

Nagyfrekvenciás gravitációs hullámok és visszahatásuk erős gravitációs térben

OTDK

Készítette:
Fóris Attila
Fizika Msc hallgató

Témavezető:
Prof. Dr. Gergely Árpád László

Természettudományi és Informatikai Kar
Elméleti Fizika Tanszék
Szegedi Tudományegyetem

2022 Szeged

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés és célkitűzés	2
2. Gravitációs hullámok gyengetér-közelítése	4
2.1. Bevezető	4
2.2. A gravitációs hullámok analógiája az elektromágneses hullámokkal	4
2.3. A gyengetér-közelítés	7
2.4. Harmonikus koordináták	10
3. Nagyfrekvenciás gravitációs hullámok görbült téridőben	12
3.1. Bevezető	12
3.2. A perturbációt okozó h_{ab} metrika inverze	12
3.3. Perturbált Ricci-tenzor	13
3.4. Perturbált Riemann-tenzor	17
3.5. Mértéktranszformáció és invariancia	19
3.6. Lineáris közelítés, hullámegyenlet	20
3.7. Hullámegyenlet megoldása vezető rendben	22
3.8. Harmonikus koordináta feltétel geometriai optikai közelítésben, a polarizációs tenzor . . .	24
4. Gravitációs hullámok visszahatása a téridő geometriájára	27
4.1. Bevezető	27
4.2. Energia-impulzus tenzor	27
5. Függelék	29
5.1. Einstein–Hilbert hatás	29
6. Összegzés, kitekintés	31
7. Hivatkozások	33

1. Bevezetés és célkitűzés

Az általános relativitáselmélet fontos szerepet játszik a modern fizikában és a csillagászatban. Jólatai segítségével pontosan ki tudjuk számolni az égitestek mozgását és nyomon tudjuk követni az Univerzum fejlődését. Az elmélet megjósolta a fekete lyukak és a gravitációs hullámok létezését is [1]. A Fizikai Nobel díjat 2020-ban Andea Ghez és Reinhard Genzel érdemelte ki a galaxisunk középpontjában lévő szupernagy tömegű fekete lyuk (Sagittarius A*) feltérképezéséért [6]. Az M87 galaxis középpontjában található M87* nevű, szupernagy tömegű fekete lyukról pedig az Event Horizon Teleszkóp kollaboráció készített rádióhullámok interferenciáján alapuló képet. A gravitációs hullámok kimutatásáért Rainer Weiss, Barry C. Barish és Kip S. Thorne 2017-ben kapott Fizikai Nobel-díjat [2][3][4].

A gravitációs hullámok a téridő görbületének hullámszerűen terjedő zavarai. Forrásaiként olyan rendszerek szolgálnak, melyekben a tömeg-kvadrupólmomentum második és harmadik deriváltjai nem tűnnek el. Ilyenek a fekete lyukak vagy neutroncsillagok kettős rendszerei. A gravitációs hullámok kimutatása először 2015-ben történt az interferometrikus elven működő LIGO két detektora által. A GWTC-3 katalógus 90-et tart számon (ebből 87 vagy 86 fekete lyuk kettős rendszer 2 vagy 3 fekete lyuk-neutroncsillag kettős, illetve egy neutroncsillag kettős) [5]. Albert Einstein 1937-ben megmutatta, hogy a gravitációs hullámok gyenge térben fénysebességgel terjednek [1]. Ez az eredmény igazolásra került 2017-ben (GW170817) a neutroncsillagok összeolvadása által létrehozott gravitációs hullámok és az őket kísérő elektromágneses sugárzás megfigyelése során.

Felmerül a kérdés, hogy erős gravitációs térben, például a fekete lyukak közvetlen közelében vagy a korai univerzumban hogyan viselkednek a gravitációs hullámok. Ezt a kérdést Richard A. Isaacson járta körül 1968-ban [6]. Azt a feltevést alkalmazta munkájában, hogy a gravitációs hullámok hullámhossza elhanyagolható a téridő görbületi sugarához képest. Ezt geometriai optikai vagy nagyfrekvenciás közelítésnek nevezik. Gyenge gravitációban ez a feltevés mindig teljesül, ugyanis a téridő sík, melynek görbületi sugara végtelen. Erős gravitációban azonban csak adott energiánál nagyobb energiájú zavarok nevezhetők gravitációs hullámnak. A perturbációk nulladik rendje a háttér-téridőre vonatkozó Einstein-egyenleteket adja. Isaacson belátta, hogy erős gravitációs térben szintén a perturbációk első rendje hullámegyenlethez vezet, azonban a szokásos d'Alembert operátor helyét az ún. Lichnerowicz-féle d'Alembert operátor veszi át. A hullámokat WKB-közelítésben tárgyalta. Azt is belátta, hogy a perturbációk második rendje a gravitációs hullámok háttérre való visszahatását adja meg. TDK dolgozatomban reprodukáltam Isaacson számolásainak általa meg nem adott rendkívül munkaigényes részleteit. Beláttam, hogy a Lichnerowicz-féle d'Alembert operátort tartalmazó hullámegyenlet szerint fejlődő gravitációs hullámok akárcsak a fény, null geodetikusokat követnek. Vagyis erős gravitációs tér jelenlétében is fénysebességgel terjednek a gravitációs hullámok. A gravitációs hullámok polarizációjának vizsgálatát Isaacson elemzésénél részletesebben végeztem el. Beláttam, hogy a polarizációs tenzor ugyanúgy két polarizációt tartalmaz (a + és x polari-

zációkat) erős gravitációs térben is, mint sík háttéren. Annak bizonyítása, hogy a háttérgörbület lineáris rendben nem generál új polarizációkat, új eredmény.

2. Gravitációs hullámok gyengetér-közelítése

2.1. Bevezető

A gravitációs hullámok pongyolán fogalmazva a téridő görbületének hepe-hupái. Ezt a hullámot az amplitúdója és a hullámhossza jellemzi. Általánosan fogalmazva gravitációs hullámról beszélünk, ha a hullámhossza sokkal kisebb, mint a görbületi sugár.

Az $\eta = \frac{\lambda}{R} \ll 1$, ahol λ a gravitációs hullám hullámhossza, míg R a görbületi sugár.

2.2. A gravitációs hullámok analógiája az elektromágneses hullámokkal

Elektromágneses hullámok esetén a Maxwell-egyenletek kerülnek felhasználásra, melyek a következők lesznek:

Inhomogén Maxwell-egyenlet: $\partial_a F^{ab} = 0$,

Homogén Maxwell-egyenlet: $\partial_{[c} F_{ab]} = 0$.

A Maxwell-egyenletekben a téridő tenzor $F^{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$. Azonban utóbbiak nem egyértelműek, így alkalmazható az

$$A^{b'} = A^b + \partial_b \Phi \quad (1)$$

ún. mértéktranszformáció. Itt Φ -re teljesülnek azok az egyenletek, amelyek megoldásait képezik A^b -nek. Az inhomogén Maxwell-egyenleteket felírva négyespotenciállal.

$$\mu_0 j^a = \partial_b \partial^a A^b - \partial^b A^a = \partial^a (\partial_b A^b) - \square A^a. \quad (2)$$

Lorenz-mértéket választva ($\partial_a A^a = 0$) a következőre egyszerűsödik az egyenlet:

$$\square A^a = -\mu_0 j^a \quad (3)$$

Ez egy forrásos hullámeqyenlet, aminek általános megoldását a homogén és a retardált megoldás képezi:

$$A^a = A_{ret.}^a + A_{hom.}^a. \quad (4)$$

A retardált megoldás

$$A_{ret.}^a(t, \bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x \frac{j^a(t - |\bar{x} - \bar{x}'|, \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|}, \quad (5)$$

ami belátható a megfelelően megválasztott Green-függvény segítségével. A homogén megoldások a sík elektromágneses hullámok

$$A^a = E_0^a e^{ik_b x^b} + \bar{E}_0^a e^{-ik_b x^b}. \quad (6)$$

Itt E_0^a a polarizációs vektor, míg $\bar{E}_0^a$ ennek komplex konjugáltja. Most behelyettesítjük a síkhullám megoldást először a forrásmentes Maxwell-egyenletbe, majd a Lorenz-mértékfeltételbe, hogy lássuk a következményeket.

- Forrásmentes Maxwell egyenlet: $[\square A^a = 0]$,

$$\begin{aligned}\square A^a &= \eta^{dc} \partial_d \partial_c A^a \\ \partial_c A^a &= ik_c E_0^a e^{(ik_a x^a)} - ik_c \bar{E}_0^a e^{(-ik_a x^a)} \\ \partial_d \partial_c A^a &= -ik_c k_d E_0^a e^{(ik_a x^a)} + \bar{E}_0^a e^{(-ik_a x^a)} \\ \eta^{dc} \partial_d \partial_c A^a &= -k_d k^d A^a,\end{aligned}\tag{7}$$

csak akkor 0, ha $k^d k_d = 0$.

Ebből az a következtetés vonható le, hogy a k_d négyes hullámvektor nullvektor, így a fénykúpon terjed.

- Lorenz-mértékfeltétel: $[\partial_a A^a = 0]$,

$$\partial_a A^a = ik_a E_0^a e^{ik_a x^a} - ik_a \bar{E}_0^a e^{-ik_a x^a}.$$

Ebből a feltételből pedig látszik, hogy csak akkor lehet 0, ha: $k_a E^a = 0$. Ebből pedig az következik, hogy E^1 és E^2 egymástól függetlenek. Ekkor [9] a másik két komponensre adódik, hogy: $E^3 = E^0$ vagy $E^3 = -E^0$. Az E^3 lenullázható, mert a Lorenz invariancia nem egyértelműen rögzíti a négyespotenciált. Így az E^0 és az E^3 komponensek lenullázhatóak, de az E^1 és az E^2 nem, mert függetlenek a mérték megválasztásától. Legyen a polarizációs vektor

$$E_0^a = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0^1 \\ E_0^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

így nincs temporális és longitudinális polarizáció sem. A meglévő polarizációk a terjedési irányra merőlegesek (transzverzálisak). Belátható, hogy a z-tengely körüli (x-y)-síkbeli forgatások invariánsan hagyják a polarizációs négyesvektort. Egy ilyen forgatás mátrixa

$$R_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

melyre a polarizációk iránya megőrződik. Legyenek

$$E_{\pm} = E_1 \mp iE_2,\tag{8}$$

adott komplex polarizációs mennyiségek, melyek a forgatás végrehajtása után

$$E'_{\pm} = e^{(\pm i\theta)} E_{\pm} \quad (9)$$

alakúak. Az ilyen foton helicitása 1, mivel θ együtthatója 1. (A helicitás nem ugyanaz, mint a spin, mert a spin tömeggel rendelkező testekre jellemző, míg a helicitás tömeg nélküliekre.)

2.3. A gyengetér-közelítés

Ez az alfejezet a gravitációs hullámok néhány tulajdonságáról fog szólni. Elsősorban felhasználásra kerül, hogy gyengetér-közelítésben a metrika csak egy kis mértékben tér el a Minkowskitól [9], ezért egy kis h_{ab} perturbációt véve kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} g_{ab} &= \eta_{ab} + h_{ab}, \quad |h_{ab}| \ll 1, \\ |\partial_c h_{ab}| &\ll 1, \\ |\partial_b \partial_a h_{ab}| &\ll 1. \end{aligned}$$

Ezeket felhasználva a Γ_{bc}^a a következőképpen néz ki:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}(\eta^{ai} + h^{ai})[\partial_b(\eta_{ic} + h_{ic}) + \partial_c(\eta_{ib} + h_{ib}) - \partial_i(\eta_{bc} + h_{bc})]. \quad (10)$$

Ha h^{ai} -vel szorzunk, az már második rend, viszont minket csak első rendig érdekel, továbbá a Minkowski metrika szignatúrája $(-1,1,1,1)$, így tehát ezek deriváltjai zérusok. Ezeket felhasználva tovább egyszerűsödik a következőre az egyenlet:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}(\partial_b h_{ic} + \partial_c h_{ib} + \partial_i h_{bc}) + \sigma(h^2). \quad (11)$$

Az Einstein-egyenlet meghatározásához azonban a Ricci-tenzorra van szükség, amit a fentebb található Christoffel szimbólummal számolunk ki. A Riemann-tenzorból megkapjuk spúrképzéssel a Ricci-tenzort, amit a következőképpen ismertetünk:

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{ci}^a \Gamma_{bd}^i - \Gamma_{di}^a \Gamma_{bc}^i. \quad (12)$$

Ebben az egyenletben az első két tag $\sigma(h)$ -rendű, míg a második tag $\sigma(h^2)$ -rendű, ezért az utóbbit elhanyagolhatjuk. Mivel a vákuum Einstein-egyenlet a következő alakú: $R_{ab} = 0$, ezért felhasználjuk a Riemann-tenzorból képezhető Ricci tenzort:

$$\begin{aligned} R_{bd} &= R_{bad}^a = \partial_a \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{ba}^a + \sigma(h^2) = \frac{1}{2} \eta^{ai} (\partial_a (\partial_b h_{id} + \partial_d h_{ib} - \partial_i h_{bd}) - \partial_d (\partial_b h_{ib} + \partial_b h_{ia} - \partial_i h_{ab})) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{ai} (\partial_a \partial_b h_{id} - \partial_a \partial_i h_{bd} - \partial_d \partial_b h_{ia} + \partial_d \partial_i h_{ab}). \end{aligned}$$

A következőkben alkalmazzuk, hogy $\square = \partial_a \partial^a$, ezáltal az egyenlet alakja:

$$R_{bd} = \frac{1}{2}(\eta^{ai} (\partial_a \partial_b h_{id} - \partial_d \partial_b h_{ia} + \partial_d \partial_i h_{ab})) - \frac{\square h_{db}}{2}. \quad (13)$$

Ezen a ponton kerül számításba a (31)-es képlet, tehát ezt a konkrét esetet fogjuk kiszámolni a harmonikus koordináták segítségével:

$$0 = g^{ab} \Gamma_{ab}^c = (\eta^{ab} + h^{ab}) \frac{1}{2} \eta^{ci} (\partial_a (\eta_{ib} + h_{ib}) + \partial_b (\eta_{ia} + h_{ia}) - \partial_i (\eta_{ab} + h_{ab})).$$

Itt is elhanyagolhatóak az $\sigma(h^2)$ rendű tagok.

$$0 = \frac{1}{2} \eta^{ab} \eta^{ci} (\partial_a h_{ib} + \partial_b h_{ia} - \partial_i h_{ab}) = \frac{1}{2} \eta^{ci} (\partial_a h_i^a + \partial_b h_i^b - \partial_i h_a^a) = \frac{1}{2} (\partial_a h^{ac} + \partial_a h^{ac} - \partial^c h_a^a).$$

Az utolsó egyenlőséget átrendezve:

$$\partial_a h^{ac} = \frac{1}{2} \partial^c h_a^a. \quad (14)$$

A (14)-es összfüggést beírva a (13)-as összefüggésbe, a Ricci-tenzorra a következő formula adódik:

$$R_{bd} = \frac{1}{2}(-\square h_{db} + \partial^a \partial_b h_{ad} + \partial^a \partial_d h_{ab} - \partial_d \partial_b h_a^a) = \frac{1}{2}(-\square h_{db} + \partial^a (\partial_b h_{ad} + \partial_d h_{ab}) - \frac{1}{2} \partial_d \partial_b h_a^a - \frac{1}{2} \partial_b \partial_d h_a^a).$$

Továbbá

$$R_{bd} = \frac{1}{2}(-\square h_{db} + \partial^a (\partial_b h_{ad} + \partial^a \partial_d h_{ab}) - \partial^a (\partial_b h_{ad} + \partial_d h_{ab})) = 0.$$

Végül pedig a Ricci-tenzor végső alakja:

$$R_{ab} = -\frac{1}{2}\square h_{ab}. \quad (15)$$

Einstein-egyenletet használva

$$\begin{aligned} R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R &= 8\pi GT_{ab}, \\ R - 2R &= 8\pi GT \\ R_{ab} &= -8\pi G(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T), \\ S_{ab} &= T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T, \end{aligned}$$

továbbá beírva a (15)-ös egyenletet adódik:

$$\frac{1}{2}\square h_{ab} = 16\pi GS_{ab}, \quad (16)$$

az Einstein-egyenlet gyengetér közelítése. Az Einstein-tenzornak ebben a közelítésben 6 komponense van, hogyha h_{ab} -vel írjuk fel a hullámegyenletet. Azonban, hogyha helyette, a spúr invertált $\Psi_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h$ -t használjuk, akkor az Einstein-tenzor alakja gyengetér-közelítésben 2 komponenssel kevesebb lesz, így csak 3 tag fogja alkotni. A hullámegyenletet ezért érdemes felírni a következő alakban:

$$\frac{1}{2}\square\Psi_{ab} = -16\pi GS_{ab},$$

Ezt a harmonikus koordináta választás teszi lehetővé. Már az előbbi alfejezetben tárgyaltuk, hogy a gravitációs hullám analóg az elektromágneses hullámmal, így annak megoldása a következőképpen néz ki:

$$\Psi_{ab} = \Psi_{ab}^{inh.} + \Psi_{ab}^{hom.}. \quad (17)$$

Ennek síkhullám megoldása:

$$\Psi_{ab} = p_{ab}e^{(ik_j x^j)} + \bar{p}_{ab}e^{(-ik_j x^j)}. \quad (18)$$

Itt az egyenletben p_{ab} az ún. polarizációs tenzor. Most megvizsgáljuk, hogy mit tudunk mondani az egyenletből p_{ab} -ról és k_j -ről.

$$\begin{aligned} \square\Psi_{ab} &= \eta^{dc}\partial_d\partial_c h_{ab}, \\ \partial_c\Psi_{ab} &= ik_c p_{ab}e^{(ik_j x^j)} - ik_c \bar{p}_{ab}e^{(-ik_j x^j)}, \\ \partial_d\partial_c\Psi_{ab} &= -k_c k_d p_{ab}e^{(ik_j x^j)} + k_c k_d \bar{p}_{ab}e^{(-ik_j x^j)}, \\ \eta^{dc}\partial_d\partial_c\Psi_{ab} &= -k_d k^d \Psi_{ab}. \end{aligned}$$

A Ψ_{ab} -ról tudom, hogy nem nulla, így csak akkor nulla, ha $-k_d k^d = 0$. Ebből következik, hogy k_d nullvektor, a fénykúp mentén terjed, így levonható a következtetés, hogy a gravitációs hullám fényszerű. Úgy választjuk meg, hogy a terjedés z-irányú legyen, azaz $k^d = (k, 0, 0, k)$.

Most második lépésként használjuk a harmonikus koordináta feltételt, vagyis:

$$\begin{aligned} \partial_a\Psi_c^a &= -\frac{1}{2}\partial_c\Psi_a^a \rightarrow [ik_a p_c^a e^{(ik_j x^j)} - ik_a \bar{p}_c^a e^{(ik_j x^j)}] = \frac{1}{2}[-ik_c p_a^a e^{(ik_j x^j)} + ik_c \bar{p}_a^a e^{(ik_j x^j)}] \\ (k_a p_c^a - \frac{1}{2}k_c p_a^a)e^{(ik_j x^j)} &= (-k_a \bar{p}_c^a + \frac{1}{2}k_c \bar{p}_a^a)e^{(-ik_j x^j)}. \end{aligned}$$

Az első tagban szereplők közül tudjuk, hogy az exponenciális sose 0, így csak akkor lehet nulla, ha a zárójelen belüli tag nulla, vagyis:

$$k_a p_c^a = \frac{1}{2}k_c p_a^a. \quad (19)$$

A polarizációs komponensek megválasztásánál a (19)-es egyenlettel ekvivalens

$$k^a p_a^c = \frac{1}{2}k^c p_a^a$$

átírást fogjuk alkalmazni. Az egyenlőségjel másik oldalával most nem foglalkozunk.

Már említésre került, hogy z-irányban terjedő gravitációs hullámot vettünk, ezt felhasználva válasszuk most a (19)-es egyenletben szereplő tagok esetén "a" indexet 0-nak vagy 3-nak. Ekkor a következő alakot nyerjük:

$$k(p_0^c + p_3^c) = \frac{1}{2}k^c p_a^c,$$

ahol $p_a^c = (p_0^0 + p_1^1 + p_2^2 + p_3^3) = (-p_{00} + p_{11} + p_{22} + p_{33})$. Az egyenletek a lehetséges c értékekkel meghatározhatóak a következő alakokban:

$$\begin{aligned} c = 0: \\ k(p_0^0 + p_3^0) &= \frac{k}{2}(p_0^0 + p_1^1 + p_2^2 + p_3^3), \\ c = 1: \\ k(p_0^1 + p_3^1) &= 0, \\ c = 2: \\ k(p_0^2 + p_3^2) &= 0, \\ c = 3: \\ k(p_0^3 + p_3^3) &= \frac{k}{2}(p_0^0 + p_1^1 + p_2^2 + p_3^3). \end{aligned}$$

A felső indexek lehúzása után az egyenletek

$$\begin{aligned} c = 0: \\ k(p_{00} + p_{03}) &= -\frac{k}{2}(p_0^0 + p_1^1 + p_2^2 + p_3^3), \\ c = 1: \\ k(p_{01} + p_{13}) &= 0, \\ c = 2: \\ k(p_{02} + p_{23}) &= 0, \\ c = 3: \\ k(p_{03} + p_{33}) &= \frac{k}{2}(p_0^0 + p_1^1 + p_2^2 + p_3^3). \end{aligned}$$

A $c = 1$ és $c = 2$ feltételekből triviálisan következik az alábbi formulák:

$$\begin{aligned} p_{31} &= -p_{01} \\ p_{32} &= -p_{02}. \end{aligned}$$

A $c = 0$ és a $c = 3$ feltételek pedig az alábbi egyenletet eredményezik:

$$\begin{aligned} -p_{00} - p_{03} &= p_{33} + p_{03} = \frac{1}{2}p_a^a \\ -2p_{00} - 2p_{03} &= 2p_{33} + 2p_{03} = -p_{00} + p_{11} + p_{22} + p_{33}. \end{aligned}$$

Mindkét egyenlőségéből kifejezve p_{03} -at:

$$\begin{aligned} 2p_{03} &= -p_{00} - p_{11} - p_{22} - p_{33} \\ 2p_{03} &= -p_{00} + p_{11} + p_{22} - p_{33}. \end{aligned}$$

Összeadva, a két egyenletet p_{11} és p_{22} komponensek kiküszöbölhetőek, ami a

$$2p_{03} = -p_{00} - p_{33}$$

egyenlethez vezet. Most kivonva a p_{03} -ra felírt két egyenletet egymásból adódik a

$$p_{22} = -p_{11}$$

formula, amit visszahelyettesítve a p_{03} -ra kapott bármelyik egyenletbe következik az alábbi egyenlőség:

$$p_{03} = \frac{-1}{2}[p_{00} + p_{33}]$$

Összefoglalva a feltételeket, amiket c kiírásával kaptunk:

$$\boxed{\begin{aligned} p_{01} &= -p_{31} \\ p_{02} &= -p_{32} \\ p_{03} &= \frac{-1}{2}(p_{00} + p_{33}) \\ p_{11} &= -p_{22} \end{aligned}}.$$

Ezek tehát a polarizációs vektor komponensek, amelyek szimmetrikusak. A harmonikus koordinátaválasztás nem egyértelmű. Az ilyen koordináta rendszerek közötti transzformációk felhasználásával [9] a $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ koordinátákat kivéve minden más komponens nullává tehető. Felhasználva, hogy $p_{11} = -p_{22}$ és hogy $p_{12} = p_{21}$ a polarizációs vektorra a következő adódik:

$$p_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & p_{12} & 0 \\ 0 & p_{12} & -p_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Általában a p_{11} komponens a $+$, míg p_{12} komponens a $\times$ polarizáció. A teljes p_{ab} tenzor így felbontható a következő alakúra:

$$p_{ab} = p_{11} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + p_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ha z-tengely körüli térbeli forgatást hajtunk végre, akkor a mátrix ezen szerkezete nem változik meg, tekintsük most ezt a transzformációt. Ehhez bevezetjük a

$$p_{\pm} = p_{11} \mp ip_{12} \quad (20)$$

mennyiségeket, majd a forgásmátrixra ezek a komponensek

$$p'_{\pm} = e^{(\pm 2i\theta)} p_{\pm} \quad (21)$$

alakúvá válnak. Ebből látható, hogy a gravitációs hullámok (perturbáció) helicitása 2 [9]. Ez azért van, mert egy szimmetrikus kétindexes tenzor írja le. Arra jutottunk tehát, hogy létezik hullám megoldás, még pedig ezen gravitációs perturbáció fénysebességgel szinuszosan terjed. A gravitációs hullám alakja pedig

$$\Psi_{ab} = p_{ab} e^{(ik_j x^j)} + \bar{p}_{ab} e^{(-ik_j x^j)}. \quad (22)$$

2.4. Harmonikus koordináták

A gravitációs hullámok egyenleténél felhasználtam a harmonikus koordináta feltételt a hullámegyenlet kialakításában. Ezt a feltételt szeretném ismertetni részletesen. Legyen (M, g) egy n -dimenziós Riemann-sokaság. Az M nyitott U részhalmazán definiált $(x^1, \dots, x^n)$ koordináta harmonikus, ha minden egyes x^i koordinátafüggvény egy harmonikus függvény U -n. Vagyis megköveteljük, hogy

$$\square x^i = 0, \quad (23)$$

ahol: $\square = \partial_a \partial^a$ (gyenge térben, egyébként $\nabla_a \nabla^a$) d'Alembert operátor. A harmonikus koordináták egy másik, a (23)-as egyenlettel ekvivalens formulája:

$$\sqrt{-g} \square x^i = \partial_a (g^{ab} \sqrt{-g}), \quad (24)$$

Ennek bizonyításához először a Leibniz-szabályt alkalmazzuk:

$$\partial_a (g^{ab} \sqrt{-g}) = \sqrt{-g} \partial_a (g^{ai}) + g^{ab} \partial_a \sqrt{-g} \quad (25)$$

Az egyenlet két tag kiszámolása külön-külön tárgyalandó. Előbbinél az inverz metrikával dolgozunk (ezt választottuk), ezért a metrika és a determinánsának deriváltját is meg kell adni $\partial_a g^{ab}$ függvényeként.

$$g_{ai} g^{ij} = \delta_a^j \quad (26)$$

A (26)-os összefüggés variálásából (Leibniz-szabály):

$$g_{ai}\partial_c g^{ij} + g^{ij}\partial_c g_{ai} = 0.$$

Ebből kontrahálással (g_{bj}), majd átrendezéssel kapjuk a következő összefüggést:

$$\partial_c g_{ab} = -g_{ai}g_{bj}\partial_c g^{ij}. \quad (27)$$

A (25)-ös egyenlet második tagjának levezetéséhez felhasználjuk a determinánsok szorzástételét, a metrika inverzének definícióját, a deriválás definícióját, a logaritmusok azonosságát, illetve a sorfejtést.

$$\begin{aligned} \partial_a \sqrt{-g} &= -\frac{\partial_a g}{2\sqrt{-g}} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \partial_a \ln g \\ \partial_a \ln g &= \partial \ln(\det g_{ab}) = \ln(\det(g_{ab} + \delta g_{ab})) - \ln(\det(g_{ab})) = \ln \frac{\det(g_{ab} + \delta g_{ab})}{\det(g_{ab})} = \ln(\det(g^{ab})(\det(g_{ab} + \delta g_{ab}))) \\ &\quad \ln(\det(g^{ab})(g_{bc} + \delta g_{bc})) = \ln(\det(\delta_c^a + g^{ab}\delta g_{ab})) = \ln(1 + \text{Tr}(g^{ab}\delta g_{bc})) = g^{ab}\delta g_{ab}, \end{aligned}$$

azaz:

$$\partial_a \sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{ab} \partial_a g_{ab}.$$

Felhasználva az (28)-as egyenletet, a következő összefüggést kapjuk:

$$\partial_a \sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{ab} \partial_a g^{ab}. \quad (28)$$

A (25)-ös egyenlet végső alakjához a (27),(28)-as egyenletek behelyettesítésével jutunk el. (A szabad indexek átnevezésével.) Így adódik:

$$\begin{aligned} \partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}) &= \sqrt{-g}\partial_a g^{ab} + g^{ab}\partial_a \sqrt{-g} = -\sqrt{-g}g^{ai}g^{bj}\partial_a g_{ij} + g^{ab}\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{cd}\partial_a g_{cd} \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{2}(2g^{ai}g^{bj}\partial_a g^{ai} - g^{ab}g^{cd}\partial_a g^{cd}) / (a \rightarrow j) \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{2}(2g^{ij}g^{ab}\partial_j g^{ia} - g^{ab}g^{cd}\partial_a g^{cd}) \\ &= -g^{ab}\frac{\sqrt{-g}}{2}(2g^{ij}\partial_j g^{ia} - g^{cd}\partial_a g^{cd}) = -g^{ab}\frac{\sqrt{-g}}{2}(g^{ij}\partial_j g^{ia} + g^{ij}\partial_j g^{ia} - g^{cd}\partial_a g^{cd}) / (ij \rightarrow cd) \\ &= -g^{ab}\frac{\sqrt{-g}}{2}(g^{cd}\partial_d g^{ac} + g^{cd}\partial_d g^{ac} - g^{cd}\partial_a g^{cd}) = -g^{ab}g^{cd}\frac{\sqrt{-g}}{2}(\partial_d g^{ac} + \partial_d g^{ac} - \partial_a g^{cd}) \\ &= -g^{ab}g^{cd}\frac{\sqrt{-g}}{2}(\partial_c g^{ad} + \partial_d g^{ac} - \partial_a g^{cd}) = -g^{cd}\sqrt{-g}\Gamma_{cd}^b. \end{aligned}$$

Tehát a következő fontos egyenlőséghez jutottunk:

$$\partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}) = -g^{cd}\sqrt{-g}\Gamma_{cd}^b. \quad (29)$$

Az új eredmény segítségével a harmonikus koordináták harmadik, a gravitációs hullámok gyengetér közelítésénél tárgyalt alakjához el tudunk könnyedén jutni a (23)-as egyenlet ekvivalens átírása segítségével. Ezt a következőképpen tehetjük meg:

$$\begin{aligned} \square x^i &= g^{ab}\nabla_a \nabla_b x^i = g^{ab}(\partial_a \nabla_b x^i - \Gamma_{ab}^c \nabla_c x^i) = g^{ab}(\partial_a \partial_b x^i - \Gamma_{ab}^c \partial_c x^i) = g^{ab}\partial_a \partial_b x^i - g^{ab}\Gamma_{ab}^c \partial_c x^i \\ &= g^{ab}\partial_a \delta_b^i - g^{ab}\Gamma_{ab}^c \delta_c^i = 0 - g^{ab}\Gamma_{ab}^c \delta_c^i = -g^{ab}\Gamma_{ab}^i. \end{aligned}$$

$$\square x^i = -g^{ab}\Gamma_{ab}^i. \quad (30)$$

A (30)-as eredményből a (23)-as definíció felhasználásával látható, hogy a harmonikus koordinátáknak a harmadik, harmonikus koordináta feltételként használt alakja előáll:

$$g^{ab}\Gamma_{ab}^i = 0 \quad (31)$$

formában.

3. Nagyfrekvenciás gravitációs hullámok görbült téridőben

3.1. Bevezető

Nagyfrekvenciás gravitációs hullámokról beszélünk, ha a hullám (λ) hullámhossza sokkal kisebb, mint a téridő görbületi sugara (L) ($\frac{\lambda}{L} \ll 1$), amit geometriai optikai közelítésnek nevezünk. A nagyfrekvenciás gravitációs hullámok első rendben null geodetikusan terjednek, míg másod rendben megmutatható, hogyan hat vissza a hullám a téridőre [11]. Tekintsünk egy nagyfrekvenciás, kis amplitúdójú gravitációs hullámot, ami végigfut a téridő geometriáján. A perturbált metrika

$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \epsilon h_{ab} \quad (32)$$

alakú, amelyben g_{ab} a háttérmetrika, h_{ab} a háttérmetrikától való kis eltérést jelenti, továbbá ϵ egy kis paraméter, ami biztosítja, hogy a geometriának fluktuációi legyenek. A háttérmetrika változása $\partial g \sim \frac{g}{L}$, illetve a perturbáció változása $\partial h \sim \frac{h}{\lambda}$, valamint $\epsilon = \frac{\lambda}{L}$.

3.2. A perturbációt okozó h_{ab} metrika inverze

Ebben az alfejezetben bemutatjuk, hogy a h_{ab} inverze nem egyenlő az alsó indexes index felhúzottjával. Az alfejezetben kapott eredményeket csak az Einstein–Hilbert hatásnál fogjuk alkalmazni. A (32)-es egyenletből kiindulva:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ab} &= g_{ab} + \epsilon h_{ab}, \\ \tilde{g}^{ab} &= g^{ab} + \epsilon h^{ab}. \end{aligned}$$

Behelyettesítve a $\delta_a^c = \tilde{g}_{ab} \tilde{g}^{bc}$ összefüggésbe:

$$\begin{aligned} \delta_a^c &= \tilde{g}_{ab} \tilde{g}^{bc} = (g_{ab} + \epsilon h_{ab})(g^{bc} + \epsilon h^{bc}) \\ &= g_{ab} g^{bc} + \epsilon (g_{ab} h^{bc} + g^{bc} h_{ab}) + \epsilon^2 h_{ab} h^{bc} \\ &= \delta_a^c + \epsilon (g_{ab} h^{bc} + g^{bc} h_{ab}) + \epsilon^2 h_{ab} h^{bc} \\ 0 &= g_{ab} h^{bc} + g^{bc} h_{ab} + \epsilon h_{ab} h^{bc}. \end{aligned}$$

A h^{ab} korrekció kifejezése elsőrendig h_{ab} -vel:

$$\begin{aligned} g^{ad} g_{ab} h^{bc} &= -g^{bc} g^{ad} h_{ab} \\ \delta_b^d h^{bc} &= -g^{bc} g^{ad} h_{ab} \\ h_{(1)}^{dc} &= -g^{bc} g^{ad} h_{ab}. \end{aligned}$$

A h^{ab} korrekció kifejezése másodrendig h_{ab} -vel:

$$\begin{aligned} (g_{ab} + \epsilon h_{ab}) h^{bc} &= -g^{bc} h_{ab} \\ \tilde{g}_{ab} h^{bc} &= -g^{bc} h_{ab} \\ \tilde{g}^{ad} \tilde{g}_{ab} h^{bc} &= -\tilde{g}^{ad} g^{bc} h_{ab} \\ \delta_b^d h^{bc} &= -\tilde{g}^{ad} g^{bc} h_{ab} \\ h^{dc} &= -\tilde{g}^{ad} g^{bc} h_{ab} \\ h^{dc} &= -(g^{ad} + \epsilon h^{ad}) g^{bc} h_{ab} \\ h_{(2)}^{dc} &= -g^{ad} g^{bc} h_{ab} - \epsilon h^{ad} g^{bc} h_{ab}. \end{aligned}$$

A második tagba, mivel elsőrendű, elég a h^{ad} vezető rendű járulékát helyettesíteni, azaz:

$$\begin{aligned} h^{dc} &= h_{(1)}^{dc} + \epsilon h_{(2)}^{dc}, \\ h_{(1)}^{dc} &= -g^{bc} g^{ad} h_{ab}, \\ h_{(2)}^{dc} &= -h_{(1)}^{ad} g^{bc} h_{ab} = g^{ia} g^{jb} g^{bc} h_{ab} h_{ij}. \end{aligned}$$

Tehát:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ab} &= g_{ab} + \epsilon h_{ab} \\ \tilde{g}^{ab} &= g^{ab} + \epsilon h_{(1)}^{ab} + \epsilon^2 h_{(2)}^{ab}. \end{aligned}$$

3.3. Perturbált Ricci-tenzor

Továbbiakban szükségünk lesz, hogy bevezessük a perturbált téridőn a kovariáns deriválást [12], melyet a következőképpen fogunk definiálni:

$$\tilde{\nabla}_a f = \nabla_a f, \quad (33)$$

$$\tilde{\nabla}_a V^b = \nabla_a V^b + C_{ad}^b V^d, \quad (34)$$

$$\tilde{\nabla}_a \omega_b = \nabla_a \omega_b - C_{ab}^d \omega_d, \quad (35)$$

$$\tilde{\nabla}_a T_{c_1, \dots, c_l}^{b_1, \dots, b_k} = \nabla_a T_{c_1, \dots, c_l}^{b_1, \dots, b_k} + \sum_i C_{ad}^{b_1} T_{c_1, \dots, c_l}^{b_1, \dots, d, \dots, b_k} - \sum_j C_{ac_j}^d T_{c_1, \dots, d, \dots, c_l}^{b_1, \dots, b_k}, \quad (36)$$

ahol $\tilde{\nabla}_a \tilde{g}_{bc} = 0$, $\nabla_a g_{bc} = 0$, V^b egy tetszőleges vektor, ω_b egy tetszőleges 1-forma és C_{bc}^a alsó indexeiben szimmetrikus tenzor, melyet

$$C_{ab}^c = \frac{1}{2} \tilde{g}^{ci} [\nabla_a \tilde{g}_{bi} + \nabla_b \tilde{g}_{ai} - \nabla_i \tilde{g}_{ab}] \quad (37)$$

módon definiálunk.

Bizonyítás:

Legyen g_{ab} a metrika, ekkor létezik olyan ∇_a deriváló operátor, mely kielégíti a $\nabla_a g_{bc} = 0$ egyenlőséget. Ekkor:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C_{ab}^d g_{dc} - C_{ac}^d g_{db} \\ 0 &= \nabla_b g_{ca} = \tilde{\nabla}_b g_{ca} - C_{ba}^d g_{dc} - C_{bc}^d g_{da} \\ 0 &= -\nabla_c g_{ab} = -\tilde{\nabla}_c g_{ab} + C_{ca}^d g_{db} + C_{cb}^d g_{da}. \end{aligned}$$

Összeadva az egyenleteket, majd átrendezve adódik, hogy:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a g_{bc} + \tilde{\nabla}_b g_{ca} - \tilde{\nabla}_c g_{ab} &= 2C_{ab}^d g_{dc} \\ C_{ab}^d &= \frac{1}{2} g^{dc} (\tilde{\nabla}_a g_{bc} + \tilde{\nabla}_b g_{ca} - \tilde{\nabla}_c g_{ab}) \end{aligned}$$

átalakítás:

$$\begin{aligned} C_{ab}^c &= \frac{1}{2} (g^{ci} + \epsilon h^{ci}) [\nabla_a (g_{bi} + \epsilon h_{bi}) + \nabla_b (g_{ai} + \epsilon h_{ai}) - \nabla_i (g_{ab} + \epsilon h_{ab})] \\ &= \frac{1}{2} (g^{ci} + \epsilon h^{ci}) [\nabla_a g_{bi} + \nabla_a (\epsilon h_{bi}) + \nabla_b g_{ai} + \nabla_b (\epsilon h_{ai}) - \nabla_i g_{ab} - \nabla_i (\epsilon h_{ab})] \\ &= \frac{1}{2} ((g^{ci} + \epsilon h^{ci}) [\nabla_a (\epsilon h_{bi}) + \nabla_b (\epsilon h_{ai}) - \nabla_i (\epsilon h_{ab})]), \end{aligned}$$

ahol $|h_{ab}| \ll 1$, $|\nabla_c h_{ab}| \ll 1$, $|\nabla_c \nabla_d h_{ab}| \ll 1$.

Amennyiben $\nabla = \partial$ akkor a $C_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a$ Christoffel-szimbólummal lenne egyenlő. Általános relativitáselméletben már megmutatták, hogy a Riemann-tenzor a kovariáns deriválás nem kommutálásának mértéke. Ezért a perturbált Riemann-tenzort is így fogjuk definiálni. Tekintsük a $[\nabla_c, \nabla_d]V^a$ kommutátort, ahogy egy tetszőleges V^a vektorra hat. A (34) illetve (36)-os egyenletek felhasználásával [12] a következő alakot kapjuk a perturbált Riemann-tenzorra:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d V^a &= \nabla_c (\tilde{\nabla}_d V^a) - C_{cd}^e (\tilde{\nabla}_e V^a) + C_{ce}^a (\tilde{\nabla}_d V^e) \\ &= \nabla_c (\nabla_d V^a + C_{de}^a V^e) - C_{cd}^e (\nabla_e V^a + C_{ef}^a V^f) + C_{ce}^a (\nabla_d V^a + C_{df}^a V^f) \\ &= \nabla_c \nabla_d V^a + \nabla_c C_{de}^a V^e + C_{de}^a \nabla_c V^e - C_{cd}^e \nabla_e V^a - C_{cd}^e C_{ef}^a V^f + C_{ce}^a \nabla_d V^a + C_{ce}^a C_{df}^e V^f \\ \tilde{\nabla}_d \tilde{\nabla}_c V^a &= \nabla_d (\tilde{\nabla}_c V^a) - C_{dc}^e (\tilde{\nabla}_e V^a) + C_{de}^a (\tilde{\nabla}_c V^e) \\ &= \nabla_d (\nabla_c V^a + C_{ce}^a V^e) - C_{dc}^e (\nabla_e V^a + C_{ef}^a V^f) + C_{de}^a (\nabla_c V^a + C_{cf}^a V^f) \\ &= \nabla_d \nabla_c V^a + \nabla_d C_{ce}^a V^e + C_{ce}^a \nabla_d V^e - C_{dc}^e \nabla_e V^a - C_{dc}^e C_{ef}^a V^f + C_{ce}^a \nabla_c V^a + C_{de}^a C_{cf}^e V^f \\ &\quad - (\tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d - \tilde{\nabla}_d \tilde{\nabla}_c) V^a \\ &= \nabla_c \nabla_d V^a + \nabla_c C_{de}^a V^e + C_{de}^a \nabla_c V^e - C_{cd}^e \nabla_e V^a - C_{cd}^e C_{ef}^a V^f + C_{ce}^a \nabla_d V^a + C_{ce}^a C_{df}^e V^f \\ &\quad - \nabla_d \nabla_c V^a - \nabla_d C_{ce}^a V^e - C_{ce}^a \nabla_d V^e + C_{dc}^e \nabla_e V^a + C_{dc}^e C_{ef}^a V^f - C_{ce}^a \nabla_c V^a - C_{de}^a C_{cf}^e V^f. \end{aligned}$$

Felhasználva az alsó indexes szimmetriát és az egyszerűsítéseket elvégezve

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d - \tilde{\nabla}_d \tilde{\nabla}_c) V^a &= (\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c) V^a + (\nabla_c C_{de}^a - \nabla_d C_{ce}^a) V^e + (C_{ce}^a C_{df}^e - C_{de}^a C_{cf}^e) V^f \\ &= \tilde{R}_{ecd}^a V^e = R_{ecd}^a V^e + 2\nabla_{[c} C_{d]e}^a V^e + 2C_{[c|f}^a C_{|d]e}^f V^e \end{aligned}$$

adódik. Ebből nyert Riemann-tenzor:

$$\tilde{R}_{ecd}^a = R_{ecd}^a + 2\nabla_{[c}C_{d]e}^a + 2C_{[c|f}^aC_{|d]e}^f. \quad (38)$$

Általános relativitáselméletből ismert, hogy a Ricci-tenzor előállítható a Riemann-tenzorból spúrképzéssel. ($R_{ed} = R_{ead}$).

$$\tilde{R}_{ed} = R_{ed} + 2\nabla_{[a}C_{d]e}^a + 2C_{[a|f}^aC_{|d]e}^f \quad (39)$$

Ebben a számolásban $\sigma(1), \sigma(\epsilon), \sigma(\epsilon^2)$ a rendeket fogja jelölni ϵ -ban.

Először a $C_{af}^aC_{de}^f$ algebrai tagjait kibontjuk:

$$\begin{aligned} 4C_{af}^aC_{de}^f &= (g^{ak} + \epsilon h^{ak})[\nabla_a \epsilon h_{fk} + \nabla_f \epsilon h_{ak} - \nabla_k \epsilon h_{af}] \cdot (g^{fm} + \epsilon h^{fm})[\nabla_d \epsilon h_{em} + \nabla_e \epsilon h_{dm} - \nabla_m \epsilon h_{de}] \\ &= \epsilon^2 (g^{ak} + h^{ak})[\nabla_f h_{ak} + \nabla_a h_{fk} - \nabla_k h_{af}] \cdot (g^{fm} + h^{fm})[\nabla_d h_{em} + \nabla_e h_{dm} - \nabla_m h_{de}] \\ &= \epsilon^2 g^{ak} g^{fm} [\nabla_f h_{ak} + \nabla_a h_{fk} - \nabla_k h_{af}] \cdot [\nabla_d h_{em} + \nabla_e h_{dm} - \nabla_m h_{de}]. \end{aligned}$$

Felírva a harmadrendű járulékokat:

$$\begin{aligned} 4C_{af}^aC_{de}^f(\sigma^3) &= \epsilon^3 \{g^{ak} h^{fm} [\nabla_a h_{fk} + \nabla_f h_{ak} - \nabla_k h_{af}] [\nabla_d h_{em} + \nabla_e h_{dm} - \nabla_m h_{de}] + g^{fm} h^{ak} [\nabla_a h_{fk} \\ &\quad + \nabla_f h_{ak} - \nabla_k h_{af}] [\nabla_d h_{em} + \nabla_e h_{dm} - \nabla_m h_{de}]\} \\ &= \epsilon^3 \{h^{fm} [\nabla_a h_f^a + \nabla_f h - \nabla^a h_{af}] [\nabla_d h_{em} + \nabla_e h_{dm} - \nabla_m h_{de}] \\ &\quad + h^{ak} [\nabla_a h_{fk} + \nabla_f h_{ak} - \nabla_k h_{af}] [\nabla_d h_e^f + \nabla_e h_d^f - \nabla^f h_{de}]\} \end{aligned}$$

Felírva ϵ -ban nullad-,első illetve másodrendű tagokat:

$$\begin{aligned} 4C_{af}^aC_{de}^f\sigma(1) &= 0 \\ 4C_{af}^aC_{de}^f\sigma(\epsilon) &= 0 \\ 4C_{af}^aC_{de}^f\sigma(\epsilon^2) &= \epsilon^2 g^{ak} g^{fm} [\nabla_f h_{ak} + \nabla_a h_{fk} - \nabla_k h_{af}] \cdot [\nabla_d h_{em} + \nabla_e h_{dm} - \nabla_m h_{de}]. \end{aligned}$$

A $C_{ef}^aC_{ad}^f$ algebrai alakja:

$$\begin{aligned} 4C_{ef}^aC_{ad}^f &= (g^{ak} + \epsilon h^{ak})[\nabla_e \epsilon h_{fk} + \nabla_f \epsilon h_{ek} - \nabla_k \epsilon h_{ef}] \cdot (g^{fm} + \epsilon h^{fm})[\nabla_a \epsilon h_{dm} + \nabla_d \epsilon h_{am} - \nabla_m \epsilon h_{ad}] \\ &= \epsilon^2 (g^{ak} + h^{ak})[\nabla_e h_{fk} + \nabla_f h_{ek} - \nabla_k h_{ef}] \cdot (g^{fm} + h^{fm})[\nabla_a h_{dm} + \nabla_d h_{am} - \nabla_m h_{ad}] \\ &= \epsilon^2 g^{ak} g^{fm} [\nabla_e h_{fk} + \nabla_f h_{ek} - \nabla_k h_{ef}] \cdot [\nabla_a h_{dm} + \nabla_d h_{am} - \nabla_m h_{ad}]. \end{aligned}$$

Felírva a harmadrendű járulékat:

$$\begin{aligned} 4C_{ef}^aC_{ad}^f(\sigma^3) &= \epsilon^3 \{g^{ak} h^{fm} [\nabla_e h_{fk} + \nabla_f h_{ek} - \nabla_k h_{ef}] [\nabla_d h_{am} + \nabla_a h_{dm} - \nabla_m h_{da}] + g^{fm} h^{ak} [\nabla_e h_{fk} \\ &\quad + \nabla_f h_{ek} - \nabla_k h_{ef}] [\nabla_d h_{am} + \nabla_a h_{dm} - \nabla_m h_{da}]\} \\ &= \epsilon^3 \{h^{fm} [\nabla_e h_f^a + \nabla_f h_e^a - \nabla^a h_{ef}] [\nabla_d h_{am} + \nabla_a h_{dm} - \nabla_m h_{da}] \\ &\quad + h^{ak} [\nabla_e h_{fk} + \nabla_f h_{ek} - \nabla_k h_{ef}] [\nabla_d h_a^f + \nabla_a h_d^f - \nabla^f h_{da}]\} \end{aligned}$$

ϵ -t tartalmazó tagok második rendig:

$$\begin{aligned} 4C_{ef}^aC_{ad}^f\sigma(1) &= 0 \\ 4C_{ef}^aC_{ad}^f\sigma(\epsilon) &= 0 \\ 4C_{ef}^aC_{ad}^f\sigma(\epsilon^2) &= \epsilon^2 g^{ak} g^{fm} [\nabla_e h_{fk} + \nabla_f h_{ek} - \nabla_k h_{ef}] \cdot [\nabla_a h_{dm} + \nabla_d h_{am} - \nabla_m h_{ad}]. \end{aligned}$$

Összevonva a másodrendű tagokat:

$$\begin{aligned} &C_{af}^aC_{de}^f\sigma(\epsilon^2) - C_{ef}^aC_{ad}^f\sigma(\epsilon^2) \\ &= \frac{\epsilon^2}{4} [g^{ak} g^{fm} [[\nabla_f h_{ak} + \nabla_a h_{fk} - \nabla_k h_{af}] \cdot [\nabla_d h_{em} + \nabla_e h_{dm} - \nabla_m h_{de}] - [\nabla_e h_{fk} + \nabla_f h_{ek} - \nabla_k h_{ef}] \cdot \\ &\quad [\nabla_a h_{dm} + \nabla_d h_{am} - \nabla_m h_{ad}]] \\ &= \frac{\epsilon^2}{4} [[\nabla_f h + \nabla_a h_f^a - \nabla^a h_{af}] \cdot [\nabla_d h_e^f + \nabla_e h_d^f - \nabla^f h_{de}] - [\nabla_e h_f^a + \nabla_f h_e^a - \nabla^a h_{ef}] \cdot [\nabla_a h_d^f + \nabla_d h_a^f - \nabla^f h_{ad}]] \\ &= \frac{\epsilon^2}{4} [\nabla^f h (\nabla_d h_{ef} + \nabla_e h_{fd} - \nabla_f h_{de}) + 2\nabla^a h_e^f (\nabla_a h_{fd} - \nabla_f h_{da}) - \nabla_d h^a f \nabla_e h_{af}]. \end{aligned}$$

Összevonva a harmadrendű tagokat:

$$\begin{aligned}
& C_{af}^a C_{de}^f(\sigma^3) - C_{ef}^a C_{ad}^f(\sigma^3) \\
&= \frac{1}{4} h^{fm} [\nabla_a h_f^a + \nabla_f h - \nabla^a h_{af}] [\nabla_d h_{em} + \nabla_e h_{dm} - \nabla_m h_{de}] \\
&+ \frac{1}{4} h^{ak} [\nabla_a h_{fk} + \nabla_f h_{ak} - \nabla_k h_{af}] [\nabla_d h_e^f + \nabla_e h_d^f - \nabla^f h_{de}] - \frac{1}{4} h^{fm} [\nabla_e h_f^a + \nabla_f h_e^a - \nabla^a h_{ef}] [\nabla_d h_{am} \\
&+ \nabla_a h_{dm} - \nabla_m h_{da}] - \frac{1}{4} h^{ak} [\nabla_e h_{fk} + \nabla_f h_{ek} - \nabla_k h_{ef}] [\nabla_d h_a^f + \nabla_a h_d^f - \nabla^f h_{da}] \\
&= \frac{1}{4} h^{fm} [\nabla_a h_f^a + \nabla_f h - \nabla^a h_{af}] [\nabla_d h_{em} + \nabla_e h_{dm} - \nabla_m h_{de}] - [\nabla_e h_f^a + \nabla_f h_e^a - \nabla^a h_{ef}] [\nabla_d h_{am} + \nabla_a h_{dm} - \nabla_m h_{da}] \\
&+ \frac{1}{4} h^{ak} [\nabla_a h_{fk} + \nabla_f h_{ak} - \nabla_k h_{af}] [\nabla_d h_e^f + \nabla_e h_d^f - \nabla^f h_{de}] - [\nabla_e h_{fk} + \nabla_f h_{ek} - \nabla_k h_{ef}] [\nabla_d h_a^f + \nabla_a h_d^f - \nabla^f h_{da}] \\
&= \frac{1}{2} h^{fm} [\nabla_{[a} h_{|f}^a \nabla_{d|} h_{e|m} + \nabla_{[a} h_{|f}^a \nabla_{e|} h_{dm} - \nabla_{[a} h_{|f}^a \nabla_m h_{d|e]} + \frac{1}{2} \nabla_f h \nabla_d h_{em} + \frac{1}{2} \nabla_f h \nabla_e h_{dm} - \frac{1}{2} \nabla_f h \nabla_m h_{de} \\
&- \frac{1}{2} \nabla_f h_e^a \nabla_d h_{am} - \frac{1}{2} \nabla_f h_e^a \nabla_a h_{dm} + \frac{1}{2} \nabla_f h_e^a \nabla_m h_{da} - \nabla^a h_{[a|f} \nabla_{d|} h_{e|m} - \nabla^a h_{[a|f} \nabla_{e|} h_{dm} + \nabla^a h_{[a|f} \nabla_m h_{d|e]} \\
&+ \frac{1}{2} h^{ak} [\nabla_{[a} h_{|f}^a \nabla_{d|} h_{e|}^f + \nabla_{[a} h_{|f}^a \nabla_{e|} h_d^f - \nabla_{[a} h_{|f}^a \nabla^f h_{d|e]} + \nabla_f h_{[a|k} \nabla_{d|} h_{e|}^f + \nabla_f h_{[a|k} \nabla_{e|} h_d^f - \nabla_f h_{[a|k} \nabla^f h_{d|e]} \\
&- \nabla_k h_{[a|f} \nabla_{d|} h_{e|}^f - \nabla_k h_{[a|f} \nabla_{e|} h_d^f + \nabla_k h_{[a|f} \nabla^f h_{d|e]}]
\end{aligned}$$

Tekintem most a ∇_a -t tartalmazó tagokat:

$$\begin{aligned}
2\nabla_a C_{de}^a &= \nabla_a \{ (g^{af} + \epsilon h^{af}) [\nabla_d (g_{ef} + \epsilon h_{ef}) + \nabla_e (g_{df} + \epsilon h_{df}) - \nabla_f (g_{de} + \epsilon h_{de})] \} \\
&= \epsilon \nabla_a g^{af} + \epsilon h^{af} [\nabla_d h_{ef} + \nabla_e h_{df} - \nabla_f h_{de}] \} \\
&= \epsilon^2 \nabla_a \{ h^{af} [\nabla_d h_{ef} + \nabla_e h_{df} - \nabla_f h_{de}] \} + \epsilon (g^{af} + \epsilon h^{af}) \nabla_a \{ [\nabla_d h_{ef} + \nabla_e h_{df} - \nabla_f h_{de}] \}.
\end{aligned}$$

Felírva ϵ -t második rendig:

$$\begin{aligned}
2\nabla_a C_{de}^a \sigma(1) &= 0 \\
2\nabla_a C_{de}^a \sigma(\epsilon) &= \epsilon g^{af} [\nabla_a \nabla_d h_{ef} + \nabla_a \nabla_e h_{df} - \nabla_a \nabla_f h_{de}] \\
2\nabla_a C_{de}^a \sigma(\epsilon^2) &= \epsilon^2 [h^{af} \nabla_a \{ [\nabla_d h_{ef} + \nabla_e h_{df} - \nabla_f h_{de}] \} + \nabla_a \{ h^{af} [\nabla_d h_{ef} + \nabla_e h_{df} - \nabla_f h_{de}] \}].
\end{aligned}$$

Kifejtve a ∇_d -t tartalmazó tagokat:

$$\begin{aligned}
2\nabla_d C_{ae}^a &= \nabla_d \{ (g^{af} + \epsilon h^{af}) [\nabla_a (g_{ef} + \epsilon h_{ef}) + \nabla_e (g_{af} + \epsilon h_{af}) - \nabla_f (g_{ae} + \epsilon h_{ae})] \} \\
&= \epsilon \nabla_d \{ (g^{af} + \epsilon h^{af}) [\nabla_a h_{ef} + \nabla_e h_{af} - \nabla_f h_{ae}] \} \\
&= \epsilon^2 \nabla_d h^{af} [\nabla_a h_{ef} + \nabla_e h_{af} - \nabla_f h_{ae}] \} + \epsilon (g^{af} + \epsilon h^{af}) \nabla_d \{ [\nabla_a h_{ef} + \nabla_e h_{af} - \nabla_f h_{ae}] \}.
\end{aligned}$$

Kifejtve ϵ -t második rendig:

$$\begin{aligned}
2\nabla_d C_{ae}^a \sigma(1) &= 0 \\
2\nabla_d C_{ae}^a \sigma(\epsilon) &= \epsilon g^{af} [\nabla_d \{ \nabla_a h_{ef} + \nabla_d \nabla_e h_{af} - \nabla_d \nabla_f h_{ae} \}] \\
2\nabla_d C_{ae}^a \sigma(\epsilon^2) &= \epsilon^2 [h^{af} \nabla_d \{ [\nabla_a h_{ef} + \nabla_e h_{af} - \nabla_f h_{ae}] \} + \nabla_d \{ h^{af} [\nabla_a h_{ef} + \nabla_e h_{af} - \nabla_f h_{ae}] \}].
\end{aligned}$$

Első rendek különbsége a ∇_a, ∇_b -t tartalmazó tagoknak:

$$\nabla_a C_{de}^a \sigma(\epsilon) - \nabla_d C_{ae}^a \sigma(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2} g^{af} (\nabla_a \nabla_e h_{df} + \nabla_a \nabla_d h_{ef} - \nabla_a \nabla_f h_{de} - \nabla_d \nabla_e h_{af}).$$

Második rendek különbsége a ∇_a, ∇_b -t tartalmazó tagoknak:

$$\begin{aligned}
& \nabla_a C_{de}^a \sigma(\epsilon^2) - \nabla_d C_{ae}^a \sigma(\epsilon^2) \\
&= \frac{\epsilon^2}{2} [h^{af} \nabla_d \nabla_f h_{ae} - h^{af} \nabla_d \nabla_a h_{ef} - h^{af} \nabla_d \nabla_e h_{af} + \nabla_d h^{af} \nabla_f h_{ae} - \nabla_d h^{af} \nabla_a h_{ef} - \nabla_d h^{af} \nabla_e h_{af} \\
&- h^{af} \nabla_a \nabla_f h_{de} + h^{af} \nabla_a \nabla_d h_{ef} + h^{af} \nabla_a \nabla_e h_{df} + \nabla_a h^{af} \nabla_d h_{ef} + \nabla_a h^{af} \nabla_e h_{df} - \nabla_a h^{af} \nabla_f h_{de}] \\
&= \frac{\epsilon^2}{2} [h^{af} (\nabla_d \nabla_f h_{ae} + \nabla_a \nabla_e h_{df} - \nabla_d \nabla_e h_{af} - \nabla_a \nabla_f h_{de}) - \nabla_d h^{af} \nabla_e h_{af} + \nabla_a h^{af} (\nabla_d h_{ef} + \nabla_e h_{df} - \nabla_f h_{de})].
\end{aligned}$$

A perturbált Ricci-tenzor végső alakja:

$$\begin{aligned}
R_{ed}^{(0)} &= R_{ed} \\
R_{ed}^{(1)} &= \frac{\epsilon}{2} \cdot g^{af} (\nabla_a \nabla_e h_{df} + \nabla_a \nabla_d h_{ef} - \nabla_a \nabla_f h_{de} - \nabla_d \nabla_e h_{af}) \\
R_{ed}^{(2)} &= \frac{\epsilon^2}{2} [\frac{1}{2} (\nabla_d h^{af} \nabla_e h_{af}) + \nabla^a h_e^f (\nabla_a h_{df} - \nabla_f h_{ad}) + (\frac{1}{2} \nabla^f h - \nabla_a h^{af}) (\nabla_d h_{ef} + \nabla_e h_{df} - \nabla_f h_{de}) \\
&+ h^{af} (\nabla_d \nabla_f h_{ae} + \nabla_a \nabla_e h_{df} - \nabla_d \nabla_e h_{af} - \nabla_a \nabla_f h_{de})] \\
&R_{ed}^{(3)} \\
&= \frac{\epsilon^3}{2} [h^{fm} [\nabla_{[a} h_{|f}^a \nabla_{d|} h_{e|m} + \nabla_{[a} h_{|f}^a \nabla_{e|} h_{dm} - \nabla_{[a} h_{|f}^a \nabla_m h_{d|e]} + \frac{1}{2} \nabla_f h \nabla_d h_{em} + \frac{1}{2} \nabla_f h \nabla_e h_{dm} - \frac{1}{2} \nabla_f h \nabla_m h_{de}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\nabla_f h_e^a \nabla_d h_{am} - \frac{1}{2}\nabla_f h_e^a \nabla_a h_{dm} + \frac{1}{2}\nabla_f h_e^a \nabla_m h_{da} - \nabla^a h_{[a|f|} \nabla_{d|} h_{e]m} - \nabla^a h_{[a|f|} \nabla_{e]} h_{dm} + \nabla^a h_{[a|f|} \nabla_m h_{d|e]} \\
& + \frac{\epsilon^3}{2} h^{ak} [\nabla_{[a} h_{|fk|} \nabla_{d|} h_{e]}^f + \nabla_{[a} h_{|fk|} \nabla_{e]} h_d^f - \nabla_{[a} h_{|fk|} \nabla^f h_{d|e]} + \nabla_f h_{[a|k|} \nabla_{d|} h_{e]}^f + \nabla_f h_{[a|k|} \nabla_{e]} h_d^f - \nabla_f h_{[a|k|} \nabla^f h_{d|e]} \\
& - \nabla_k h_{[a|f|} \nabla_{d|} h_{e]}^f - \nabla_k h_{[a|f|} \nabla_{e]} h_d^f + \nabla_k h_{[a|f|} \nabla^f h_{d|e]}]
\end{aligned}$$

Általános relativitáselméletből ismert Ricci-tenzor a következő alakú:

$$R_{bc} = R_{bac}^a = \partial_a \Gamma_{bc}^a - \partial_c \Gamma_{ab}^a + \Gamma_{ai}^a \Gamma_{bc}^i - \Gamma_{ci}^a \Gamma_{ab}^i.$$

Itt a vezető rend $\partial_a \Gamma_{bc}^a$ alakú. Γ_{bc}^a definíció szerint:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ai} (\partial_b g_{ai} + \partial_a g_{bi} - \partial_i g_{ab}).$$

Ebből adódóan a Ricci-tenzor vezető rendje $g^{-1} \partial^2 g$ alakú lesz. Felhasználva a fentebb található közelítést, melyet ∂g -re feltettünk, a következő nagyságrendet kapjuk $\partial^2 g \sim \frac{1}{L^2} = \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} = \sigma(1)$. A magasabb rendű tagokat táblázatban rögzítem, kiszámolásuk a fentebb említettek alapján történik. A $\epsilon^3 R_{ed}^{(3+)}$ -s tagok $\sigma(\epsilon)$ nagyságrendűek.

Kifejezés	Szimbolikus formula	Nagyságrend
$R_{ed}^{(0)}$	$g^{-1} \partial^2 g$	$\frac{1}{L^2} = \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} = O(1)$
$\epsilon R_{ed}^{(1)}$	$g^{-1} \partial^2 (\epsilon h)$	$\frac{\epsilon}{\lambda^2} = O(\frac{1}{\epsilon})$
$\epsilon^2 R_{ed}^{(2)}$	$\epsilon h g^{-2} \partial^2 (\epsilon h)$	$\frac{\epsilon^2}{\lambda^2} = O(1)$
$\epsilon^3 R_{ed}^{(3+)}$	$\epsilon^2 h^2 g^{-3} \partial^2 (\epsilon h)$	$\frac{\epsilon^3}{\lambda^2} = O(\epsilon)$

A táblázatból kiolvasható, hogy a háttér görbületének változása lassabb, mint a perturbáció által okozott változások, emiatt a Ricci-tenzor sorfejtésében rendcsúszás történik.

3.4. Perturbált Riemann-tenzor

Akárcsak a Ricci-tenzor, a Riemann-tenzor is felírható a következő perturbált alakban:

$$\tilde{R}_{ecd}^a(g_{ij} + \epsilon h_{ij}) = R_{ecd}^a{}^{(0)} + \epsilon R_{ecd}^a{}^{(1)} + \epsilon^2 R_{ecd}^a{}^{(2)} + \epsilon^3 R_{ecd}^a{}^{(3+)}.$$

A Riemann-tenzor elsőrendig:

$$\begin{aligned} R_{ecd}^a{}^{(0)} &= R_{ecd}^a(g_{ij}) \\ R_{ecd}^a{}^{(1)} &= \nabla_c C_{de}^a - \nabla_d C_{ce}^a \\ \nabla_c C_{de}^a &= \nabla_c \frac{1}{2}(g^{ai} + \epsilon h^{ai})[\nabla_d(g_{ei} + \epsilon h_{ei}) + \nabla_e(g_{di} + \epsilon h_{di}) - \nabla_i(g_{ed} + \epsilon h_{ed})] \\ &= \nabla_c \frac{1}{2}(\epsilon g^{ai} + \epsilon^2 h^{ai})[\nabla_d h_{ei} + \nabla_e h_{di} - \nabla_i h_{ed}] \\ &= \nabla_c \frac{1}{2}\epsilon g^{ai}[\nabla_d h_{ei} + \nabla_e h_{di} - \nabla_i h_{ed}] = \nabla_c \frac{1}{2}(\nabla_d h_e^a + \nabla_e h_d^a - \nabla^a h_{ed}). \end{aligned}$$

Hasonló számolással adódik $\nabla_d C_{ce}^a$ -re:

$$\nabla_d C_{ce}^a = \nabla_d \frac{1}{2}(\nabla_c h_e^a + \nabla_e h_c^a - \nabla^a h_{ce}).$$

Képezve $\nabla_c C_{de}^a - \nabla_d C_{ce}^a$ különbséget:

$$\begin{aligned} \nabla_c C_{de}^a - \nabla_d C_{ce}^a &= \frac{1}{2}((\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c)h_e^a + \nabla_c \nabla_e h_d^a - \nabla_d \nabla_e h_c^a + \nabla_d \nabla^a h_{ce} - \nabla_c \nabla^a h_{de}) \\ &= \frac{1}{2}(\nabla_c \nabla_e h_d^a - \nabla_d \nabla_e h_c^a + \nabla_d \nabla^a h_{ce} - \nabla_c \nabla^a h_{de} - R_{icd}^a h_e^i + R_{ecd}^i h_i^a). \end{aligned}$$

Összefoglalva a teljes Riemann-tenzort

$$\begin{aligned} R_{ecd}^a{}^{(0)} &= R_{ecd}^a \\ R_{ecd}^a{}^{(1)} &= \frac{1}{2}(\nabla_c \nabla_e h_d^a - \nabla_d \nabla_e h_c^a + \nabla_d \nabla^a h_{ce} - \nabla_c \nabla^a h_{de} - R_{icd}^a h_e^i + R_{ecd}^i h_i^a) \end{aligned}$$

adódik. A vezető rend itt is az első rend lesz, melynek $\sigma(\frac{1}{\epsilon})$ a nagyságrendje. A Riemann-tenzor második rendje $\sigma(1)$, míg a magasabb tagok $\sigma(\epsilon)$ nagyságrendűek. Továbbá az első rendek lesznek mértékinvariánsak a nagyfrekvenciás közelítésben. Hullámok hiányában ($h_{ed} = 0$) a Riemann-tenzor $\tilde{R}_{ecd}^a{}^{(0)}$ értéket vesz fel. Ha gravitációs hullámok vannak jelen, a téridő teljes görbülete óriási mértékben megnő a domináns $\epsilon \tilde{R}_{ecd}^a{}^{(1)}$ kifejezésig. $\tilde{R}_{ecd}^a{}^{(0)}$ ugyanazokat a szimmetriákat elégíti ki, mint $\epsilon \tilde{R}_{ecd}^a{}^{(1)}$. Az elsőrendű Riemann-tenzor kielégíti a következő tulajdonságokat:

$$\begin{aligned} R_{ecd}^a{}^{(1)} &= -R_{edc}^a{}^{(1)}, \\ R_{ecd}^a{}^{(1)} &= -R_{dae}^c{}^{(1)}, \\ R_{ecd}^a{}^{(1)} + R_{cde}^a{}^{(1)} + R_{dec}^a{}^{(1)} &= 0, \\ \nabla_c R_{gae}^f{}^{(1)} + \nabla_e R_{gca}^f{}^{(1)} + \nabla_a R_{gec}^f{}^{(1)} &\doteq \epsilon^2. \end{aligned}$$

A $\doteq$ -el jelölt azonosságot Bianchi-azonosságnak nevezzük.

Bizonyítás:

$$\tilde{R}_{[abc]}^i = 0$$

továbbá, ha

$$\begin{aligned} A_{abcd} &= (\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b - \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a) \tilde{\nabla}_c \omega_d = -\tilde{R}_{cab}^i \tilde{\nabla}_i \omega_d - \tilde{R}_{dab}^i \tilde{\nabla}_c \omega_i, \\ B_{abcd} &= \tilde{\nabla}_a (\tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_c - \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_b) \omega_i = \tilde{\nabla}_a (-\tilde{R}_{dbc}^i \omega_i) = -\omega_i \tilde{\nabla}_a \tilde{R}_{dbc}^i - \tilde{R}_{dbc}^i \tilde{\nabla}_a \omega_i, \end{aligned}$$

akkor

$$\begin{aligned} A_{[abc]d} &= B_{[abc]d} \\ -\tilde{R}_{[cab]}^i \tilde{\nabla}_i \omega_d - \tilde{R}_{d[ab]}^i \tilde{\nabla}_c \omega_i &= -\omega_i \tilde{\nabla}_{[a} \tilde{R}_{d|bc]}^i - \tilde{R}_{d[bc]}^i \tilde{\nabla}_{a]} \omega_i, \\ 0 &= -\omega_i \tilde{\nabla}_{[a} \tilde{R}_{d|bc]}^i, \\ \tilde{\nabla}_{[a} \tilde{R}_{d|bc]}^i &= 0. \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy

$$R_{[dbc]}^i{}^{(0)} = 0,$$

$$\nabla_{[a} R_{d]bc}^i{}^{(0)} = 0,$$

így

$$\begin{aligned}
& A_{[abc]d} = B_{[abc]d} \\
& A_{[abc]d} - B_{[abc]d} = 0 \\
& -(R_{[cab]}^i{}^{(0)} + \epsilon R_{[cab]}^i{}^{(1)}) \tilde{\nabla}_i \omega_d - (R_{d[ab]}^i{}^{(0)} + \epsilon R_{d[ab]}^i{}^{(1)}) \tilde{\nabla}_c \omega_d + \omega_i \tilde{\nabla}_{[a} (R_{d]bc}^i{}^{(0)} + \epsilon R_{d]bc}^i{}^{(1)}) \\
& \quad + (R_{d[bc]}^i{}^{(0)} + \epsilon R_{d[bc]}^i{}^{(1)}) \tilde{\nabla}_{a]} \omega_i \\
& = -R_{[cab]}^i{}^{(0)} \tilde{\nabla}_i \omega_d - R_{d[ab]}^i{}^{(0)} \tilde{\nabla}_c \omega_i + \omega_i \tilde{\nabla}_{[a} R_{d]bc}^i{}^{(0)} + R_{d[bc]}^i{}^{(0)} \tilde{\nabla}_{a]} \omega_i \\
& \quad - \epsilon R_{[cab]}^i{}^{(1)} \tilde{\nabla}_i \omega_d - \epsilon R_{d[ab]}^i{}^{(1)} \tilde{\nabla}_c \omega_i + \omega_i \tilde{\nabla}_{[a} \epsilon R_{d]bc}^i{}^{(1)} + \epsilon R_{d[bc]}^i{}^{(1)} \tilde{\nabla}_{a]} \omega_i \\
& = -R_{[cab]}^i{}^{(1)} \tilde{\nabla}_i \omega_d + \omega_i \tilde{\nabla}_{[a} R_{d]bc}^i{}^{(1)} \\
& 6R_{[cab]}^i{}^{(1)} = R_{cab}^i{}^{(1)} + R_{abc}^i{}^{(1)} + R_{bca}^i{}^{(1)} - R_{acb}^i{}^{(1)} - R_{bac}^i{}^{(1)} - R_{cba}^i{}^{(1)} \\
& \quad 3R_{[cab]}^i{}^{(1)} = R_{cab}^i{}^{(1)} + R_{abc}^i{}^{(1)} + R_{bca}^i{}^{(1)} \\
& 3R_{i[cab]}^{(1)} = -\frac{1}{2}(R_{clab}^{(0)} h_i^{(1)l} - R_{ilab}^{(0)} h_c^{(1)l} + \nabla_a \nabla_i h_{bc}^{(1)} + \nabla_b \nabla_c h_{ai}^{(1)} - \nabla_a \nabla_c h_{bi}^{(1)} - \nabla_b \nabla_i h_{ac}^{(1)}) \\
& \quad -\frac{1}{2}(R_{albc}^{(0)} h_i^{(1)l} - R_{ilbc}^{(0)} h_a^{(1)l} + \nabla_b \nabla_i h_{ac}^{(1)} + \nabla_c \nabla_a h_{bi}^{(1)} - \nabla_b \nabla_a h_{ci}^{(1)} - \nabla_c \nabla_i h_{ab}^{(1)}) \\
& \quad -\frac{1}{2}(R_{blca}^{(0)} h_i^{(1)l} - R_{ilca}^{(0)} h_b^{(1)l} + \nabla_c \nabla_i h_{ba}^{(1)} + \nabla_a \nabla_b h_{ci}^{(1)} - \nabla_c \nabla_b h_{ai}^{(1)} - \nabla_a \nabla_i h_{bc}^{(1)}) \\
& \quad -6R_{[cab]}^i{}^{(1)} = 3R_{[c|l|ab]}^{(0)} h_i^{(1)l} - 3R_{il[bc]}^{[0]} h_a^{(1)l} \\
& \quad + (\nabla_b \nabla_c - \nabla_c \nabla_b) h_{ai}^{(1)} + (\nabla_c \nabla_a - \nabla_a \nabla_c) h_{bi}^{(1)} + (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) h_{ci}^{(1)} \\
& = -3R_{il[bc]}^{[0]} h_a^{(1)l} - R_{labc}^{(0)} h_i^{(1)l} - R_{libc}^{(0)} h_a^{(1)l} - R_{lbca}^{(0)} h_i^{(1)l} - R_{lica}^{(0)} h_b^{(1)l} - R_{lcab}^{(0)} h_i^{(1)l} - R_{liab}^{(0)} h_c^{(1)l} \\
& \quad -3R_{il[bc]}^{[0]} h_a^{(1)l} + 3R_{il[bc]}^{[0]} h_a^{(1)l} - R_{l[abc]}^{(0)} h_i^{(1)l} \\
& = 0,
\end{aligned}$$

ebből következik, hogy

$$\tilde{\nabla}_{[a} R_{d]bc}^i{}^{(1)} = 0.$$

Ezzel a bizonyítással beláttuk, hogy nincs nullad-, első rendje a baloldali kifejezésnek, a második pontos értékéről nem esik szó, de a későbbi tanulmányaim során meg szeretnék bizonyosodni a második rend számszerű értékéről.

3.5. Mértéktranszformáció és invariancia

Most végtelenül kicsi koordináta transzformációkat, valamint az általuk kiváltott mérték transzformációkat fogjuk vizsgálni annak érdekében, hogy kifejezzük a teljes Riemann, illetve Ricci-tenzorok invarianciáját. Legyen az infinitezimális koordináta transzformáció

$$\tilde{x}^a = x^a + \epsilon \xi^a,$$

ahol ξ a transzformáció generátorfüggvénye. Ebben a koordináta rendszerben elhanyagoljuk az $\sigma(\epsilon^2)$ rendű tagokat.

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ab} &= g_{ab} + \epsilon \mathcal{L}_\xi h_{ab} \\ \tilde{g}_{ab} &= g_{ab} + \epsilon(h_{ab} - \tilde{\nabla}_a \xi_b - \tilde{\nabla}_b \xi_a) \\ \tilde{g}_{ab} &= g_{ab} + \epsilon(h_{ab} - \nabla_a \xi_b - \nabla_b \xi_a) + O(\epsilon^2).\end{aligned}$$

Az új koordináta rendszerben a perturbáció

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \nabla_a \xi_b - \nabla_b \xi_a$$

alakú lesz. Akár közvetlen számításból vagy a Lie-derivált meghatározásából azt látjuk, hogy a mértéktranszformációnál a Ricci és a Riemann tenzorok a következő alakúak lesznek:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ed}^{(1)} &= R_{ed}^{(1)} - \mathcal{L}_\xi R_{ed}^{(0)}, \\ \bar{R}_{ed}^{(1)} &= R_{ed}^{(1)} - \tilde{\nabla}_\sigma (R_{ed}^{(0)}) \xi^\sigma - \tilde{\nabla}_e (\xi^\sigma) R_{\sigma d}^{(0)} - \tilde{\nabla}_d (\xi^\sigma) R_{e\sigma}^{(0)}, \\ \bar{R}_{ecd}^{(1)} &= R_{ecd}^{(1)} - \mathcal{L}_\xi R_{ecd}^{(0)},\end{aligned}\tag{40}$$

$$R_{ecd}^a{}^{(1)} - \tilde{\nabla}_\sigma R_{ecd}^a{}^{(0)} \xi^\sigma + R_{ecd}^{\sigma}{}^{(0)} \tilde{\nabla}^a \xi_\sigma - R_{\sigma cd}^a{}^{(0)} \tilde{\nabla}_e \xi^\sigma - R_{ecd}^a{}^{(0)} \tilde{\nabla}_c \xi^\sigma - R_{ecd}^a{}^{(0)} \tilde{\nabla}_d \xi^\sigma.\tag{41}$$

Ha ξ^a egy létező infinitezimális koordináta transzformáció generátorfüggvénye akkor kielégíti a

$$\xi^a = \sigma(1), \nabla_b \xi^a = \sigma(1)\tag{42}$$

egyenletet, ez a formula generál magas és alacsony frekvenciás koordináta hullámot. Ha a (32),(42)-es valamint a

$$\epsilon \ll 1, g_{ab} = \sigma(1), h_{ab} = \sigma(1)\tag{43}$$

$$\nabla_c g_{ab} = \sigma(1), \nabla_c h_{ab} = \sigma\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\tag{44}$$

$$\nabla_d \nabla_c g_{ab} = O(1), \nabla_d \nabla_c h_{ab} = \sigma\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)\tag{45}$$

(43), (44), (45)-ös egyenleteket behelyettesítjük a (40),(41)-es egyenletekbe, egyértelműen adódik az

$$\begin{aligned}R_{ed}^{(1)} - \bar{R}_{ed}^{(1)} &\doteq \epsilon^2 \\ R_{cde}^a{}^{(1)} - \bar{R}_{cde}^a{}^{(1)} &\doteq \epsilon^2.\end{aligned}$$

Nagy frekvenciás határban $\epsilon \rightarrow 0$, látszik, hogy a Riemann- és a Ricci-tenzorok perturbációja mértékinvariáns és jól közelíthető valódi fizikai mérésekkel. Az egyszerű oka ennek hogy λ rendű távolság skálán a téridő lokálisan sík. Amíg λ kisebb mint L , a perturbációk nem tartalmaznak nagy hullámhosszú komponenseket. Ez a lokális viselkedés a háttérre úgy görbíti, hogy az globális mértékinvariáns legyen. A tágulás mérték invarianciája nagyon fontos, különben nem lennének koordináta függetlenek a fizikailag mérhető effektusok. Végül, még inkább ki kell hangsúlyozni, hogy a kapott mérték invariancia csak a magas frekvenciás közelítés feltevéséből származik [11].

3.6. Lineáris közelítés, hullámegyenlet

Továbbiakban a spin 2-mezős leírást fogjuk alkalmazni. Köztudott, hogy egy ilyen mezőt valódi szimmetrikus tenzor mező Ψ^{ab} ír le, mely eleget tesz a következő egyenleteknek [11]:

$$\nabla_d \nabla^d \Psi^{ab} = 0, \quad (46)$$

$$\nabla_b \Psi^{ab} = 0, \quad (47)$$

$$\Psi = \eta_{ab} \Psi^{ab} = 0, \quad (48)$$

ahol $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. A (47)-es és a (48)-as egyenletek biztosítják, hogy az energia pozitív definit és a mező tiszta spin-2. (Spin-1 és spin-0 nélküli). A Ψ^{ab} tenzor mező szabadsági fokainak száma ötről kettőre csökken, mert az (46)-(48) tulajdonságok a mértéktranszformáció által nem változnak.

$$\Psi^{ab} \rightarrow \bar{\Psi}^{ab} = \Psi^{ab}, -\nabla^a \xi^b - \nabla^b \xi^a,$$

ahol ξ^b egy olyan vektor mező, melyre teljesülnek a következő egyenletek:

$$\begin{aligned} \nabla_d \nabla^d \xi^b &= 0, \\ \nabla_d \xi^d &= 0. \end{aligned}$$

A gravitáció gyenge-tér-közelítésére igazak a (46)-(48)-ig megfogalmazott egyenletek infinitezimálisan kicsi koordináta transzformációk esetén, melyek alakja:

$$x^b \rightarrow \bar{x}^b = x^b + \xi^b.$$

Természetesen ezekre a ξ^b vektor mezőkre is igazak a fentebb említett tulajdonságok. A $\nabla_c \nabla^c \xi^b = 0$ tulajdonságnak köszönhetően a (48)-as egyenlet mellett a következő koordináta szabadság is érvényes lesz: $\Psi_{ti} = 0$. Tekintsük a Ricci-tenzort és a vákuum Einstein-egyenletbe helyettesítés után látszik, hogy a vezető rend

$$R_{ab}^{(1)} = 0, \quad (49)$$

majd a következő rendben

$$R_{ab}^{(0)} = -\epsilon^2 R_{ab}^{(2)}. \quad (50)$$

A (49)-es egyenletet Lánczos Kornél látta be először [13] 1925-ben. A következő lépés a hullámegyenlet levezetése lesz úgy, hogy Ψ -t tartalmazó tagok lesznek benne. Legyen tehát:

$$\begin{aligned} \Psi_{ab} &= h_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} h, \\ \Psi &= g^{ed} \Psi_{ed}, \end{aligned}$$

ahol $h = g^{ed} h_{ed}$. Azért célszerű a spúr invertált alakját használni a h -nak, mert így az Einstein-egyenletben szereplő tagok számát csökkenteni lehet. Ezt most ϵ -ban első rendben meg is fogom mutatni.

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}^{(1)} &= R_{ab}^{(1)} - \frac{1}{2} R^{(1)} g_{ab} \\ &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2} [\nabla^f \nabla_a h_{bf} + \nabla^f \nabla_b h_{af} - \nabla_f \nabla^f h_{ab} - \nabla_b \nabla_a h] - \frac{1}{4} g^{ab} [\nabla^f \nabla_a h_{bf} + \nabla^f \nabla_b h_{af} - \nabla_f \nabla^f h_{ab} - \nabla_b \nabla_a h] g_{ab} \\ \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}^{(1)} &= \frac{1}{2} [\nabla^f \nabla_a h_{bf} + \nabla^f \nabla_b h_{af} - \nabla_f \nabla^f h_{ab} - \nabla_b \nabla_a h] - \frac{1}{4} [2\nabla^f \nabla^b h_{bf} - 2\nabla_f \nabla^f h] g_{ab} \\ \frac{16\pi G}{c^4} T_{ab}^{(1)} &= [\nabla^f \nabla_a h_{bf} + \nabla^f \nabla_b h_{af} - \nabla_f \nabla^f h_{ab} - \nabla_b \nabla_a h] - g_{ab} [\nabla^f \nabla^b h_{bf} - \nabla_f \nabla^f h]. \end{aligned}$$

Ezen a ponton behelyettesítem a $\Psi_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} h$ összefüggést.

$$\frac{16\pi G}{c^4} T_{ab}^{(1)} = [\nabla^f \nabla_a (\Psi_{bf} + \frac{1}{2} g_{bf} h) + \nabla^f \nabla_b (\Psi_{af} + \frac{1}{2} g_{af} h) - \nabla_f \nabla^f (\Psi_{ab} + \frac{1}{2} g_{ab} h) - \nabla_b \nabla_a (\Psi - 2h)] - g_{ab} [\nabla^f \nabla^b (\Psi_{bf} + \frac{1}{2} g_{bf} h) - \nabla_f \nabla^f (\Psi - 2h)]$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2R_{ab}^{(1)} = g^{df} (\nabla_d \nabla_a [\Psi_{bf} + \frac{1}{2} g_{bf} h] + \nabla_d \nabla_b [\Psi_{af} + \frac{1}{2} g_{af} h] - \nabla_d \nabla_f [\Psi_{be} + \frac{1}{2} g_{be} h] - \nabla_b \nabla_a [\Psi_{df} + \frac{1}{2} g_{df} h]) \\ &= \nabla^f \nabla_a \psi_{bf} + \nabla^f \nabla_b \psi_{af} - \nabla^f \nabla_f \psi_{ba} - \nabla_b \nabla_a \Psi + g^{df} \frac{1}{2} [\nabla_d \nabla_a (g_{bf} h) + \nabla_d \nabla_b (g_{af} h) - \nabla_d \nabla_f (g_{ba} h) \\ &\quad - \nabla_b \nabla_a (g_{df} h)] \\ &= \nabla^f \nabla_a \psi_{bf} + \nabla^f \nabla_b \psi_{af} - \nabla^f \nabla_f \psi_{ba} - \nabla_b \nabla_a \Psi + \frac{1}{2} \nabla_b \nabla_a h + \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_b h - \frac{1}{2} \nabla^f \nabla_f (g_{ba} h) - 2\nabla_b \nabla_a h. \end{aligned}$$

Képezve Ψ_{ab} szimmetrikus tenzor mező spúrját adódik, hogy $\Psi = -h$.

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^f \nabla_a \psi_{bf} + \nabla^f \nabla_b \Psi_{af} - \nabla^f \nabla_f \Psi_{ba} + \frac{1}{2} \nabla_b \nabla_a \Psi - \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_b \Psi + \frac{1}{2} \nabla^f \nabla_f g_{ba} \Psi \\ 0 &= \nabla^f \nabla_a \psi_{bf} + \nabla^f \nabla_b \Psi_{af} - \nabla^f \nabla_f \Psi_{ba} + \frac{1}{2} \nabla^f \nabla_f g_{ba} \Psi - \frac{1}{2} (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \Psi. \end{aligned}$$

(-1)-el való beszorzás után:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^f \nabla_f \Psi_{ba} - \frac{1}{2} g_{ba} \nabla^f \nabla_f \Psi - \nabla^f \nabla_a \psi_{bf} - \nabla^f \nabla_b \Psi_{af} + \frac{1}{2} (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \Psi. \\ 0 &= \nabla^f \nabla_f \Psi_{ba} - \frac{1}{2} g_{ba} \nabla^f \nabla_f \Psi - \nabla^f \nabla_a \psi_{bf} - \nabla^f \nabla_b \Psi_{af} + \frac{1}{2} \nabla_a \partial_b \Psi - \frac{1}{2} \nabla_b \partial_a \Psi \\ 0 &= \nabla^f \nabla_f \Psi_{ba} - \frac{1}{2} g_{ba} \nabla^f \nabla_f \Psi - \nabla^f \nabla_a \psi_{bf} - \nabla^f \nabla_b \Psi_{af} + \frac{1}{2} \partial_a \partial_b \Psi - \Gamma_{ab}^i \partial_i \Psi - \frac{1}{2} \partial_b \partial_a \Psi + \Gamma_{ba}^i \partial_i \Psi \\ 0 &= \nabla^f \nabla_f \Psi_{ba} - \frac{1}{2} g_{ba} \nabla^f \nabla_f \Psi - \nabla^f \nabla_a \psi_{bf} - \nabla^f \nabla_b \Psi_{af} \\ 0 &= \nabla^f \nabla_f \Psi_{ba} - \frac{1}{2} g_{ba} \nabla^f \nabla_f \Psi - \nabla_a \nabla^f \psi_{bf} - \nabla_b \nabla^f \Psi_{af} + 2R_{kabf}^{(0)} \Psi^{fk} + R_{bk}^{(0)} \Psi_a^k + R_{ak}^{(0)} \Psi_b^k. \end{aligned}$$

Tehát a végső alakja az egyenletnek:

$$0 = \nabla^f \nabla_f \Psi_{ba} - \frac{1}{2} g_{ba} \nabla^f \nabla_f \Psi - \nabla_a \nabla^f \psi_{bf} - \nabla_b \nabla^f \Psi_{af} + 2R_{kabf}^{(0)} \Psi^{fk} + R_{bk}^{(0)} \Psi_a^k + R_{ak}^{(0)} \Psi_b^k. \quad (51)$$

3.7. Hullámegyenlet megoldása vezető rendben

Ha az imént levezetett képletet összehasonlítjuk a (46)-(48) egyenletekkel, akkor rákényszeríthetünk Ψ -re két tulajdonságot

$$\nabla_b \Psi^{ab} = 0, \quad (52)$$

$$\Psi = 0, \quad (53)$$

viszont ha ezt megteesszük, akkor elveszítjük a dinamikai egyenletek szigorú mértékinvarianciáját. Ugyanis az (51) hullámegyenlet vezető rendje $O(\frac{1}{\epsilon})$ [11]. Ha végrehajtjuk a korábban tárgyalt (40) mértéktranszformációt a (51) hullámegyenleten, akkor a hullámegyenlet alakja megváltozik és elveszíti szigorú mértékinvarianciáját. A megváltozás vezető rendje azonban $O(1)$, ami elhanyagolható a vezető rendhez képest. Tehát összességében, ha rákényszerítjük ezt a két tulajdonságot a hullámegyenletre, akkor a szigorú mértékinvariancia megszűnik, de a megváltozás kicsi és ha elhanyagoljuk a változás rendjét a hullámegyenlet vezető rendjéhez képest, akkor használható ez a két tulajdonság. Most pedig ezt fogjuk tenni. Infinitesimalisan kicsi koordináta transzformációnál

$$x^e \rightarrow \bar{x}^e = x^e + \epsilon \xi^e,$$

és

$$\Psi^{ab} \rightarrow \bar{\Psi}^{ab},$$

továbbá

$$\nabla^e \Psi_{ea} \rightarrow \nabla^e \bar{\Psi}_{ea} = \nabla^e \Psi_{ea} - \nabla^e \nabla_e \xi_a + R_{ae}^{(0)} \xi^e, \quad (54)$$

$$\Psi = \bar{\Psi} = \Psi + 2\nabla_a \xi^a. \quad (55)$$

Ha ξ^a -t választjuk az inhomogén egyenlet megoldásának, akkor

$$\begin{aligned} \nabla^e \nabla_e \xi_a - R_{ea}^{(0)} \xi^e &= \nabla^e \Psi_{ea}, \\ \nabla^e \nabla_e &= -\frac{1}{2} \Psi \end{aligned}$$

az látszik, hogy az (52)-es és az (53)-as egyenletek megmaradnak az új koordinátarendszerben. A Lie-deriváltak elhagyása által kapott új koordináta rendszerben az (51)-es egyenlet

$$-\Delta \Psi_{ab} \equiv \nabla^d \nabla_d \Psi_{ab} + 2R_{cabd}^{(0)} \Psi^{cd} + R_{ac}^{(0)} \Psi_b^c + R_{bc}^{(0)} \Psi_a^c = 0. \quad (56)$$

A Δ operátor pontosan a d'Alembert, amelyet Lichnerowicz vezetett be szimmetrikus tenzorok számára. Ha $\nabla^a \nabla_a \Psi = 0$ látható, hogy az (56)-os egyenlet összhangban van az (53)-assal. Az (56)-os egyenlet kovariáns deriváltját képezve

$$\nabla^e (-\Delta \Psi_{ea}) = \nabla^e \nabla^f \nabla_f \Psi_{ea} + R_{ea}^{(0)} \Psi_f^f + \Psi^{ef} (\nabla_f 2R_{ea}^{(0)} - \nabla_e R_{af}^{(0)}) \doteq \epsilon^3 \quad (57)$$

adódik. Összességében a nagy frekvenciás gravitációs hullámok úgy közelítenek az alacsonyabb rendekhez, mint a görbült-tér hullámegyenlete (56) az (52), (53)-as egyenletekhez. Ezek változatlanok maradnak a további mértéktranszformáció által generált ξ_a -re, mely kielégíti a

$$\begin{aligned} \nabla^a \nabla_a \xi_e - R_{ea}^0 \xi^a &= 0 \\ \nabla_e \xi^e &= 0 \end{aligned}$$

egyenleteket. Most az (56)-os hullámegyenlet megoldását keressük a következő alakban:

$$\Psi_{ed} = A_{ed} e^{ik_j x^j} + A_{ed}^+ e^{-ik_j x^j},$$

ahol A_{ed} egy 4x4-es szimmetrikus mátrix, a polarizáció mátrixa, míg k_j a hullámszám vektor. Az A_{ed} mátrixra a fentebb tárgyalt infinitesimalis koordináta transzformáció hatására igazak lesznek a következők:

$$\begin{aligned}\bar{A}_{ed} &= A_{ed} - \mathcal{L}_\xi A_{ed} \\ \bar{A} &= A_{ed} - \nabla_\sigma(\xi^\sigma)A_{ed} - \nabla_e(\xi^\sigma)A_{\sigma d} - \nabla_d(\xi^\sigma)A_{\sigma e} \\ A_{ed} &= \sigma(1), \nabla^e A_{ed} = \sigma(1), k^b = \sigma(\tfrac{1}{\epsilon}), \nabla_b k^b = \sigma(\tfrac{1}{\epsilon}).\end{aligned}$$

Az (56)-os egyenletbe történő behelyettesítéshez szükséges rész számolás a következő:

$$\begin{aligned}\nabla^b \nabla_b \Psi_{ed} &= g_{ab} \nabla_a \nabla_b \Psi_{ed} \\ \nabla_b \Psi_{ed} &= \nabla_b (A_{ed} e^{ik_j x^j} + A_{ed}^+ e^{-ik_j x^j}) = \\ &= \nabla_b (A_{ed}) e^{ik_j x^j} + A_{ed} i k_b e^{ik_j x^j} + \nabla_b (A_{ed}^+) e^{-ik_j x^j} - A_{ed}^+ i k_b e^{-ik_j x^j} \\ \nabla_a \nabla_b \Psi_{ed} &= \nabla_a \nabla_b (A_{ed}) e^{ik_j x^j} + i k_a \nabla_b (A_{ed}) e^{ik_j x^j} + i k_b \nabla_a (A_{ed}) e^{ik_j x^j} + i \nabla_a (k_b) A_{ed} e^{ik_j x^j} - k_a k_b A_{ed} e^{ik_j x^j} + \\ &+ \nabla_a \nabla_b (A_{ed}^+) e^{-ik_j x^j} - i k_a \nabla_b (A_{ed}^+) e^{-ik_j x^j} - i k_b \nabla_a (A_{ed}^+) e^{-ik_j x^j} - i \nabla_a (k_b) A_{ed}^+ e^{-ik_j x^j} + k_a k_b A_{ed}^+ e^{-ik_j x^j} \\ \nabla_b \nabla^b (A_{ed}) e^{ik_j x^j} &+ i k_b \nabla^b (A_{ed}) e^{ik_j x^j} + i k_b \nabla^b (A_{ed}^+) e^{-ik_j x^j} + i \nabla^b (k_b) A_{ed} e^{ik_j x^j} - k_b k^b A_{ed} e^{ik_j x^j} + \\ \nabla_b \nabla^b (A_{ed}^+) e^{-ik_j x^j} &- i k_b \nabla^b (A_{ed}^+) e^{-ik_j x^j} - i k_b \nabla^b (A_{ed}^+) e^{-ik_j x^j} - i \nabla^b (k_b) A_{ed}^+ e^{-ik_j x^j} + k_b k^b A_{ed}^+ e^{-ik_j x^j}.\end{aligned}$$

Az (56)-os egyenletbe visszahelyettesítve, majd rendekre bontva nyerjük a következő formulát:

$$\begin{aligned}[-k_b k^b A_{ed} e^{ik_j x^j} + k_b k^b A_{ed}^+ e^{-ik_j x^j}] &+ i[2k_b \nabla^b (A_{ed}) e^{ik_j x^j} + \nabla^b (k_b) A_{ed} e^{ik_j x^j} - 2k_b \nabla^b (A_{ed}^+) e^{-ik_j x^j} - \\ &\nabla^b (k_b) A_{ed}^+ e^{-ik_j x^j}] + [\nabla_b \nabla^b (A_{ed}) e^{ik_j x^j} - \nabla_b \nabla^b (A_{ed}^+) e^{-ik_j x^j} + 2R_{cedb}^{(0)} (A^{cb} e^{ik_j x^j} + A^{+cb} e^{-ik_j x^j}) + \\ &R_{ec}^{(0)} (A_d^c e^{ik_j x^j} + A^{+c}_d e^{-ik_j x^j}) + R_{dc}^{(0)} (A_e^c e^{ik_j x^j} + A^{+c}_e e^{-ik_j x^j})] = 0.\end{aligned}$$

Vezető rendben a hullámgyenlet:

$$-k_b k^b A_{ed} e^{ik_j x^j} + k_b k^b A_{ed}^+ e^{-ik_j x^j} = 0.$$

Mivel sem az exponenciális tagok, sem pedig az A_{ed} tenzor nem lehet nulla, így ez az egyenlőség csak akkor teljesül, ha

$$k_b k^b = 0. \quad (58)$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy a gravitációs hullám null geodetikusan terjed, fényszerű. Úgy választjuk meg, hogy a terjedés z-irányú legyen, azaz $k^b = (k, 0, 0, k)$. Következő rendben a hullámgyenlet alakja:

$$[2k_b \nabla^b (A_{ed}) + \nabla^b (k_b) A_{ed}] e^{ik_j x^j} = [2k_b \nabla^b (A_{ed}^+) + \nabla^b (k_b) A_{ed}^+] e^{-ik_j x^j}.$$

3.8. Harmonikus koordináta feltétel geometriai optikai közelítésben, a polarizációs tenzor

A másodrend részletes vizsgálatához a harmonikus koordináta feltétel használatára lesz szükség, melynek alakja hasonló a (23)-as egyenlethez:

$$0 = \tilde{\square}x^i = g^{ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_bx^i.$$

Az egyenletet részletes kiírása a következő:

$$g^{ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_bx^i = g^{ab}(\nabla_a\nabla_bx^i - C_{ab}^c\nabla_cx^i) = \square x^i - \tilde{g}^{ab}C_{ab}^i.$$

Ez a feltétel nagyon hasonlít a (23)-as egyenletre azzal a különbséggel, hogy megjelent egy $\tilde{g}^{ab}$ -vel kontrahált szimmetrikus tenzor. Az (23)-as egyenlet a harmonikus koordináta feltétel definíciója miatt 0, ezért a

$$\tilde{g}^{ab}C_{ab}^i = 0$$

egyenletnek kell teljesülnie. C_{ab}^i definícióját használva az egyenlet egyszerűsíthető.

$$\tilde{g}^{ab}C_{ab}^i = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ab}[g^{ij}(\nabla_a\tilde{g}_{jb} + \nabla_b\tilde{g}_{ja} - \nabla_j\tilde{g}_{ab})] = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ab}[g^{ij}(\nabla_a(g_{jb} + \epsilon h_{jb}) + \nabla_b(g_{ja} + \epsilon h_{ja}) - \nabla_j(g_{ab} + \epsilon h_{ab}))].$$

Mivel $\nabla_ag_{jb} = \sigma(1)$, (jelenleg $\sigma(\frac{1}{\epsilon})$ rendű tagokat vizsgálunk) ezért elhanyagolható korrekcióként jelenik meg a vizsgált rendhez képest.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\epsilon g^{ab}g^{ij}(\nabla_a h_{jb} + \nabla_b h_{ja} - \nabla_j h_{ab}) \\ &= \epsilon g^{ab}g^{ij}(\nabla_a h_{jb} - \frac{1}{2}\nabla_j h_{ab}) \\ &= \epsilon(\nabla^b h_b^i - \frac{1}{2}\nabla^i h) \\ &= \epsilon(\nabla^b \Psi_b^i + \frac{1}{2}\nabla^i \Psi). \end{aligned}$$

Tehát nagyfrekvenciás közelítésben a harmonikus koordináta feltétel alakja a következő alakra egyszerűsödik:

$$\nabla^b \Psi_b^i = -\frac{1}{2}\nabla^i \Psi_b^b. \quad (59)$$

Most helyettesítsük be a hullámeqyenletet az (59)-es egyenletbe.

$$\begin{aligned} \nabla^b \Psi_b^i &= \nabla^b(A_b^i e^{ik_j x^j} + A_b^{+i} e^{-ik_j x^j}) \\ &= ik^b A_b^i e^{ik_j x^j} + \nabla^b(A_b^i) e^{ik_j x^j} - ik^b A_b^{+i} e^{-ik_j x^j} + \nabla^b(A_b^{+i}) e^{-ik_j x^j} \\ &\quad - \frac{1}{2}\nabla^i \Psi_b^b = -\frac{1}{2}\nabla^i(A_b^b e^{ik_j x^j} + A_b^{+b} e^{-ik_j x^j}) \\ &= -\frac{1}{2}(ik^i A_b^b e^{ik_j x^j} + \nabla^i(A_b^b) e^{ik_j x^j} - ik^i A_b^{+b} e^{-ik_j x^j} + \nabla^i(A_b^{+b}) e^{-ik_j x^j}). \end{aligned}$$

A $\nabla^b A_b^i$ rendje $\sigma(1)$, ezért a vezetőrend $\sigma(\frac{1}{\epsilon})$ mellett elhanyagolható.

$$\begin{aligned} ik^b A_b^i e^{ik_j x^j} - ik^b A_b^{+i} e^{-ik_j x^j} &= -\frac{1}{2}(ik^i A_b^b e^{ik_j x^j} - ik^i A_b^{+b} e^{-ik_j x^j}) \\ (k^b A_b^i + \frac{1}{2}k^i A_b^b) e^{ik_j x^j} &= (ik^b A_b^{+i} + \frac{1}{2}k^i A_b^b) e^{-ik_j x^j}. \end{aligned}$$

Az első tagban szereplők közül tudjuk, hogy az exponenciális sose 0, így csak akkor lehet nulla, ha a zárójelen belüli tag nulla, vagyis:

$$k^b A_b^i = -\frac{1}{2}k^i A_b^b. \quad (60)$$

Az egyenlőségjel másik oldalával most nem foglalkozunk. Már említésre került, hogy z-irányban terjedő gravitációs hullámot vettünk, ezt felhasználva válasszuk most a (60)-as egyenletben szereplő tagok esetén "b" indexet 0-nak vagy 3-nak. Ekkor a következő alakot nyerjük:

$$k(A_0^i + A_3^i) = -\frac{1}{2}k^i A_b^b$$

ahol $A_b^b = (A_0^0 + A_1^1 + A_2^2 + A_3^3) = (-A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33})$. Az egyenletek a lehetséges i értékekkel meghatóak a következő alakokban:

$$\begin{aligned}
& i = 0: \\
& k(A_0^0 + A_3^0) = -\frac{k}{2}(A_0^0 + A_1^1 + A_2^2 + A_3^3), \\
& i = 1: \\
& k(A_0^1 + A_3^1) = 0, \\
& i = 2: \\
& k(A_0^2 + A_3^2) = 0, \\
& i = 3: \\
& k(A_0^3 + A_3^3) = -\frac{k}{2}(A_0^0 + A_1^1 + A_2^2 + A_3^3).
\end{aligned}$$

A felső indexek lehúzása után az egyenletek

$$\begin{aligned}
& i = 0: \\
& k(A_{00} + A_{03}) = \frac{k}{2}(A_0^0 + A_1^1 + A_2^2 + A_3^3), \\
& i = 1: \\
& k(A_{01} + A_{13}) = 0, \\
& i = 2: \\
& k(A_{02} + A_{23}) = 0, \\
& i = 3: \\
& k(A_{03} + A_{33}) = -\frac{k}{2}(A_0^0 + A_1^1 + A_2^2 + A_3^3).
\end{aligned}$$

Az $i = 1$ és $i = 2$ feltételekből triviálisan következik az alábbi formulák:

$$\begin{aligned}
A_{31} &= -A_{01} \\
A_{32} &= -A_{02}.
\end{aligned}$$

Az $i = 0$ és az $i = 3$ feltételek pedig az alábbi egyenletet eredményezik:

$$\begin{aligned}
-A_{00} - A_{03} &= A_{33} + A_{03} = -\frac{1}{2}A_a^a \\
-2A_{00} - 2A_{03} &= 2A_{33} + 2A_{03} = +A_{00} - A_{11} - A_{22} - A_{33}.
\end{aligned}$$

Mindkét egyenlőségéből kifejezve A_{03} -at:

$$\begin{aligned}
2A_{03} &= -3A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33} \\
2A_{03} &= A_{00} - A_{11} - A_{22} - 3A_{33}.
\end{aligned}$$

Összeadva, a két egyenletet A_{11} és A_{22} komponensek kiküszöbölhetőek, ami a

$$2A_{03} = -A_{00} - A_{33}$$

egyenlethez vezet. Most kivonva az A_{03} -ra felírt két egyenletet egymásból adódik a

$$A_{22} + A_{11} = 2A_{00} + 2A_{33}$$

formula, amit visszahelyettesítve a A_{03} -ra kapott bármelyik egyenletbe következik az alábbi egyenlőség:

$$A_{03} = \frac{-1}{2}[A_{00} + A_{33}]$$

Összefoglalva a feltételeket, amiket i kiírásával kaptunk:

$$\boxed{
\begin{aligned}
A_{01} &= -A_{31} \\
A_{02} &= -A_{32} \\
A_{03} &= \frac{-1}{2}(A_{00} + A_{33}) \\
A_{11} + A_{22} &= 2A_{00} + 2A_{33}
\end{aligned}
}.$$

Ezek tehát a polarizációs vektor komponensek, amelyek szimmetrikusak. A harmonikus koordinátaválasztás nem egyértelmű. Az ilyen koordináta rendszerek közötti transzformációk felhasználásával [9] az $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ koordinátákat kivéve minden más komponens nullává tehető. Így előáll, hogy $A_{11} = -A_{22}$. Ezt a feltételt, valamint az $A_{12} = A_{21}$ egyenlőség miatt a polarizációs vektorra a következő adódik:

$$A_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Általában az A_{11} komponens a $+$, míg A_{12} komponens a $\times$ polarizáció. A teljes A_{ab} tenzor így felbontható a következő alakúra:

$$A_{ab} = A_{11} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ha z -tengely körüli térbeli forgatást hajtunk végre, akkor a mátrix ezen szerkezete nem változik meg, tekintsük most ezt a transzformációt. Ehhez bevezetjük a

$$A_{\pm} = A_{11} \mp iA_{12} \quad (61)$$

mennyiségeket, majd a forgásmátrixra ezek a komponensek

$$A'_{\pm} = e^{(\pm 2i\theta)} A_{\pm} \quad (62)$$

alakúvá válnak. Ebből látható, hogy a gravitációs hullámok (perturbáció) helicitása 2 [9]. Ez azért van, mert egy szimmetrikus kétindexes tenzor írja le. Arra jutottunk tehát, hogy létezik hullám megoldás, még pedig ezen gravitációs perturbáció fénysebességgel szinuszosan terjed. A gravitációs hullám alakja pedig

$$\Psi_{ed} = A_{ed} e^{(ik_j x^j)} + A_{ed}^+ e^{(-ik_j x^j)}. \quad (63)$$

Látható, hogy ugyanazt a kétindexes szimmetrikus tenzort kaptuk nagyfrekvenciás-közelítésben, mint a gyengetér-közelítés esetén. Levonható tehát az a következmény, hogy a görbület nem változtatja meg a polarizációs tenzor komponenseket lineáris rendben és nem hoz be új komponenseket sem.

4. Gravitációs hullámok visszahatása a téridő geometriájára

4.1. Bevezető

Az előző fejezetben a nagyfrekvenciás közelítéssel sikerült lineáris rendben a gravitációs hullámokról levonni azt a következtetést, hogy null geodetikusan terjednek, tehát fényszerűek, valamint nem változtatja meg a görbület a polarizációs tenzor komponenseket. Ezek a fontos eredmények az ϵ -ban vezető rendű Einstein egyenlet (49)-ből származtatható hullámegyenlet (51) következményei abban az esetben, ha az (52),(53)-as egyenletek teljesülnek. Ebben a fejezetben a gravitációs hullámok visszahatását fogjuk vizsgálni a téridő geometriájára.

4.2. Energia-impulzus tenzor

A korábban tárgyalt perturbált Ricci-tenzorok segítségével fogjuk megvizsgálni a másodrendű (50) Einstein-egyenletet. A másodrendű Ricci-tenzor a megfelelő indexek segítségével a következőképpen adható meg:

$$R_{ab}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\nabla_b h^{lf} \nabla_a h_{lf}) + \nabla^l h_a^f (\nabla_l h_{bf} - \nabla_f h_{lb}) + \left(\frac{1}{2} \nabla^f h - \nabla_l h^{lf} \right) (\nabla_b h_{af} + \nabla_a h_{bf} - \nabla_f h_{ba}) + h^{lf} (\nabla_f \nabla_b h_{la} + \nabla_l \nabla_a h_{bf} - \nabla_b \nabla_a h_{lf} - \nabla_l \nabla_f h_{ba}) \right].$$

Az Einstein-egyenlet vezető rendben:

$$R_{ab}^{(1)} = 0.$$

Második rendben:

$$R_{ab}^{(0)} = -\epsilon^2 R_{ed}^{(2)}.$$

Az (50)-es egyenlet megmutatja, hogyan működik a hullám a görbület forrásaként. Figyeljük meg, hogy a (49)-es és (50)-es egyenletek nem teljesülnek egyidejűleg, viszont ha feltesszük, hogy $\epsilon \ll 1$ nagyságrend teljesül, akkor a (64) és a (65)-ös Einstein mezőegyenletek egyszerre megoldhatóak.

$$R_{ab}^{(1)} = 0, \tag{64}$$

$$R_{ab}^{(0)} - \frac{1}{2} g_{ed} R^{(0)} = 8\pi T_{ab}^{eff}, \tag{65}$$

ahol az effektív energia-impulzus tenzor a következőképpen fejezhető ki nagyfrekvenciás közelítésben:

$$-T_{ab}^{eff} = \frac{\epsilon^2}{8\pi} (R_{ab}^{(2)} - \frac{1}{2} g_{ab} R^{(2)}) = \frac{\epsilon^2}{16\pi} (Q_{ab} - \nabla_l S_{ab}^l).$$

A feladat Q_{ab} és S_{ab}^l meghatározása.

$$\begin{aligned} Q_{ab} - \nabla_l S_{ab}^l &= -\frac{16\pi}{\epsilon^2} T_{ab}^{eff} = 2R_{ab}^{(2)} - g_{ab} R^{(2)} \\ &= -\frac{1}{2} \nabla_b h^{lf} \nabla_a h_{lf} + \nabla^l h_a^f (\nabla_l h_{bf} - \nabla_f h_{lb}) + \left(\frac{1}{2} \nabla^f h - \nabla_l h^{lf} \right) (\nabla_b h_{af} + \nabla_a h_{bf} - \nabla_f h_{ba}) \\ &\quad + h^{lf} (\nabla_f \nabla_b h_{la} + \nabla_l \nabla_a h_{bf} - \nabla_b \nabla_a h_{lf} - \nabla_l \nabla_f h_{ba}) \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{ab} \left[-\frac{3}{2} \nabla^i h^{lf} \nabla_i h_{lf} - \nabla^l h^{fi} \nabla_f h_{li} + \left(\frac{1}{2} \nabla^f h - \nabla_l h^{lf} \right) (2\nabla^i h_{if} - \nabla_f h) \right. \\ &\quad \left. + h^{lf} (\nabla_f \nabla^i h_{li} + \nabla_l \nabla^i h_{if} - \nabla^i \nabla_i h_{lf} - \nabla_l \nabla_f h) \right]. \end{aligned}$$

Teljes divergenciákat képezve:

$$\begin{aligned}
h^{lf} \nabla_f \nabla_b h_{la} &= \nabla_j (h^{lj} \nabla_b h_{la}) - \nabla_f h^{lf} \nabla_b h_{la} \\
+h^{lf} \nabla_l \nabla_a h_{bf} &= \nabla_j (h^{jf} \nabla_a h_{bf}) - \nabla_l h^{lf} \nabla_a h_{bf} \\
-h^{lf} \nabla_b \nabla_a h_{lf} &= -h^{lf} \nabla_j (\delta_b^j \nabla_a h_{lf}) = -\nabla_j (\delta_b^j h^{lf} \nabla_a h_{lf}) + \nabla_b h^{lf} \nabla_a h_{lf} \\
-h^{lf} \nabla_l \nabla_f h_{ba} &= -\nabla_j (h^{jf} \nabla_f h_{ba}) + \nabla_l h^{lf} \nabla_f h_{ba} \\
-\frac{1}{2} g_{ab} h^{lf} \nabla_f \nabla^i h_{li} &= -\frac{1}{2} g_{ab} [\nabla_j (h^{lj} \nabla^i h_{li}) - \nabla_f h^{lf} \nabla^i h_{li}] \\
-\frac{1}{2} g_{ab} h^{lf} \nabla_l \nabla^i h_{if} &= -\frac{1}{2} g_{ab} [\nabla_j (h^{jf} \nabla^i h_{if}) - \nabla_l h^{lf} \nabla^i h_{if}] \\
+\frac{1}{2} g_{ab} h^{lf} \nabla^i \nabla_i h_{lf} &= +\frac{1}{2} g_{ab} [\nabla_j (h^{lf} \nabla^j h_{lf}) - \nabla^i h^{lf} \nabla_i h_{lf}] \\
+\frac{1}{2} g_{ab} h^{lf} \nabla_l \nabla_f h &= +\frac{1}{2} g_{ab} [\nabla_j (h^{jf} \nabla_f h) - \nabla_l h^{lf} \nabla_f h].
\end{aligned}$$

Összesítésében tehát:

$$\begin{aligned}
Q_{ab} &= \frac{1}{2} \nabla_b h^{lf} \nabla_a h_{lf} + \nabla^l h_a^f (\nabla_l h_{bf} - \nabla_f h_{lb}) + \frac{1}{2} \nabla^f h (\nabla_b h_{af} + \nabla_a h_{bf} - \nabla_f h_{ba}) \\
&\quad - \frac{1}{2} g_{ab} \left[\frac{1}{2} \nabla^i h^{lf} \nabla_i h_{lf} - \nabla^l h^f{}_i \nabla_f h_{li} + \frac{1}{2} \nabla^f h (2 \nabla^i h_{if} - \nabla_f h) \right], \\
S_{ab}^j &= -h^{lj} \nabla_b h_{la} - h^{jf} \nabla_a h_{bf} + \delta_b^j h^{lf} \nabla_a h_{lf} + h^{jf} \nabla_f h_{ba} \\
&\quad + \frac{1}{2} g_{ab} (2 h^{jf} \nabla^i h_{if} - h^{lf} \nabla^j h_{lf} - h^{jf} \nabla_f h).
\end{aligned}$$

Q egy négyzetes tenzor ∂h -ban, míg S alakja $h\partial h$. Látható, hogy S -nek a divergenciája szerepel csak az egyenletben. A (65)-ös egyenlet alapján azt találjuk, hogy a nagyfrekvenciás közelítés lecsatolja a gravitációs sugárzási mezőket a forrásuktól [15]. A következő lépésben egy téridő átlagolási eljárást szeretnénk ismertetni, amelyet Brill és Hartle írt elő. Ennek oka az, hogy az effektív energia-impulzus tenzor jobban kezelhető és a későbbiekben meg tudjam mutatni azt, hogy amint végigsöpör a háttéren egy gravitációs hullám a téridőből Vaidya-téridőt hoz létre [15]. A közelítés oka az, hogy túl nagy hullámhossztartományt foglal magába a vizsgált régió. A tartomány szűkítése érdekében azt csináljuk, hogy veszünk egy olyan régiót, amely mérete kicsi ahhoz a skálához képest, amelyen a háttér változik, de független $\sigma(1)$ nagyságrendtől és ezért a sugárzás hullámhosszához képest nagy a háttér. Ez a téridő átlag az alábbi alakúra módosítja az energia-impulzus tenzort:

$$T_{ab}^{BH} = \frac{\epsilon^2}{16\pi} \langle (Q_{ab} - \nabla_l S_{ab}^l) \rangle. \quad (66)$$

A (66)-os egyenletben a $\langle \cdot \rangle$ jelöli a Brill-Hartle féle téridő átlagot. Az egyenlet további felhasználása, valamint a dolgozat folytatása az őszi félévben folytatódik.

5. Függelék

5.1. Einstein–Hilbert hatás

Ebben a részben be fogom mutatni azt a számolást, amire szükség van a a dolgozat fejlődése érdekében, de jelenleg nem járul hozzá új információval a fentebb leírtakhoz. Az Einstein-egyenletet generálja első rendben a közelítés.

Az Einstein–Hilbert-hatás:

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \tilde{R}_{ab} = \int d^4x \sqrt{-g} (g^{ab} + \epsilon h^{ad} + \epsilon^2 h^{ad}) (R_{ab} + \epsilon R_{ab} + \epsilon^2 R_{ab}).$$

A $\sqrt{-\tilde{g}}$ sorfejtése:

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \det(\tilde{g}_{ab}) = \det(g_{ab} + \epsilon h_{ab}) \\ \delta \sqrt{-\tilde{g}} &= \sqrt{-\tilde{g}} - \sqrt{-g} \\ \delta \sqrt{-g} &= \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{ab} \delta g_{ab} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{ab} \epsilon h_{ab} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \epsilon h. \\ \sqrt{-\tilde{g}} &= \sqrt{-g} (1 + \frac{\epsilon}{2} h). \end{aligned} \tag{67}$$

Tehát

$$\begin{aligned} S_{EH} &= \int d^4x \sqrt{-g} (1 + \frac{\epsilon}{2} h) (g^{ab} + \epsilon h^{ad} + \epsilon^2 h^{ad}) (R_{ab} + \epsilon R_{ab} + \epsilon^2 R_{ab}) \\ &= S_{EH(0)} + \epsilon S_{EH(1)} + \epsilon^2 S_{EH(2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{[EH]} &= \\ \int d^4x \sqrt{-g} &(g^{ab} R_{ab} + \epsilon g^{ab} R_{ab} + \epsilon^2 g^{ab} R_{ab} + \epsilon h^{ad} R_{ab} + \epsilon^2 h^{ad} R_{ab} + \epsilon^3 h^{ad} R_{ab} + \epsilon^4 h^{ad} R_{ab} \\ &+ \frac{\epsilon}{2} h g^{ab} R_{ab} + \frac{\epsilon^2}{2} h g^{ab} R_{ab} + \frac{\epsilon^3}{2} h g^{ab} R_{ab} + \frac{\epsilon^2}{2} h h^{ad} R_{ab} + \frac{\epsilon^3}{2} h h^{ad} R_{ab} + \frac{\epsilon^4}{2} h h^{ad} R_{ab} + \frac{\epsilon^3}{2} h h^{ad} R_{ab} \\ &+ \frac{\epsilon^4}{2} h h^{ad} R_{ab} + \frac{\epsilon^5}{2} h h^{ad} R_{ab}). \end{aligned}$$

Leválasztva ϵ^2 -nél magasabb rendű tagokat, majd csoportosítva őket

$$\begin{aligned} S_{EH(0)} &= \int d^4x \sqrt{-g} R, \\ S_{EH(1)} &= \int d^4x \sqrt{-g} (h_{(1)}^{ab} R_{ab} + g^{ab} R_{ab}^{(1)} + \frac{h}{2} R), \\ S_{EH(2)} &= \int d^4x \sqrt{-g} (h_{(2)}^{ab} R_{ab} + h_{(1)}^{ab} R_{ab}^{(1)} + g^{ab} R_{ab}^{(2)} + \frac{h}{2} h_{(1)}^{ab} R_{ab} + \frac{h}{2} g^{ab} R_{ab}^{(1)}). \end{aligned}$$

Behelyettesítve $h_{(1)}^{ad}$ és $h_{(2)}^{ad}$ számolt kifejezéseit:

$$\begin{aligned} S_{EH(1)} &= \int d^4x \sqrt{-g} (-h_{ij} R^{ij} + g^{ab} R_{ab}^{(1)} + \frac{h}{2} R), \\ S_{EH(2)} &= \int d^4x \sqrt{-g} (g^{li} h_{kl} h_{ij} R^{kj} - g^{ai} g^{jb} h_{ij} R_{ab}^{(1)} + g^{ab} R_{ab}^{(2)} - \frac{h}{2} h_{ij} R^{ij} + \frac{h}{2} g^{ab} R_{ab}^{(1)}). \end{aligned}$$

Az első rendű hatás variációja h_{ij} szerint

$$\delta S_{EH(1)} = \int d^4x [\delta(-\sqrt{-g} h_{ij} R^{ij}) + \delta(\sqrt{-g} g^{ab} R_{ab}^{(1)}) + \delta(\sqrt{-g} \frac{h}{2} R)]$$

$g^{ab} R_{ab}^{(1)}$ variációja:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \delta [g^{ab} g^{ij} (\nabla_j \nabla_a h_{ib} + \nabla_j \nabla_b h_{ia} - \nabla_j \nabla_i h_{ab} - \nabla_b \nabla_a h_{ij})] \\ &\frac{1}{2} \delta [(\nabla_j \nabla_a g^{ab} g^{ij} h_{ib} + \nabla_j \nabla_b g^{ab} g^{ij} h_{ia} - \nabla_j \nabla_i g^{ab} g^{ij} h_{ab} - \nabla_b \nabla_a g^{ab} g^{ij} h_{ij})]. \end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \nabla_j \nabla_a g^{ab} g^{ij} h_{ib} = \frac{1}{2} \nabla_j (g^{ab} \nabla_a g^{ij} h_{ib}) + \frac{1}{2} \nabla_j (g^{ij} \nabla_a g^{ab} h_{ib}) - \frac{1}{2} \nabla_j g^{ab} \nabla_a g^{ij} h_{ib} - \frac{1}{2} \nabla_j g^{ij} \nabla_a g^{ab} h_{ib}.$$

Mivel fentebb beláttuk, hogy $\nabla_j g^{ab} = 0$, ezért ezek variációja is 0 lesz. A maradék két tag pedig négyesdivergencia $(g^{ab}\nabla_a g^{ij}h_{ib}) = V^j$. Felhasználjuk a következő segédösszefüggést:

$$\nabla_j V^j = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j(\sqrt{-g}V^j). \quad (68)$$

Bizonyítás:

$$\nabla_j V^j = \partial_j V^j + \Gamma_{jk}^j V^k = \partial_j V^j + (\frac{1}{2}g^{jl}[\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}])V^k.$$

Itt g^{jl} szimmetrikus (jl)-ben, viszont $\partial_j g_{kl} - \partial_l g_{jk}$ (jl)-ben antiszimmetrikus.

$$= \partial_j V^j + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{jl}\partial_k g_{jl}V^k = \partial_j V^j + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j(\sqrt{-g}V^j) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j(\sqrt{-g}V^j).$$

Számolás folytatása:

$$\begin{aligned} & \int_V d^4x \sqrt{-g} \nabla_j (g^{ab} \nabla_a g^{ij} h_{ib}) \\ &= \int_V d^4x \partial_j (\sqrt{-g} g^{ab} \nabla_a g^{ij} h_{ib}). \end{aligned}$$

Gauss-tételt alkalmazva:

$$= \int_{\partial V} d^3x n_j (\sqrt{-g} g^{ab} \nabla_a g^{ij} h_{ib}) = 0,$$

ahol n_j a normális. Ha a határon nincs transzport, akkor ennek értéke zérus. Tehát a variáció a következő lesz, felhasználva $\delta\sqrt{-g}$ fentebb levezetett eredményét, valamint, hogy δR_{ab} a határon eltűnő négyesdivergencia:

$$\frac{\delta S_{EH(1)}}{\delta g^{ij}} = \int d^4x \sqrt{-g} (R_{ij} h - \frac{h}{2} g_{ij} R).$$

Mivel $\frac{\delta S_{EH(1)}}{\delta g^{ij}} = 0$, ezért:

$$0 = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R. \quad (69)$$

Tehát az Einstein-Hilbert hatás variációja felső indexes háttér metrika szerint a vákuum Einstein-egyenletet adja végeredményképpen, viszont a másodrendű variációt ebben a szemeszterben fogom elvégezni, erről a dolgozatban nem esik szó.

6. Összegzés, kitekintés

TDK dolgozatomban a gravitációs hullámokkal és azok sajátosságaival foglalkoztam. A dolgozat fejezeteit aszerint alakítottam ki, hogy melyek azok a legfontosabb számítási feladatok, melyek logikai sorrendben pontos leírást adnak a gravitációs hullámokról és kapcsolatukról a téridő geometriájával. A dolgozat logikai felépítését követve az első részben bevezetőként az elektromágneses hullámokról volt szó, a témán belül az a lényegi rész lett hangsúlyozva, miszerint az elektromágneses hullámok polarizációs négyesvektora invariáns egy z -tengely körüli, $(x-y)$ síkbeli forgatásra. A forgatás elvégzése után az ilyen invariáns elektromágneses hullámok (fotonok) helicitása 1. A helicitás hasonló mennyiség, mint a spin annyi különbséggel, hogy az előbbi tömeg nélküli részecskék esetén értendő. Hasonló következtetést lehet levonni gravitációs hullámokra is. Ennek bemutatására szolgált a gyengetér-közelítés. A Minkowski metrikától való kicsi eltérés (h_{ab} perturbáció) segítségével sikerült egy olyan hullámegyenletet megadni, ami hasonló megoldással szolgál, mint az elektromágneses hullámegyenlet, emiatt lehet köztük analógiát felállítani. A hullámegyenlet megoldására azonban alkalmazni kellett a harmonikus koordináta feltételt a polarizációs tenzor komponenseinek megadására. A feltétel három különböző alakjának bemutatását külön alfejezetben részleteztem. A polarizációs tenzor végső alakját az indexek lehetséges kiírása segítségével értem el. Hasonlóan az elektromágneses hullámoknál alkalmazott z -tengely körüli forgatás hatására beláttam, hogy a hullámegyenletet kielégítő gravitációs hullámok helicitása 2. Ez azért van, mert egy szimmetrikus kétindexes tenzor írja le. Végezetül arra jutottam, hogy hullám megoldás egy szinuszosan terjedő gravitációs perturbáció.

A második fejezetben a hangsúly a nagyfrekvenciás közelítésen volt, melyben egy perturbált metrika segítségével hosszadalmas számolások után előálltak a Ricci-tenzorok. Ezután ϵ -ban (kicsi paraméter, ami biztosítja, hogy a geometriának fluktuációi legyenek) a perturbált tenzorok táblázatba lettek foglalva, amiből látható, hogy a háttér görbületének változása lassabb, mint a perturbáció által okozott változások, emiatt a Ricci-tenzor sorfejtésében rendcsúszás történik. Emiatt az első rendű Ricci-tenzor generálja a gravitációs hullámokat, míg a másodrend megmutatja hogyan hat vissza a hullám a téridő geometriájára. Hasonló időigényes számolás után előálltak geometriai optikai közelítésben a Riemann-tenzorok is. A továbbhaladás során megvizsgáltam hogyan hat egy infinitezimális koordináta transzformáció a metrikára, valamint a mértékinvariánciát. Ennek eredménye az lett, hogy a Riemann- és a Ricci-tenzorok elsőrendű perturbációja mértékinvariáns. Ez azért fontos, mert az első rend felelős a gravitációs hullámokért, továbbá az elsőrendű perturbált Ricci-tenzornak a hullámegyenlet miatt kell mértékinvariánsnak lennie. A Riemann-tenzor pedig a gravitációt fejezi ki. Ha van gravitációs hullám, akkor a Riemann-tenzor nagy, ha nincsen, akkor kicsi. Folytatásként a hullámegyenlet előállítását történt meg, amihez a spúrinvertált tenzormezőt alkalmaztam. Az így alkotott hullámegyenletből az látszik, hogy az utolsó három tagja felel a háttér görbületéért. Ha a téridő Minkowski, akkor az utolsó 3 tag nulla, valamint a kovariáns deriváltak helyett parciális deriváltak szerepelnek. A maradék négy tagból az utolsó három eltüntethető a harmonikus koordináta feltétel segítségével, valamint az első a d'Alembert operátor. A fejezet a hullámegyenlet részletes vizsgálatával ért véget. Ehhez felhasználtam, hogy a spúrinvertált tenzormező divergenciamentes és spúrmentes, így előállt a Lichnerowicz-féle d'Alembert operátor. Végezetül rendekre bontva kerestem meg a hullámegyenlet hullám megoldásait a 3.7. fejezetben. A megoldás eredményeként a vezető rend kifejezi, hogy a gravitációs hullám null geodetikusan terjed, fényszerű. Következő rendben pedig látható, hogy ugyanazt a kétindexes szimmetrikus tenzort kaptuk nagyfrekvenciás-közelítésben, mint a gyengetér-közelítés esetén. Levonható tehát az a következmény, hogy a görbület nem változtatja meg a polarizációs tenzor komponenseket lineáris rendben és nem hoz be új komponenseket sem.

A harmadik fejezet a TDK dolgozatom jelenlegi állása szerint nem teljes, de a jelenleg is tartó félév során befejezésre kerül. Ennek ellenére sikerült megvizsgálni a másodrendű Einstein-egyenletet nagyfrekvenciás közelítésben, melynek jobb oldala hasonlít az energia-impulzus tenzorra. Alakja a tenzornak két részből tevődik össze, magából a mezőből és annak forrásából. A forrás lecsatolódott a mezőről, melynek oka az, hogy csak a divergenciája szerepel az egyenletekben. A dolgozat a Brill-Hartle átlagolási eljárással fog folytatódni, hiszen ennek a módszernek a segítségével lehet megmutatni, hogyha végigsöpör egy gravitációs hullám a téridő geometriáján, akkor abból Vaidya-téridőt hoz létre.

Célom, hogy megvizsgáljam a hengerszimmetrikus gravitációs hullámokat is, hasonlóan a gömbszimmetrikus esethez, a témát szeretném a lehető legkörültekintőbb módon körüljárni, a kapott új eredményeket szakcikk formájában közzé tenni. Fontos még megemlíteni, hogy a Birkhoff-tétel miatt nem létezhet gömbszimmetrikus gravitációs hullám, de ebben a közelítésben arról van szó, hogy sok gravitációs hullámot egy pontba gyűjtünk össze, melyek külön-külön nem, de együtt összességében gömbszimmetrikusak. A hullámok egy pontba "söprését" egy bivektor vagy pedig egy konnexió segítségével fogom megvalósítani majd ezt követően végzem el a téridő átlagolási eljárást a korábban kiszámolt (66)-os egyenletben is szereplő energia-impulzus tenzornak a forrást tartalmazó részére. További hosszadalmas számolások segítségével pedig sikerülhet a Vaydia-téridőt előállítani. Hengerszimmetrikus gravitációs hullámok hatását pedig az őszi félév során fogom megvizsgálni hogyan fognak visszahatni a téridő geometriájára. Bízok benne, hogy ebben a félévben sikerül minden korábban említett célkitűzést teljesítenem és mélyebb betekintést nyernem az általános relativitáselmélet gravitációs hullámokkal foglalkozó részébe.

7. Hivatkozások

Hivatkozások

- [1] N. Rosen, A. Einstein: *On gravitational waves*. Journal of the Franklin Institute 223 (1): 43–54 (1937).
- [2] K. S. Thorne: *"A toroidal solution of the vacuum Einstein field equations"*. J. Math. Phys. 16, 1860 (1975)
- [3] Barry C. Barish and Rainer Weiss: *"LIGO and the Detection of Gravitational Waves"*. Phys. Today 52, 44 (1999)
- [4] Barry C. Barish: *"First generation interferometers"*. AIP Conf. Proc. 575, 3 (2001)
- [5] <https://www.ligo.org/science/Publication-03bCatalog/>
- [6] R. Genzel, F. Eisenhauer, and S. Gillessen: *"The Galactic Center massive black hole and nuclear star cluster"*. Rev. Mod. Phys. 82, 3121(2010).
- [7] S. Weinberg: *Gravitation And Cosmology: Principles And Applications Of The General Theory Of Relativity*. Cambridge University Press, 2008.
- [8] Gergely Á. L.: *Relativitáselmélet alapjai című kurzus* (2020)
- [9] Nagy C: *Általános relativitáselmélet alapjai című kurzus* (2021)
- [10] Gergely Á. L., Keresztes Z: *Matematikai módszerek a fizikában II. című kurzus* (2020)
- [11] R. A. Isaacson: *Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics*. University of Maryland, 1967.
- [12] R. M. Wald: *General Relativity* Chicago: University of Chicago Press (1984)
- [13] C. Lanczos: *Local irregularities in an expanding universe* 31,112 (1925)
- [14] M.P. Hobson, G. Efstathiou, A.N. Lasenby *General Relativity: An introduction for Physicists* Cambridge University Press 2006.
- [15] R. A. Isaacson: *Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor**. University of Maryland, 1968.