frac{1 - f_{0,n}(s)}{\bar{f}_{0,n}} \rightarrow \left(\frac{1}{1-s} + \frac{\nu}{2} \right)^{-1},$$

így, ha $n \rightarrow \infty$, akkor

$$\mathbf{E}(s^{X_n} | X_n > 0) = \frac{f_{0,n}(s) - f_{0,n}(0)}{1 - f_{0,n}(0)} = 1 - \frac{1 - f_{0,n}(s)}{1 - f_{0,n}(0)} \rightarrow \frac{2}{2 + \nu} \frac{s}{1 - \frac{\nu}{\nu+2}s},$$

ahol a határérték a geometriai eloszlás generátorfüggvénye $\frac{2}{2+\nu}$ paraméterrel. □

5.3. A 4. fejezet bizonyításai

A 4.1. Tétel bizonyítása. A (3) összefüggés alapján azt kell tehát megmutatni, hogy tetszőleges $s \in (0, 1)$ esetén,

$$g_n(s) = \prod_{j=1}^n h_j(f_{j,n}(s)) \rightarrow f_Y(s).$$

Legyen

$$\hat{g}_n(s) = \prod_{j=1}^n e^{h_j(f_{j,n}(s)) - 1}.$$

A generátorfüggvény konvexitásából adódik, hogy $f_n(s) \geq 1 + \bar{f}_n(s - 1)$, így

$$f_{j,n}(s) = f_{j+1}(f_{j+1,n}(s)) \geq 1 + \bar{f}_{j+1}(f_{j+1,n}(s) - 1),$$

és indukcióval könnyen belátható, hogy

$$f_{j,n}(s) \geq 1 + \bar{f}_{j+1} \dots \bar{f}_n(s - 1) = 1 + \bar{f}_{j,n}(s - 1). \quad (4)$$

Mivel, ha $|a_k|, |b_k| < 1$, $k = 1, \dots, n$, akkor

$$\left| \prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|, \quad (5)$$

és tetszőleges $u \in \mathbb{R}$ $|u| \leq \frac{1}{2}$ esetén,

$$|e^u - 1 - u| \leq |u|^2. \quad (6)$$

Így (4)-t, (5)-t, (6)-t és a $0 \leq 1 - h_j(s) \leq m_{j,1}(1-s)$ összefüggést felhasználva,

$$\begin{aligned} |g_n(s) - \widehat{g}_n(s)| &\leq \sum_{j=1}^n |e^{h_j(f_{j,n}(s)) - 1} - h_j(f_{j,n}(s))| \\ &\leq \sum_{j=1}^n (h_j(f_{j,n}(s)) - 1)^2 \leq \sum_{j=1}^n \frac{m_{j,1}^2}{1 - \bar{f}_j} a_{n,j}^{(2)} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (7)$$

ahol az 5.1. Lemmát alkalmaztuk, hiszen $\frac{m_{j,1}^2}{1 - \bar{f}_j} \rightarrow 0$ következik az $\frac{m_{j,1}}{1 - \bar{f}_j} \rightarrow \lambda_1$ összefüggésből.

Így az eredeti állítás bizonyításához elég belátni, hogy

$$\sum_{j=1}^n (h_j(f_{j,n}(s)) - 1) \rightarrow - \sum_{k=1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right).$$

Az 5.2. Lemma alapján,

$$h_j(s) = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{m_{j,k}}{k!} (s-1)^k + R_{j,K}(s),$$

ahol $|R_{j,K}(s)| \leq \frac{m_{j,K}}{K!} (1-s)^K$, így

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (h_j(f_{j,n}(s)) - 1) &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^{K-1} \frac{m_{j,k}}{k!} (f_{j,n}(s) - 1)^k + R_{j,K}(f_{j,n}(s)) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{j=1}^n \frac{m_{j,k}}{k!} (f_{j,n}(s) - 1)^k + \sum_{j=1}^n R_{j,K}(f_{j,n}(s)). \end{aligned}$$

A (4) összefüggés és az 5.1. Lemma szerint,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n R_{j,K}(f_{j,n}(s)) \right| &\leq \sum_{j=1}^n \frac{m_{j,K}}{K!} |f_{j,n}(s) - 1|^K \leq \sum_{j=1}^n \frac{m_{j,K}}{K!} \bar{f}_{j,n}^K (1-s)^K \\ &= (1-s)^K \sum_{j=1}^n \frac{m_{j,K}}{K!(1 - \bar{f}_j)} a_{n,j}^{(K)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Továbbá (2)-t felhasználva,

$$\begin{aligned} 1 - f_{j,n}(s) &= \left(\frac{1}{\bar{f}_{j,n}(1-s)} + \sum_{l=j+1}^n \frac{\varphi_l(f_{l,n}(s))}{\bar{f}_{j,l-1}} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{\bar{f}_{j,n}(1-s)} + \sum_{l=j+1}^n \frac{\varphi_l(1)}{\bar{f}_{j,l-1}} - \sum_{l=j+1}^n \frac{\varphi_l(1) - \varphi_l(f_{l,n}(s))}{\bar{f}_{j,l-1}} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

következésképp

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n \frac{m_{j,k}}{k!} (f_{j,n}(s) - 1)^k \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{m_{j,k}}{k!} (-1)^k \left[\frac{1}{\bar{f}_{j,n}(1-s)} + \sum_{l=j+1}^n \frac{\varphi_l(1)}{\bar{f}_{j,l-1}} - \sum_{l=j+1}^n \frac{\varphi_l(1) - \varphi_l(f_{l,n}(s))}{\bar{f}_{j,l-1}} \right]^{-k} \\ &= (-1)^k \sum_{j=1}^n \frac{m_{j,k}}{k!(1-\bar{f}_j)} a_{n,j}^{(k)} \left[\frac{1}{1-s} + \frac{1}{2} \sum_{l=j+1}^n \frac{1}{\bar{f}_l} \frac{f_l''(1)}{1-\bar{f}_l} a_{n,l}^{(1)} - \sum_{l=j+1}^n \bar{f}_l \frac{\varphi_l(1) - \varphi_l(f_{l,n}(s))}{1-\bar{f}_l} a_{n,l}^{(1)} \right]^{-k}, \end{aligned}$$

ahol $a_{n,j}^{(k)}$ az 5.1. Lemmában definiált.

Vizsgáljuk az

$$\frac{1}{1-s} + \frac{1}{2} \sum_{l=j+1}^n \frac{1}{\bar{f}_l} \frac{f_l''(1)}{1-\bar{f}_l} a_{n,l}^{(1)} - \sum_{l=j+1}^n \bar{f}_l \frac{\varphi_l(1) - \varphi_l(f_{l,n}(s))}{1-\bar{f}_l} a_{n,l}^{(1)}$$

összeget.

Az 5.1. és az 5.6. Lemma alapján,

$$\left| \sum_{l=j+1}^n \bar{f}_l \frac{\varphi_l(1) - \varphi_l(f_{l,n}(s))}{1-\bar{f}_l} a_{n,l}^{(1)} \right| \leq \sum_{l=1}^n \bar{f}_l \left| \frac{\varphi_l(1) - \varphi_l(f_{l,n}(s))}{1-\bar{f}_l} \right| a_{n,l}^{(1)} \rightarrow 0. \quad (8)$$

Ismét az 5.1. Lemmát alkalmazva,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{l=j+1}^n \frac{1}{\bar{f}_l} \frac{f_l''(1)}{1-\bar{f}_l} a_{n,l}^{(1)} - \nu \sum_{l=j+1}^n a_{n,l}^{(1)} \right| &= \left| \sum_{l=j+1}^n a_{n,l}^{(1)} \left(\frac{1}{\bar{f}_l} \frac{f_l''(1)}{1-\bar{f}_l} - \nu \right) \right| \\ &\leq \sum_{l=1}^n a_{n,l}^{(1)} \left| \frac{1}{\bar{f}_l} \frac{f_l''(1)}{1-\bar{f}_l} - \nu \right| \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (9)$$

ahol

$$\nu \sum_{l=j+1}^n a_{n,l}^{(1)} = \nu \sum_{l=j+1}^n (\bar{f}_{l,n} - \bar{f}_{l-1,n}) = \nu (1 - \bar{f}_{j,n}).$$

Vezessük be az

$$\varepsilon_{j,n} = \sum_{l=j+1}^n \bar{f}_l \frac{\varphi_l(f_{l,n}(s)) - \varphi_l(1)}{1-\bar{f}_l} a_{n,l}^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{l=j+1}^n \frac{1}{\bar{f}_l} \frac{f_l''(1)}{1-\bar{f}_l} a_{n,l}^{(1)} - \frac{\nu}{2} \sum_{l=j+1}^n a_{n,l}^{(1)}$$

jelölést. Ekkor tehát az 5.1. Lemma és az $\sup_{j < n} |\varepsilon_{j,n}| \rightarrow 0$ összefüggés alapján, ha $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n \frac{m_{j,k}}{k!} (f_{j,n}(s) - 1)^k - (-1)^k \lambda_k \sum_{j=1}^n a_{n,j}^{(k)} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{\nu}{2}(1 - \bar{f}_{j,n}) \right)^{-k} \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^n a_{n,j}^{(k)} \left| \frac{m_{j,k}}{k!(1 - \bar{f}_j)} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{\nu}{2}(1 - \bar{f}_{j,n}) + \varepsilon_{j,n} \right)^{-k} \right. \\ & \quad \left. - \lambda_k \left(\frac{1}{1-s} + \frac{\nu}{2}(1 - \bar{f}_{j,n}) \right)^{-k} \right| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Továbbá,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_{n,j}^{(k)} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{\nu}{2}(1 - \bar{f}_{j,n}) \right)^{-k} = \int_0^1 \frac{y^{k-1}}{\left(\frac{1}{1-s} + \frac{\nu}{2}(1-y) \right)^k} dy,$$

mivel a bal oldalon az integrál Riemann-közelítő összege jelenik meg az $\{\bar{f}_{j,n}\}_{j=1}^n$ partíció mellett, hiszen az 5.1. Lemma szerint $\bar{f}_{j,n} - \bar{f}_{j-1,n} = a_{n,j}^{(1)} \rightarrow 0$.

Az integrál kiszámítható az $u = \nu(1-s)(1-y) + 2$ helyettesítéssel és a binomiális tétel alkalmazásával, így kis számolással az alábbi formula adódik,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{y^{k-1}}{\left(\frac{1}{1-s} + \frac{\nu}{2}(1-y) \right)^k} dy \\ & = \frac{2^k}{\nu^k} \left((-1)^{k+1} \log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\binom{k-1}{i} (-1)^{k+i} \frac{(1 + \frac{\nu}{2}(1-s))^i - 1}{i} \right) \right) \\ & = (-1)^{k+1} \frac{2^k}{\nu^k} \left(\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right), \end{aligned}$$

alkalmazva az 5.3. Lemmát. Így a következő összefüggés írható fel, ha $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} & (-1)^k \lambda_k \sum_{j=1}^n a_{n,j}^{(k)} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{\nu}{2}(1 - \bar{f}_{j,n}) \right)^{-k} \\ & \rightarrow -\frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right). \end{aligned} \tag{10}$$

Tehát

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n (h_j(f_{j,n}(s)) - 1) + \sum_{k=1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right) \right| \\ & \leq \left| \sum_{k=1}^{K-1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{m_{j,k}}{k!} (f_{j,n}(s) - 1)^k - \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right) \right) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{j=1}^n R_{j,l}(f_{j,n}(s)) \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

amennyiben $n \rightarrow \infty$. □

A 4.2. Tétel bizonyítása. Nyilván az előző bizonyításhoz hasonlóan ismét teljesül (7), így elég belátni, hogy

$$\sum_{j=1}^n (h_j(f_{j,n}(s)) - 1) \rightarrow - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right).$$

Legyen $s \in (0, 1)$ rögzített. Ha $\frac{\nu}{2}(1-s) < 1$, a logaritmus Taylor-sorát felhasználva,

$$\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i,$$

a fenti kifejezés a következő alakban írható,

$$\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i = \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i,$$

így

$$\left| \sum_{k=l}^{\infty} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right| \leq \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k} \left| \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i+1} (1-s)^i \right| \leq \sum_{k=l}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k} \leq \varepsilon,$$

a (iv) feltétel alapján, ha l elég nagy.

Továbbá, ha $\frac{\nu}{2}(1-s) \geq 1$, akkor

$$\left| \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right| \leq c + \frac{\nu^k}{k 2^k},$$

hiszen az $(\frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i)_{i \in \mathbb{N}}$ sorozat monoton nő az $i = \frac{1}{\frac{\nu}{2}(1-s)-1}$ indextől. Így a (iv) feltétel alapján létezik olyan l , hogy

$$\left| \sum_{k=l}^{\infty} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right) \right| \leq \varepsilon.$$

Tehát tetszőleges $\nu \in (0, \infty)$ esetén létezik olyan l , amelyre

$$\left| \sum_{k=l}^{\infty} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right) \right| \leq \varepsilon,$$

és

$$\frac{(1-s)^l}{l} \lambda_l \leq \varepsilon.$$

Az 5.2. Lemma szerint,

$$h_j(s) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{m_{j,k}}{k!} (s-1)^k + R_{j,l}(s),$$

ahol $|R_{j,l}(s)| \leq \frac{m_{j,l}}{l!}(1-s)^l$, így

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (h_j(f_{j,n}(s)) - 1) &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^{l-1} \frac{m_{j,k}}{k!} (f_{j,n}(s) - 1)^k + R_{j,l}(f_{j,n}(s)) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{j=1}^n \frac{m_{j,k}}{k!} (f_{j,n}(s) - 1)^k + \sum_{j=1}^n R_{j,l}(f_{j,n}(s)). \end{aligned}$$

Továbbá, (4) és az 5.1. Lemma alapján,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n R_{j,l}(f_{j,n}(s)) \right| &\leq \sum_{j=1}^n \frac{m_{j,l}}{l!} |f_{j,n}(s) - 1|^l \leq \sum_{j=1}^n \frac{m_{j,l}}{l!} \bar{f}_{j,n}^l (1-s)^l \\ &\rightarrow \frac{(1-s)^l}{l} \lambda_l. \end{aligned}$$

Természetesen az előző bizonyítással analóg módon (10) ismét teljesül, így

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j=1}^n (h_j(f_{j,n}(s)) - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{j=1}^n \frac{m_{j,k}}{k!} (f_{j,n}(s) - 1)^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{k=l}^{\infty} -\frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} (1-s)^i \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=1}^n R_{j,l}(f_{j,n}(s)) \right|, \end{aligned}$$

ahol az első tag nullához tart, míg a második és harmadik kisebb, mint ε . □

A 4.3. Lemma bizonyítása. Először vizsgáljuk az állítást a 4.1. Tétel feltételei mellett, azaz mikor létezik olyan $K \in \mathbb{N}$, amelyre $\lambda_K = 0$. Ekkor a

$$\lambda_K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{n,K}}{K!(1-\bar{f}_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=K}^{\infty} \binom{i}{K} \frac{p_i^{(n)}}{1-\bar{f}_n}$$

összefüggésből következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i^{(n)}}{1-\bar{f}_n} = 0$ minden $i \geq K$ esetén. Továbbá,

$$\lambda_{K-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=K-1}^{\infty} \binom{i}{K-1} \frac{p_i^{(n)}}{1-\bar{f}_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{K-1}^{(n)}}{1-\bar{f}_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=K}^{\infty} \binom{i}{K-1} \frac{p_i^{(n)}}{1-\bar{f}_n},$$

így szükségszerűen a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{K-1}^{(n)}}{1-\bar{f}_n}$ határérték is létezik. Rekurzívan igazolható tehát, hogy a

$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{n,k}}{k!(1-\bar{f}_n)}$ határérték létezése maga után vonja a $q_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i^{(n)}}{1-\bar{f}_n}$ határértékek létezését is.

Amennyiben a 4.2. Tétel feltételei teljesülnek, tehát $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k} < \infty$, a kérdést a Stieltjes-momentum problémára vezetjük vissza. Tetszőleges véletlen változó momentumai kifejezhetőek faktoriális momentumainak segítségével,

$$\mu_{n,k} := \mathbf{E}(\varepsilon_n^k) = \sum_{i=0}^k \left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\} m_{n,i},$$

ahol $\left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (i-j)^k$ a másodfajú Stirling számot jelöli, ezért

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^k \frac{p_i^{(n)}}{1-\bar{f}_n} = \frac{1}{1-\bar{f}_n} \mu_{n,k} = \sum_{i=0}^k \left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\} \frac{m_{n,i}}{1-\bar{f}_n} \rightarrow \sum_{i=0}^k \left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\} i! \lambda_i =: \mu_k.$$

Így a $\left(\frac{p_i^{(n)}}{1-\bar{f}_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat korlátos minden $i \in \mathbb{N}$ -re. Tehát létezik olyan $(n_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ részsorozat és $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nemnegatív sorozat, hogy

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{p_i^{(n_\ell)}}{1-\bar{f}_{n_\ell}} = q_i, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

ahol a $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sorozat nem feltétlenül valószínűségeloszlás. A Fatou-lemma szerint

$$\mu_k = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n_\ell,k}}{1-\bar{f}_{n_\ell}} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{p_i^{(n_\ell)}}{1-\bar{f}_{n_\ell}} i^k = \sum_{i=1}^{\infty} q_i i^k. \quad (11)$$

Továbbá, az $n_\ell = n$ jelöléssel élve, legyen $\varepsilon > 0$ és $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és $K = \left\lceil \frac{\mu_{k+1}}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i^{(n)}}{1-\bar{f}_n} i^{k+1} \geq \sum_{i=K+1}^{\infty} \frac{p_i^{(n)}}{1-\bar{f}_n} i^k K,$$

és így

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=K+1}^{\infty} \frac{p_i^{(n)}}{1-\bar{f}_n} i^k \leq \varepsilon.$$

Ezért

$$\mu_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i^{(n)}}{1-\bar{f}_n} i^k \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^K \frac{p_i^{(n)}}{1-\bar{f}_n} i^k + \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} q_i i^k + \varepsilon.$$

Tehát

$$\mu_k - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} q_i i^k.$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, így (11) szerint adódik, hogy

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} q_i i^k.$$

A $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat egyértelműen meghatározza a $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sorozatot, ha a Carleman feltétel teljesül, [10, Theorem 5.6.6.]. Mivel a másodfajú Stirling-szám maximuma rögzített k esetén,

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i_k \end{matrix} \right\} = \exp\{k \log k - k \log \log k - k + O(k \log \log k / \log k)\} \leq k^k,$$

így

$$\sum_{i=0}^k \left\{ \begin{matrix} k \\ i \end{matrix} \right\} i! \lambda_i \leq C k^{2k+2},$$

ahol felhasználtuk, hogy a 4.2. Tétel (iv) feltétele alapján, $\lambda_i \leq C i$ valamilyen $C > 0$ számra. Összegezve,

$$\mu_k \leq C k^{2k+2},$$

ami éppen a szükséges becslés. Tehát, $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ valóban egyértelműen meghatározza $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ -t. Innen pedig egyszerűen következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i^{(n)}}{1 - f_n} = q_i,$$

minden $i \in \mathbb{N}$ esetén. □

A 4.4. Tétel bizonyítása. A logaritmus Taylor-sorfejtését felhasználva,

$$\log \left(1 + \frac{\nu}{2}(1-s) \right) = \log \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2+\nu} \right)^n}{n} s^n, \quad s \in (0, 1),$$

a határeloszlás generátorfüggvénye egyszerű átalakításokkal az alábbi alakra hozható,

$$\begin{aligned} f_Y(s) = \exp \Bigg\{ & \sum_{k=1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} - \log \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) \right) \\ & + \sum_{n=1}^{K-2} \left(\sum_{k=n+1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\sum_{i=n}^{k-1} (-1)^{i+n+1} \binom{i}{n} \frac{\nu^i}{i 2^i} \right) + \sum_{k=1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \cdot \frac{\left(\frac{\nu}{2+\nu} \right)^n}{n} \right) s^n \\ & + \sum_{n=K-1}^{\infty} \sum_{k=1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \cdot \frac{\left(\frac{\nu}{2+\nu} \right)^n}{n} s^n \Bigg\}. \end{aligned}$$

Amennyiben a fenti kifejezés $f_Y(s) = \exp\{\mu(g(s) - 1)\}$ alakban írható, ahol $g(s)$ valamely véletlen változó generátorfüggvénye, a határeloszlás összetett Poisson-eloszlást követ. Ehhez elegendő igazolni, hogy a kitevőben megjelenő hatványsorban s^n együtthatói nemnegatívak, ha $n \geq 1$, és a konstans tag nempozitív.

A konstans tag előjele az $f_Y(s)$ generátorfüggvény voltából következik, hiszen

$$\mathbf{P}(Y = 0) = f_Y(0) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} - \log \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) \right) \right\} \leq 1,$$

így szükségszerűen

$$\sum_{k=1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{\nu^i}{i 2^i} - \log \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) \right) \leq 0.$$

Nyilván $n \geq K-1$ esetén s^n együttthatója pozitív, vizsgáljuk az $1 \leq n < K-1$ esetet, azaz a

$$\sum_{k=n+1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \left(\sum_{i=n}^{k-1} (-1)^{i+n+1} \binom{i}{n} \frac{\nu^i}{i 2^i} \right) + \sum_{k=1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \cdot \frac{\left(\frac{\nu}{2+\nu} \right)^n}{n}$$

összeget.

A

$$\sum_{i=n}^{k-1} (-1)^{i+n+1} \binom{i}{n} \frac{\nu^i}{i 2^i} = - \left(\frac{\nu}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{k-1} (i-1) \dots (i-n+1) \left(-\frac{\nu}{2} \right)^{i-n},$$

összeg meghatározható a geometriai sorozat részletösszegeire vonatkozó összefüggés segítségével, hiszen

$$\sum_{i=n}^{k-1} (i-1) \dots (i-n+1) q^{i-n} = \left(\sum_{i=1}^{k-1} q^{i-1} \right)^{(n-1)} = \left(\frac{q^{k-1} - 1}{q - 1} \right)^{(n-1)},$$

és a Leibniz-szabályt alkalmazva,

$$\begin{aligned} \left(\frac{q^{k-1} - 1}{q - 1} \right)^{(n)} &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (q^{k-1} - 1)^{(n-l)} \left(\frac{1}{q - 1} \right)^{(l)} \\ &= \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} (k-1) \dots (k+l-n) q^{k+l-n-1} \frac{l!}{(q-1)^{l+1}} - \frac{n!}{(q-1)^{n+1}} (-1)^n \\ &= \frac{n!}{(q-1)^{n+1}} \left(\sum_{l=0}^n (-1)^l \frac{1}{l!(n-l)!} \frac{(k-1)!}{(k+l-n-1)!} q^{k+l-n-1} \frac{l!}{(q-1)^{l+1}} - (-1)^n \right) \\ &= \frac{n!}{(q-1)^{n+1}} \left(\sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{k-1}{n-l} q^{k+l-n-1} (q-1)^{n-l} - (-1)^n \right). \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} &\sum_{k=n+1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \sum_{i=n}^{k-1} (-1)^{i+n+1} \binom{i}{n} \frac{\nu^i}{i 2^i} \\ &= \sum_{k=n+1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} (-1) \left(\frac{\nu}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \frac{(n-1)!}{\left(\left(-\frac{\nu}{2} \right) - 1 \right)^n} \\ &\quad \times \left(\sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \binom{k-1}{n-1-l} \left(-\frac{\nu}{2} \right)^{k+l-n} \left(-\frac{\nu}{2} - 1 \right)^{n-1-l} - (-1)^{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n(2+\nu)^n} \sum_{k=n+1}^{K-1} \left((-1)^{k+n} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \binom{k-1}{n-1-l} \nu^l 2(\nu+2)^{n-1-l} - \frac{2^k}{\nu^{k-n}} \right) \lambda_k, \end{aligned}$$

ezért,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n+1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \sum_{i=n}^{k-1} (-1)^{i+n+1} \binom{i}{n} \frac{\nu^i}{i 2^i} + \sum_{k=1}^{K-1} \frac{2^k \lambda_k}{\nu^k} \frac{\left(\frac{\nu}{2+\nu}\right)^n}{n} \\ &= \frac{1}{n(2+\nu)^n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{\nu^{k-n}} \lambda_k + \sum_{k=n+1}^{K-1} \lambda_k (-1)^{k+n} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \binom{k-1}{n-1-l} \nu^l 2(\nu+2)^{n-1-l} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Mivel a 4.3. Lemma szerint létezik a $q_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_i^{(n)}}{1-f_n}$ határérték, így a

$$\lambda_k = \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i}{k} q_i$$

összefüggést felhasználva a (12) kifejezés a következő alakban írható,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n(2+\nu)^n} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{\nu^{k-n}} \binom{i}{k} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=n+1}^i \left((-1)^{k+n} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \binom{k-1}{n-1-l} \nu^l 2(\nu+2)^{n-1-l} \right) \binom{i}{k} \right) q_i, \end{aligned}$$

ahol q_i együtthatója,

$$\frac{1}{n(2+\nu)^n} \sum_{k=1}^{\min(i,n)} \binom{\min(i,n)}{k} 2^k \nu^{n-k}.$$

Az $i \leq n$ eset nyilvánvaló, vizsgáljuk a (12) kifejezést, ha $i > n$,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{\nu^{k-n}} \binom{i}{k} + \sum_{k=n+1}^i \left((-1)^{k+n} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \binom{k-1}{n-1-l} \nu^l 2(\nu+2)^{n-1-l} \right) \binom{i}{k} \\ &= \nu^n \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{\nu} \right)^k \binom{i}{k} + \sum_{k=n+1}^i \left((-1)^k \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{k-1}{j-1} \frac{2}{\nu} \left(\frac{\nu+2}{\nu} \right)^j \right) \binom{i}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k \nu^{n-k}, \end{aligned}$$

a $j = n - l$ helyettesítéssel, az 5.5. Lemmát alkalmazva $x = \frac{2}{\nu}$ -re. Így s^n együtthatója tetszőleges $n \geq 1$ esetén nemnegatív, és a generátorfüggvény a következő alakban írható,

$$\begin{aligned} f_Y(s) = \exp & \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{K-1} \frac{2^k}{\nu^k} \binom{i}{k} q_i \left(\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \frac{\nu^j}{j 2^j} - \log \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) \right) \right. \\ & + \sum_{n=1}^{K-2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(2+\nu)^n} \sum_{k=1}^{\min(i,n)} \binom{\min(i,n)}{k} 2^k \nu^{n-k} q_i \right) s^n \\ & \left. + \sum_{n=K-1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2+\nu}\right)^n}{n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{K-1} \frac{2^k}{\nu^k} \binom{i}{k} q_i \right) s^n \right\}. \end{aligned}$$

□

Hivatkozások

- [1] A. Agresti. On the extinction times of varying and random environment branching processes. *Journal of Applied Probability*, 12:39–46, 1975.
- [2] K. Athreya and P. Ney. *Branching Processes*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 1972.
- [3] N. Bhattacharya and M. Perlman. Time-inhomogeneous branching processes conditioned on non-extinction, 2017.
- [4] N. Cardona-Tobón and S. Palau. Yaglom’s limit for critical Galton–Watson processes in varying environment: A probabilistic approach. *Bernoulli*, 27(3):1643 – 1665, 2021.
- [5] L. Györfi, M. Ispány, G. Pap, and K. Varga. Poisson limit of an inhomogeneous nearly critical INAR(1) model. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 73(3-4):789–815, 2007.
- [6] P. Jagers. Galton-Watson processes in varying environments. *Journal of Applied Probability*, 11(1):174–178, 1974.
- [7] G. Kersting. A unifying approach to branching processes in a varying environment. *Journal of Applied Probability*, 57(1):196–220, 2020.
- [8] G. Kersting and V. Vatutin. *Discrete Time Branching Processes in Random Environment*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc., 2017.
- [9] P. Kevei. Asymptotics of nearly critical Galton-Watson processes with immigration. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 77(3-4):681–702, 2011.
- [10] B. Simon. *Real analysis*. A Comprehensive Course in Analysis, Part 1. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [11] A. M. Yaglom. Certain limit theorems of the theory of branching random processes. In *Doklady Akad. Nauk SSSR (NS)*, volume 56, page 3, 1947.