

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

Véletlen és legjobb approximációk
általánosított körpoligonokkal

ORSZÁGOS TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

Készítette:
Nagy Kinga
Matematika BSc hallgató

Témavezető:
Dr. Vígh Viktor
egyetemi docens

Szeged
2022

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
2. Jelölésrendszer és eredmények	6
3. Beírt esetek	8
4. Egy L-konvex dualitás	12
5. Körülírt esetek	14
6. Az 1 és 2. tételek bizonyítása	16
7. A 3. és 4. tételek bizonyítása	18
8. Kapcsolat a korábbi eredményekkel	20
9. Záró megjegyzések	20

Ábrák jegyzéke

1.	A beírt esetben vizsgált konstrukció.	8
2.	A vizsgált lemezek Hausdorff-távolságának becslése.	10
3.	Az L -konvex dualitás konstrukciója.	13
4.	A körülírt eset dualitással visszavezethető a beírt esetre.	14

Kivonat

A dolgozat kellően sima határu konvex lemezek, és az őket közelítő rögzített csúcsszámú sokszögek közötti távolság aszimptotikus viselkedésével foglalkozik, ha a csúcsszám tart a végtelenbe. Két konstrukciót vizsgálunk: az egyikben a legjobban közelítő sokszöget tekintjük –például a lemezbe írt (lemez köré írt) maximális (minimális) területű n -szöget–, a másikban véletlen n -szögeket –beírt sokszög esetén a csúcsoakat, körülírt sokszög esetén az érintési pontokat választjuk valamilyen eloszlás szerint a lemez határáról. Az aszimptotikus viselkedés mindkét esetben ugyanazon a geometriai határértéken múlik.

A dolgozatban az eddigi lineáris-, valamint orsókonvexitásra vonatkozó eredményeket általánosítjuk tovább az L -konvexitásra. Beírt közelítő L -sokszögek esetén a megfelelő geometriai határértékek meghatározásának segítségével a már ismert eredményekhez hasonló aszimptotikus formulákat igazolunk a lemez és közelítő sokszögének távolságára. Ezután bevezetünk egy, az L -konvexitáshoz kapcsolódó dualitásfogalmat, vizsgáljuk tulajdonságait, majd ezek segítségével bizonyítjuk a körülírt esetben adódó aszimptotikus formulákat.

1. Bevezetés

Fejes Tóth László a jól ismert [4] könyvében az affin ívhossz kapcsán aszimptotikus formulákat adott a legjobban közelítő poligonokra. McClure és Vitale [11] 1975-ben precíz bizonyítást adtak ezen eredményekre, és egyben univerzálisan alkalmazható analitikus módszert dolgoztak ki a konvex halmazok legjobb approximációinak aszimptotikus vizsgálatára. A formulák egy konvex halmaz legjobban közelítő beírt- és körülírt n -szögeivel foglalkoznak, kerület- és területkülönbségre, valamint a Hausdorff-metrikára vonatkozóan. Legyen például K egy kellően sima határú konvex lemez, és legyen K_n^A a maximális területű K -ba írható, legfeljebb n csúcsú sokszög. Más szóval, a $\delta_A(K, K_n^A) = A(K) - A(K_n^A)$ területkülönbség K_n^A esetén minimális a legfeljebb n -csúcsú sokszögek között. (Megjegyezzük, hogy K_n^A általában nem egyértelmű.) Többek között igazolták, hogy $\lim n^2 \cdot \delta_A(K, K_n^A) = \lambda^3(K)/12$, ($n \rightarrow \infty$) ahol $\lambda(K)$ jelöli K affin kerületét.

A fenti eredményeknek messzemenő általánosításai ismertek. Az elmúlt 50 évben a legjobbak közelítő politópok problémája széles körben vizsgált témává vált, áttekintését lásd például [2].

Az approximációk egy másik formája véletlen poligonok vizsgálatából ered: vegyünk n független, azonos eloszlású véletlen pontot a K konvex lemez határáról. A pontok konvex burkát tekintve adódik egy K -ba írt sokszög, az ezen pontokban vett támaszfélsíkok metszete pedig egy K köré írt sokszöget generál. Schneider [16] 1988-ban aszimptotikus formulákat igazolt K és közelítő véletlen sokszöge közötti kerület- és területkülönbségére, valamint Hausdorff-távolságára. Ezen eredményeket később Reitzner [12] általánosította magasabb dimenzióra. A sztochasztikus geometriában központi szerepet töltenek be a véletlen politópok, irodalmuk széleskörű. A téma részletes történelmi áttekintését lásd [5, 15].

Mind a fenti legjobb, mind a véletlen approximációs eredmények ugyanazon geometriai határértékektől függenek. A geometriai konstrukció az eredeti K lemez és közelítő sokszögének felbontásából adódik, a beírt esetben a csúcsoknál, körülírt esetben az érintési pontoknál. Az általánosított eredmények bizonyításai hasonló felépítést követnek. A legjobb és véletlen approximációk összehasonlításához lásd Gruber [9].

McClure és Vitale eredményeit általánosította Fodor és Vígh [8] lineáris konvexitásról az úgynevezett *orsókonvexitásra* (lásd [1]). A dolgozat célja ezen eredmények, valamint Schneider eredményeinek további általánosítása az ún. *L-konvexitásra*, egy, Lángi, Naszódi és Talata [10] által elterjesztett fogalomra.

Legyen L konvex lemez. Azt mondjuk, hogy a K halmaz *L-konvex*, ha megegyezik L összes K -t tartalmazó eltoltjának metszetével (lásd [10, 1.1. definíció]). Könnyen látható, hogy ha K *L-konvex*, akkor lineárisan is konvex.

Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^2$ lefedhető L valamely eltoltjával. Ekkor $[X]_L$ jelöli az X halmaz *L-konvex burkát*, azaz L összes X -et tartalmazó eltoltjának metszetét. Azt mondjuk, hogy K *L-orsókonvex* ([10, 1.2. definíció]), ha lefedhető L egy eltoltjával, és bármely két pontjával együtt tartalmazza azok *L-konvex burkát* is, azaz bármely $x, y \in K$ esetén $[x, y]_L \subseteq K$.

A fenti két definícióból azonnal adódik, hogy ha K *L-konvex*, akkor *L-orsókonvex* is. A síkban a fordított irány is igaz, így $d = 2$ dimenzióban a két fogalom ekvivalens. Megjegyezzük, hogy magasabb ($d \geq 3$) dimenzióban a fordított implikáció nem teljesül, így az ekvivalencia elveszik.

2. Jelölésrendszer és eredmények

A P lemez L -sokszög vagy L -poligon, ha előáll L véges sok eltoltjának metszeteként, vagy ezzel ekvivalensen, ha előáll véges sok pont L -konvex burkaként. Ebből tetszőleges K L -konvex lemez beírt L -sokszögeinek konstrukciója rögtön adódik. Körülírt L -poligonok szerkesztéséhez bevezetjük a lineáris konvexitásbeli támaszfélsík fogalmának L -konvex megfelelőjét. Ha K L -konvex lemez és $x \in \partial K$, akkor létezik egy $L + p$ eltolt, amelyre $K \subseteq L + p$, $x \in \partial(L + p)$, valamint K és $L + p$ támaszfélsíkja megegyezik az x pontban (lásd [10, 4. tétel]). Ha K és L határa differenciálható, akkor ez az eltolt egyértelmű K bármely határpontjában. Ekkor azt mondjuk, hogy $L + p$ a K lemez *támasz L -je* az x határpontban, vagy $L + p$ *támasztja* K -t az x pontban.

A fejezet további részében bevezetjük a konvex- és differenciálgeometria szükséges fogalmait. Legyen K konvex lemez, amely határa C^2 simaságú, vagyis ∂K kétszer folytonosan differenciálható. Tetszőleges $u \in \mathcal{S}^1$ esetén $x_K(u)$ jelöli K egyértelmű u normálvektorú határpontját, valamint $\kappa_K(u)$ és $r_K(u)$ jelölik a görbületet és görbületi sugarat az $x_K(u)$ pontban. Azt mondjuk, hogy K határa C_+^2 simaságú, ha C^2 simaságú, és $\kappa_K(u) > 0$ minden $u \in \mathcal{S}^1$ esetén.

A K lemez *támaszfüggvénye* a $h_K(u) = \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle$ függvény ($u \in \mathcal{S}^1$). A támaszfüggvény alapvető tulajdonságait lásd [14, 1.7.1. szakasz]. Megjegyezzük, hogy mivel K határa C^2 simaságú, így h_K kétszer differenciálható, és $h_K(u) + h_K''(u) = r_K(u)$ (lásd [13, (1.5) egyenlet]).

A tömörség érdekében $u(\theta)$ -val jelöljük a $(\cos \theta, \sin \theta)$ egységvektort, valamint azt mondjuk, hogy $x_K(\theta) = x_K(u(\theta))$, $\kappa_K(\theta) = \kappa_K(u(\theta))$, $r_K(\theta) = r_K(u(\theta))$ és $h_K(\theta) = h_K(u(\theta))$. Világos, hogy κ_K , r_K és h_K mind 2π periodikusak θ -ban.

A K_1 és K_2 halmazok *Hausdorff távolsága*

$$\delta_H(K_1, K_2) = \max \left\{ \sup_{x \in K_1} \inf_{y \in K_2} |x - y|, \sup_{y \in K_2} \inf_{x \in K_1} |x - y| \right\},$$

vagy ezzel ekvivalensen megfogalmazva,

$$\delta_H(K_1, K_2) = \inf \{ \lambda \geq 0 \mid K_1 \subseteq K_2 + \lambda \mathcal{B}^2, K_2 \subseteq K_1 + \lambda \mathcal{B}^2 \},$$

ahol

$$K + \lambda \mathcal{B}^2 = \{x + \lambda b \mid x \in K, b \in \mathcal{B}^2\},$$

a K lemez λ sugarú paraleltartománya.

Ekkor $\delta_H(\cdot, \cdot)$ metrika a konvex lemezek halmazán, amelyet Hausdorff-metrikának nevezünk (továbbiakért lásd [14, 1.8. fejezet]). Fontos kiemelnünk, hogy két halmaz Hausdorff-távolsága kifejezhető támaszfüggvényeik segítségével:

$$\delta_H(K_1, K_2) = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |h_{K_1}(\theta) - h_{K_2}(\theta)|. \quad (1)$$

A dolgozat további részében K és L is C_+^2 határú konvex lemezeket jelölnek.

Jelölje K_n^P , K_n^A és K_n^H ($K_{(n)}^P$, $K_{(n)}^A$ és $K_{(n)}^H$) a K -t legjobban közelítő legfeljebb n -csúcsú L -poligont, rendre a kerületkülönbség, területkülönbség, és Hausdorff távolság szerint. A fenti távolságokat rendre $\delta_P(\cdot, \cdot)$, $\delta_A(\cdot, \cdot)$ és $\delta_H(\cdot, \cdot)$ jelöli. Fő eredményeinket a következő négy tétel írja le.

1. tétel. *A fenti jelölésekkel*

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \delta_P(K, K_n^P) &= \frac{1}{24} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{r_K(\theta)}{r_L^2(\theta)} \cdot (r_L^2(\theta) - r_K^2(\theta)) \right]^{1/3} d\theta \right)^3 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \delta_A(K, K_n^A) &= \frac{1}{12} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{r_K^2(\theta)}{r_L(\theta)} \cdot (r_L(\theta) - r_K(\theta)) \right]^{1/3} d\theta \right)^3 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \delta_H(K, K_n^H) &= \frac{1}{8} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{r_K(\theta)}{r_L(\theta)} \cdot (r_L(\theta) - r_K(\theta)) \right]^{1/2} d\theta \right)^2.\end{aligned}$$

2. tétel. *Legyen L centrálszimmetrikus. Ekkor*

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \delta_P(K, K_{(n)}^P) &= \frac{1}{24} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{r_K^3(\theta) - 3r_K^2(\theta)r_L(\theta) + 2r_K(\theta)r_L^2(\theta)}{r_L^2(\theta)} \right]^{1/3} d\theta \right)^3 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \delta_A(K, K_{(n)}^A) &= \frac{1}{24} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{r_K^2(\theta)}{r_L(\theta)} \cdot (r_L(\theta) - r_K(\theta)) \right]^{1/3} d\theta \right)^3 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \delta_H(K, K_{(n)}^H) &= \frac{1}{8} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{r_K(\theta)}{r_L(\theta)} \cdot (r_L(\theta) - r_K(\theta)) \right]^{1/2} d\theta \right)^2.\end{aligned}$$

Legyen μ pozitív, folytonos sűrűségfüggvény K határán, és válasszunk a határról n független pontot a μ sűrűség szerint: $X_n = [x_1, \dots, x_n]$. A minta $[X_n]_L$ konvex burkát R_n jelöli, így R_n egy K -ba írt L -poligon. Továbbá jelölje $R_{(n)}$ az X_n által generált K köré írt L -sokszöget, azaz K x_i pontokban vett támasz L -jeinek metszetét ($i = 1, \dots, n$). Végül legyen az m függvény olyan, hogy $m(\theta) = \mu(x_K(\theta))/\kappa_K(\theta)$.

3. tétel. *A fenti jelölés mellett*

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \delta_P(K, R_n) &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{r_K(\theta)}{r_L^2(\theta)} \cdot (r_L^2(\theta) - r_K^2(\theta)) \cdot m^{-2}(\theta) d\theta \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \delta_A(K, R_n) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{r_K^2(\theta)}{r_L(\theta)} \cdot (r_L(\theta) - r_K(\theta)) \cdot m^{-2}(\theta) d\theta \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^2 \cdot \delta_H(K, R_n) &= \frac{1}{8} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left[\frac{r_K(\theta)}{r_L(\theta)} \cdot (r_L(\theta) - r_K(\theta)) \right] \cdot m^{-2}(\theta)\end{aligned}$$

majdnem biztosan.

4. tétel. *Legyen L középpontosan szimmetrikus. Ekkor*

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \delta_P(K, R_{(n)}) &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{r_K^3(\theta) - 3r_K^2(\theta)r_L(\theta) + 2r_K(\theta)r_L^2(\theta)}{r_L^2(\theta)} \cdot m^{-2}(\theta) d\theta \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \delta_A(K, R_{(n)}) &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{r_K^2(\theta)}{r_L(\theta)} \cdot (r_L(\theta) - r_K(\theta)) \cdot m^{-2}(\theta) d\theta \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^2 \cdot \delta_H(K, R_{(n)}) &= \frac{1}{8} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left[\frac{r_K(\theta)}{r_L(\theta)} \cdot (r_L(\theta) - r_K(\theta)) \right] \cdot m^{-2}(\theta)\end{aligned}$$

majdnem biztosan.

Vegyük észre, hogy a Hölder-egyenlőtlenség szerint

$$\left(\int_0^{2\pi} f(\theta) m^{-2}(\theta) \, d\theta \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\int_0^{2\pi} m(\theta) \, d\theta \right)^{\frac{2}{3}} \geq \int_0^{2\pi} (f(\theta) m^{-2}(\theta))^{\frac{1}{3}} \cdot m^{\frac{2}{3}}(\theta) \, d\theta,$$

így

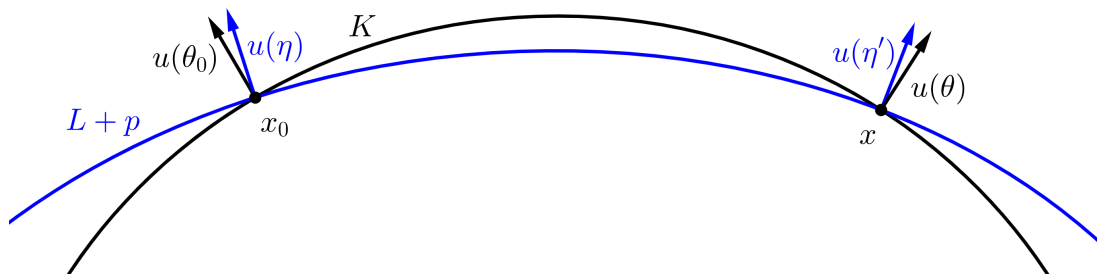
$$\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{r_K(\theta)}{r_L^2(\theta)} \cdot (r_L^2(\theta) - r_K^2(\theta)) \cdot m^{-2}(\theta) \, d\theta \geq \frac{1}{4} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{r_K(\theta)}{r_L^2(\theta)} \cdot (r_L^2(\theta) - r_K^2(\theta)) \right]^{\frac{1}{3}} \, d\theta \right)^3,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha m arányos a $r_K(\theta)/r_L^2(\theta) \cdot (r_L^2(\theta) - r_K^2(\theta))$ kifejezéssel. Emiatt a sűrűségfüggvény ilyen választása mellett kapott random approximáció aszimptotikusan csak egy 6-os szorzóval különbözik a legjobban közelítő esetben adódó aszimptotikus formulától. Ez hasonlóan igaz a kerület-és területkülönbségre mind a beírt, mind a körülírt esetben.

A következő szakaszokban meghatározzuk a fenti tételek bizonyításához szükséges geometriai mennyiségeket és határértékeket. A beírt esetben közvetlenül számoljuk ki a limeszeket, majd definiálunk egy dualitásfogalmat, amely segítségével a körülírt esetben vizsgált geometriai mennyiségek visszavezethetők a beírtakra. Megjegyezzük, hogy ezzel kikerüljük a körülírt esetben szükséges limeszek direkt kiszámítását, ami bonyolultsága miatt körülményesnek tűnik. Ezután a [11] és [16] cikkekben használt eszközök segítségével igazoljuk az előbbieken kimondott négy tételt. Végezetül igazoljuk, hogy az így kapott eredményekből következnek az eredeti, lineáris konvexitásra vonatkozó formulák.

3. Beírt esetek

Legyen $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, és kellően kis $\Delta\theta$ esetén legyen $L + p$ az az eltolt, amely a $x_K(\theta_0)$ és $x_K(\theta_0 + \Delta\theta)$ pontokat is a határán tartalmazza, valamint $L + p$ közéjük eső rövidebb íve K -ba esik (lásd 1. ábra). Jelölje $\Delta_l(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta)$ a ∂K és $\partial(L + p)$ görbék $x_K(\theta_0)$ és $x_K(\theta_0 + \Delta\theta)$ közé eső ívének ívhosszkülönbségét, $\Delta_A(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta)$ a fenti ívek közötti területet, valamint $\Delta_H(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta)$ a Hausdorff távolságukat.



1. ábra. A beírt esetben vizsgált konstrukció.

5. lemma. *A fenti jelölésekkel*

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta_l(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta)}{(\Delta\theta)^3} = \frac{1}{24} \cdot \frac{r_K(\theta_0)}{r_L^2(\theta_0)} \cdot (r_L^2(\theta_0) - r_K^2(\theta_0))$$

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta_A(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta)}{(\Delta\theta)^3} = \frac{1}{12} \cdot \frac{r_K^2(\theta_0)}{r_L(\theta_0)} \cdot (r_L(\theta_0) - r_K(\theta_0)).$$

Bizonyítás. Legyen $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$, $x_0 = x_K(\theta_0)$ és $x = x_K(\theta)$. Jelölje $l_K(x_0, x)$ és $l_L(x_0, x)$ rendre a ∂K és $\partial(L+p)$ görbék x_0 és x pontok közé eső rövidebb íveinek hosszát, és legyen $d = d(x_0, x)$ az $\overline{x_0x}$ szakasz hossza. Továbbá jelölje $A_K(x_0, x)$ és $A_L(x_0, x)$ az x_0x egyenes által K -ból, illetve $L+p$ -ből levágott kisebb rész területét. Végül legyenek az $\partial(L+p)$ -hez x_0 és x pontokban húzott külső normálisok szögei rendre η és η' .

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor létezik $\delta > 0$, amelyre:

- (i) $\kappa_L(\theta_0)(1 + \varepsilon)^{-1} \leq \kappa_L(\eta) \leq \kappa_L(\theta_0)(1 + \varepsilon)$, ha $|\theta_0 - \eta| < \delta$,
- (ii) $(1 + \varepsilon)^{-1}l_L(x_0, x) \leq l_K(x_0, x) \leq l_L(x_0, x)(1 + \varepsilon)$, ha $l_K(x_0, x) < \delta$, és
- (iii)

$$a) \quad \frac{\kappa_L^2(\eta)}{24} \cdot (1 + \varepsilon)^{-1} \leq \frac{l_L(x_0, x) - d}{l_L^3(x_0, x)} \leq \frac{\kappa_L^2(\eta)}{24} \cdot (1 + \varepsilon)$$

$$b) \quad \frac{\kappa_L(\eta)}{12} \cdot (1 + \varepsilon)^{-1} \leq \frac{A_L(x_0, x)}{l_L^3(x_0, x)} \leq \frac{\kappa_L(\eta)}{12} \cdot (1 + \varepsilon),$$

ha $l_L(x_0, x) < \delta$.

Az (i)-hez megfelelő δ létezése a görbület folytonosságából következik, (ii) a $l_K(x_0, x)/l_L(x_0, x) \rightarrow 1$ (ha $l_K(x_0, x) \rightarrow 0$) határértékből (lásd [8]). Végül (iii) két pontja a [8]-beli 1. és 2. lemmákban igazolt határértékekből adódik (lásd szintén [11]), amelyek egyenletesek η -ban az értelmezési tartomány kompaktsága miatt.

Vegyük észre, hogy az $u(\eta)$ és $u(\eta')$ külső normálisok az $u(\theta_0)$ és $u(\theta)$ közötti rövidebb ívre esnek (lásd 1. ábra), és természetes módon $l_L(x_0, x) \leq l_K(x_0, x)$. Így ha az $x \in \partial K$ pont választása olyan, hogy $l_K(x_0, x) < \delta$ és $|\theta_0 - \theta| < \delta$ is teljesül, akkor (i)-(iii) minden feltétele teljesül. A (ii)-t alkalmazva a $(l_L(x_0, x) - d)/l_K^3(x_0, x)$ kifejezésre adódik

$$(1 + \varepsilon)^{-3} \cdot \frac{l_L(x_0, x) - d}{l_L^3(x_0, x)} \leq \frac{l_L(x_0, x) - d}{l_K^3(x_0, x)} \leq \frac{l_L(x_0, x) - d}{l_L^3(x_0, x)} \cdot (1 + \varepsilon)^3.$$

Ezután (iii)(a)-ból

$$(1 + \varepsilon)^{-4} \cdot \frac{\kappa_L^2(\eta)}{24} \leq \frac{l_L(x_0, x) - d}{l_K^3(x_0, x)} \leq \frac{\kappa_L^2(\eta)}{24} \cdot (1 + \varepsilon)^4,$$

végül (i) miatt

$$(1 + \varepsilon)^{-6} \cdot \frac{\kappa_L^2(\theta_0)}{24} \leq \frac{l_L(x_0, x) - d}{l_K^3(x_0, x)} \leq \frac{\kappa_L^2(\theta_0)}{24} \cdot (1 + \varepsilon)^6.$$

Vegyük továbbá észre, hogy $\Delta\theta \rightarrow 0$ mellett $l_K(x_0, x)/\Delta\theta \rightarrow r_K(\theta_0)$, így a fenti egyenlőtlenségláncból

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{l_L(x_0, x) - d}{(\Delta\theta)^3} = \frac{\kappa_L^2(\theta_0)}{24} \cdot r_K^3(\theta_0) = \frac{1}{24} \cdot \frac{r_K^3(\theta_0)}{r_L^2(\theta_0)},$$

valamint a már említett [8]-beli lemmából

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{l_K(x_0, x) - d}{(\Delta\theta)^3} = \frac{\kappa_K^2(\theta_0)}{24} \cdot r_K^3(\theta_0) = \frac{r_K(\theta_0)}{24}.$$

Ebből a $\Delta_L(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta) = (l_K(x_0, x) - d) - (l_L(x_0, x) - d)$ átírás segítségével már adódik a lemma állításának első része.

A területre vonatkozó állítás hasonlóan következik: (ii), (iii)(b) és (i) felhasználásával

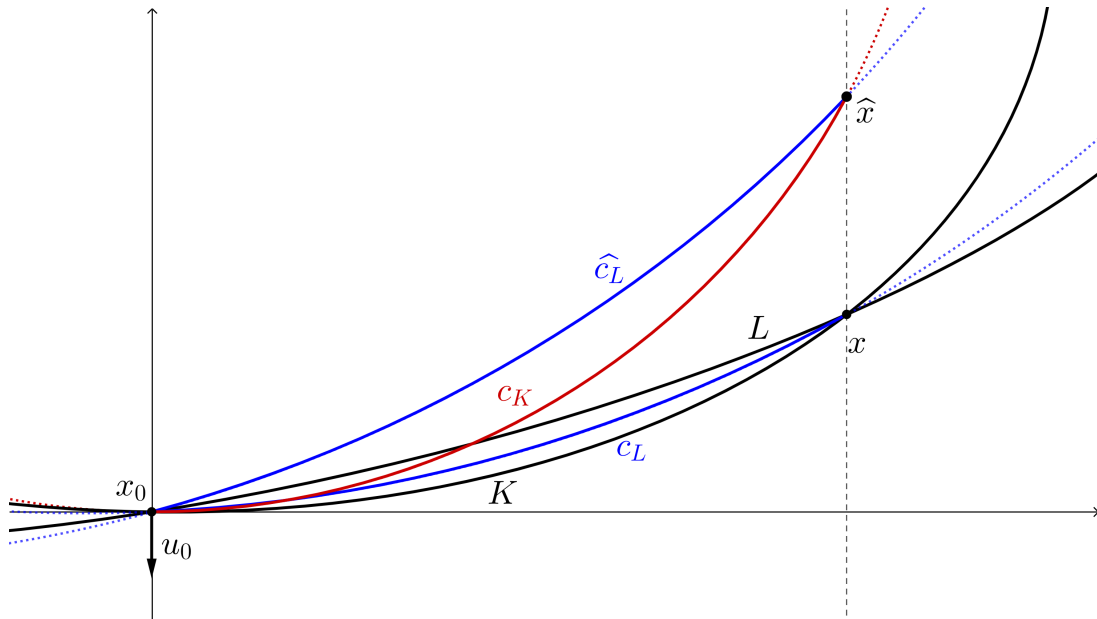
$$(1 + \varepsilon)^{-5} \cdot \frac{\kappa_L(\theta_0)}{12} \leq \frac{A_L(x_0, x)}{l_K^3(x_0, x)} \leq \frac{\kappa_L(\theta_0)}{12} \cdot (1 + \varepsilon)^5,$$

majd a $\Delta_A(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta) = A_K(x_0, x) - A_L(x_0, x)$ átírással kapjuk az állítást. $\square$

6. lemma. *A szakasz elején bevezetett jelölésekkel*

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta_H(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta)}{(\Delta\theta)^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{r_K(\theta_0)}{r_L(\theta_0)} \cdot (r_L(\theta_0) - r_K(\theta_0)).$$

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\theta_0 = 3\pi/2$ és $x_0 = x(\theta_0)$ az origó, így az x -tengely az origóban K érintője, és K a felső félsíkba esik. Jelölje C_K a K lemez origóbeli simuló körét. Legyen x a ∂K határ egy tetszőleges pontja az első negyedben, $\hat{x}$ pedig C_K azon pontja, amely abszcisszája x -el megegyező, lásd 2. ábra. Tekintsük azt az $r_L(\theta_0)$ sugarú C_L kört, amely tartalmazza x_0 -t és x -t, valamint legyen $\widehat{C}_L$ az előbbi kör azon x_0 körüli elforgatottja, amely tartalmazza $\hat{x}$ -t. A C_K körív x_0 és $\hat{x}$ közé eső ívét jelölje c_K , a C_L x_0 és x közé eső ívét c_L , valamint $\widehat{C}_L$ x_0 és $\hat{x}$ közé eső ívét $\widehat{c}_L$. Végül jelölje s_K és s_L a ∂K és $\partial(L + p)$ görbék x_0 és x közé eső rövidebb ívét.



2. ábra. A vizsgált lemezek Hausdorff-távolságának becslése.

A Hausdorff-metrikára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\delta_H(c_K, \widehat{c}_L) \leq \delta_H(c_K, s_K) + \delta_H(s_K, s_L) + \delta_H(s_L, c_L) + \delta_H(c_L, \widehat{c}_L),$$

valamint $\delta_H(s_K, s_L)$ -re hasonló gondolatmenetet alkalmazva

$$\begin{aligned} -\delta_H(s_K, c_K) + \delta_H(c_K, \widehat{c}_L) - \delta_H(\widehat{c}_L, c_L) - \delta_H(c_L, s_L) &\leq \\ &\leq \delta_H(s_K, s_L) \leq \\ &\leq \delta_H(s_K, c_K) + \delta_H(c_K, \widehat{c}_L) + \delta_H(\widehat{c}_L, c_L) + \delta_H(c_L, s_L). \end{aligned} \quad (2)$$

Az alábbi határérték közvetlen következménye a kapcsolódó [8]-beli eredménynek:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\delta_H(K[x_0, x], c)}{l_K^2(x_0, x)} = \frac{1}{8} \cdot \left| \frac{1}{R} - \kappa_K(\nu_0) \right|, \quad (3)$$

ahol $K[x_0, x]$ a K határának x és $x_0 = x_K(\nu_0)$ pontok közé eső rövidebb íve, valamint c az R sugarú, x_0 és x végpontú rövidebb körív. Ebből azonnal adódik, hogy

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta_H(\widehat{c}_L, c_K)}{(\Delta\theta)^2} = \frac{1}{8} \left(\kappa_K(\theta_0) - \frac{1}{r_L(\theta_0)} \right) \cdot r_K^2(\theta_0) = \frac{1}{8} \cdot \frac{r_K(\theta_0)}{r_L(\theta_0)} (r_L(\theta_0) - r_K(\theta_0)).$$

A továbbiakban igazoljuk, hogy a (2) becslésben szereplő többi Hausdorff-távolság x^2 -el osztva nullához tart $x \rightarrow 0$ mellett, és ezzel ekvivalens módon $(\Delta\theta)^2$ -el osztva nullához tart $\Delta\theta \rightarrow 0$ mellett. Ezen ekvivalencia abból adódik, hogy $x \rightarrow 0$ mellett $x/l(c_K) \rightarrow 1$ (lásd [8]), így $\Delta\theta/x \rightarrow \kappa_K(\theta_0) \neq 0$.

Legyen az x pont választása olyan, hogy az s_K és c_K ívek előállnak az f_1, f_2 kétszer differenciálható függvények grafikonjaiként. A lemezek helyzetének választása miatt $f_1(0) = f_2(0) = f_1'(0) = f_2'(0) = 0$, így [8] 3(iii) lemmájából

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\delta_H(f_1[0, x], f_2[0, x])}{x^2} = \frac{f_1''(0) - f_2''(0)}{2},$$

ahol $f_i[0, x]$ jelöli az f_i függvény grafikonjának $[0, x]$ intervallumbeli ívét ($i = 1, 2$). Mivel esetünkben $f_1''(0) = f_2''(0) = \kappa_K(\theta_0)$, a fenti határérték 0. Jegyezzük meg továbbá, hogy az f_1, f_2 függvényekre felírt Taylor-tételből adódik, hogy $f_1(x) - f_2(x) = o(x^2)$.

Állítsuk most elő a c_L és $\widehat{c}_L$ görbéket a g_1 és g_2 függvények grafikonjaiként. A Hausdorff-távolság definíciójából világos, hogy $\delta_H(g_1[0, x], g_2[0, x]) \leq \max_{t \in [0, x]} |g_1(t) - g_2(t)|$, és görbék konstrukciójából könnyű látni, hogy a maximum a $t = x$ helyen vétetik fel. Ebből adódik, hogy

$$\max_{t \in [0, x]} |g_1(t) - g_2(t)| = g_1(x) - g_2(x) = f_1(x) - f_2(x) = o(x^2),$$

így ekkor

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\delta_H(g_1[0, x], g_2[0, x])}{x^2} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\max_{t \in [0, x]} |g_1(t) - g_2(t)|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0.$$

Legvégül a $\delta(c_L, s_L)/l_L^2(x_0, x)$ kifejezés határértékét vizsgáljuk $l_L(x_0, x) \rightarrow 0$ mellett. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Létezik $\delta > 0$, amelyre

- (i) $|\kappa_L(\theta_0) - \kappa_L(\eta)| < \varepsilon$, ha $|\theta_0 - \eta| < \delta$,
- (ii) $(1 + \varepsilon)^{-1} l_L(x_0, x) \leq l_K(x_0, x) \leq l_L(x_0, x)(1 + \varepsilon)$, ha $l_K(x_0, x) < \delta$, és
- (iii)

$$(1 + \varepsilon)^{-1} \cdot \frac{|\kappa_L(\theta_0) - \kappa_L(\eta)|}{8} \leq \frac{\delta_H(s_L, c_L)}{l_L^2(x_0, x)} \leq \frac{|\kappa_L(\theta_0) - \kappa_L(\eta)|}{8} \cdot (1 + \varepsilon),$$

ha $l_L(x_0, x) < \delta$.

Az (i) és (ii)-hez létező δ az 5. lemma bizonyításához hasonlóan adódik, (iii) pedig (3)-ból, ami η -ban egyenletes.

Hasonlóan az 5. lemma bizonyításához, ha $x \in \partial K$ választása olyan, hogy $l_K(x_0, x) < \delta$ és $|\theta_0 - \theta| < \delta$, akkor minden (i)-(iii) feltétel teljesül.

Először alkalmazzuk (ii)-t a $\delta_H(s_L, c_L)/l_K^2(x_0, x)$ kifejezésre:

$$(1 + \varepsilon)^{-2} \cdot \frac{\delta_H(s_L, c_L)}{l_L^2(x_0, x)} \leq \frac{\delta_H(s_L, c_L)}{l_K^2(x_0, x)} \leq \frac{\delta_H(s_L, c_L)}{l_L^2(x_0, x)} \cdot (1 + \varepsilon)^2,$$

majd (iii)-ból

$$(1 + \varepsilon)^{-3} \cdot \frac{|\kappa_L(\theta_0) - \kappa_L(\eta)|}{8} \leq \frac{\delta_H(s_L, c_L)}{l_K^2(x_0, x)} \leq \frac{|\kappa_L(\theta_0) - \kappa_L(\eta)|}{8} \cdot (1 + \varepsilon)^3.$$

Végül (i)-ből

$$(1 + \varepsilon)^{-3} \cdot \frac{\varepsilon}{8} \leq \frac{\delta_H(s_L, c_L)}{l_K^2(x_0, x)} \leq \frac{\varepsilon}{8} \cdot (1 + \varepsilon)^3,$$

így

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta_H(s_L, c_L)}{l_K^2(x_0, x)} = 0.$$

A fenti négy határértékből így (2) segítségével már adódik a lemma állítása. $\square$

4. Egy L-konvex dualitás

Legyen L az origóra szimmetrikus konvex lemez, azaz $L = -L$, és legyen K L -konvex lemez. Ekkor K L -konvex duálisa a

$$K^* = \{y \mid K \subseteq y + L\}$$

halmaz, ami a szimmetriát kihasználva előállítható

$$K^* = \bigcap_{x \in K} L + x \tag{4}$$

alakban is. Eszerint továbbá a duális L -eltoltak metszete, így L -konvex. Az így definiált dualitásfogalom általánosítása egy, az orsókonvexitásban is definiált dualitásfogalomnak, lásd [7].

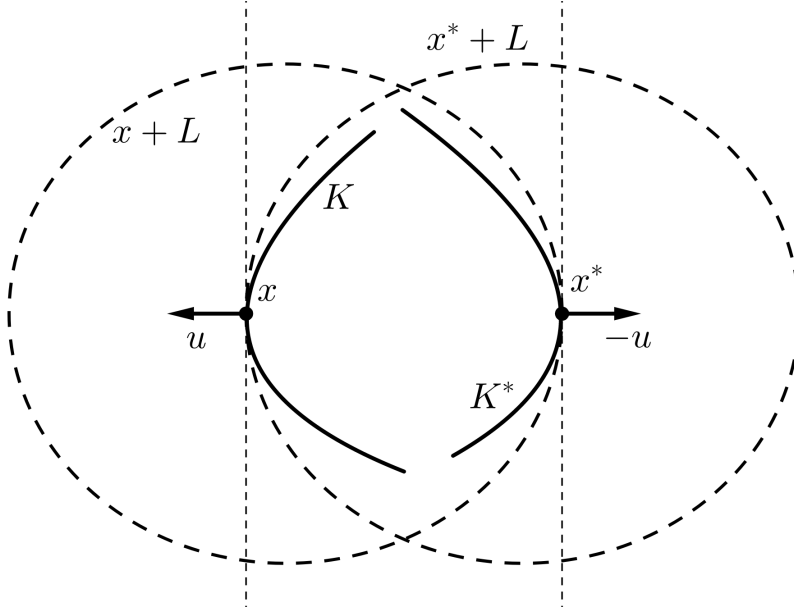
A K és duálisa közötti kapcsolat leírásához szükségünk lesz a következő fogalomra. A $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$ Minkowski-összeg területe tetszőleges $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ esetén előáll

$$A(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) = \lambda_1^2 A(K_1) + 2\lambda_1 \lambda_2 A(K_1, K_2) + \lambda_2^2 A(K_2)$$

alakban, ahol $A(K_1, K_2)$ jelöli a K_1 és K_2 lemezek *kevert területét*. A kevert térfogatok fogalma hasonlóan definiálható magasabb dimenzióban is, lásd [14].

7. lemma. *A fenti jelölések mellett*

- (i) $K + (-K^*) = L$
- (ii) $h_K(u) + h_{K^*}(-u) = h_L(u)$
- (iii) $r_K(u) + r_{K^*}(-u) = r_L(u)$
- (iv) $\text{Per}(K) + \text{Per}(K^*) = \text{Per}(L)$
- (v) $A(K^*) = A(L) - 2A(K, L) + A(K)$.



3. ábra. Az L -konvex dualitás konstrukciója.

Bizonyítás. Legyen $u \in \mathcal{S}^1$ rögzített, $x = x_K(u)$, és legyen $x^* + L$ a K lemez x -beli támasz L -je. Ekkor a duális definíciójából $x^* \in K^*$, és (4) miatt $x^* \in x + L$. Ebből adódik, hogy x^* határpontja K^* -nak, méghozzá $x^* = x_{K^*}(-u)$ és ott a támasz L -je pontosan $x + L$. Ebből (ii), és így (i) azonnal következik, továbbá mivel $h_K(u) + h_K''(u) = r_K(u)$, (iii) is rögtön adódik.

A (iv) és (v) állítások igazolása az alábbi jól ismert kifejezéseken alapszik (lásd [13, 1. fejezet]):

$$\text{Per}(K) = \int_0^{2\pi} h_K(\theta) \, d\theta \quad (5)$$

$$A(K) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_K(\theta) \cdot (h_K(\theta) + h_K''(\theta)) \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_K(\theta) r_K(\theta) \, d\theta \quad (6)$$

$$A(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_{K_1}(\theta) \cdot (h_{K_2}(\theta) + h_{K_2}''(\theta)) \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_{K_1}(\theta) r_{K_2}(\theta) \, d\theta \quad (7)$$

Felhasználva (5)-t és (ii)-t (iv) azonnal adódik. Kihhasználva, hogy a kevert területre vonatkozó formulában K_1 és K_2 felcserélhető,

$$A(K_1, K_2) = \frac{1}{4} \left[\int_0^{2\pi} h_{K_1}(\theta) r_{K_2}(\theta) \, d\theta + \int_0^{2\pi} h_{K_2}(\theta) r_{K_1}(\theta) \, d\theta \right],$$

és így

$$\begin{aligned} A(K^*) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_{K^*}(\theta) r_{K^*}(\theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h_L(\theta) - h_K(\theta)) (r_L(\theta) - r_K(\theta)) \, d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_L(\theta) r_L(\theta) \, d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_L(\theta) r_K(\theta) + h_K(\theta) r_L(\theta) \, d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h_K(\theta) r_K(\theta) \, d\theta = \\ &= A(L) - 2A(K, L) + A(K). \end{aligned}$$

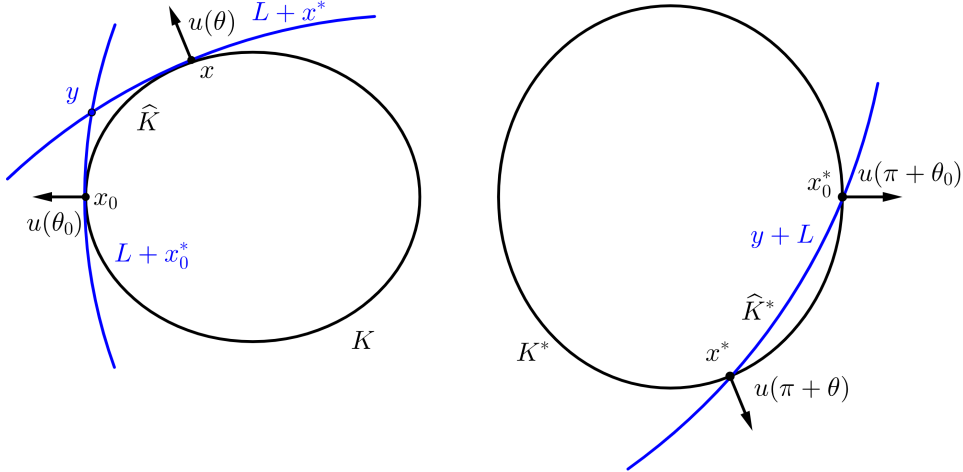
□

5. Körülírt esetek

Legyen L origóra szimmetrikus konvex lemez, K pedig L -konvex. Legyen $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, és kellően kis $\Delta\theta$ esetén legyenek $L + x_0^*$ és $L + x^*$ rendre a K lemez $x_0 = x_K(\theta_0)$ és $x = x_K(\theta_0 + \Delta\theta)$ pontjaiban vett támasz L -jei. Továbbá jelölje a fenti eltoltak határainak metszéspontját y (lásd 4. ábra), és Γ az $L + x_0^*$ határának x_0 és y , valamint az $L + x^*$ határának x és y közé eső ívének unióját. Végül legyen $\Delta_l(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta)$, $\Delta_A(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta)$ és $\Delta_H(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta)$ rendre a Γ görbe, és K határának x_0 és x pontjai közötti ívének ívhosszkülönbsége, az általuk határolt tartomány területe, valamint az ívek Hausdorff-távolsága.

Jelölje $\widehat{K}$ a K és a Γ által meghatározott tartomány unióját. Könnyű látni, hogy $\widehat{K}$ szintén L -konvex. Továbbá világos az is, hogy Δ_l és Δ_A kifejezhető a $\widehat{K}$ és K lemezek kerületének és területének különbségeként, Δ_H pedig $\widehat{K}$ és K Hausdorff-távolságaként.

Tekintsük a $\widehat{K}$ és K lemezek L -konvex duálisait. A dualitás definíciójából világos, hogy a $K \subseteq \widehat{K}$ relációból következik $\widehat{K}^* \subseteq K^*$. Bármely olyan $v \in \mathcal{S}^1$ esetén, amely az $u(\theta_0)$ és $u(\theta)$ normálisok által meghatározott hosszabb $\mathcal{S}^1$ -íven fekszik, $x_K(v) = x_{\widehat{K}}(v)$, és így $x_{K^*}(-v) = x_{\widehat{K}^*}(-v)$. Továbbá $y + L$ határán tartalmazza az x^* és x_0^* pontokat, így a $\widehat{K}^*$ és K^* közötti viszony éppen a beírt esetben vizsgált geometriai mennyiségeket írja le. Emiatt a dualitás segítségével a körülírt határértékek kiszámításához visszatérhetünk a már igazolt beírt formulákhoz. Ahogy azt a bevezetőben említettük, ezzel ki tudjuk kerülni a körülírt határértékek közvetlen kiszámítását, ami nem tűnik kivitelezhetőnek.



4. ábra. A körülírt eset dualitással visszavezethető a beírt esetre.

8. lemma. *Legyen L centrálszimmetrikus lemez. Ekkor a fenti jelölések mellett*

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta_l(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta)}{(\Delta\theta)^3} &= \frac{1}{24} \cdot \frac{r_K^3(\theta_0) - 3r_K^2(\theta_0)r_L(\theta_0) + 2r_K(\theta_0)r_L^2(\theta_0)}{r_L^2(\theta_0)} \\ \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta_A(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta)}{(\Delta\theta)^3} &= \frac{1}{24} \cdot \frac{r_K^2(\theta_0)}{r_L(\theta_0)} \cdot (r_L(\theta_0) - r_K(\theta_0)) \\ \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta_H(\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta)}{(\Delta\theta)^2} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{r_K(\theta_0)}{r_L(\theta_0)} \cdot (r_L(\theta_0) - r_K(\theta_0)). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az ívhosszra és Hausdorff-távolságra vonatkozó állítások azonnal adódnak a K -t és duálisát összekötő formulákból, valamint a beírt esetekben igazolt határértékekből:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\text{Per}(\widehat{K}) - \text{Per}(K)}{(\Delta\theta)^3} & \stackrel{(7. \text{ lemma})}{=} \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\text{Per}(K^*) - \text{Per}(\widehat{K}^*)}{(\Delta\theta)^3} = \\
& \stackrel{(5. \text{ lemma})}{=} \frac{1}{24} \cdot \frac{r_{K^*}(\pi + \theta_0)}{r_L^2(\pi + \theta_0)} \cdot (r_L^2(\pi + \theta_0) - r_{K^*}^2(\pi + \theta_0)) = \\
& \stackrel{(7. \text{ lemma})}{=} \frac{1}{24} \cdot \frac{r_L(\theta_0) - r_K(\theta_0)}{r_L^2(\theta_0)} \cdot r_K(\theta_0) \cdot (2r_L(\theta_0) - r_K(\theta_0)) = \\
& = \frac{r_K^3(\theta_0) - 3r_K^2(\theta_0)r_L(\theta_0) + 2r_K(\theta_0)r_L^2(\theta_0)}{24r_L^2(\theta_0)}.
\end{aligned}$$

A 7. lemmából azonnal adódik $h_{\widehat{K}}(u) - h_K(u) = h_{K^*}(-u) - h_{\widehat{K}^*}(-u)$, így a Hausdorff-távolság támaszfüggvénnyel való kapcsolatából (lásd (1)) $\delta_H(K, \widehat{K}) = \delta_H(K^*, \widehat{K}^*)$, így

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta_H(K, \widehat{K})}{(\Delta\theta)^2} & = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta_H(K^*, \widehat{K}^*)}{(\Delta\theta)^2} = \\
& = \frac{1}{8} \cdot \frac{r_{K^*}(\pi + \theta_0)}{r_L(\pi + \theta_0)} \cdot (r_L(\pi + \theta_0) - r_{K^*}(\pi + \theta_0)) = \\
& = \frac{1}{8} \cdot \frac{r_L(\theta_0) - r_K(\theta_0)}{r_L(\theta_0)} \cdot r_K(\theta_0).
\end{aligned}$$

Végezetül a területkülönbségre vonatkozó állítással foglalkozunk. A duális területére, valamint a kevert területre (7) vonatkozó formulák felhasználásával

$$\begin{aligned}
A(\widehat{K}) - A(K) & = A(\widehat{K}^*) - A(K^*) - 2(A(\widehat{K}^*, L) - A(K^*, L)) = \\
& = - \left[(A(K^*) - A(\widehat{K}^*)) - \int_0^{2\pi} (h_{K^*}(\nu) - h_{\widehat{K}^*}(\nu)) r_L(\nu) \, d\nu \right]. \quad (8)
\end{aligned}$$

Az 5. lemmából rögtön adódik

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{A(K^*) - A(\widehat{K}^*)}{(\Delta\theta)^3} = \frac{1}{12} \cdot \frac{r_{K^*}^2(\pi + \theta_0)}{r_L(\pi + \theta_0)} \cdot (r_L(\pi + \theta_0) - r_{K^*}(\pi + \theta_0)).$$

A kifejezést szemléletesen értve azt mondjuk hogy a β szög α_1 és α_2 között van pontosan akkor, ha $u(\beta)$ az $u(\alpha_1)$ és $u(\alpha_2)$ által meghatározott rövidebb $\mathcal{S}^1$ -íven van. A tömörség érdekében bevezetjük továbbá a $\nu_0 = \pi + \theta_0$ és $\nu = \pi + \theta$ jelöléseket, és így természetes módon $\Delta\nu = \Delta\theta$. Vegyük észre, hogy bármely olyan ψ esetén, amely nincs ν_0 és ν között, $h_{\widehat{K}^*}(\psi) - h_{K^*}(\psi) = 0$, így (8)-ben szereplő integrált elég a ν_0 és ν közé eső intervallumon vizsgálni, jelölje ezt i . Továbbá tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy bármely $|\nu_0 - \nu| < \delta$ feltételt kielégítő ν esetén $(1 + \varepsilon)^{-1} r_L(\nu_0) \leq r_L(\psi) \leq r_L(\nu_0)(1 + \varepsilon)$ teljesül bármely ν_0 és ν közötti ψ szögre. Emiatt tehát

$$\begin{aligned}
(1 + \varepsilon)^{-1} r_L(\nu_0) \int_i (h_{K^*}(\psi) - h_{\widehat{K}^*}(\psi)) \, d\psi & \leq \\
& \leq \int_i (h_{K^*}(\psi) - h_{\widehat{K}^*}(\psi)) r_L(\psi) \, d\psi \leq \\
& \leq (1 + \varepsilon) r_L(\nu_0) \int_i (h_{K^*}(\psi) - h_{\widehat{K}^*}(\psi)) \, d\psi, \quad (9)
\end{aligned}$$

ha ν kellően közel van ν_0 -hoz.

A terület támaszfüggvénnyel való kifejezéséből, valamint az 5. lemmából adódik, hogy

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2\pi} (h_{K^*}(\psi) - h_{\widehat{K}^*}(\psi)) \, d\psi}{(\Delta\theta)^3} = \frac{1}{24} \cdot \frac{r_{K^*}(\nu_0)}{r_L^2(\nu_0)} \cdot (r_L^2(\nu_0) - r_{K^*}^2(\nu_0)),$$

és így (9)-ből

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2\pi} (h_{K^*}(\psi) - h_{\widehat{K}^*}(\psi)) r_L(\psi) \, d\psi}{(\Delta\theta)^3} = \frac{1}{24} \cdot \frac{r_{K^*}(\nu_0)}{r_L(\nu_0)} \cdot (r_L^2(\nu_0) - r_{K^*}^2(\nu_0)).$$

Világos, hogy L szimmetriájából adódik $r_L(\nu) = r_L(\theta)$, és a jelenlegi jelöléseinkkel $r_K(\theta_0) = r_L(\nu_0) - r_{K^*}(\nu_0)$ a 7. lemma szerint. Mindezt összevetve

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{A(\widehat{K}) - A(K)}{(\Delta\theta)^3} &= - \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \left[\frac{A(K^*) - A(\widehat{K}^*)}{(\Delta\theta)^3} - \frac{\int_0^{2\pi} (h_{K^*}(\psi) - h_{\widehat{K}^*}(\psi)) r_L(\psi) \, d\psi}{(\Delta\theta)^3} \right] = \\ &= - \frac{r_{K^*}^2(\nu_0)}{12r_L(\nu_0)} (r_L(\nu_0) - r_{K^*}(\nu_0)) + \frac{r_{K^*}(\nu_0)}{24r_L(\nu_0)} (r_L^2(\nu_0) - r_{K^*}^2(\nu_0)) = \\ &= \frac{1}{24} \cdot \frac{r_{K^*}(\nu_0)}{r_L(\nu_0)} (r_L(\nu_0) - r_{K^*}(\nu_0))^2 = \frac{1}{24} \cdot \frac{r_L(\theta_0) - r_K(\theta_0)}{r_L(\theta_0)} \cdot r_K^2(\theta_0), \end{aligned}$$

így a területre vonatkozó határértéket is igazoltuk. $\square$

6. Az 1 és 2. tételek bizonyítása

Az 1. és 2. tételek bizonyításához a McClure és Vitale [11, 4. szakasz] által bemutatott eszközöket használjuk, ennek összefoglalását lásd továbbá [8, 3. szakasz].

Legyen f egy valós értékű függvény az $[a, b]$ intervallumon, és jelölje T_n az $[a, b]$ intervallum egy partícióját: $T_n = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ ahol $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. Tekintsük az $E(f, T_n)$ funkcionált, amely előáll az alábbi, T_n -től függő additív alakban:

$$E(f, T_n) = \sum_{i=0}^{n-1} e(f, t_i, t_{i+1}).$$

Legyen végül $E_n(f) = \inf_{T_n} E(f, T_n)$. Az eredmények a következő három feltevésből adódnak.

1. feltevés. Bármely olyan (α, β) -ra, amelyre $a \leq \alpha < \beta \leq b$ fennáll, $e(f, \alpha, \beta) \geq 0$. Továbbá $e(f, \cdot, \cdot)$ szubadditív $[a, b]$ szomszédos részintervallumain, azaz ha $a \leq \alpha < \beta < \gamma \leq b$, akkor

$$e(f, \alpha, \beta) + e(f, \beta, \gamma) \leq e(f, \alpha, \gamma).$$

2. feltevés. Létezik egy, az $[a, b]$ intervallumon értelmezett, f -től függő J_f függvény, valamint egy $m > 1$ konstans, amelyre

- (i) J_f nemnegatív és szakaszonként folytonos az $[a, b]$ intervallumon, és legfeljebb véges sok szakadása van, valamint

(ii)

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{e(f, \alpha, \alpha + h)}{h^m} = J_f(\alpha+),$$

ahol határérték egyenletes abban az értelemben, hogy a $|J_f(\alpha+) - e(f, \alpha, \alpha + h)/h^m|$ különbség egyenletes kicsivé tehető, ha $(\alpha, \alpha + h)$ része egy olyan zárt intervallumnak, ahol J_f folytonos.

3. feltevés $e(f, \alpha, \beta)$ folytonosan függ (α, β) -től.

9. tétel (McClure, Vitale [11]). *Ha az 1-3. feltevések teljesülnek $e(f, \alpha, \beta)$ esetén, akkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{m-1} E_n(f) = \left(\int_a^b (J_f(s))^{1/m} ds \right)^m.$$

Alkalmazzuk most ezt a konstrukciót az 1. tétel kerületkülönbségre vonatkozó formulájának igazolására. Tekintsük a $[0, 2\pi]$ intervallum $\Theta_n = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$ partícióját, és legyen P_n az $x_K(\theta_0), \dots, x_K(\theta_n)$ pontok L -konvex burka. Legyen $E(f, \Theta_n) = \delta_P(K, P_n)$, valamint $e(f, \theta_i, \theta_{i+1}) = \Delta_l(\theta_i, \theta_{i+1})$ a 3 fejezetben bevezetett jelölésekkel, amiből adódik

$$E(f, \Theta_n) = \sum_{i=0}^n e(f, \theta_i, \theta_{i+1}),$$

valamint $\delta_P(K, K_n^P) = E_n(f) = \inf_{\Theta_n} E(f, \Theta_n)$. Az 1. és 3. feltevések természetes módon teljesülnek $e(f, \cdot, \cdot)$ -ra. A

$$J_f(\theta) = \frac{1}{24} \cdot \frac{r_K(\theta)}{r_L^2(\theta)} \cdot (r_L^2(\theta) - r_K^2(\theta))$$

függvény folytonos $[0, 2\pi]$ -n, így kielégíti a 2. feltevés (i) részét. A (ii)-ben megkövetelt határérték adódik az 5. lemmából $m = 3$ választással, valamint egyenletes is az elvárt értelemben. Így a 9. tételből adódik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 E_n(F) = \left(\int_0^{2\pi} (J_f(\theta))^{1/3} d\theta \right)^3 = \frac{1}{24} \cdot \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{r_K(\theta)}{r_L^2(\theta)} \cdot (r_L^2(\theta) - r_K^2(\theta)) \right]^{1/3} d\theta \right)^3.$$

A beírt eset területkülönbségre, valamint a körülírt eset kerület- és területkülönbségre vonatkozó eredményei hasonlóan igazolhatók, az 5. és 8. lemmából adódó határértékek segítségével.

A Hausdorff-távolságra vonatkozó formulák igazolásához a 9. tétel egy módosított változatára van szükségünk, amelyet szintén [11]-ből idézzük.

Tekintsük a $G(f, T_n)$ funkcionált, amely előáll az alábbi, T_n -től függő alakban:

$$G_n(f) = \max_{0 \leq i \leq n-1} g(f, t_i, t_{i+1}).$$

Továbbá legyen $G(T_n) = \inf_{T_n} G(f, T_n)$.

4. feltevés Bármely (α, β) párra, amelyre $a \leq \alpha < \beta \leq b$ teljesül, $g(f, \alpha, \beta) \leq 0$. Továbbá ha $a \leq \alpha < \beta < \gamma \leq b$, akkor

$$\max(g(f, \alpha, \beta), g(f, \beta, \gamma)) \leq g(f, \alpha, \gamma).$$

10. tétel (McClure, Vitale [11]). *Ha a 2-4. feltevések teljesülnek $g(f, \alpha, \beta)$ esetén, akkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^m G_n(f) = \left(\int_a^b (J_f(s))^{1/m} ds \right)^m.$$

Legyen most $G(f, \Theta_n) = \delta_H(K, P_n)$ és $g(f, \theta_i, \theta_{i+1}) = \Delta_H(\theta_i, \theta_{i+1})$, így a 3. és 4. feltevések teljesülnek. A 6. lemmából nyerjük a 3. feltevést teljesítő $J_f(\theta)$ függvényt $m = 2$ választással. Így a 10. tétel alkalmazásával kapjuk az 1. tételben Hausdorff-távolságra vonatkozó formulát. A 8. lemmából hasonlóan adódik a 2. tétel kapcsolódó eredménye.

7. A 3. és 4. tételek bizonyítása

A bizonyítás Schneider [16] ötletein alapszik.

11. lemma (Drobot [3], Schneider [16]). *Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású, független véletlen változók. Minden n -re legyen $X_1(n) \leq X_2(n) \leq \dots \leq X_n(n)$ az $X_1, X_2, \dots, X_n$ értékek nemcsökkenő sorba rendezése. Legyen $U_j(n) = X_{j+1}(n) - X_j(n)$ ($j = 1, \dots, n$), ahol $X_{n+1}(n) = 1 + X_1(n)$. Legyen g folytonos, $[0,1]$ -n értelmezett valós értékű függvény, és $p > 1$. Ekkor 1 valószínűséggel*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-1} \sum_{j=1}^n g[X_j(n)] [U_j(n)]^p = \Gamma(p+1) \int_0^1 g(x) dx.$$

Legyenek $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ független véletlen változók K határáról μ sűrűség szerint választva, és jelölje R_n az $Y_1, \dots, Y_n$ pontok konvex burkát. Legyen m olyan, hogy $m(\theta) = \mu(x_K(\theta)) / \kappa_K(\theta)$, és definiáljuk a $\Psi: [0, 2\pi] \rightarrow [0,1]$ leképezést:

$$\Psi: \theta \mapsto \int_0^\theta m(t) dt,$$

és legyen $X_j = \Psi \circ x_K^{-1} \circ Y_j$. Ekkor az X_j -k független, egyenletes eloszlású pontok $[0,1]$ -ben. Legyen $\theta_j(n) \in [0, 2\pi]$ olyan, hogy $\Psi(\theta_j(n)) = X_j(n)$ ($j = 1, \dots, n+1$), így ekkor

$$X_{j+1}(n) - X_j(n) = \int_{\theta_j(n)}^{\theta_{j+1}(n)} m(t) dt.$$

Az m függvény egyenletes folytonosságából következik, hogy

$$X_{j+1} - X_j(n) = m(\theta_j(n))(\theta_{j+1}(n) - \theta_j(n))(1 + o(1)), \quad (10)$$

ahol $o(1) \rightarrow 0$ ha $|\theta_{j+1}(n) - \theta_j(n)| \rightarrow 0$, egyenletesen $\theta_j(n)$ -ben.

Ekkor $\delta_P(K, R_n) = \sum_1^n \Delta_l(\theta_j(n), \theta_{j+1}(n))$, így az 5. lemmabeli határértékből, majd (10) felhasználásával $\delta_P(K, R_n)$ kifejezhető, mint

$$\begin{aligned} & \sum_1^n \frac{1}{24} \cdot \frac{r_K(\theta_j(n))}{r_L^2(\theta_j(n))} \cdot (r_L^2(\theta_j(n)) - r_K^2(\theta_j(n))) \cdot (\theta_{j+1}(n) - \theta_j(n))^3 (1 + o(1)) = \\ & = \sum_1^n \frac{1}{24} \cdot \frac{r_K(\theta_j(n))}{r_L^2(\theta_j(n))} \cdot (r_L^2(\theta_j(n)) - r_K^2(\theta_j(n))) \left(\frac{X_{j+1}(n) - X_j(n)}{m(\theta_j(n))} \right)^3 (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (11)$$

Mivel $\theta_j(n) = \Psi^{-1}(X_j(n))$, így a

$$g(X) = \frac{r_K(\Psi^{-1}(X))}{24r_L^2(\Psi^{-1}(X))} \cdot \frac{r_L^2(\Psi^{-1}(X)) - r_K^2(\Psi^{-1}(X))}{m^3(\Psi^{-1}(X))}$$

helyettesítéssel adódik

$$\delta_P(K, R_n) = \sum_1^n g(X_j(n))U_j^3(n)(1 + o(1)),$$

ahol $o(1) \rightarrow 0$ ha $\max_j U_j(n) \rightarrow 0$. Így a 11. lemma feltételei teljesülnek, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \delta_P(K, R_n) = \Gamma(4) \int_0^1 g(X) dX.$$

A függvények definícióiból $\Psi' = m$, így a $X = \Psi(\theta)$ helyettesítéssel kapjuk a 3. tétel első formuláját. A beírt esetben területkülönbségre, valamint körülírt esetben kerület- és területkülönbségre vonatkozó eredmények hasonlóan következnek az 5. és 8. lemmákból.

Áttérünk a Hausdorff-távolságra vonatkozó eredmények igazolására.

12. lemma. *Legyen $X_1, \dots, X_n, X_j(n), U_j(n)$ és g választása olyan, mint a 11. lemmában, és legyen $g(0) = g(1)$. Ekkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \cdot \max_{1 \leq j \leq n} g[X_j(n)]U_j(n) = \max_{x \in [0,1]} g(x).$$

A Hausdorff-távolság definíciójából világos, hogy a 3. szakaszbeli jelölések mellett $\delta_H(K, R_n) = \max_j \Delta_H(\theta_j(n), \theta_{j+1}(n))$. A 6. lemma segítségével így

$$\delta_H(K, R_n) = \max_j \frac{1}{8} \cdot \frac{r_K(\theta_j(n))}{r_L(\theta_j(n))} \cdot (r_L(\theta_j(n)) - r_K(\theta_j(n))) \cdot (\theta_{j+1}(n) - \theta_j(n))^2 (1 + o(1)),$$

ahol $o(1) \rightarrow 0$, ha $\max_j |\theta_{j+1}(n) - \theta_j(n)| \rightarrow 0$. Ebből és (10)-ből a $n/\ln n \cdot \delta_H^{1/2}(K, R_n)$ kifejezés felírható, mint

$$\frac{n}{\ln n} \cdot \max_j \left(\frac{r_K(\theta_j(n))}{8r_L(\theta_j(n))} \right)^{1/2} (r_L(\theta_j(n)) - r_K(\theta_j(n)))^{1/2} \cdot \frac{U_j(n)}{m(\theta_j(n))} (1 + o(1)).$$

Mivel $\theta_j(n) = \Psi^{-1}(X_j(n))$,

$$g(X) = \left(\frac{r_K(\Psi^{-1}(X))}{8r_L(\Psi^{-1}(X))} \right)^{1/2} \cdot \frac{(r_L(\Psi^{-1}(X)) - r_K(\Psi^{-1}(X)))^{1/2}}{m(\Psi^{-1}(X))}$$

választással, és a 12. lemma felhasználásával

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \cdot \delta_H^{1/2}(K, R_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \max_j g(X_j(n))U_j(n)(1 + o(1)) = \max_{x \in [0,1]} g(x),$$

amiből θ -ra való visszatérés, majd négyzetre emelés után adódik a Hausdorff-formulára vonatkozó állítás. A 4. tételbeli kapcsolódó eredmény hasonlóan igazolható.

8. Kapcsolat a korábbi eredményekkel

A következőkben igazoljuk, hogy a 3. tételbeli, területre vonatkozó állításból $L = r\mathcal{B}^2$ választással, $r \rightarrow \infty$ mellett következik a kapcsolódó, lineárisan konvex véletlen sokszögekre vonatkozó eredmény. Az érvelés szorosan követi a [6] 3. szakaszában szereplő bizonyítást.

Legyen $L = r\mathcal{B}^2$. Ekkor az L -konvexitás megfelel az orsókonvexitásnak, és a bizonyításban ennek megfelelően az orsókonvexitás fogalmait használjuk: L -poligon helyett r -körpoligont mondunk, L -konvex burok helyett r -konvex burkot, amelyet $[X]_r$ jelöl.

Legyen R_n^r egy véletlen r -körpoligon, P_n pedig a vele megegyező csúcsokkal rendelkező n -szög. Legyen továbbá

$$d^R(n) = (A(K) - A(R_n^r)) \cdot n^2 \quad ; \quad d(n) = (A(K) - A(P_n)) \cdot n^2;$$

$$I^R = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(r_K^2(\theta) - \frac{r_K^3(\theta)}{r} \right) \cdot m^{-2}(\theta) \, d\theta \quad ; \quad I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r_K^2(\theta) \cdot m^{-2}(\theta) \, d\theta.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Természetes módon létezik olyan $R_1(\varepsilon)$, hogy $1 - \varepsilon < I^r/I < 1$ minden $r > R_1(\varepsilon)$ esetén. Elemi számítások mutatják, hogy létezik olyan, csak K -tól és ε -tól függő $R_2(\varepsilon) \geq r_0$, amelyre minden $r > R_2(\varepsilon)$ esetén

$$\frac{A([p, q]_r)}{A([p, q]_{r_0}) - A([p, q]_r)} < \varepsilon, \quad (12)$$

bármely $p, q \in K$ esetén.

Legyen D_m^r egy m -csúcsú r -körpoligon, P_m pedig az ugyanezen csúcsokkal rendelkező m -szög. Ha $r > R_2(\varepsilon)$, akkor (12)-ből

$$1 < \frac{d(n)}{d^r(n)} = 1 + \frac{A(R_n^r) - A(P_n)}{A(K) - A(R_n^r)}$$

$$< 1 + \sup_{\substack{D_m^r \subseteq K, \\ 2 \leq m \leq n}} \frac{A(D_m^r) - A(P_m)}{A(D_m^{r_0}) - A(D_m^r)} < 1 + \varepsilon.$$

Összefoglalva, ha $R > \max(R_1(\varepsilon), R_2(\varepsilon))$, akkor

$$(1 - \varepsilon) \cdot \frac{d^R(n)}{I^R} < \frac{d(n)}{I} = \frac{d(n)}{d^R(n)} \cdot \frac{d^R(n)}{I^R} \cdot \frac{I^R}{I} < (1 + \varepsilon) \cdot \frac{d^R(n)}{I^R},$$

amiből a 3. tétel területre vonatkozó formulájával együtt következik, hogy $n \rightarrow \infty$ mellett $d_n \rightarrow I$ majdnem biztosan. A kerületre és Hausdorff-távolságra vonatkozó formulák hasonlóképpen következnek.

9. Záró megjegyzések

Nyitott problémaként maradt a körülírt esetek bizonyítása, ha L nem centrálisan szimmetrikus. A dolgozatban bemutatott módszer ekkor nem működik, a szükséges limeszek direkt kiszámolása pedig - ahogy többször is említettük - meglehetősen nehéznek tűnik.

Természetesen merül fel a probléma magasabb dimenziós vizsgálata is. A használt analitikus és sztochasztikus technikák lényegében nem terjednek ki magasabb dimenzióra, és a szükséges geometriai fogalmak kidolgozottsága is hiányos, ezért ezen kérdések hosszabb távú célként fogalmazhatók meg.

Végül megemlítjük, hogy a használt dualitásfogalommal kapcsolatban, [7]-hez hasonlóan, több, önmagában is érdekes nyitott kérdés van, a dolgozatban csak a bizonyításhoz szükséges eszközöket gyűjtöttük össze.

Köszönetnyilvánítás

A dolgozat az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-21-1 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Hivatkozások

- [1] K. Bezdek, Z. Lángi, M. Naszódi, and P. Papez, *Ball-polyhedra*, Discrete Comput. Geom. **38** (2007), no. 2, 201–230.
- [2] E. M. Bronstein, *Approximation of convex sets by polytopes*, J Math Sci **153** (2008), 727–762.
- [3] V. Drobot, *Probabilistic version of a curvature formula*, Ann. Prob **10** (1982), 620 – 622.
- [4] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in Der Ebene Auf Der Kugel Und Im Raum*, Vol. 65, Springer, 1953.
- [5] F. Fodor, *Convex bodies and their approximations*, D.Sc. dissertation, 2020.
- [6] F. Fodor, P. Kevei, and V. Vígh, *On random disc polygons in smooth convex discs*, Adv. in Appl. Probab. **46** (2014), no. 4, 899–918.
- [7] F. Fodor, Á. Kurusa, and V. Vígh, *Inequalities for hyperconvex sets*, Adv. in Geom. **16** (2016), no. 3, 337–348.
- [8] F. Fodor and V. Vígh, *Disc-polygonal approximations of planar spindle convex sets*, Acta Sci. Math. (Szeged) **78** (2012), no. 1-2, 331–350.
- [9] P. M. Gruber, *Comparisons of best and random approximation of convex bodies by polytopes*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **50** (1997), 189–216. II International Conference in „Stochastic Geometry, Convex Bodies and Empirical Measures” (Agrigento, 1996).
- [10] Z. Lángi, M. Naszódi, and I. Talata, *Ball and spindle convexity with respect to a convex body*, Aequationes Math. **85** (2013), no. 1-2, 41–67.
- [11] D. E. McClure and R. A. Vitale, *Polygonal Approximation of Plane Convex Bodies*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **51** (1975), 326–358.
- [12] M. Reitzner, *Random Points on the Boundary of Smooth Convex Bodies*, Transactions of the American Mathematical Society **354** (2002), no. 6, 2243–2278.
- [13] L. Santaló and M. Kac, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
- [14] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Second expanded edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 151, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [15] R. Schneider, *Discrete aspects of stochastic geometry*, Handbook of Discrete and Computational Geometry, 3rd ed., CRC Press, Boca Raton, 2017.
- [16] R. Schneider, *Random approximation of convex sets*, Journal of Microscopy **151** (1988), 211 – 227.