

Gömbszimmetrikus téridők nagyfrekvenciás sugárzás jelenlétében

Tudományos Diákköri Konferencia Dolgozat

Készítette:
Kovács Ádám
Fizika BSc hallgató

Témavezető:
Prof. Dr. Gergely Árpád László

Elméleti Fizika Tanszék
Természettudományi és Informatikai Kar
Szegedi Tudományegyetem



2022 Szeged

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés és célkitűzés	3
2. Fényszerű koordinátákat tartalmazó koordinátarendszerek	4
2.1. Eddington–Finkelstein koordináták	4
2.2. Kruskal–Szekeres koordináták	6
3. Gömbszimmetrikus téridők Einstein-egyenlete	7
4. Az Einstein-egyenletek vákuummegoldása	10
5. Vaidya-téridő	13
5.1. Bevezető	13
5.2. A null por kettős fényszerű koordinátákban	14
5.3. Einstein-egyenletek egyszerűsítése	14
5.4. Az Einstein-egyenletek egzakt megoldásai	15
5.4.1. Lineáris tömegfüggvény	15
5.4.2. Exponenciális tömegfüggvény	20
6. A tömegfüggvény interpretációja	22
6.1. Koordináta transzformáció	22
6.2. Lineáris tömegfüggvény	23
6.3. Exponenciális tömegfüggvény	25
7. Elektromosan töltött Vaidya-téridő	27
8. Összegzés	30
9. Köszönetnyilvánítás	31

1. Bevezetés és célkitűzés

Az általános relativitáselmélet a gravitáció geometriai elmélete, amely azt téridő-görbület-ként kezeli. A gravitáció forrása minden anyag és energiaforma, melyek energia-impulzus tenzora az Einstein-egyenleten keresztül határozza meg a gravitációt. A pontos kapcsolatot az Einstein-féle mezőegyenlet határozza meg, amely másodrendű nemlineáris parciális differenciálegyenletek rendszere. Nagyban egyszerűsíti ezek tárgyalását a gömbszimmetria feltevése.

Az egyik legegyszerűbb energia-impulzus tenzor a nagyfrekvenciás vagy geometriai optikai közelítésben sugárzást leíró null por. Ebben a közelítésben a sugárzás hullámhossza jóval kisebb a téridő görbületi sugaránál, így a sugárzási mező belső fejlődése nincs hatással a gravitáció dinamikájára. A null por emiatt tekinthető fénysebességgel terjedő tetszőleges polarizációjú, egyirányú hullámok inkoherens szuperpozíciójának. Ez geometriai optikai közelítésben modellez elektromágneses vagy gravitációs hullámokat, illetve neutrínó sugárzást [1].

A null por által generált gömbszimmetrikus téridőt Prahalad Chunnial Vaidya találta 1943-ban [2]. Alakja emlékeztet az Eddington–Finkelstein koordinátákban felírt Schwarzschild-téridőre, viszont míg a Schwarzschild-téridőben a tömeg állandó értékű, addig itt egy advanszált vagy retardált idő függvénye. Előbbi esetben a tömegfüggvény monoton növekszik, amit befele haladó sugárzás okoz. Utóbbi esetben a tömegfüggvény csökkenő, a sugárzás kifelé halad, ez egy sugárzó égitest külső tartományát írja le.

A Vaidya-téridő esetén a sugárzás következtében a tömeg dinamikusan változik, ezért a téridő alkalmas gravitációs összeomlások [3] és a már kialakult fekete lyukak horizontjainak vizsgálatára [4]. A téridőt Viqar Husain olymódon általánosította [5], hogy energia-impulzus tenzora a null por mellett egy I-es típusú anizotróp folyadékot is tartalmazzon. Ennek egyik határeset az elektromosan töltött Vaidya-téridő, amely a töltéssel rendelkező besugárzott és kisugárzó égitesteket modellezi.

Míg a Schwarzschild-téridő egyaránt felírható idő- és térkoordináta, null- (fényszerű-) és térkoordináta vagy két null koordináta segítségével, a Vaidya-téridő dupla null koordinátás alakja csak speciális (lineáris vagy exponenciális) tömegfüggvény esetén ismert [6] [7]. A dupla null alak fontossága a téridő kauzális szerkezetének vizsgálatában fontos.

Tudományos Diákköri Konferencia dolgozatomban reprodukáltam a Vaidya-téridő dupla null koordinátákba transzformálásának menetét, melynek részletei nem találhatók meg a szakirodalomban. Ennek célja kettős volt. Egyrészt szeretném megvizsgálni, hogy vannak-e más tömegfüggvények is, melyek esetén lehetséges a transzformáció. Másrészt szeretnék olyan tömegfüggvényt találni, aminél a transzformáció végrehajtható a Vaidya-téridő legegyszerűbb általánosításában, az elektromosan töltött Vaidya-téridőben. Ezek a vizsgálatok folyamatban vannak.

2. Fényszerű koordinátákat tartalmazó koordinátarendszerek

Az Einstein-egyenletek megoldásaiban a téridő egy négy dimenziós differenciálható sokaságként szemléltethető, amely leírása a metrikus tenzorral (g) történik. A metrikus tenzor segítségével megadható két infinitezimálisan közeli pont „távolsága”, az ívelemnégyszet ($ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b$). Ennek a koordinátáit, szemléletessége miatt gyakran (t, r, φ, θ) gömbi koordinátákban szokták megadni, ahol t az idő-, r a radiális-, φ és θ pedig a két szögkoordináta.

Ezen koordinátákkal azonban kialakulhatnak koordináta-szingularitások. Schwarzschild-téridő esetén az ívelemnégyszet a

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \quad (1)$$

alakban áll elő [8], ahol $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ az egységsugarú gömb ívelemnégyszete, G a gravitációs állandó, c a fénysebesség, m pedig a tömegpont tömege. Ebben az esetben szingularitás alakul ki $r = 0$ pontban, $r = \frac{2Gm}{c^2} = r_s$ Schwarzschild-sugárnál valamint $\theta = 0, \pi$ helyeken. A Kretschmann-skalár

$$\mathcal{K} = R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (2)$$

szinguláris az origóban ($M = \frac{Gm}{c^2}$ hosszúság dimenziójú tömeg). Mivel a skalárok értéke koordinátarendszer független, emiatt $r = 0$ pontban található szingularitás valódi. Schwarzschild-sugárnál viszont a Kretschmann-skalár és a többi Riemann-tenzorból képezhető skalár is reguláris, ott csak koordináta-szingularitás található. A $\theta = 0, \pi$ helyeken található szingularitások a gömbi koordináták használata miatt jelennek meg, azok Descartes-koordináták használatával eltüntethetők. A Schwarzschild-sugar által meghatározott gömb a Schwarzschild-téridő eseményhorizontja. Az itt található koordináta szingularitás megszüntetéséhez új koordinátakészletet vezettek be.

2.1. Eddington–Finkelstein koordináták

Az új koordinátakészlet bevezetéséhez első lépésként bevezetünk egy új radiális koordinátát, a teknőc-koordinátát (r_*), amit a teljes differenciális alakjával definiálunk [8]:

$$dr_* = \frac{dr}{1 - \frac{2Gm}{c^2 r}} \quad (3)$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása előáll

$$r_* = r + \frac{2Gm}{c^2} \ln \left| \frac{c^2 r}{2Gm} - 1 \right| \quad (4)$$

alakban. Segítségével bevezethetők $u = ct - r_*$ retardált idő és $v = ct + r_*$ advanzsált idő null koordináták. A null koordinátákat tartalmazó koordináta rendszer esetén, két olyan pont között, amik csak egy null koordinátában különböznek a metrika hossznégyszete nulla,

emiatt fényyszerű koordinátának is nevezik őket. Az ívelemnégyszet (t, r) koordinátáit átírva (u, v) koordinátába

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dudv + r^2 d\Omega_2^2 \quad (5)$$

ívelemnégyszetet kapjuk [8], ami (t, r) koordinátákhoz hasonlóan csak a külön-külön tudja lefedni a Schwarzschild-sugárnál kisebb és nagyobb tartományokat, ugyanis a metrikájának az inverze

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} -c^{-2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (6)$$

szinguláris az eseményhorizonton.

Ha csak az egyik fényyszerű koordinátát használjuk fel, akkor megszüntethető ez a szingularitás. Az ívelemnégyszet (t, r) koordinátáit átírva (u, r) vagy (v, r) koordinátákra megkapjuk a téridő alakját Eddington–Finkelstein koordinátákban [9] [10]. A két eset együtt tárgyalható a

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dw^2 + 2\varepsilon dw dr + r^2 d\Omega_2^2 \quad (7)$$

alakban, ahol $\varepsilon = 1$, ha $w \equiv v$ és $\varepsilon = -1$, ha $w \equiv u$. Megvizsgálva a radiálisan mozgó ($d\theta = 0 = d\varphi$) fotonok ($ds^2 = 0$) mozgásegyenletét [8]

$$0 = \left[2\varepsilon dr - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dw \right] dw \quad (8)$$

a fotonpályákra azt kapjuk, hogy

$$w = konst., \quad \frac{dr}{dw} = \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (9)$$

Avanzsált Eddington–Finkelstein koordináták használata esetén a befelé menő fotonok a $v = \text{állandó}$ hiperfelületen haladnak a centrum felé, nehézség nélkül lépik át a Schwarzschild-sugarat. A kifelé menő fénysugarak radiális koordinátái Schwarzschild-sugárnál azonban nem változnak az avanzsált idő telésével ($\frac{dr}{dv} = 0$), a foton nem halad kifelé. A Schwarzschild-sugáron belül pedig az erős téridő-görbület hatására a radiálisan kifelé igyekvő fotonok is befelé haladnak. Ez a koordinátaválasztás leírja a teljes fekete lyuk téridőt.

Retardált Eddington–Finkelstein koordináták használata esetén a kifelé haladó fotonok az $u = \text{állandó}$ hiperfelületen haladnak, azok akadály nélkül jutnak át az eseményhorizonton. A befelé haladó fotonok radiális koordinátája viszont az eseményhorizonthoz közelítve egyre kisebb mértékben változik a retardált idő telésével, nem képes áttörni az eseményhorizonton. Ez a koordinátaválasztás leírja a teljes fehér lyuk téridőt. A fehér lyuk egy időben megfordított fekete lyuk.

2.2. Kruskal–Szekeres koordináták

A Schwarzschild-téridő eredeti (t, r) koordinátákat tartalmazó alakja kétféleképpen is kiterjeszthető a horizonton keresztül (advanzsált Eddington–Finkelstein koordináták esetén fekete lyukká, retardált Eddington–Finkelstein koordináták esetén pedig fehér lyukká). Kruskal [11] és Szekeres [12] 1960-ban függetlenül publikált olyan koordinátákat, amelyekkel ezek a kiterjesztések egyszerre elvégezhetőek.

Az (U, V) Kruskal–Szekeres koordináták a következő módon definiálhatóak:

$$\begin{aligned} UV &= \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{\frac{r}{2M}}, \\ \frac{V}{U} &= \text{sign} \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{\frac{t}{2M}}. \end{aligned} \quad (10)$$

A definíció segítségével U és V koordináták kifejezhetőek az advanzsált és retardált idő koordináták segítségével

$$U = \pm e^{-\frac{u}{4M}}, \quad V = \pm e^{\frac{v}{4M}} \quad (11)$$

Ezek az advanzsált és retardált időhöz hasonlóan null koordináták. Míg (u, v) koordináták egyszerre csak az eseményhorizont egyik oldalán található téridő-tartományt fedik le, addig az (U, V) Kruskal–Szekeres koordináták képesek a teljes téridő lefedésére. Ez azért lehetséges, mert minden (u, v) párhoz négyféle (U, V) pár tartozik. A különböző előjel-kombinációk adják meg a Schwarzschild-megoldás maximális kiterjesztését.

Az ívelemnégyszet Kruskal–Szekeres koordinátákban

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV + r^2 d\Omega_2^2 \quad (12)$$

alakú.

Az állandó r hiperfelületeket (10) első egyenletéből az $UV = \text{állandó}$ hiperboloidok adják. Emiatt az $r = 0$ szingularitást $UV = 1$ végtelen hosszú hiperbolák jelképezik. Hogy a szingularitás ne legyen végtelen hosszúként jelölve, bevezethetők új null koordináták

$$\tilde{U} = \arctan U, \quad \tilde{V} = \arctan V \quad (13)$$

alakban, ami esetén az ívelemnégyszet

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{2M}{\cos \tilde{U} \cos \tilde{V}} \right)^2 d\tilde{s}^2 \\ d\tilde{s}^2 &= -8Me^{\frac{r}{2M}} d\tilde{U} d\tilde{V} + \left(\frac{r}{2M} \right)^2 \cos^2 \tilde{U} \cos^2 \tilde{V} d\Omega_2^2 \end{aligned} \quad (14)$$

formában írható fel, ahol $d\tilde{s}^2$ a Schwarzschild-metrikával konformis kapcsolatban álló tér-idő ívelemnégyszete [8]. Mivel az új fényszerű koordináták értelmezési tartománya véges $\tilde{U}, \tilde{V} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, így a téridő teljes egészében ábrázolható egy véges helyen. Ez a Schwarzschild-téridő Penrose diagramja [13, 8.4 fejezet].

Tehát a két fényszerű koordináta bevezetése azért hasznos a téridő szerkezetének vizsgálatához, mert választhatóak olyan fényszerű koordináták, ami esetén a téridő teljes egészében a fénysugarak 45° -ban futnak, így a fénykúp [14] alakja minden pontban azonos. Ez hasznos a téridő kauzális szerkezetének vizsgálatához. A Schwarzschild téridő dupla null koordináták segítségével terjeszthető ki maximálisan, így más téridők maximális kiterjesztésének keresésekor is érdemes a számolások során figyelembe venni a két fényszerű koordinátát tartalmazó koordinátarendszerek vizsgálata.

3. Gömbszimmetrikus téridők Einstein-egyenlete

Ebben a fejezetben a gömbszimmetrikus téridők egy általános alakjának számoljuk ki a fontos mennyiségeit, amelyeken keresztül az Einstein-tenzorhoz juthatunk. Az Einstein-tenzor segítségével, ha egy téridő energia-impulzus tenzora adott meghatározható az adott téridő metrikájának alakja dupla null koordinátákkal.

Gömbszimmetrikus téridő két fényszerű koordinátát tartalmazó metrikájában az ívelemnégyzet a következő alakot veszi fel [7]:

$$ds^2 = -2f(u, v) du dv + r^2(u, v) d\Omega^2 \quad (15)$$

ahol $f(u, v)$ és $r(u, v)$ az u és v null koordináták függvénye. Az ívelemnégyzetből leolvasható a metrika (u, v, θ, φ) koordinátákban érvényes alakja

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -f & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (16)$$

melynek inverze:

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{f} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (17)$$

A metrikából és inverzéből képezhető

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ai} (\partial_b g_{ic} + \partial_c g_{ib} - \partial_i g_{bc}) \quad (18)$$

Christoffel-szimbólum, amelyek adott metrika esetén a következő alakot veszik fel:

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \frac{f_{,u}}{f}, & \Gamma_{u\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta u}^\theta = \frac{r_{,u}}{r}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^u &= \frac{rr_{,v}}{f}, & \Gamma_{v\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta v}^\theta = \frac{r_{,v}}{r}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^u &= \frac{rr_{,v}}{f} \sin^2 \theta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{vv}^v &= \frac{f_{,v}}{f}, & \Gamma_{u\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi u}^\varphi = \frac{r_{,u}}{r}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^v &= \frac{rr_{,u}}{f}, & \Gamma_{v\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi v}^\varphi = \frac{r_{,v}}{r}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^v &= \frac{rr_{,u}}{f} \sin^2 \theta, & \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \end{aligned} \quad (19)$$

ahol a vesszőt követő index deriváló indexet jelöl ($_{,a} \equiv \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a}$).

A Riemann-tenzort a

$$R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{ci}^a \Gamma_{bd}^i - \Gamma_{di}^a \Gamma_{bc}^i \quad (20)$$

összefüggéssel képezzük. Ennek a nemeltűnő komponensei:

$$\begin{aligned} R^\theta{}_{uu\theta} &= -R^\theta{}_{u\theta u} = R^\varphi{}_{uu\varphi} = -R^\varphi{}_{u\varphi u} = \frac{1}{r} \left(r_{,uu} - \frac{r_{,u} f_{,u}}{f} \right), \\ R^\theta{}_{vv\theta} &= -R^\theta{}_{v\theta v} = R^\varphi{}_{vv\varphi} = -R^\varphi{}_{v\varphi v} = \frac{1}{r} \left(r_{,vv} - \frac{r_{,v} f_{,v}}{f} \right), \\ R^u{}_{\theta v\theta} &= -R^u{}_{\theta\theta v} = R^u{}_{\varphi v\varphi} \sin^{-2} \theta = -R^u{}_{\varphi\varphi v} \sin^{-2} \theta = \frac{r}{f} \left(r_{,vv} - \frac{r_{,v} f_{,v}}{f} \right), \\ R^v{}_{\theta u\theta} &= -R^v{}_{\theta\theta u} = R^v{}_{\varphi u\varphi} \sin^{-2} \theta = -R^v{}_{\varphi\varphi u} \sin^{-2} \theta = \frac{r}{f} \left(r_{,uu} - \frac{r_{,u} f_{,u}}{f} \right), \\ R^\theta{}_{uv\theta} &= R^\theta{}_{vu\theta} = -R^\theta{}_{u\theta v} = -R^\theta{}_{v\theta u} = \frac{r_{,uv}}{r}, \\ R^\varphi{}_{uv\varphi} &= -R^\varphi{}_{u\varphi v} = R^\varphi{}_{vu\varphi} = -R^\varphi{}_{v\varphi u} = \frac{r_{,uv}}{r}, \\ R^u{}_{\theta\theta u} &= -R^u{}_{\theta u\theta} = R^v{}_{\theta\theta v} = -R^v{}_{\theta v\theta} = -\frac{rr_{,vu}}{f}, \\ R^u{}_{\varphi\varphi u} &= -R^u{}_{\varphi u\varphi} = R^v{}_{\varphi\varphi v} = -R^v{}_{\varphi v\varphi} = -\frac{rr_{,vu}}{f} \sin^2 \theta, \\ R^\theta{}_{\varphi\theta\varphi} \sin^{-2} \theta &= -R^\theta{}_{\varphi\varphi\theta} \sin^{-2} \theta = -R^\varphi{}_{\theta\theta\varphi} = R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta} = \left(1 + \frac{2r_{,v} r_{,u}}{f} \right), \\ R^u{}_{uvu} &= -R^u{}_{uuv} = R^v{}_{vuv} = -R^v{}_{vvu} = \frac{f_{,uv}}{f} - \frac{f_{,u} f_{,v}}{f^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

Az ebből képzett Ricci-tenzor komponensek

$$\begin{aligned} R_{uu} &= \frac{2}{r} \left(\frac{r_{,u} f_{,u}}{f} - r_{,uu} \right), \\ R_{vv} &= \frac{2}{r} \left(\frac{r_{,v} f_{,v}}{f} - r_{,vv} \right), \\ R_{\theta\theta} &= R_{\varphi\varphi} \sin^{-2} \theta = \frac{2(r r_{,uv} + r_{,u} r_{,v})}{f} + 1, \\ R_{uv} &= R_{vu} = \frac{1}{f} \left(\frac{f_{,u} f_{,v}}{f} - f_{,uv} \right) - \frac{2r_{,uv}}{r}, \end{aligned} \quad (22)$$

ahol a Ricci-tenzort a következő alakban számoltuk ki:

$$R_{ab} = R^c{}_{acb}. \quad (23)$$

A metrika görbületi skalárja pedig

$$R = g^{ab} R_{ab} \quad (24)$$

összefüggés alapján a következőként áll elő:

$$R = \frac{2}{f^2} \left(f_{,uv} - \frac{f_{,u} f_{,v}}{f} \right) + \frac{2}{r^2} \left(\frac{2(2rr_{,uv} + r_{,u} r_{,v})}{f} + 1 \right). \quad (25)$$

Mindezek alapján a

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab} \quad (26)$$

Einstein-tenzor komponensei

$$\begin{aligned} G_{uu} &= \frac{2}{r} \left(\frac{r_{,u} f_{,u}}{f} - r_{,uu} \right), \\ G_{vv} &= \frac{2}{r} \left(\frac{r_{,v} f_{,v}}{f} - r_{,vv} \right), \\ G_{\theta\theta} &= G_{\varphi\varphi} \sin^{-2} \theta = \frac{r^2}{f^2} \left(\frac{f_{,u} f_{,v}}{f} - f_{,uv} \right) - \frac{2rr_{,uv}}{f}, \\ G_{vu} &= G_{uv} = \frac{f + 2(rr_{,uv} + r_{,u} r_{,v})}{r^2} \end{aligned} \quad (27)$$

lesznek.

Ezek tehát egy tetszőleges gömbszimmetrikus téridő Einstein-tenzor komponensei.

4. Az Einstein-egyenletek vákuummegoldása

Schwarzschild-téridő esetén, mivel az egy vákuum megoldása az Einstein-egyenleteknek, T_{ab} energia-impulzus tenzor minden komponense 0 értéket vesz fel. Az egzakt megoldás előállításához tehát a következő 4 egyenletből álló csatolt differenciálegyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\frac{2}{r} \left(\frac{r_{,u} f_{,u}}{f} - r_{,uu} \right) = 0, \quad (28a)$$

$$\frac{2}{r} \left(\frac{r_{,v} f_{,v}}{f} - r_{,vv} \right) = 0, \quad (28b)$$

$$\frac{r^2}{f^2} \left(\frac{f_{,u} f_{,v}}{f} - f_{,uv} \right) - \frac{2rr_{,uv}}{f} = 0, \quad (28c)$$

$$\frac{f + 2(r r_{,uv} + r_{,u} r_{,v})}{r^2} = 0, \quad (28d)$$

ami 2 függő és 2 független változót tartalmaz. Az egyenletrendszer egyszerűsítése érdekében először az (28a) egyenletet fogjuk átalakítani, majd u szerint integrálni:

$$\begin{aligned} \frac{f_{,u}}{f} &= \frac{r_{,uu}}{r_{,u}}, \\ \ln f &= \ln r_{,u} + \ln A^2(v), \\ 2A(v)r_{,u} &= f, \end{aligned} \quad (29)$$

ahol $A(v)$ egy tetszőleges függvénye v -nek.

Hasonló módon (28b)-ből

$$2B(u)r_{,v} = f \quad (30)$$

egyenlet áll elő, ahol $B(u)$ egy tetszőleges függvénye u -nak.

Felhasználva az (28a) egyenlet átrendezett alakját

$$r_{,uu} = \frac{r_{,u} f_{,u}}{f}$$

a (28c) egyenlet u változó szerinti deriváltjában, majd azt integrálva u -val a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{r^2 r_{,uv}}{f} + \mu(v) = 0, \quad (31)$$

ahol $\mu(v)$ tetszőleges függvénye v -nek

A (28b) egyenlet hasonlóan átrendezett alakját felhasználva (28c) v változó szerinti deriváltjából a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{r^2 r_{,uv}}{f} + n(u) = 0, \quad (32)$$

ahol $n(u)$ tetszőleges függvénye u -nak. A (31) és (32) egyenletek összevetéséből

$$n(u) = \mu(v) = \mu \quad (33)$$

összefüggést kapjuk, tehát m és n integrációs függvények konstansok.

A (31) egyenletbe behelyettesítve (29) és (28d) egyenletet

$$r_{,v} = -A(v) \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \quad (34)$$

összefüggést kapjuk, amit (30) egyenletbe behelyettesítve $f(u, v)$ függvény

$$f = -2A(v)B(u) \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \quad (35)$$

alakot veszi fel. Ahhoz, hogy egzakt eredményt kapjunk, $A(v)$ és $B(u)$ értékét kell megválasztanunk, amit több különböző módon meg lehet tenni.

A legegyszerűbb esetben mindkét függvényt konstansnak választjuk a következő módon:

$$A(v) = \frac{1}{2}, \quad B(u) = -\frac{1}{2}. \quad (36)$$

Ekkor a metrika a következő módon írható fel

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dudv + r^2 d\Omega_2^2 \quad (37)$$

ami megegyezik a Schwarzschild-téridő ismert (5) egyenletben leírt dupla null koordinátás alakjával, ha $\mu \equiv M$ tömeg.

A következő esethez először helyettesítsük be (32) egyenletbe (30) és (28d) egyenletet.

$$r_{,u} = -B(u) \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \quad (38)$$

A (34) és (38) egyenlet szétválasztható változójú differenciálegyenletek, amelyeket formálisan megoldva

$$\begin{aligned} \int \frac{dr}{1 - \frac{2\mu}{r}} &= - \int A(v) dv + C(u), \\ \int \frac{dr}{1 - \frac{2\mu}{r}} &= - \int B(u) du + D(v), \end{aligned}$$

ahol $C(u)$ és $D(v)$ tetszőleges függvénye u -nak illetve v -nek. Észrevehetjük, hogy az egyenletek $r(u, v)$ -t tartalmazó oldala megegyezik. Emiatt a következő összefüggés írható fel rájuk:

$$- \int A(v) dv + C(u) = - \int B(u) du + D(v) \quad (39)$$

amiből következik, hogy $C_{,u} = -B(u)$ és $D_{,v} = -A(v)$, tehát az integrál a következő alakban írható fel:

$$\int \frac{dr}{1 - \frac{2\mu}{r}} = - \int A(v) dv - \int B(u) du + K, \quad (40)$$

ahol K egy integrációs konstans. $K = 0$ esetet tekintve $A(v)$ és $B(u)$ megválaszthatóak a következő módon:

$$\begin{aligned} A(v) &= -\frac{2\mu}{v}, \\ B(u) &= \frac{2\mu}{u}. \end{aligned} \quad (41)$$

Ezekkel a függvényekkel (40) integrálást elvégezre $uv > 0$, $r < 2\mu$ választásokkal uv szorzatra a következő összefüggést kapjuk:

$$\left(1 - \frac{r}{2\mu}\right) e^{\frac{r}{2\mu}} = uv. \quad (42)$$

A (42) összefüggést visszahelyettesítve (35) egyenletbe $f(u, v)$ függvényre

$$f = \frac{16\mu^3}{r} e^{-\frac{r}{2\mu}}$$

összefüggés adódik, ami alapján az ívelemnégyszet

$$ds^2 = \frac{32\mu^3}{r} e^{-\frac{r}{2\mu}} du' dv' + r^2 d\Omega_2^2 \quad (43)$$

lesz, ami megegyezik Schwarzschild-téridő Kruskal–Szekeres koordinátákban előálló (12) alakjával, ha $\mu \equiv M$ tömeg, $u' \equiv U$ és $v' \equiv V$ pedig Kruskal–Szekeres fényszerű koordináták.

Tehát ebben a fejezetben a (28a)-(28d) Einstein-egyenletekből meghatároztam egy összefüggést $f(u, v)$ függvényre, amiben volt egy-egy u -tól és v -től függő változó ($A(v), B(u)$). Ezeket a változóknak többféleképpen meg lehet választani az értékét úgy, hogy azok egy helyes, két fényszerű koordinátát tartalmazó metrikát adjanak. A metrikák dupla null koordinátái különbözőek lesznek attól függően, hogy hogy választjuk meg ezeket a függvényeket.

A (31) egyenletben bejövő μ integrációs változót mindkét esetben interpretálhattuk M tömegnek. Ez felveti a kérdést, hogy (27) Einstein-tenzorral és egy, a vákuumtól különböző energia-impulzus tenzorral rendelkező Einstein-egyenletből, amiben az az egyenlet hasonló alakban létrejön, interpretálható-e μ tömegnek, és ha nem, akkor milyen másik változóval tehető ez meg.

5. Vaidya-téridő

5.1. Bevezető

A csillagok felszínéhez közeli téridő nem írható le a Schwarzschild-téridővel, ugyanis míg a Schwarzschild-téridő egy vákuum megoldás, addig az adott területen sugárzási mező figyelhető meg. Ennek a modellezésére talált metrikát Vaidya 1943-ban [2], amely általánosítja a Schwarzschild-megoldást. Vaidya először

$$ds^2 = -\frac{M_{,t}^2}{f^2} dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (44)$$

formában találta meg a metrikát, ahol $M = M(r, t)$ és

$$f(M) = M_{,r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

Ennek a téridőnek az energia-impulzus tenzora nem nulla és a következő alakot veszi fel:

$$T_{ab} = \frac{h(u, v)}{8\pi} k_a k_b \quad (45)$$

ahol k^a sugárirányú nullvektor, $h(u, v)$ pedig az energiasűrűség. Ez egy nagyfrekvenciás, null por közelítése a sugárzásnak. Ez azt jelenti, hogy a sugárzás hullámhosszát jóval kisebbnek tekintjük a téridő görbületi sugaránál, így a sugárzásban nem lépnek fel hullámoptikai jelenségek (pl. interferencia vagy diffrakció), a sugárzási mező belső fejlődése nincs hatással a gravitáció dinamikájára. A sugárirányt megválaszthatjuk v irányba haladónak (ekkor $k^a = \partial_\lambda u = \delta_a^u$) vagy u irányba haladónak (ekkor $k^a = \partial_\lambda v = \delta_a^v$), ahol λ affin paraméter.

Hogy az (45) energia impulzus tenzort összekapcsoljuk az Einstein-egyenleten keresztül egy metrikával, a metrikát érdemes olyan alakban megválasztani, ami tartalmaz null koordinátát. A (44) kifejezhető ilyen alakban egy w null koordináta bevezetésével [13, 9.5 fejezet], ahol

$$dw = \varepsilon \frac{1}{f(M)} dM = \varepsilon \frac{1}{M_{,r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} (M_{,r} dr + M_{,t} dt) = \varepsilon \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} + \varepsilon \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \frac{M_{,t}}{M_{,r}} dr \quad (46)$$

Ez az összefüggés a Vaidya-téridő

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M(w)}{r}\right) du^2 + 2\varepsilon du dr + r^2 d\Omega^2 \quad (47)$$

alakjához vezet [15], ahol $\varepsilon = 1$, ha $w \equiv v$ és $\varepsilon = -1$, ha $w \equiv u$. A (47) egyenlet hasonlít a Schwarzschild-téridő Eddington–Finkelstein koordinátákban megadott (7) alakjára. Annyi köztük a különbség, hogy itt $M(w)$ tömegfüggvény egy null koordináta függvénye. $\varepsilon = 1$ esetben bejövő vagy implodáló Vaidya-téridőről beszélünk, ahol $M(v)$ tömegfüggvény a v advanzsált idő monoton növekvő függvénye, míg $\varepsilon = -1$ esetben kimenő vagy explodáló Vaidya-téridőről beszélünk, ahol $M(u)$ tömegfüggvény u retardált idő monoton csökkenő függvénye.

5.2. A null por kettős fényszerű koordinátákban

A további számolásokban a v irányba folyó sugárzást fogom vizsgálni. A v irányú sugárzás esetén az energia impulzus tenzor a következő alakban írható fel:

$$T_{ab} = \frac{h(u, v)}{8\pi} \delta_a^v \delta_b^v \quad (48)$$

Az Einstein-egyenletek alakja (48) energia-impulzus tenzor esetén a (28a)-(28d) Schwarzschild-téridőben kapott egyenletrendszerhez hasonló, azt csak a (28b) egyenletben kell módosítani a következőre:

$$\frac{2}{r} \left(\frac{r_{,v} f_{,v}}{f} - r_{,vv} \right) = h(u, v) \quad (49)$$

5.3. Einstein-egyenletek egyszerűsítése

Az egyenletrendszer megoldása során néhány részeredmény megegyezik a vákuum-megoldásban tárgyalt részeredményekkel. (28c) egyenletből levezethető (31) egyenlet, a továbbiakban használt $\mu(v)$ függvény megegyezik az ott definiált függvénnyel. A (28c) egyenletet v szerint differenciálva

$$\frac{1}{r} \left(\frac{r^2 r_{,uvv}}{f} + \frac{2rr_{,v}r_{,uv}}{f} - \frac{r^2 r_{,uv}f_{,v}}{f^2} \right) - \frac{r_{,u}}{f} \left(\frac{r_{,v}f_{,v}}{f} - r_{,vv} \right) = 0$$

összefüggést kapjuk, ahol (49) és a (31) egyenletet felhasználva

$$h = \frac{2\mu_{,v}r_{,uv}}{\mu(v)r_{,u}} \quad (50)$$

összefüggést kapjuk. A (31) egyenletbe behelyettesítve (29) és (28d) egyenletet:

$$r_{,v} = -A(v) \left(1 - \frac{2\mu(v)}{r} \right) \quad (51)$$

a (34) egyenlethez hasonló egyenletet kapunk, annyi különbséggel, hogy itt $\mu(v)$ a v tet-szőleges függvénye, ellentétben a vákuum esettel. A (51) egyenlet u szerinti deriváltját

$$\frac{r_{,uv}}{r_{,u}\mu(v)} = -\frac{2A(v)}{r^2}$$

behelyettesítve (50) egyenletbe

$$h = -\frac{4A(v)\mu_{,v}}{r^2} \quad (52)$$

összefüggést kapjuk. Így a (28a), (28c), (28d) és (49) Einstein-egyenleteket át tudtuk alakítani (29), (51), (52) alakra. Ezek elsőrendű nemlineáris parciális differenciálegyenletek, amelyek segítségével közelebb kerülünk $f(u, v)$ függvény egzakt alakjának meghatározásához.

A gyenge energiasűrűség feltétel [16] miatt az energiasűrűség nem lehet negatív értéket:

$$h \geq 0.$$

Emiatt (52) egyenletből adódik $A(v)$ és $\mu(v)$ változókra egy egyenlőtlenségi feltétel:

$$A(v)\mu_v \leq 0. \quad (53)$$

Mivel a további számolásokhoz $A(v)$ és $\mu(v)$ függvények értékét meg kell választanunk, az egyszerűség kedvéért tekintsük $A(v)$ -t egy előjel konvenciónak a következő módon

$$A(v) = -\frac{\mu_{,v}}{2|\mu_{,v}|} = -\frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu_{,v} \neq 0 \quad (54)$$

ahol $\varepsilon = 1$, ha $\mu_{,v} > 0$, illetve $\varepsilon = -1$, ha $\mu_{,v} < 0$. Ezzel a (29), (51), (52) egyenletek a következő alakra egyszerűsödnek:

$$-\varepsilon r_{,u} = f, \quad (55a)$$

$$r_{,v} = \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2\mu(v)}{r} \right), \quad (55b)$$

$$h = \frac{2\varepsilon\mu_{,v}}{r^2}, \quad (55c)$$

Tehát a (28a), (28c), (28d) és (49) Einstein-egyenleteket leegyszerűsítettük (55a), (55b) és (55c) elsőrendű nemlineáris parciális differenciálegyenletekre.

5.4. Az Einstein-egyenletek egzakt megoldásai

A $T_{ab} = \frac{h(u,v)}{8\pi} \delta_a^v \delta_b^v$ energia-impulzus tenzor segítségével a (15)

$$ds^2 = -2f(u, v) dudv + r^2(u, v) d\Omega^2$$

metrika (27) Einstein-egyenleteit leegyszerűsítettük a (55a), (55b) és (55c) első rendű nemlineáris parciális differenciálegyenletekre. A (55b) egyenlet v változó szerinti integrálásával $r(u, v)$ függvény értéke meghatározható. Ezt u szerint deriválva (55a) egyenlet alapján megadható $f(u, v)$ függvény. $f(u, v)$ ismeretében a gömbszimmetrikus téridők általános két fényszerű koordinátát tartalmazó (15) ívelemnégyzetének felhasználásával megadható a téridő egzakt alakja. A (55b) egyenletnek a Lindquist, Schwartz és Misner nem [17], Hiscock, Williams és Eardley [6], valamint Waugh és Lake [7] pedig csak speciális esetben találták analitikus megoldását. A (55b) egyenlet v szerinti integráljában megjelenő integrációs függvény, amely u függvénye megválasztható úgy, hogy ha $\mu(v)$ lineáris [6] [7] vagy exponenciális [7] függvényként választjuk meg, akkor $f(u, v)$ függvény nem lesz szinguláris.

Mivel a vákuummegoldás esetén $\mu(v)$ tömegként lett interpretálva, tekintsük ebben az esetben azt tömegfüggvénynek. Ez a megválasztás a két téridő közötti különbség alapján is célszerű, ugyanis míg Schwarzschild téridőben a tömeg állandó, addig Vaidya-téridő esetén a tömeg egy null koordináta függvénye. A következő fejezetekben az $\mu(v)$ tömegfüggvény különböző eseteit fogjuk megvizsgálni.

5.4.1. Lineáris tömegfüggvény

Először tekintsük $\mu(v)$ függvényt lineárisnak. [6] [7]

$$\mu = \lambda \varepsilon v \quad (56)$$

ahol λ egy > 0 konstans és ε előjel konvenció.

A (56) felhasználásával (55b) egyenlet felírható a következő módon:

$$\frac{1}{v} + \frac{2rcv}{2r^2 - rcv + \lambda 2c^2v^2} \left(\frac{r_{,v}}{cv} - \frac{r}{cv^2} \right) = 0. \quad (57)$$

Ezt követően

$$g = \frac{r}{\varepsilon v} \quad (58)$$

bevezetésével (57) egyenlet bal oldalának második tagja átírható a következő módon:

$$\frac{2rcv}{2r^2 - rcv + \lambda 2c^2v^2} \left(\frac{r_{,v}}{cv} - \frac{r}{cv^2} \right) = \frac{g}{g^2 - \frac{g}{2} + \lambda} \frac{dg}{dv}$$

A (57) egyenletet ez alapján v szerint integrálva

$$\ln \varepsilon v + \int \frac{g dg}{g^2 - \frac{g}{2} + \lambda} = D(u) \quad (59)$$

egyenlethez jutunk, ahol $D(u)$ egy tetszőleges függvénye u -nak. A (59) egyenlet u szerinti integrálásával

$$r_{,u} = D_{,u} \frac{r^2 - \frac{1}{2}r\varepsilon v + \lambda v^2}{r}$$

összefüggést kapjuk (ahol felhasználtuk, hogy $\varepsilon^2 = 1$). Ezt (55a) egyenletbe visszahelyettesítve $f(u, v)$ függvényre

$$f = -\varepsilon D_{,u} \frac{r^2 - \frac{1}{2}\varepsilon v r + \lambda v^2}{r} \quad (60)$$

összefüggést kapjuk. Ezt követően csak $D(u)$ függvényt kell kiválasztani úgy, hogy $f(u, v)$ mindenhol nullától különböző értéket vegyen fel. $D(u)$ megválasztása emellett (59) egyenleten keresztül definiálja $r(u, v)$ -t függvényt is.

A (60) összefüggés vizsgálatát több részre kell felbontanunk, ugyanis az egyenletben szereplő $r^2 - \frac{1}{2}\varepsilon v r + \lambda v^2$ tagnak λ értékétől függően 0, 1 vagy 2 zérushelye lehet, amely változtat a megoldás alakján.

Ívelemnégyszet $\lambda > \frac{1}{16}$ konstans tag esetén

Ha $\lambda > \frac{1}{16}$, $f(u, v)$ nemnulla minden esetben, így

$$D = -\varepsilon u \quad (61)$$

választással $f(u, v)$ függvényre a következő összefüggést kapjuk:

$$f = \frac{r^2 - \frac{1}{2}\varepsilon v r + \lambda v^2}{r} \quad (62)$$

Elvégezve a (59) egyenletben lévő integrálást

$$\int \frac{g dg}{g^2 - \frac{g}{2} + \lambda} = \frac{1}{2} \ln \left(\alpha + \frac{r^2}{c^2 v^2} - \frac{r}{2cv} \right) + \frac{1}{\delta} \arctan \left(\frac{4r - cv}{\delta cv} \right)$$

egyenletet kapjuk ($\delta \equiv \sqrt{16\lambda - 1}$), ha $\lambda > \frac{1}{16}$. Emiatt a (59) és (61) egyenletek felhasználásával

$$-\varepsilon u = \frac{1}{2} \ln(2\lambda v^2 + 2r^2 - r\varepsilon v) + \frac{1}{\delta} \arctan\left(\frac{4r - \varepsilon v}{\delta \varepsilon v}\right). \quad (63)$$

egyenletet kapjuk. $r(u, v)$ függvényt ez az implicit reláció adja meg.

Tehát lineáris tömegfüggvény esetén, ahol $\lambda > \frac{1}{16}$ a téridő a következő ívelemnégyzettel írható fel:

$$ds^2 = -2 \frac{r^2 - \frac{1}{2}\varepsilon vr + \lambda v^2}{r} dudv + r^2 d\Omega^2 \quad (64)$$

ahol $r(u, v)$ függvényt (63) implicit reláció adja meg.

Ívelemnégyzet $\lambda = \frac{1}{16}$ konstans tag esetén

$\lambda = \frac{1}{16}$ esetén $r^2 - \frac{1}{2}\varepsilon vr + \lambda v^2$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0 lesz, így 1 zérushelye adódik, ami miatt $f(u, v)$ következő alakú lesz

$$f = -\frac{\varepsilon D_{,u} (4r - \varepsilon v)^2}{16r} \quad (65)$$

ahol (59)-ből

$$\int \frac{gdg}{g^2 - \frac{g}{2} + \frac{1}{16}} = \frac{cv}{cv - 4r} + \ln \left| \frac{r}{cv} - \frac{1}{4} \right|$$

felhasználásával

$$D(u) = \frac{\varepsilon v}{\varepsilon v - 4r} + \ln \left| \frac{4r - \varepsilon v}{4} \right| \quad (66)$$

egyenlet adódik. $D(u)$ függvényt

$$D(u) = \varepsilon \left(\frac{1}{u} - u \right) \quad (67)$$

alakban választva azt találjuk, hogy

$$f = \frac{(4r - \varepsilon v)^2}{16r} \left(\frac{1}{u^2} + 1 \right) \quad (68)$$

A (66) és (67) egyenletek felhasználásával

$$\varepsilon \left(\frac{1}{u} - u \right) = \frac{\varepsilon v}{\varepsilon v - 4r} + \ln \left| \frac{4r - \varepsilon v}{4} \right| \quad (69)$$

egyenletet kapjuk. $r(u, v)$ függvényt ez az implicit reláció adja meg.

A (68) megoldást viszont a jelenlegi formájában nem tudjuk értelmezni a $4r = \varepsilon v > 0, u = 0$ pontban, ugyanis $f(u, v)$ függvény v -t tartalmazó része 0-hoz, míg u -t tartalmazó része ∞ -hez tart. A köztük lévő kapcsolat meghatározásához először írjuk fel (68) egyenletet úgy is, hogy u -t csak $D(u)$ függvényben tartalmazzon a következő módon:

$$f = \frac{(4r - \varepsilon v)^2}{32r} \left(D^2(u) + 4 + cD(u) (D^2(u) + 4)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Itt ha $D(u)$ helyére annak (66) egyenletben leírt alakját helyettesítjük, $f(u, v)$ -re kapunk egy olyan összefüggést, amiben csak v függés van. Mivel

$$\lim_{4r \rightarrow \varepsilon v} (4r - \varepsilon v) \ln \left| \frac{4r - \varepsilon v}{4} \right| = 0$$

úgyhogy $f(u, v)$ határértéke adott pontban

$$f = \frac{\varepsilon v}{4} \quad (70)$$

egyenletre egyszerűsödik.

Tehát lineáris tömegfüggvény esetén, ahol $\lambda = \frac{1}{16}$ a téridő a következő ívelemnégyzettel írható fel:

$$ds^2 = -\frac{(4r - \varepsilon v)^2}{8r} \left(\frac{1}{u^2} + 1 \right) dudv + r^2 d\Omega^2 \quad (71)$$

ahol $r(u, v)$ függvényt (69) implicit reláció adja meg.

Ívelemnégyzet $\lambda < \frac{1}{16}$ konstans tag esetén

$\lambda < \frac{1}{16}$ esetben 2 zérushelye lesz $f(u, v)$ számlálójában lévő függvénynek, így az a következő alakban írható fel:

$$f = -\varepsilon D_{,u} \frac{\left(r - \frac{\varepsilon v(1+\sqrt{1-16\lambda})}{4} \right) \left(r - \frac{\varepsilon v(1-\sqrt{1-16\lambda})}{4} \right)}{r}$$

ami $\Delta \equiv \sqrt{1-16\lambda}$, $r_1 \equiv \varepsilon v(1-\Delta)$ és $r_2 \equiv \varepsilon v(1+\Delta)$ jelölésekkel

$$f = -\varepsilon D_{,u} \frac{\left(r - \frac{r_1}{4} \right) \left(r - \frac{r_2}{4} \right)}{r} \quad (72)$$

alakra egyszerűsödik.

Elvégezve a (59) egyenletben lévő integrálást $\lambda < \frac{1}{16}$ esetben

$$\int \frac{g}{g^2 - \frac{g}{2} + \lambda} dg = \ln \left| \left(\frac{r}{\varepsilon v} - \frac{1+\Delta}{4} \right)^{\frac{\Delta+1}{2\Delta}} \left(\frac{r}{\varepsilon v} - \frac{1-\Delta}{4} \right)^{\frac{\Delta-1}{2\Delta}} \right|$$

egyenletet kapjuk, így a (59) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$D(u) = \ln \left| \left(r - \frac{r_2}{4} \right)^{\frac{\Delta+1}{2\Delta}} \left(r - \frac{r_1}{4} \right)^{\frac{\Delta-1}{2\Delta}} \right|. \quad (73)$$

Mivel most $f(u, v)$ két pontban is felvesz 0 értéket, $D(u)$ megválasztását kétféleképpen tesszük meg, hogy azok a téridő más-más tartományára adjanak nekünk hasznos információt.

Első esetben $D(u)$ -t a következő függvénnyel határozzuk meg.

$$D(u) = \frac{1+\Delta}{2\Delta} \ln |\varepsilon u| \quad (74)$$

Ekkor (74) és (73) között felírható a következő összefüggés:

$$|\varepsilon u| = \left| \left(r - \frac{r_2}{4} \right) \left(r - \frac{r_1}{4} \right)^{\frac{\Delta-1}{1+\Delta}} \right|$$

Amiből $\varepsilon u > 0$, $\frac{r_2}{4} > r$ feltételek választásával u -ra a következő összefüggést kapjuk:

$$u = \varepsilon \left(\frac{r_2}{4} - r \right) \left(r - \frac{r_1}{4} \right)^{\frac{\Delta-1}{1+\Delta}} \quad (75)$$

Ez meghatározza $r(u, v)$ függvényt implicit módon. A (74) egyenletet u szerint deriválva majd (75) összefüggést behelyettesítve

$$D_{,u} = \varepsilon \frac{1+\Delta}{2\Delta} \left(\frac{r_2}{4} - r \right)^{-1} \left(r - \frac{r_1}{4} \right)^{\frac{1-\Delta}{1+\Delta}}$$

egyenletet kapjuk $D_{,u}$ -ra, így $f(u, v)$ függvényre (72) egyenlet alapján a következőt kapjuk:

$$f = \frac{1+\Delta}{2\Delta r} \left(r - \frac{r_1}{4} \right)^{\frac{2}{1+\Delta}}. \quad (76)$$

Tehát (74) választás $r > \frac{r_1}{4}$ téridő tartomány esetén megfelelő választás.

Hasonló módon

$$D(u) = \frac{\Delta-1}{2\Delta} \ln |\varepsilon u| \quad (77)$$

választás is célravezető, ekkor $\varepsilon u > 0$ és $\frac{r_1}{4} > r$ feltételek választásával u -ra a következő összefüggés áll elő

$$u = \varepsilon \left(r - \frac{r_2}{4} \right)^{\left(\frac{\Delta+1}{\Delta-1} \right)} \left(\frac{r_1}{4} - r \right), \quad (78)$$

ami $r(u, v)$ függvényt is definiálja implicit módon. A (77) egyenletet u szerint deriválva majd (78) összefüggést behelyettesítve

$$D_{,u} = \frac{\Delta-1}{2\Delta} \varepsilon \left(r - \frac{r_2}{4} \right)^{\left(\frac{\Delta+1}{1-\Delta} \right)} \left(\frac{r_1}{4} - r \right)^{-1}$$

egyenletet kapjuk $D_{,u}$ -ra, így $f(u, v)$ függvényre (72) egyenlet alapján a következő összefüggést kapjuk:

$$f = \frac{1-\Delta}{2\Delta r} \left(\frac{r_2}{4} - r \right)^{\frac{2}{1-\Delta}} \quad (79)$$

Tehát (77) választás $r < \frac{r_2}{4}$ téridő tartomány esetén megfelelő választás.

Tehát lineáris tömegfüggvény esetén, ahol $\lambda < \frac{1}{16}$ a téridőt két módon írtuk fel, hogy a téridő különböző részeire adjunk leírást.

Ha a $r > \frac{r_1}{4}$ téridő tartományt szeretnénk vizsgálni az ívelemnégyszet a következő alakot veszi fel:

$$ds^2 = -\frac{1+\Delta}{\Delta r} \left(r - \frac{r_1}{4} \right)^{\frac{2}{1+\Delta}} dudv + r^2 d\Omega^2 \quad (80)$$

ahol $r(u, v)$ függvényt (75) implicit reláció adja meg.

Ha a $r < \frac{r_2}{4}$ téridő tartományt szeretnénk vizsgálni az ívelemnégyszet a következő alakot veszi fel:

$$ds^2 = -\frac{1-\Delta}{\Delta r} \left(\frac{r_2}{4} - r \right)^{\frac{2}{1-\Delta}} dudv + r^2 d\Omega^2 \quad (81)$$

ahol $r(u, v)$ függvényt (78) implicit reláció adja meg.

Ebben a fejezetben tehát meghatároztuk a Vaidya-téridő dupla null koordinátás alakját abban az esetben, ha az Einstein-egyenletek (55a), (55b) (55c) egyszerűsített alakjában szereplő $\mu(v)$ tömegfüggvény a v koordinátának lineáris függvénye. Ezeket az eredményeket Waugh és Lake [7], illetve Hiscock, Williams és Eardley [6] érte el, de a hozzájuk vezető számolásokat sehol nem prezentálták részletesen. Nekem sikerült azokat elérnem, így a számolásokat reprodukálnom.

5.4.2. Exponenciális tömegfüggvény

$\mu(v)$ tömegfüggvényt exponenciálisnak tekintjük a következőképp [7]

$$\mu = \frac{1}{\beta} \left(\alpha e^{\frac{\beta \varepsilon v}{2}} + 1 \right) \quad (82)$$

ahol $\alpha, \beta > 0$ konstansok, ε előjel konvenció és $-\infty < v < \infty$. A (82) egyenletet v szerint deriválva

$$\mu_{,v} = \frac{\varepsilon \alpha}{2} e^{\frac{\beta \varepsilon v}{2}} \quad (83)$$

látható, hogy felírható egy összefüggés ami kapcsolatot teremt $\mu(v)$ és annak deriváltja között

$$\mu_{,v} = \frac{\varepsilon}{2} [\mu \beta - 1] \quad (84)$$

Célunk ennek az összefüggésnek a használatával egy r -ben nulladrendű összefüggés kialakítása. Első lépésként szorozzuk meg (84) egyenlet mindkét oldalát $\frac{2}{\beta} [r + x]$ -el,

$$\mu_{,v} \frac{2x}{\beta} + \frac{2\mu_{,v}r}{\beta} = \varepsilon [\mu \beta - 1] \frac{x}{\beta} + \varepsilon [\mu \beta - 1] \frac{r}{\beta}$$

ahol bevezetjük

$$x = \left(r^2 - \frac{4r}{\beta} + \frac{4\mu}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (85)$$

összefüggést. Az egyenlethez mindkét oldalon hozzáadva $\frac{r\varepsilon}{2}x + \frac{\varepsilon}{2} \left(r^2 - \frac{2(r-2\mu)}{\beta} \right)$ tagot, majd átrendezve azt

$$r^2 \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) + r \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) x - \frac{2r\varepsilon}{\beta} \frac{x}{2} \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) + \frac{2r\mu_{,v}}{\beta} + \frac{2\mu_{,v}}{\beta} x = \frac{r\varepsilon}{2} x - \frac{\varepsilon}{\beta} x + \frac{\varepsilon}{2} x^2$$

alakot hozhatjuk ki, ami kedvező nekünk, ugyanis többször előfordul benne $\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right)$ tag, ami megegyezik (55b) egyenlet jobb oldalával, így be tudjuk hozni $r_{,v}$ -t az összefüggésbe. Ez azért hasznos, mert a segítségével átalakítható az összefüggés olyan alakra, amit v szerint deriválva az összes elsőrendű tag eltűnik az összefüggésből.

$$r^2 r_{,v} + r r_{,v} x - r \frac{2(r_{,v} - \mu_{,v})}{\beta} + \frac{2\mu_{,v}}{\beta} x = \frac{r\varepsilon}{2} x - \frac{\varepsilon}{\beta} x + \frac{\varepsilon}{2} x^2$$

Az egyenlethez hozzáadva és kivonva $\frac{2r_{,v}}{\beta}x + \frac{2}{\beta} \left(rr_{,v} - \frac{2(r_{,v}-\mu_{,v})}{\beta} \right)$ tagot, majd $\left(r - \frac{2}{\beta} + x \right) \frac{x}{\beta}$ taggal való osztással az

$$\beta \frac{1}{2} x^{-1} \left(2rr_{,v} - \frac{4(r_{,v} - \mu_{,v})}{\beta} \right) + 2 \frac{r_{,v} + \frac{1}{2} x^{-1} \left(2rr_{,v} - \frac{4(r_{,v} - \mu_{,v})}{\beta} \right)}{r - \frac{2}{\beta} + x} - \frac{\beta \varepsilon}{2} = 0$$

alakú lesz, ami egyértelműen integrálható v szerint

$$\beta x + 2 \ln \left| r - \frac{2}{\beta} + x \right| - \frac{\varepsilon \beta v}{2} = P(u), \quad (86)$$

ahol $P(u)$ egy tetszőleges függvénye u -nak. Ezt követően (86) egyenletet u szerint deriválva:

$$\beta x_{,u} + 2 \frac{r_{,u} + x_{,u}}{r - \frac{2}{\beta} + x} = P_{,u},$$

majd felhasználva

$$x_{,u} = x^{-1} r_{,u} \left(r - \frac{2}{\beta} \right)$$

összefüggést, $r_{,u}$ -ra

$$r_{,u} = \frac{x P_{,u}}{r \beta} \quad (87)$$

összefüggést kapjuk. Ezt visszahelyettesítve (55a) egyenletbe megkapjuk az $f(u, v)$ függvényre jelenleg érvényes összefüggést, ami

$$f = -\frac{\varepsilon x P_{,u}}{r \beta}. \quad (88)$$

Ekkor $P(u)$ függvényre egy egyszerű választással élhetünk,

$$P(u) = -\varepsilon u \quad (89)$$

ami segítségével $f(u, v)$

$$f = \frac{x}{\beta r} \quad (90)$$

alakra egyszerűsödik.

A (89) és (86) egyenletek segítségével

$$\beta x + 2 \ln \left| r - \frac{2}{\beta} + x \right| - \frac{\varepsilon \beta v}{2} = -\varepsilon u \quad (91)$$

összefüggést kapjuk. Ez meghatározza $r(u, v)$ függvényt implicit módon.

Tehát exponenciális tömegfüggvény esetén a téridő a következő ívelemnégyzettel írható fel:

$$ds^2 = -\frac{2x}{\beta r} dudv + r^2 d\Omega^2 \quad (92)$$

ahol $r(u, v)$ függvényt (91) implicit reláció adja meg.

Ezeket az eredményeket Waugh és Lake érte el [7], de a hozzájuk vezető számolásokat sehol nem prezentálták, de nekem sikerült azokat elérnem, így a számolásokat reprodukálnom.

6. A tömegfüggvény interpretációja

Ebben a fejezetben $\mu(v)$ tömegfüggvény fizikai interpretációját vizsgáljuk meg az előző fejezetben, Vaidya-téridőben kapott metrikák esetén. Ezt úgy fogjuk elvégezni, hogy a dupla null koordinátákban megkapott metrikákat áttranszformáljuk a Vaidya-téridő Eddington–Finkelstein koordinátákat tartalmazó alakjába.

6.1. Koordináta transzformáció

Az (u, v) koordinátákat tartalmazó (15) metrikát szeretnénk áttranszformálni az (r, v') koordinátákkal rendelkező

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v)}{r} \right) dv'^2 + 2\varepsilon dv' dr + r^2 d\Omega_2^2$$

metrikára. Ezek között a következő kapcsolatnak kell fennállnia, hogy egyenlőek legyenek egymással:

$$2f dudv = \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv' - 2\varepsilon dr \right] dv'. \quad (93)$$

(du, dv) és (dr, dv') között (93) egyenlet alapján felírhatjuk a transzformáció mátrixát:

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon}{f} & \frac{1}{2f} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ dv' \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Ez alapján meg kell határoznunk az adott koordináták szerinti deriválások közötti transzformációt. Ezeket a transzformációkat felírhatjuk általános alakban

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= \alpha \frac{\partial}{\partial r} + \beta \frac{\partial}{\partial v'}, \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \gamma \frac{\partial}{\partial r} + \delta \frac{\partial}{\partial v'}, \end{aligned} \quad (95)$$

ahol α, β, γ és δ értékét kell meghatároznunk. Ezekhez a koordináták és az azok szerinti deriváltak belső szorzatainak következő összefüggéseit használjuk:

$$\begin{aligned} \left\langle du, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle &= 1, & \left\langle dv, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle du, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle &= 0, & \left\langle dv, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle &= 1. \end{aligned}$$

Ezekbe behelyettesítve a (94) és (95) transzformációk szükséges részeit, a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\varepsilon f, & \beta &= 0, \\ \gamma &= \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right), & \delta &= 1. \end{aligned}$$

Így a parciális deriváltak a következő módon transzformálódnak:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon f & 0 \\ \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial v'} \end{pmatrix} \quad (96)$$

A (94) mátrix du -ra felírható egyenletéből dr -re felírható

$$dr = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv - f du \quad (97)$$

teljes differenciál. Ez az egyenlet akkor lesz teljes differenciál, ha létezik olyan F függvény, amire

$$-f = \frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{\partial F}{\partial v} \quad (98)$$

ami a vegyszorzatok egyenlősége esetén teljesül:

$$\frac{\partial}{\partial v} (-f) = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right]. \quad (99)$$

Ahol elvégezve a transzformációkat a deriváltakon

$$\left[\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial v'} \right] (-f) = -\varepsilon f \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right] \quad (100)$$

összefüggést kapjuk.

Tehát csak akkor létezik transzformáció (u, v) és (r, v') koordináták között, ha a metrikák teljesítik (100) összefüggést. (100) összefüggés vizsgálatával megállapítható, hogy milyen kapcsolat van a $\mu(v)$ tömegfüggvény és a Vaidya-téridő Eddington–Finkelstein koordinátákat tartalmazó alakjában szereplő $M(v)$ tömegfüggvény között, ezzel igazolható annak a helyessége, hogy $\mu(v)$ függvényt tömegfüggvénynek interpretáltuk.

6.2. Lineáris tömegfüggvény

Amikor $\mu(v)$ tömegfüggvényt lineárisnak választottuk $[\mu(v) = \varepsilon \lambda v]$ 3 különböző esetet vizsgáltunk aszerint, hogy az $\mu(v)$ függvényben szereplő λ paraméter mekkora.

Lineáris tömegfüggvény $\lambda > \frac{1}{16}$ konstans tag esetén

$\lambda > \frac{1}{16}$ választás esetén $f(u, v)$ függvény (62) alakú lesz, ami miatt (100) összefüggés

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(-\frac{r^2 - \frac{1}{2}\varepsilon v r + \lambda v^2}{r^2} + \frac{2r - \frac{1}{2}\varepsilon v}{r} \right) - \left(\frac{-\frac{1}{2}\varepsilon r + 2\lambda v}{r} \right) \\ = -\varepsilon \frac{r^2 - \frac{1}{2}\varepsilon v r + \lambda v^2}{r} \frac{M}{r^2} \end{aligned} \quad (101)$$

alakot vesz fel, ami (56) felhasználásával

$$\mu(v) = M(v) \quad (102)$$

alakra egyszerűsödik.

Lineáris tömegfüggvény $\lambda = \frac{1}{16}$ konstans tag esetén

$\lambda = \frac{1}{16}$ választás esetén $f(u, v)$ függvény (68) alakú lesz, ami miatt (100) összefüggés

$$\begin{aligned} & -\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(-\frac{16r^2 - 8r\varepsilon v + v^2}{16r^2} + \frac{32r - 8\varepsilon v}{16r}\right) \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) \\ & - \left(\frac{-8r\varepsilon + 2v}{16r}\right) \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) = -\varepsilon \frac{M}{r^2} \frac{16r^2 - 8r\varepsilon v + v^2}{16r} \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) \end{aligned} \quad (103)$$

alakú lesz, ami (56) felhasználásával az előző esethez hasonlóan

$$\mu(v) = M(v)$$

összefüggésre egyszerűsödik.

Lineáris tömegfüggvény $\lambda < \frac{1}{16}$ konstans tag esetén

$\lambda < \frac{1}{16}$ paraméter esetén 2 különböző metrika lett megadva, attól függően, hogy a téridő melyik tartományát figyeljük. Az első esetben, ahol $r > \frac{r_1}{4}$, $f(u, v)$ függvény (76) alakú lesz, ami miatt (100) összefüggés

$$\begin{aligned} & -\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[-\frac{1+\Delta}{2\Delta r^2} \left(r - \frac{r_1}{4}\right)^{\frac{2}{1+\Delta}} + \frac{1}{\Delta r} \left(r - \frac{r_1}{4}\right)^{\frac{2}{1+\Delta}-1}\right] \\ & + \left[\frac{1}{\Delta r} \left(r - \frac{r_1}{4}\right)^{\frac{2}{1+\Delta}-1} \left(\frac{\varepsilon(1-\Delta)}{4}\right)\right] \\ & = -\varepsilon \frac{1+\Delta}{2\Delta r} \left(r - \frac{r_1}{4}\right)^{\frac{2}{1+\Delta}} \frac{M}{r^2} \end{aligned} \quad (104)$$

alakú lesz, ami a következő alakra egyszerűsíthető:

$$\begin{aligned} & -\frac{\varepsilon}{2} \left[-\frac{1}{r} + \frac{2}{1+\Delta} \left(r - \frac{r_1}{4}\right)^{-1}\right] \\ & + \varepsilon \frac{M}{r} \left[\frac{2}{1+\Delta} \left(r - \frac{r_1}{4}\right)^{-1}\right] \\ & + \left[\frac{2}{1+\Delta} \left(r - \frac{r_1}{4}\right)^{-1} \left(\frac{\varepsilon(1-\Delta)}{4}\right)\right] = 0 \end{aligned}$$

Az egyenletben többször előfordul $\frac{2}{1+\Delta} \left(r - \frac{r_1}{4}\right)^{-1}$, amit (56) felhasználásával a következőképp tudjuk átalakítani:

$$\frac{2}{1+\Delta} \left(r - \frac{r_1}{4}\right)^{-1} = \frac{2}{(1+\Delta)r - 4\mu(v)}$$

Segítségével az egyenletünk a

$$\mu(v) = M(v)$$

összefüggésre egyszerűsödik.

A második esetben $r < \frac{r_2}{4}$ téridő tartományon vizsgáljuk a téridőt, ahol $f(u, v)$ függvény (79) alakú lesz, ami miatt (100) összefüggés

$$\begin{aligned} & -\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[-\frac{1-\Delta}{2\Delta r^2} \left(\frac{r_2}{4} - r\right)^{\frac{2}{1-\Delta}} - \frac{1-\Delta}{2\Delta r} \frac{2}{1-\Delta} \left(\frac{r_2}{4} - r\right)^{\frac{2}{1-\Delta}-1} \right] \\ & - \left[\frac{1-\Delta}{2\Delta r} \frac{2}{1-\Delta} \left(\frac{r_2}{4} - r\right)^{\frac{2}{1-\Delta}-1} \left(\frac{\varepsilon(1+\Delta)}{4}\right) \right] \\ & = -\varepsilon \frac{1-\Delta}{2\Delta r} \left(\frac{r_2}{4} - r\right)^{\frac{2}{1-\Delta}} \frac{M}{r^2} \end{aligned} \quad (105)$$

alakú lesz. Ez

$$\begin{aligned} & -\frac{\varepsilon}{2} \left[-\frac{1}{r} - \frac{2}{1-\Delta} \left(\frac{r_2}{4} - r\right)^{-1} \right] + \varepsilon \frac{M}{r} \left[-\frac{2}{1-\Delta} \left(\frac{r_2}{4} - r\right)^{-1} \right] \\ & - \left[\frac{2}{1-\Delta} \left(\frac{r_2}{4} - r\right)^{-1} \left(\frac{\varepsilon(1+\Delta)}{4}\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

összefüggésre egyszerűsíthető. Az egyenletben többször előfordul $\frac{2}{1-\Delta} \left(\frac{r_2}{4} - r\right)^{-1}$, amit a következőképp tudunk átalakítani (56) felhasználásával:

$$\frac{2}{1-\Delta} \left(\frac{r_2}{4} - r\right)^{-1} = \frac{2}{4\mu - r(1-\Delta)}$$

Ezt visszahelyettesítve az egyenletünk

$$\mu(v) = M(v)$$

összefüggésre egyszerűsödik.

Az, hogy $\mu(v)$ összes esetben megegyezett a Vaidya-téridő Eddington–Finkelstein koordinátákban vett tömegfüggvényével azt jelenti, hogy $\mu(v)$ függvényt interpretálhatjuk tömegfüggvényként, ha a tömegfüggvény lineáris.

6.3. Exponenciális tömegfüggvény

A lineáris esethez hasonló módon $\mu(v)$ exponenciális függvényként való megválasztása esetén is igazolni kell, hogy az adott két fényszerű koordinátát tartalmazó koordinátarendszerből a metrika áttranszformálható-e az ismert Eddington–Finkelstein koordinátákat tartalmazó (47) metrikába. Ehhez itt is teljesülnie kell (100) összefüggésben felírt vegyes deriváltak egyenlőségének. Segítségével megállapíthatjuk, hogy $\mu(v)$ tömegfüggvényként való interpretálása helyes volt-e ebben az esetben is.

Exponenciális tömegfüggvény esetén $f(u, v)$ függvényt (90) és (85) egyenlettel defini-

áljuk. Ebben az esetben (100) egyenlet

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[-\frac{\left(r^2 - \frac{4r}{\beta} + \frac{4\mu}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}}{\beta r^2} + \frac{1}{2} \frac{\left(r^2 - \frac{4r}{\beta} + \frac{4\mu}{\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\beta r} \left(2r - \frac{4}{\beta}\right) \right] \\
 & - \left[\frac{1}{2} \frac{\left(r^2 - \frac{4r}{\beta} + \frac{4\mu}{\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\beta r} \frac{4\mu_{,v'}}{\beta} \right] = -\varepsilon \frac{\left(r^2 - \frac{4r}{\beta} + \frac{4\mu}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}}{\beta r} \frac{M}{r^2}
 \end{aligned} \tag{106}$$

alakú lesz. Ezt a következő alakra egyszerűsíthetjük:

$$\frac{\varepsilon}{2} \left[r - \frac{4}{\beta} + \frac{4\mu}{\beta r} - \left(r - \frac{2}{\beta}\right) \right] + \varepsilon \frac{M}{r} \left(r - \frac{2}{\beta}\right) = \left(\frac{2\mu_{,v'}}{\beta}\right)$$

Itt felhasználjuk (84) összefüggést, ami kapcsolatot teremt $\mu(v)$ függvény és v szerinti deriváltja között. Ekkor az egyenletünk

$$\mu(v) = M(v)$$

alakra egyszerűsödik,

Az, hogy $\mu(v)$ összes esetben megegyezett a Vaidya-téridő Eddington–Finkelstein koordinátákban vett tömegfüggvényével azt jelenti, hogy $\mu(v)$ függvényt interpretálhatjuk tömegfüggvényként mind lineáris, mind exponenciális null koordináta függés esetén.

Ez megegyezik vákuummegoldásban található felvetéssel. Ott a Schwarzschild-téridő két fényszerű koordinátát tartalmazó alakjának keresése során egy integrációs változóról derült ki, hogy interpretálható tömegként. Vaidya-téridő esetén szintén megjelent ez az integrálással keletkező változó és ebben az esetben is interpretálható volt tömegként.

7. Elektromosan töltött Vaidya-téridő

A Vaidya-téridő segítségével nem írható le olyan sugárzó égitest, amely elektromos töltéssel rendelkezik. Ennek a modellezéséhez a Vaidya-téridő egyik legegyszerűbb általánosítását, az elektromosan töltött Vaidya-téridőt [8] (Bonnor–Vaidya-téridőt [18]) alkalmazzák. A téridő ívelemnégyzete

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2M(w)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right] dw^2 + 2\epsilon dw dr + r^2 d\Omega_2^2 \quad (107)$$

annyiban különbözik a Vaidya-téridő Eddington–Finkelstein koordinátákban megadott (47) alakjától, hogy az ívelemnégyzet dw^2 koordinátájában megjelenik egy $\frac{Q^2}{r^2}$ tag, ahol Q töltéssparaméter [8] [18].

A Vaidya-téridőhöz hasonló módon a további számolásokban vizsgáljuk a v irányba terjedő sugárzást, amikor az ívelemnégyzet

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2M(v)}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right] dv^2 + 2dv dr + r^2 d\Omega_2^2 \quad (108)$$

alakú.

A (108) esetben az Einstein-egyenletek alakja a következő lesz [8]:

$$\frac{2}{r} \left(\frac{r_{,u} f_{,u}}{f} - r_{,uu} \right) = 0 \quad (109a)$$

$$\frac{2}{r} \left(\frac{r_{,v} f_{,v}}{f} - r_{,vv} \right) = \frac{2M_{,v}}{r^2} \quad (109b)$$

$$\frac{r^2}{f^2} \left(\frac{f_{,u} f_{,v}}{f} - f_{,uv} \right) - \frac{2rr_{,uv}}{f} = \frac{Q^2}{r^2} \quad (109c)$$

$$\frac{f + 2(r r_{,uv} + r_{,u} r_{,v})}{r^2} = \frac{Q^2}{r^4} \quad (109d)$$

Ennek az egyenletrendszernek nem sikerült megoldását találnom, annak bonyolultsága miatt.

Közelítő megoldás kereséséhez tekintsük $\frac{Q^2}{r^2} \ll \frac{2M}{r}$ esetet. Ez kis mértékben tér csak el a $Q = 0$ esetben talált megoldásoktól. Ekkor definiálható egy η mennyiség, amely nagyságrendje megegyezik $\frac{Q^2}{r^2}$ nagyságrendjével:

$$\eta = O \left(\frac{Q^2}{r^2} \right) \quad (110)$$

Az η segítségével f és r függvény Vaidya-téridőben meghatározott egzakt megoldásaiból kialakíthatóak a perturbációs függvények a következő módon:

$$\tilde{f} = f_V + \eta F, \quad \tilde{r} = r_V + \eta R, \quad (111)$$

ahol f_V , és r_V a Vaidya-téridőben talált metrikák komponensei, ηF és ηR pedig perturbációk.

Fontos figyelembe venni, hogy a $\frac{Q^2}{r^2} \ll \frac{M}{r}$ feltétel r -től függ és origóhoz közelítve a Q^2 -et tartalmazó tag nagyobb ütemben növekszik, ezért a közelítő összefüggés csak egy kiválasztott

$$r_{min} \gg \frac{Q^2}{M} \quad (112)$$

értéknél nagyobb r értékek esetén alkalmazható.

A (113a)-(113d) egyenleteket átrendezhetjük a következő módon

$$r_{,u}f_{,u} - fr_{,uu} = 0 \quad (113a)$$

$$rr_{,v}f_{,v} - frr_{,vv} = fM_{,v} \quad (113b)$$

$$r^4f_{,u}f_{,v} - r^4ff_{,uv} - 2f^2r^3r_{,uv} = f^3Q^2 \quad (113c)$$

$$r^2f + 2r^3r_{,uv} + 2r^2r_{,u}r_{,v} = Q^2 \quad (113d)$$

hogy az r és f függvények ne legyenek a nevezőben, ugyanis ez megnehezíti a közelítő megoldás keresését.

A (111) közelítést felhasználva a (113a)-(113d) egyenletekben, a lineáris rendnél nagyobb tagokat elhagyva a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} r_{V,u}f_{V,u} + r_{V,u}\mu F_{,u} + f_{V,u}\mu R_{,u} \\ - f_V r_{V,uu} - f_V \mu R_{,uu} - r_{V,uu}\mu F = 0 \end{aligned} \quad (114a)$$

$$\begin{aligned} r_V r_{V,v} f_{V,v} + r_V \mu R_{,v} f_{V,v} + \mu R r_{V,v} f_{V,v} \\ + r_V r_{V,v} \mu F_{,v} - f_V r_V r_{V,vv} - f_V r_V \mu R_{,vv} \\ - f_V \mu R r_{V,vv} - \mu F r_V r_{V,vv} = f_V M_{,v} + \mu F M_{,v} \end{aligned} \quad (114b)$$

$$\begin{aligned} r_V^4 f_V f_{V,v} + 4r_V^3 \mu R f_V f_{V,v} + r_V^4 f_V \mu F_{,v} \\ + r_V^4 \mu F f_{V,v} - r_V^4 f_V f_{V,uv} - 4r_V^3 \mu R f_V f_{V,uv} \\ - r_V^4 \mu F f_{V,uv} - r_V^4 f_V \mu F_{,uv} - 2f_V^2 r_V^3 r_{V,uv} \\ - 4f_V \mu F r_V^3 r_{V,uv} - 6f_V^2 r_V^2 \mu R r_{V,uv} - 2f_V^2 r_V^3 \mu R_{,uv} = f_V^3 Q^2 + 3f_V^2 \mu F Q^2 \end{aligned} \quad (114c)$$

$$\begin{aligned} r_V^2 f_V + 2r_V \mu R f_V + r_V^2 \mu F + 2r_V^3 r_{V,uv} \\ + 6r_V^2 \mu R r_{V,uv} + 2r_V^3 \mu R_{,uv} + 2r_V^2 r_{V,u} r_{V,v} \\ + 4r_V \mu R r_{V,u} r_{V,v} + 2r_V^2 \mu R_{,u} r_{V,v} + 2r_V^2 r_{V,u} \mu R_{,v} = Q^2 \end{aligned} \quad (114d)$$

f_V és r_V függvényekről ismert, megválasztásuk miatt, hogy teljesítik (28a), (49), (28c) és (28d) egyenletekből álló egyenletrendszert. Így a (114a)-(114d) egyenletrendszer olyan tagjai, amelyek nem tartalmaznak perturbációt, kiemelhetők és az egyenletek a következő alakra egyszerűsíthetők:

$$r_{V,u}\mu F_{,u} + f_{V,u}\mu R_{,u} - f_V\mu R_{,uu} - r_{V,uu}\mu F = 0 \quad (115a)$$

$$\begin{aligned} & r_V\mu R_{,v}f_{V,v} + \mu Rr_{V,v}f_{V,v} + r_Vr_{V,v}\mu F_{,v} \\ & - f_Vr_V\mu R_{,vv} - f_V\mu Rr_{V,vv} - \mu Fr_Vr_{V,vv} = \mu FM_{,v} \end{aligned} \quad (115b)$$

$$\begin{aligned} & 4r_V^3\mu Rf_Vf_{V,v} + r_V^4f_V\mu F_{,v} + r_V^4\mu Ff_{V,v} \\ & - 4r_V^3\mu Rf_Vf_{V,uv} - r_V^4\mu Ff_{V,uv} - r_V^4f_V\mu F_{,uv} \\ & - 4f_V\mu Fr_V^3r_{V,uv} - 6f_V^2r_V^2\mu Rr_{V,uv} - 2f_V^2r_V^3\mu R_{,uv} = f_V^3Q^2 + 3f_V^2\mu FQ^2 \end{aligned} \quad (115c)$$

$$\begin{aligned} & + 2r_V\mu Rf_V + r_V^2\mu F + 6r_V^2\mu Rr_{V,uv} + 2r_V^3\mu R_{,uv} \\ & 4r_V\mu Rr_{V,u}r_{V,v} + 2r_V^2\mu R_{,u}r_{V,v} + 2r_V^2r_{V,u}\mu R_{,v} = Q^2 \end{aligned} \quad (115d)$$

Ez tehát az elektromosan töltött Vaidya-térídő perturbációs egyenletrendszerének az alakja két fénykoordinátát tartalmazó koordináta rendszerben. Sajnos ez az egyenletrendszer nem lett egyszerűbb, mint a (113a)-(113d) egyenletrendszer. Az egyenletrendszer megoldása folyamatban van.

8. Összegzés

Dolgozatomban a gömbszimmetrikus téridők két fényszerű koordinátát tartalmazó alakjaival foglalkoztam. Legelőször egy általános gömbszimmetrikus téridőnek meghatároztam az Einstein-egyenletekhez szükséges Einstein-tenzor komponenseit. Ezekre vákuum esetén felírtam az Einstein-egyenleteket, és Waugh és Lake [7] számolásaival analóg módon eljárva megadtam a metrika alakját két különböző módon. A különbséget az integrációs függvények különböző megválasztása jelentette. Mindkét eset ugyanazt a téridőt írja le, de a null koordináták különbözőek.

Az ezt követő fejezetben Waugh és Lake [7] eredményeit reprodukáltam a szakirodalomban meg nem található részletességgel. Null por energia impulzus tenzor esetén felírtam az Einstein-egyenleteket, majd ezeket leegyszerűsítettem 3 elsőrendű nemlineáris parciális differenciálegyenletre. Ezen egyenletekben az egyik integrálási függvényt tömegfüggvényként definiáltam. A tömegfüggvény lineáris és exponenciális alakja esetén [7] megadtam a metrika egzakt alakját és az eléréséhez szükséges számolásokat részleteztem.

A tömegfüggvény definiálásának helyességét azzal ellenőriztem, hogy felírtam a transzformációt a két fényszerű koordinátát tartalmazó koordináták és az Eddington–Finkelstein koordináták között. Itt $r(u, v)$ -re felírtam egy teljes differenciált. Ennek a teljes differenciálnak a létezésére felírtam egy egyenlőséget, amit megvizsgáltam az összes korábban megadott dupla null koordinátás metrika esetén. Azt kaptam, hogy az összes esetben a definiált tömegfüggvény megegyezik a Vaidya téridő Eddington–Finkelstein koordinátákban ismert alakjában szereplő tömegfüggvénnyel, tehát a függvény tömegfüggvényként definiálása helyes volt.

Ezt követően felírtam a Vaidya-téridő legegyszerűbb általánosítására, az elektromosan töltött Vaidya-téridőre az Einstein-egyenleteket, majd ennek a perturbációs egyenletét lineáris rendben.

A téma mélységét, terjedelmét és a szakirodalmi háttér nagyságát figyelembe véve nem törekedhettem teljes, kimerítő tárgyalásra. A kiválasztott tárgy túlmutat jelen dolgozat keretein, azonban teret nyit további kutatások számára.

A kutatómunka egy következő fázisában szeretném megvizsgálni, hogy vannak-e más tömegfüggvények is, amelyekre lehetséges a transzformáció. További vizsgálható irány a területen, hogy az elektromosan töltött Vaidya-téridő esetén a perturbatív egyenletrendszer megoldás, valamint annak vizsgálata, hogy ebben az esetben milyen tömegfüggvény esetén lehetséges a transzformáció.

A tömegfüggvények vizsgálata során egy esetleges kiindulást jelenthet a tömegfüggvény kritériumok vizsgálata, mint például annak monotonitása, emellett olyan függvények vizsgálata, amelyek nem folytonos besugárzást modelleznek.

Ezen témakör kutatása hasznos a feketelyukak vizsgálatban, ugyanis általánosabb képet alakíthatunk ki azok működésével kapcsolatban.

9. Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Prof. Dr. Gergely Árpád Lászlónak, hogy elméleti és gyakorlati információkkal segítette munkámat. Tanácsai és észrevételei hasznos gondolatokkal gazdagították tudásomat és szakdolgozatomat.

Hivatkozások

- [1] J. B. Griffiths. Neutrino radiation in spherically-symmetric gravitational fields. III. Comparison with photon radiation fields. *General Relativity and Gravitation*, 5(4):453–458, August 1974.
- [2] P. C. Vaidya. The external field of a radiating star in general relativity. *Current Science*, 12:183, March 1943.
- [3] K. S. Govinder and M. Govender. Gravitational collapse of null radiation and a string fluid. *Physical Review D*, 68(2), jul 2003.
- [4] I. Booth and J. Martin. Proximity of black hole horizons: Lessons from Vaidya spacetime. *Physical Review D*, 82(12), dec 2010.
- [5] V. Husain. Exact solutions for null fluid collapse. *Physical Review D*, 53(4):R1759–R1762, feb 1996.
- [6] W. A. Hiscock, L. G. Williams, and D. M. Eardley. Creation of particles by shell-focusing singularities. *Phys. Rev. D*, 26:751–760, Aug 1982.
- [7] B. Waugh and K. Lake. Double-null coordinates for the Vaidya metric. *Phys. Rev. D*, 34:2978–2984, Nov 1986.
- [8] Gergely Á. L. Általános relativitáselmélet alapjai című kurzus. 2021.
- [9] A. S Eddington. A comparison of Whitehead’s and Einstein’s formulæ. *Nature*, 113(2832):192–192, 1924.
- [10] D. Finkelstein. Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. *Phys. Rev.*, 110:965–967, May 1958.
- [11] M. D. Kruskal. Maximal extension of Schwarzschild metric. *Phys. Rev.*, 119:1743–1745, Sep 1960.
- [12] G. Szekeres. On the singularities of a Riemannian manifold. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 7:285–301, 1960.
- [13] J. B. Griffiths and J. Podolsky. *Exact Space-Times in Einstein’s General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [14] Gergely Á. L. Speciális relativitáselmélet alapjai című kurzus. 2021.
- [15] P. C. Vaidya. ‘Newtonian’ time in general relativity. *Nature*, 171(4345):260–261, 1953.
- [16] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [17] R. W. Lindquist, R. A. Schwartz, and C. W. Misner. Vaidya’s radiating Schwarzschild metric. *Phys. Rev.*, 137:B1364–B1368, Mar 1965.
- [18] William B. Bonnor and P. C. Vaidya. Spherically symmetric radiation of charge in einstein-maxwell theory. *General Relativity and Gravitation*, 1:127–130, 1970.