

Szegedi Tudományegyetem TTIK Fizikai Intézet Elméleti Fizikai Tanszék

DIPLOMAMUNKA

Klasszikus integrálható rendszerek algebrai elmélete

Készítette: Sallai Krisztina, Fizikus MSc szakos hallgató

Témavezető: Dr. Pusztai Béla Gábor, egyetemi docens, SZTE TTIK Bolyai
Intézet, Analízis Tanszék

Tanszéki konzulens: Dr. Fehér László, egyetemi tanár, SZTE TTIK Fizikai
Intézet, Elméleti Fizikai Tanszék

Szeged, 2022

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Alapfogalmak	4
1.1. Lineáris funkcionálok	4
1.2. Multilineáris leképezések, tenzorszorzat	8
1.3. Szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzorszorzatok	12
1.4. Algebrák tenzorszorzata	15
2. Poisson-zárójel	25
2.1. Poisson-zárójel és Hamiltoni dinamika	25
2.2. Tenzori Poisson-zárójel	30
3. Lax-egyenlet, r-mátrix	33
3.1. Lax-egyenlet	33
3.2. r -mátrix	37
4. Példák	42
4.1. Nyílt Toda-rendszer	42
4.2. Calogero–Moser–Sutherland-rendszerek	46
Hivatkozások	48

Bevezetés

Az integrálható rendszerek elméletét a fizika számos területén alkalmazzák, mind a klasszikus mechanikában, mind a kvantummechanikában. Az elmélet felhasználható például az n -dimenziós harmonikus oszcillátorok [1], a Kepler-probléma [1], két newtoni középpont körüli mozgás [2] és n -test problémák leírására [1, 3], valamint a kvantummechanikában például a Lieb–Liniger-modell [4] vagy a Heisenberg-modell [5, 6] leírására. Ennek a diplomamunkának a célja a klasszikus integrálható rendszerek algebrai alapjainak matematikailag precíz leírása, majd a kidolgozott elmélet alkalmazása különböző dinamikai rendszerek leírása. A dolgozat első fejezetében áttekintjük a szükséges alapfogalmakat a lineáris funkcionálok és a tenzorszorzat elméletéből, majd az algebraik tenzorszorzatával foglalkozunk. A második fejezetben ismertetjük a Lax-egyenlet és r -mátrixok elméletéhez nélkülözhetetlen Poisson-zárójel és tenzori Poisson-zárójel legfontosabb tulajdonságait. A harmadik fejezetben rátérünk a Lax-egyenlet és r -mátrix bemutatására. Ezek után pedig a negyedik fejezetben a kiépített elméletet felhasználjuk a nyílt Toda-rendszer és a Caloger–Moser–Sutherland-rendszerek leírására.

1. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben röviden áttekintjük a Lax-egyenlet és r -mátrix tárgyalásához szükséges alapfogalmakat. Először megvizsgáljuk a lineáris funkcionálokat, majd áttérünk a multilineáris leképezések és a tenzorszorzat elméletére. A vektorterek elméletének alapjait ismertnek tekintjük. A fejezetben az [7, 8] könyvek, a [9] cikk, valamint a [10] jegyzet alapján dolgoztunk. A továbbiakban az

$$\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\} \quad (1.1)$$

jelölést használjuk.

1.1. Lineáris funkcionálok

Ebben a fejezetben a vektortér felett értelmezett számértékű függvényekkel foglalkozunk, valamint bevezetjük a vektorterek algebrai duálisát.

1.1. Definíció. Legyen V egy $\mathbb{F}$ test feletti vektortér. Egy

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}, \quad x \mapsto \varphi(x) \quad (1.2)$$

leképezést lineáris funkcionálnak nevezünk, ha tetszőleges $a, b \in \mathbb{F}$ és $x, y \in V$ esetén

$$\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y). \quad (1.3)$$

Lineáris funkcionál például az $n \times n$ -es komplex mátrixok tere felett értelmezett trace leképezés.

1.2. Definíció. Tetszőleges V vektortér esetén a V feletti lineáris funkcionálok halmazát V^* -gal jelöljük és V algebrai duálisának nevezzük.

Egy $\mathbb{F}$ test feletti d -dimenziós ($1 \leq d < \infty$) V vektorteret tekintve rögzítsünk egy tetszőleges

$$E = \{e_1, \dots, e_d\} \quad (1.4)$$

bázist. Egy tetszőleges x vektornak létezik egyértelmű felbontása ebben a bázisban, a megfelelő együtthatókat jelölje $a_1, \dots, a_d$. Ezután tetszőleges $j \in \mathbb{N}_d$ -re definiáljuk az alábbi leképezést:

$$e_j^* : V \rightarrow \mathbb{F}, \quad x = a_1 e_1 + \dots + a_d e_d \mapsto e_j^*(x) = a_j, \quad (1.5)$$

mely segítségével tetszőleges V -beli x vektor esetén írhatjuk, hogy

$$x = \sum_{j=1}^d e_j^*(x) e_j = e_1^*(x) e_1 + \dots + e_d^*(x) e_d. \quad (1.6)$$

Következésképpen tetszőleges $a, b \in \mathbb{F}$ és tetszőleges $x, y \in V$ esetén

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^d e_j^*(ax + by)e_j &= ax + by = a \sum_{j=1}^d e_j^*(x)e_j + b \sum_{j=1}^d e_j^*(y)e_j \\ &= \sum_{j=1}^d (ae_j^*(x) + be_j^*(y))e_j. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Mivel az E bázisra vonatkozó együtthatók egyértelműek, így bármely $j \in \mathbb{N}_d$ esetén

$$e_j^*(ax + by) = ae_j^*(x) + be_j^*(y). \quad (1.8)$$

Ez pedig azt jelenti, hogy e_j^* a V algebrai duálisának eleme. Speciálisan, tetszőleges $k \in \mathbb{N}_d$ -re

$$e_k = \sum_{j=1}^d e_j^*(e_k)e_j, \quad (1.9)$$

ahonnan leolvasható, hogy

$$e_j^*(e_k) = \delta_{j,k}. \quad (1.10)$$

1.3. Tétel. Legyen V egy $\mathbb{F}$ test feletti d -dimenziós vektortér ($1 \leq d < \infty$), továbbá $E = \{e_1, \dots, e_d\}$ egy tetszőleges bázis V -ben. Ekkor az

$$E^* = \{e_1^*, \dots, e_d^*\} \quad (1.11)$$

rendszer egy bázist alkot a V^* duális térben. Ezt nevezzük az E bázishoz társított duális bázisnak.

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy E^* lineárisan független és generáló. Először tekintsünk olyan $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{F}$ elemeket, hogy

$$\sum_{j=1}^d a_j e_j^* = 0. \quad (1.12)$$

Ekkor tetszőleges $k \in \mathbb{N}_d$ esetén

$$0 = \left(\sum_{j=1}^d a_j e_j^* \right) (e_k) = \sum_{j=1}^d a_j e_j^*(e_k) = \sum_{j=1}^d a_j \delta_{j,k} = a_k, \quad (1.13)$$

azaz

$$a_1 = 0, \dots, a_d = 0, \quad (1.14)$$

ami azt jelenti, hogy E^* lineárisan független.

Ezután legyen $\varphi \in V^*$ egy tetszőleges elem. Ekkor tetszőleges x vektor esetén

$$\varphi(x) = \varphi \left(\sum_{j=1}^d e_j^*(x)e_j \right) = \sum_{j=1}^d e_j^*(x)\varphi(e_j) = \left(\sum_{j=1}^d \varphi(e_j)e_j^* \right) (x), \quad (1.15)$$

azaz

$$\varphi = \sum_{j=1}^d \varphi(e_j) e_j^*. \quad (1.16)$$

Látjuk tehát, hogy bármelyik lineáris funkcionál előállítható az E^* elemeinek alkalmas lineáris kombinációjaként, azaz E^* generáló. ■

Az előző tétel (1.3) következménye, hogy tetszőleges véges dimenziós V vektortér esetén az algebrai duálisának dimenziója megegyezik V dimenziójával.

1.4. Tétel. *Legyen V egy $\mathbb{F}$ test feletti véges dimenziós vektortér. Ha $x \in V$ egy nemnulla vektor, akkor megadható olyan $\varphi_x \in V^*$ lineáris funkcionál, amire $\varphi_x(x) = 1$.*

Bizonyítás. Legyen x egy tetszőleges nemnulla vektor V -ben. A $d = \dim(V)$ rövidítést bevezetve ekkor $d \geq 1$. Valamint ekkor van olyan $E = \{e_1, \dots, e_d\}$ bázis V -ben, hogy $e_1 = x$. Ezt követően tekintsük az E -hez társított $E^* = \{e_1^*, \dots, e_d^*\}$ duális bázist. A $\varphi_x = e_1^*$ lineáris funkcionálra teljesül, hogy

$$\varphi_x(x) = e_1^*(e_1) = \delta_{1,1} = 1. \quad (1.17)$$

■

Ha veszünk különböző x, y vektorokat, akkor az előző tétel alapján megadható olyan lineáris funkcionál, amire $\varphi(x - y) = 1$. Tehát $\varphi(x) - \varphi(y) = 1$, melynek következtében

$$\varphi(x) \neq \varphi(y). \quad (1.18)$$

Ezt a tulajdonságot úgy szoktuk megfogalmazni, hogy a lineáris funkcionálok szétválasztó rendszert alkotnak a V vektortér felett.

1.5. Definíció. *Egy $\mathbb{F}$ test feletti tetszőleges V vektortér második duálisa vagy biduálisa*

$$V^{**} = (V^*)^*. \quad (1.19)$$

Ha V véges dimenziós, akkor az algebrai duálisa is véges dimenziós és $\dim(V^*) = \dim(V)$, így V^* duálisa is véges dimenziós és

$$\dim(V^{**}) = \dim((V^*)^*) = \dim(V^*) = \dim(V). \quad (1.20)$$

Ezután tekintsük tetszőleges x vektor esetén az alábbi leképezést:

$$\Gamma_x : V^* \rightarrow \mathbb{F}, \quad \varphi \mapsto \Gamma_x(\varphi) = \varphi(x). \quad (1.21)$$

Világos, hogy Γ_x egy lineáris funkcionál a V^* vektortér felett, azaz

$$\Gamma_x \in (V^*)^* = V^{**}. \quad (1.22)$$

1.6. Tétel. Legyen V egy $\mathbb{F}$ test feletti véges dimenziós vektortér. Ekkor a

$$\Gamma : V \rightarrow V^{**}, \quad x \mapsto \Gamma_x \quad (1.23)$$

leképezés egy vektortér izomorfizmus, ami által a V^{**} biduális természetes módon azonosítható V -vel.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a Γ leképezés lineáris transzformáció, így már csak azt kell belátnunk, hogy bijektív is. Ha veszünk egy olyan x elemet, ami a Γ magterében van, azaz

$$x \in \ker(\Gamma), \quad (1.24)$$

akkor erre az x -re $\Gamma_x = 0$. Ebből következik, hogy tetszőleges $\varphi \in V^*$ esetén

$$\Gamma_x(\varphi) = 0. \quad (1.25)$$

Ezután tegyük fel, hogy $x \neq 0$. Korábban láttuk, hogy ekkor van olyan $\varphi_x \in V^*$, hogy

$$\varphi_x(x) = 1. \quad (1.26)$$

A φ_x is Γ_x magjában van, tehát

$$0 = \Gamma_x(\varphi_x) = \varphi_x(x) = 1 \quad (1.27)$$

ellentmondásra jutunk, ami azt jelenti, hogy Γ magja triviális, azaz

$$\ker(\Gamma) = 0, \quad (1.28)$$

ebből következően Γ injektív leképezés.

Ezt követően vizsgáljuk meg Γ képterét. A

$$\dim(\ker(\Gamma)) + \dim(\text{ran}(\Gamma)) = \dim(V) \quad (1.29)$$

összefüggést felhasználva, valamint, hogy Γ képterének dimenziója 0, azt kapjuk, hogy

$$\dim(\text{ran}(\Gamma)) = \dim(V). \quad (1.30)$$

Korábban láttuk, hogy V biduálisának dimenziója megegyezik V dimenziójával, tehát

$$\dim(\text{ran}(\Gamma)) = \dim(V^{**}), \quad (1.31)$$

következésképpen

$$\text{ran}(\Gamma) = V^{**}. \quad (1.32)$$

Ez pedig azt jelenti, hogy Γ szürjektív, így a bizonyításunk teljes. ■

1.2. Multilineáris leképezések, tenzorszorzat

A vektorterek felett értelmezett szám értékű függvények áttekintése után áttérünk a vektor értékű függvényekre. Ezután multilineáris funkcionálokat vizsgálunk és bevezetjük a tenzorszorzat fogalmát.

1.7. Definíció. Legyenek $V_1, \dots, V_n$ és W tetszőleges vektorterek az $\mathbb{F}$ test felett (n természetes szám). Ekkor egy

$$m : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto m(x_1, \dots, x_n) \quad (1.33)$$

leképezés multilineáris, ha bármely $n - 1$ változóját rögzítve a maradék változóban lineáris. Azaz, ha bármely $j \in \mathbb{N}_n$ esetén, tetszőleges α, α' skalárookra teljesül, hogy

$$\begin{aligned} m(x_1, \dots, \alpha \cdot x_j + \alpha' \cdot x'_j, \dots, x_n) \\ = \alpha \cdot m(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) + \alpha' m(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (1.34)$$

ahol $(x_1, \dots, x_n) \in V_1 \times \dots \times V_n$ és x'_j tetszőleges eleme V_j -nek.

A továbbiakban a $V_1 \times \dots \times V_n$ Descartes-szorzat felett értelmezett multilineáris leképezések halmazát az alábbi módon jelöljük:

$$MLin(V_1, \dots, V_n; W). \quad (1.35)$$

A kétváltozós multilineáris leképezéseket bilineáris leképezéseknek nevezzük. Bilineáris leképezés például egy tetszőleges $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ valós belső szorzattér esetén a belső szorzat, ami tehát az $MLin(V, V, \mathbb{R})$ halmaznak egy eleme. Továbbá, az $\mathbb{R}^3$ téren értelmezett vektoriális szorzás is egy bilineáris leképezés, azaz eleme az $MLin(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ halmaznak. Speciálisan $n = 1$ esetén az $MLin(V, W)$ jelölés helyett az $\mathcal{L}(V, W)$ jelölést használjuk a V vektortérből W vektortérbe képező lineáris leképezésekre. Amikor pedig $W = V$, akkor az $\mathcal{L}(V)$ rövidítést használjuk.

Ugyanazon $\mathbb{F}$ test feletti $V_1, \dots, V_n$ és W vektorterek esetén a multilineáris leképezések halmaza egy $\mathbb{F}$ test feletti vektortérre szervezhető a pontonként értelmezett összeadással és skalárral való szorzással.

1.8. Definíció. Legyenek $V_1, \dots, V_n$ ($n \in \mathbb{N}$) tetszőleges vektorterek az $\mathbb{F}$ test felett. Ekkor az $MLin(V_1, \dots, V_n; \mathbb{F})$ vektortér elemeit multilineáris funkcionáloknak nevezzük.

1.9. Definíció. Valamely $\mathbb{F}$ test feletti tetszőleges véges dimenziós $V_1, \dots, V_n$ vektorterek tenzorszorzata a

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n = MLin(V_1^*, \dots, V_n^*; \mathbb{F}) \quad (1.36)$$

lineáris tér, ahol V_j^* a V_j vektortér duálisát jelöli.

Adott $V_1, \dots, V_n$ véges dimenziós $\mathbb{F}$ test feletti vektorterek esetén az $x_1 \in V_1, \dots, x_n \in V_n$ vektorok tenzorszorzata az alábbi leképezés:

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n : V_1^* \times \dots \times V_n^* \rightarrow \mathbb{F}, \quad (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \mapsto \prod_{a=1}^n \varphi_a(x_a). \quad (1.37)$$

Könnyen látható, hogy ez egy multilineáris funkcionál, azaz

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n. \quad (1.38)$$

Az ilyen alakú multilineáris funkcionálokat elemi tenzoroknak is szokták hívni.

1.10. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és tetszőleges $a \in \mathbb{N}_n$ esetén legyen V_a egy adott d_a -dimenziós vektortér ($1 \leq d_a < \infty$) az $\mathbb{F}$ test felett. Továbbá tetszőleges $a \in \mathbb{N}_n$ esetén legyen

$$E_a = \{e_1^{(a)}, \dots, e_{d_a}^{(a)}\} \quad (1.39)$$

egy tetszőleges bázis V_a -ban. Ekkor az

$$E = \{e_{j_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{j_n}^{(n)}\}_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{N}_{d_n}} \quad (1.40)$$

vektorrendszer bázist alkot $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ -ben. Ebből pedig következik, hogy

$$\dim(V_1 \otimes \dots \otimes V_n) = \prod_{a=1}^n \dim(V_a). \quad (1.41)$$

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy az E vektorrendszer lineárisan független és generáló. Először tegyük fel, hogy tetszőleges $(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{N}_{d_n}$ esetén adva van egy olyan $\alpha_{j_1, \dots, j_n} \in \mathbb{F}$ szám, hogy

$$\sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{N}_{d_n}} \alpha_{j_1, \dots, j_n} \cdot e_{j_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{j_n}^{(n)} = 0. \quad (1.42)$$

Ekkor pedig használva az $E_a \subseteq V_a$ bázisokhoz tartozó

$$E_a^* = \{e_1^{(a)*}, \dots, e_{d_a}^{(a)*}\} \quad (1.43)$$

duális bázisokat, tetszőleges $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{N}_{d_n}$ esetén

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{N}_{d_n}} \alpha_{j_1, \dots, j_n} \cdot e_{j_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{j_n}^{(n)} \left(e_{k_1}^{(1)*}, \dots, e_{k_n}^{(n)*} \right) \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{N}_{d_n}} \alpha_{j_1, \dots, j_n} \cdot \prod_{a=1}^n e_{k_a}^{(a)*} \left(e_{j_a}^{(a)} \right) \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{N}_{d_n}} \alpha_{j_1, \dots, j_n} \cdot \prod_{a=1}^n \delta_{k_a, j_a} = \alpha_{k_1, \dots, k_n}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Azaz, az E vektorrendszer lineárisan független.

Ezután legyen $\omega \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ egy tetszőleges elem, továbbá $\varphi_1 \in V_1^*, \dots, \varphi_n \in V_n^*$ tetszőleges lineáris funkcionálok. Ekkor bármely $a \in \mathbb{N}_n$ esetén az E_a^* duális bázis segítségével írhatjuk, hogy

$$\varphi_a = \sum_{j_a=1}^{d_a} \varphi_a(e_{j_a}^{(a)}) e_{j_a}^{(a)*}, \quad (1.45)$$

így az ω leképezés multilineáris volta miatt látható, hogy

$$\begin{aligned} \omega(\varphi_1, \dots, \varphi_n) &= \omega\left(\sum_{j_1=1}^{d_1} \varphi_1(e_{j_1}^{(1)}) e_{j_1}^{(1)*}, \dots, \sum_{j_n=1}^{d_n} \varphi_n(e_{j_n}^{(n)}) e_{j_n}^{(n)*}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} \omega(e_{j_1}^{(1)*}, \dots, e_{j_n}^{(n)*}) \cdot \varphi_1(e_{j_1}^{(1)}) \cdots \varphi_n(e_{j_n}^{(n)}) \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_{d_1} \times \cdots \times \mathbb{N}_{d_n}} \omega(e_{j_1}^{(1)*}, \dots, e_{j_n}^{(n)*}) \cdot e_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{j_n}^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \end{aligned} \quad (1.46)$$

tehát

$$\omega = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_{d_1} \times \cdots \times \mathbb{N}_{d_n}} \omega(e_{j_1}^{(1)*}, \dots, e_{j_n}^{(n)*}) \cdot e_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{j_n}^{(n)}. \quad (1.47)$$

Azaz ω felírható az E rendszer elemeinek lineáris kombinációjaként, így az E rendszer generáló is. ■

Az előző tétel gondolatmenetét használva könnyen látható a következő tétel is.

1.11. Tétel. *Ha az $\mathbb{F}$ test feletti $V_1, \dots, V_n$ és W vektorterek véges dimenziósak, akkor az $M\text{Lin}(V_1, \dots, V_n; W)$ vektortér is véges dimenziós és*

$$\dim(M\text{Lin}(V_1, \dots, V_n; W)) = \dim(W) \prod_{a=1}^n \dim(V_a). \quad (1.48)$$

Ezután legyenek újra $V_1, \dots, V_n$ véges dimenziós vektorterek az $\mathbb{F}$ test felett és tekintsük a

$$p : V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \quad (1.49)$$

leképezést. A p egy multilineáris leképezés, azaz

$$p \in M\text{Lin}(V_1, \dots, V_n; V_1 \otimes \cdots \otimes V_n). \quad (1.50)$$

1.12. Tétel. *Legyenek $V_1, \dots, V_n$ és W véges dimenziós vektorterek az $\mathbb{F}$ test felett. Ekkor bármely*

$$m : V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow W \quad (1.51)$$

multilineáris leképezés esetén létezik egyértelműen olyan

$$M : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \rightarrow W \quad (1.52)$$

lineáris transzformáció, hogy

$$m = M \circ p. \quad (1.53)$$

Azaz, a

$$\begin{array}{ccc} V_1 \otimes \cdots \otimes V_n & & \\ \uparrow p & \searrow M & \\ V_1 \times \cdots \times V_n & \xrightarrow{m} & W \end{array}$$

diagram kommutatív. A $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, p)$ pár ezen tulajdonságát nevezzük a tenzorszorzat univerzalitásának.

Bizonyítás. Tetszőleges $a \in \mathbb{N}_n$ esetén legyen

$$d_a = \dim(V_a). \quad (1.54)$$

Ha van olyan a index, hogy $d_a = 0$, akkor a tétel triviálisan teljesül. Emiatt a továbbiakban feltehető, hogy bármely $a \in \mathbb{N}_n$ esetén $d_a \geq 1$. Ezek után bármely $a \in \mathbb{N}_n$ esetén válasszunk egy

$$E_a = \{e_1^{(a)}, \dots, e_{d_a}^{(a)}\} \quad (1.55)$$

bázist V_a -ban és tekintsük a hozzá társított

$$E_a^* = \{e_1^{(a)*}, \dots, e_{d_a}^{(a)*}\} \quad (1.56)$$

duális bázist. Ezután vizsgáljuk az m multilineáris funkcionálhoz tartozó M lineáris transzformáció létezését és egyértelműségét. Tekintsük az

$$M : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \rightarrow W, \quad \omega \mapsto M(\omega) \quad (1.57)$$

leképezést, ahol

$$M(\omega) = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_{d_1} \times \cdots \times \mathbb{N}_{d_n}} \omega(e_{j_1}^{(1)*}, \dots, e_{j_n}^{(n)*}) \cdot m(e_{j_1}^{(1)}, \dots, e_{j_n}^{(n)}). \quad (1.58)$$

Világos, hogy M egy jól-definiált lineáris transzformáció. Továbbá bármely

$(x_1, \dots, x_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ esetén

$$\begin{aligned}
M \circ p(x_1, \dots, x_n) &= M(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \\
&= \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{N}_{d_n}} (x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \left(e_{j_1}^{(1)*}, \dots, e_{j_n}^{(n)*} \right) \cdot m \left(e_{j_1}^{(1)}, \dots, e_{j_n}^{(n)} \right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{d_1} \dots \sum_{j_n=1}^{d_n} e_{j_1}^{(1)*}(x_1) \cdot \dots \cdot e_{j_n}^{(n)*}(x_n) \cdot m \left(e_{j_1}^{(1)}, \dots, e_{j_n}^{(n)} \right) \\
&= m \left(\sum_{j_1=1}^{d_1} e_{j_1}^{(1)*}(x_1) e_{j_1}^{(1)}, \dots, \sum_{j_n=1}^{d_n} e_{j_n}^{(n)*}(x_n) e_{j_n}^{(n)} \right) \\
&= m(x_1, \dots, x_n),
\end{aligned} \tag{1.59}$$

tehát

$$M \circ p = m. \tag{1.60}$$

Azaz M teljesíti, amit elvárunk. Most tegyük fel, hogy M és M' olyan lineáris transzformációk, amikre

$$M \circ p = m = M' \circ p. \tag{1.61}$$

Ekkor bármely $(x_1, \dots, x_n) \in V_1 \times \dots \times V_n$ esetén

$$\begin{aligned}
M(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) &= M \circ p(x_1, \dots, x_n) = m(x_1, \dots, x_n) \\
&= M' \circ p(x_1, \dots, x_n) = M'(x_1 \otimes \dots \otimes x_n).
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Speciálisan, minden $(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_{d_1} \times \dots \times \mathbb{N}_{d_n}$ esetén is írhatjuk, hogy

$$M \left(e_{j_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{j_n}^{(n)} \right) = M' \left(e_{j_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{j_n}^{(n)} \right), \tag{1.63}$$

tehát az M és M' lineáris transzformációk hatása megegyezik a $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ vektortér egy alkalmas bázisán. Ebből következik, hogy

$$M = M'. \tag{1.64}$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy a tételben szereplő lineáris transzformáció egyértelmű. ■

1.3. Szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzorszorzatok

Ebben az alfejezetben szükségünk lesz a permutációk fogalmára és néhány fontos tulajdonságára, ezért először ezeket tekintjük át, majd a szimmetrikus és antiszimmetrikus tenzorszorzatokkal fogunk foglalkozni.

1.13. Definíció. Az $\mathbb{N}_n$ halmazon értelmezett

$$\sigma : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n, \quad k \mapsto \sigma(k) \quad (1.65)$$

bijektív leképezést permutációnak nevezzük. Jelölésére gyakran a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

alakot használjuk.

A permutációk halmaza a kompozícióval csoportot alkot, ezt a csoportot szimmetrikus csoportnak nevezzük és S_n -nel szokás jelölni. Rendezzünk sorba n különböző elemet és ezt tekintsük a kiindulási sorrendnek. Adott két elem közül meg tudjuk mondani, hogy melyik áll előrébb. Ha ezután vesszük egy permutációját az elemeknek és ebben a permutációban különbözik a két elem egymáshoz képesti viszonya, akkor a két elem inverzióban áll. Az inverzióban álló elem-párok száma az inverziószám. Ha ez a szám páros, akkor a permutációt párosnak nevezzük, ha páratlan, akkor a permutáció páratlan.

1.14. Definíció. A σ permutáció paritását $\text{sgn}(\sigma)$ -val jelöljük és

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} -1, & \text{ha } \sigma \text{ páratlan,} \\ 1, & \text{ha } \sigma \text{ páros.} \end{cases} \quad (1.67)$$

Legyen ezután V továbbra is egy $\mathbb{F}$ test feletti véges dimenziós vektortér és vezessük be az alábbi jelöléseket

$$V^{\otimes 0} := \mathbb{F}, \quad V^{\otimes 1} := V, \quad V^{\otimes n} := V \otimes \cdots \otimes V \quad (n \geq 2). \quad (1.68)$$

1.15. Definíció. Legyen $\omega \in V^{\otimes n}$, ahol $n \geq 2$. Azt mondjuk, hogy

(i) ω szimmetrikus, ha tetszőleges $\sigma \in S_n$ permutációra és tetszőleges $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ lineáris funkcionálok esetén

$$\omega(\varphi_{\sigma(1)}, \dots, \varphi_{\sigma(n)}) = \omega(\varphi_1, \dots, \varphi_n). \quad (1.69)$$

(ii) ω antiszimmetrikus, ha tetszőleges $\sigma \in S_n$ permutációra és tetszőleges $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ lineáris funkcionálok esetén

$$\omega(\varphi_{\sigma(1)}, \dots, \varphi_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(\varphi_1, \dots, \varphi_n). \quad (1.70)$$

Az (1.68) jelölésekhez hasonlóan vezessük be az alábbi jelöléseket

$$\begin{aligned} S^0(V) &:= \mathbb{F}, \quad S^1(V) := V, \quad S^n(V) := \{\omega \in V^{\otimes n} \mid \omega \text{ szimmetrikus}\} \quad (n \geq 2), \\ V^{\wedge 0}(V) &:= \mathbb{F}, \quad V^{\wedge 1}(V) := V, \quad V^{\wedge n}(V) := \{\omega \in V^{\otimes n} \mid \omega \text{ antiszimmetrikus}\} \quad (n \geq 2). \end{aligned} \quad (1.71)$$

1.16. Definíció. Legyen V egy $\mathbb{F}$ test feletti véges dimenziós vektortér, továbbá legyen $x_1, \dots, x_n \in V$, ahol $n \geq 2$. Ekkor

(i) $x_1, \dots, x_n$ szimmetrikus tenzorszorzata a

$$x_1 \vee \dots \vee x_n := \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)} \quad (1.72)$$

leképezés. Ekkor $x_1 \vee \dots \vee x_n \in S^n(V)$.

(ii) $x_1, \dots, x_n$ antiszimmetrikus tenzorszorzata a

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_n := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)} \quad (1.73)$$

leképezés. Ekkor $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in V^{\wedge n}(V)$.

Az antiszimmetrikus tenzorszorzatot ékszorzatnak is nevezzük. Ha veszünk tetszőleges $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ lineáris funkcionálokat és $x_1, \dots, x_n$ vektorokat, akkor a szimmetrikus tenzorszorzatuk

$$\begin{aligned} x_1 \vee \dots \vee x_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varphi_1(x_{\sigma(1)}) \dots \varphi_n(x_{\sigma(n)}), \end{aligned} \quad (1.74)$$

az ékszorzatuk pedig

$$\begin{aligned} x_1 \wedge \dots \wedge x_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \varphi_1(x_{\sigma(1)}) \dots \varphi_n(x_{\sigma(n)}). \end{aligned} \quad (1.75)$$

A (1.75) az alábbi mátrix determinánsa:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix}. \quad (1.76)$$

1.4. Algebrák tenzorszorzata

Ebben az alfejezetben először az algebrák definícióját ismertetjük, majd a tenzorszorzatukat mutatjuk be.

1.17. Definíció. Egy

$$(\mathcal{A}, +, \cdot) \quad (1.77)$$

algebrai struktúrát egy $\mathbb{F}$ test feletti algebrának nevezünk, ha az összeadásnak nevezett

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (a, b) \mapsto a + b \in \mathcal{A}, \quad (1.78)$$

és a szorzásnak nevezett

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (a, b) \mapsto a \cdot b \in \mathcal{A} \quad (1.79)$$

kétváltozós műveletekre teljesülnek az alábbiak:

1. Az $(\mathcal{A}, +)$ algebrai struktúra egy $\mathbb{F}$ test feletti vektorteret alkot.
2. A szorzás bi- $\mathbb{F}$ -lineáris, azaz tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ és tetszőleges $a, b, c \in \mathcal{A}$ esetén

$$(\alpha a + \beta b) \cdot c = \alpha a \cdot c + \beta b \cdot c \quad \text{és} \quad c \cdot (\alpha a + \beta b) = \alpha c \cdot a + \beta c \cdot b. \quad (1.80)$$

Sok esetben a szorzás asszociatív, ekkor asszociatív algebráról beszélünk. Ha a szorzás kommutatív, akkor az algebrát kommutatív algebrának hívjuk. Ha pedig a szorzásra vonatkozóan létezik egységelem, akkor az egy egységelemes algebra. Például egy $\mathbb{F}$ test feletti V vektortéren értelmezett lineáris operátorok családja $\mathbb{F}$ test feletti egységelemes asszociatív algebrát alkot, ez az algebra nem kommutatív, ha a V vektortér dimenziója legalább 2. Tetszőleges N természetes szám esetén az $N \times N$ -es komplex mátrixok $\mathbb{C}^{N \times N}$ halmaza a mátrixokon értelmezett összeadás és szorzás szokásos műveleteivel egy egységelemes asszociatív algebrát alkot a komplex számok teste felett. Az egységelem az egységmátrix,

$$\mathbf{1} = \text{diag}(1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^{N \times N}. \quad (1.81)$$

Az $N \times N$ -es komplex mátrixok algebrája akkor és csak akkor kommutatív, ha $N = 1$.

1.18. Tétel. Legyenek $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) tetszőleges véges dimenziós algebrák valamely $\mathbb{F}$ test felett. Ekkor egyértelműen létezik olyan

$$m : (\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n) \times (\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n, \quad (s, t) \mapsto s \cdot t \quad (1.82)$$

$bi\text{-}\mathbb{F}$ -lineáris leképezés, amire tetszőleges $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$ elemek esetén

$$\begin{aligned} m(a_1 \otimes \dots \otimes a_n, b_1 \otimes \dots \otimes b_n) &= (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \cdot (b_1 \otimes \dots \otimes b_n) \\ &= (a_1 \cdot b_1) \otimes \dots \otimes (a_n \cdot b_n). \end{aligned} \quad (1.83)$$

Ennek következtében az $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ vektortér ezen kétváltozós művelettel ellátva egy $\mathbb{F}$ test feletti algebrát alkot, amelyet az $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ algebrák tenzorszorzatának nevezünk.

Bizonyítás. Először ellenőrizzük, hogy létezik-e a megadott leképezés. Tetszőleges $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$ elemet rögzítve tekintsük az

$$M_{a_1, \dots, a_n} : \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n, \quad (b_1, \dots, b_n) \mapsto (a_1 \cdot b_1) \otimes \dots \otimes (a_n \cdot b_n) \quad (1.84)$$

leképezést. Ekkor tetszőleges $\alpha, \alpha' \in \mathbb{F}$ és tetszőleges

$$b_1, b'_1 \in \mathcal{A}_1, (b_2, b_3, \dots, b_n) \in \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n \quad (1.85)$$

esetén

$$\begin{aligned} M_{a_1, \dots, a_n}(\alpha b_1 + \alpha' b'_1, b_2, \dots, b_n) &= (\alpha b_1 + \alpha' b'_1) \otimes (a_2 \cdot b_2) \otimes \dots \otimes (a_n \cdot b_n) \\ &= (\alpha b_1 \otimes (a_2 \cdot b_2) \otimes \dots \otimes (a_n \cdot b_n) + \alpha' b'_1 \otimes (a_2 \cdot b_2) \otimes \dots \otimes (a_n \cdot b_n)) \\ &= \alpha \cdot (a_1 \cdot b_1) \otimes (a_2 \cdot b_2) \otimes \dots \otimes (a_n \cdot b_n) \\ &\quad + \alpha' \cdot (a_1 \cdot b'_1) \otimes (a_2 \cdot b_2) \otimes \dots \otimes (a_n \cdot b_n) \\ &= \alpha \cdot M_{a_1, \dots, a_n}(b_1, \dots, b_n) + \alpha' \cdot M_{a_1, \dots, a_n}(b'_1, \dots, b_n), \end{aligned} \quad (1.86)$$

azaz $M_{a_1, \dots, a_n}$ az első változójában lineáris. Teljesen hasonlóan látható, hogy az $M_{a_1, \dots, a_n}$ leképezés a többi változóban is lineáris. Tehát $M_{a_1, \dots, a_n}$ egy multilineáris leképezés. Így a tenzorszorzat univerzalitása miatt egyértelműen létezik olyan

$$T_{a_1, \dots, a_n} : \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n \quad (1.87)$$

lineáris operátor, hogy tetszőleges $(b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$ esetén

$$T_{a_1, \dots, a_n}(b_1 \otimes \dots \otimes b_n) = M_{a_1, \dots, a_n}(b_1, \dots, b_n), \quad (1.88)$$

azaz

$$T_{a_1, \dots, a_n}(b_1 \otimes \dots \otimes b_n) = (a_1 \cdot b_1) \otimes \dots \otimes (a_n \cdot b_n). \quad (1.89)$$

Ezután tekintsük az

$$\omega : \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n), \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto T_{a_1, \dots, a_n} \quad (1.90)$$

leképezést. Ekkor tetszőleges

$$\alpha, \alpha' \in \mathbb{F}, \quad a_1, a'_1 \in \mathcal{A}_1, \quad (a_2, a_3, \dots, a_n) \in \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n \quad (1.91)$$

elemekre tetszőleges

$$(b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n \quad (1.92)$$

esetén

$$\begin{aligned} & \omega(\alpha a_1 + \alpha' a'_1, a_2, a_3, \dots, a_n)(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) \\ &= T_{\alpha a_1 + \alpha' a'_1, a_2, \dots, a_n}(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) \\ &= ((\alpha a_1 + \alpha' a'_1) \cdot b_1) \otimes (a_2 \cdot b_2) \otimes \cdots \otimes (a_n \cdot b_n) \\ &= (\alpha a_1 \cdot b_1 + \alpha' a'_1 \cdot b_1) \otimes (a_2 \cdot b_2) \otimes \cdots \otimes (a_n \cdot b_n) \\ &= \alpha(a_1 \cdot b_1) \otimes (a_2 \cdot b_2) \otimes \cdots \otimes (a_n \cdot b_n) + \alpha'(a'_1 \cdot b_1) \otimes (a_2 \cdot b_2) \otimes \cdots \otimes (a_n \cdot b_n) \\ &= \alpha T_{a_1, a_2, \dots, a_n}(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) + \alpha' T_{a'_1, a_2, \dots, a_n}(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) \\ &= (\alpha \omega(a_1, a_2, \dots, b_n) + \alpha' \omega(a'_1, a_2, \dots, b_n))(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n), \end{aligned} \quad (1.93)$$

azaz az ω leképezés az első változójában lineáris és hasonlóan belátható, hogy a többi változójában is lineáris. Ennek következtében a tenzorszorzat univerzalitása miatt egyértelműen létezik az

$$\Omega : \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n) \quad (1.94)$$

lineáris transzformáció, úgy hogy tetszőleges $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n)$ esetén

$$\Omega(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \omega(a_1, \dots, a_n), \quad (1.95)$$

tehát

$$\Omega(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = T_{a_1, \dots, a_n}. \quad (1.96)$$

Így bármely $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ elemek esetén

$$\begin{aligned} \Omega(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) &= T_{a_1, \dots, a_n}(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) \\ &= (a_1 \cdot b_1) \otimes \cdots \otimes (a_n \cdot b_n). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Végül az Ω lineáris transzformáció segítségével definiáljuk az

$$m : (\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n) \times (\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n, \quad (s, t) \mapsto m(s, t) := \Omega(s)t \quad (1.98)$$

leképezést. Világos, hogy m egy bi- $\mathbb{F}$ -lineáris leképezés, továbbá Ω definíciója miatt tetszőleges

$$(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n \quad (1.99)$$

esetén

$$\begin{aligned} m(a_1 \otimes \dots \otimes a_n, b_1 \otimes \dots \otimes b_n) &= \Omega(a_1 \otimes \dots \otimes a_n)(b_1 \otimes \dots \otimes b_n) \\ &= (a_1 \cdot b_1) \otimes \dots \otimes (a_n \cdot b_n). \end{aligned} \quad (1.100)$$

Összefoglalva, az m leképezés teljesíti a tételben szereplő követelményeket, tehát az alkalmas m leképezés létezését beláttuk.

Ezután vizsgáljuk meg a leképezés egyértelműségét. Tegyük fel, hogy

$$m : (\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n) \times (\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n \quad (1.101)$$

és

$$\tilde{m} : (\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n) \times (\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n \quad (1.102)$$

olyan bi- $\mathbb{F}$ -lineáris leképezések, amelyekre tetszőleges $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$ esetén

$$\begin{aligned} m(a_1 \otimes \dots \otimes a_n, b_1 \otimes \dots \otimes b_n) &= (a_1 \cdot b_1) \otimes \dots \otimes (a_n \cdot b_n) \\ &= \tilde{m}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n, b_1 \otimes \dots \otimes b_n) \end{aligned} \quad (1.103)$$

Ezek után vegyünk tetszőleges $s, t \in \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ elemeket. Ekkor

$$s = \sum_{\mu=1}^k a_{1,\mu} \otimes \dots \otimes a_{n,\mu}, \quad t = \sum_{\nu=1}^l b_{1,\nu} \otimes \dots \otimes b_{n,\nu}, \quad (1.104)$$

ahol k, l természetes számok és tetszőleges $j \in \mathbb{N}_n$ esetén

$$a_{j,1}, \dots, a_{j,k}, b_{j,1}, \dots, b_{j,l} \in \mathcal{A}_j. \quad (1.105)$$

Felhasználva, hogy m és $\tilde{m}$ bi- $\mathbb{F}$ -lineárisak, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} m(s, t) &= m \left(\sum_{\mu=1}^k a_{1,\mu} \otimes \dots \otimes a_{n,\mu}, \sum_{\nu=1}^l b_{1,\nu} \otimes \dots \otimes b_{n,\nu} \right) \\ &= \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l m(a_{1,\mu} \otimes \dots \otimes a_{n,\mu}, b_{1,\nu} \otimes \dots \otimes b_{n,\nu}) \\ &= \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l (a_{1,\mu} \cdot b_{1,\nu}) \otimes \dots \otimes (a_{n,\mu} \cdot b_{n,\nu}) \\ &= \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l \tilde{m}(a_{1,\mu} \otimes \dots \otimes a_{n,\mu}, b_{1,\nu} \otimes \dots \otimes b_{n,\nu}) \\ &= \tilde{m} \left(\sum_{\mu=1}^k a_{1,\mu} \otimes \dots \otimes a_{n,\mu}, \sum_{\nu=1}^l b_{1,\nu} \otimes \dots \otimes b_{n,\nu} \right) = \tilde{m}(s, t), \end{aligned} \quad (1.106)$$

tehát $m = \tilde{m}$. Azaz beláttuk a tételben szereplő m leképezés egyértelműségét is. ■

1.19. Tétel. Ha az $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ algebrák mindegyike egységelemes az

$$e_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, e_n \in \mathcal{A}_n \quad (1.107)$$

egységelemekkel, akkor az

$$e_1 \otimes \dots \otimes e_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n \quad (1.108)$$

elemi tenzor egy egységeleme az algebrák tenzorszorzatának, azaz az egységelemes algebrák tenzorszorzata is egységelemes.

Bizonyítás. Legyen $r \in \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ tetszőleges elem. Felírhatjuk úgy, hogy

$$r = \sum_{\mu=1}^k a_{1,\mu} \otimes \dots \otimes a_{n,\mu}, \quad (1.109)$$

ahol $k \in \mathbb{N}$ és

$$(a_{1,\mu}, \dots, a_{n,\mu}) \in \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n, \quad (\mu \in \mathbb{N}_k). \quad (1.110)$$

A szorzásművelet bilinearitása miatt írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} (e_1 \otimes \dots \otimes e_n) \cdot r &= (e_1 \otimes \dots \otimes e_n) \cdot \left(\sum_{\mu=1}^k a_{1,\mu} \otimes \dots \otimes a_{n,\mu} \right) \\ &= \sum_{\mu=1}^k (e_1 \otimes \dots \otimes e_n) \cdot (a_{1,\mu} \otimes \dots \otimes a_{n,\mu}) \\ &= \sum_{\mu=1}^k (e_1 \cdot a_{1,\mu}) \otimes \dots \otimes (e_n \cdot a_{n,\mu}) = \sum_{\mu=1}^k a_{1,\mu} \otimes \dots \otimes a_{n,\mu} = r. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Hasonlóan látható, hogy

$$r \cdot (e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = r. \quad (1.112)$$

Tehát $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ egységeleme $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ -nek. ■

1.20. Tétel. Az asszociatív algebrák tenzorszorzata is asszociatív.

Bizonyítás. Legyenek $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ asszociatív algebrák $\mathbb{F}$ test felett. Ekkor tetszőleges

$$(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n), (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n \quad (1.113)$$

elemek esetén

$$\begin{aligned} &((a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \cdot (b_1 \otimes \dots \otimes b_n)) \cdot (c_1 \otimes \dots \otimes c_n) \\ &= ((a_1 b_1) \otimes \dots \otimes (a_n b_n)) \cdot (c_1 \otimes \dots \otimes c_n) \\ &= ((a_1 b_1) c_1) \otimes \dots \otimes ((a_n b_n) c_n) = (a_1 (b_1 c_1)) \otimes \dots \otimes (a_n (b_n c_n)) \\ &= (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \cdot ((b_1 c_1) \otimes \dots \otimes (b_n c_n)) \\ &= (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) \cdot ((b_1 \otimes \dots \otimes b_n) \cdot (c_1 \otimes \dots \otimes c_n)). \end{aligned} \quad (1.114)$$

Ha ehhez a megfigyeléshez hozzávesszük, hogy a szorzás bi- $\mathbb{F}$ -lineáris, akkor látható, hogy tetszőleges

$$r, s, t \in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n \quad (1.115)$$

elemek esetén

$$(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t). \quad (1.116)$$

Ugyanis írható, hogy

$$r = \sum_{\mu=1}^k a_{1,\mu} \otimes \cdots \otimes a_{n,\mu}, \quad s = \sum_{v=1}^l b_{1,v} \otimes \cdots \otimes b_{n,v}, \quad t = \sum_{\kappa=1}^m c_{1,\kappa} \otimes \cdots \otimes c_{n,\kappa}, \quad (1.117)$$

ahol $k, l, m \in \mathbb{N}$ és tetszőleges $j \in \mathbb{N}_n$ esetén

$$a_{j,1}, \dots, a_{j,k}, b_{j,1}, \dots, b_{j,l}, c_{j,1}, \dots, c_{j,m} \in \mathcal{A}_j. \quad (1.118)$$

Ezután vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} (r \cdot s) \cdot t &= \left(\left(\sum_{\mu=1}^k a_{1,\mu} \otimes \cdots \otimes a_{n,\mu} \right) \cdot \left(\sum_{v=1}^l b_{1,v} \otimes \cdots \otimes b_{n,v} \right) \right) \cdot \left(\sum_{\kappa=1}^m c_{1,\kappa} \otimes \cdots \otimes c_{n,\kappa} \right) \\ &= \sum_{\mu=1}^k \sum_{v=1}^l \sum_{\kappa=1}^m ((a_{1,\mu} \otimes \cdots \otimes a_{n,\mu}) \cdot (b_{1,v} \otimes \cdots \otimes b_{n,v})) \cdot (c_{1,\kappa} \otimes \cdots \otimes c_{n,\kappa}) \\ &= \sum_{\mu=1}^k \sum_{v=1}^l \sum_{\kappa=1}^m (a_{1,\mu} \otimes \cdots \otimes a_{n,\mu}) \cdot ((b_{1,v} \otimes \cdots \otimes b_{n,v}) \cdot (c_{1,\kappa} \otimes \cdots \otimes c_{n,\kappa})) \\ &= \left(\sum_{\mu=1}^k a_{1,\mu} \otimes \cdots \otimes a_{n,\mu} \right) \cdot \left(\left(\sum_{v=1}^l b_{1,v} \otimes \cdots \otimes b_{n,v} \right) \cdot \left(\sum_{\kappa=1}^m c_{1,\kappa} \otimes \cdots \otimes c_{n,\kappa} \right) \right) \\ &= r \cdot (s \cdot t). \end{aligned} \quad (1.119)$$

■

Könnyen belátható, hogy a kommutatív algebrák tenzorszorzata is kommutatív.

Ezután vizsgáljuk meg az asszociatív egységelemes algebrák tenzorszorzatában a kommutátor műveletét. Legyenek $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ és $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ adott asszociatív egységelemes algebrák az $\mathbb{F}$ test felett, melyekben az egységelemet jelölje $e_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$, illetve $e_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$. Ekkor tetszőleges $(a, b)(c, d) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ elemek esetén

$$[a \otimes b, c \otimes d] = (a \otimes b) \cdot (c \otimes d) - (c \otimes d) \cdot (a \otimes b) = ac \otimes bd - ca \otimes db. \quad (1.120)$$

Speciálisan,

$$\begin{aligned} [a \otimes b, e_{\mathcal{A}} \otimes d] &= a \cdot e_{\mathcal{A}} \otimes bd - e_{\mathcal{A}} \cdot a \otimes db = a \otimes bd - a \otimes db \\ &= a \otimes (bd - db) = a \otimes [b, d], \end{aligned} \quad (1.121)$$

valamint hasonlóan

$$[a \otimes b, c \otimes e_B] = [a, c] \otimes b. \quad (1.122)$$

1.21. Definíció. *Tetszőleges $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ algebrák esetén a tenzorszorzat univerzalitása miatt létezik pontosan egy olyan*

$$\tau : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \quad (1.123)$$

lineáris operátor, melyre teljesül, hogy

$$\tau(a \otimes b) = b \otimes a. \quad (1.124)$$

Ezt a leképezést transzpozíciónak nevezzük.

A transzpozíció egy vektortér izomorfizmus. Most vizsgáljuk meg az algebrák tenzorszorzatának és a transzpozíciónak a kapcsolatát. Legyenek $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ és $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ adott algebrák az $\mathbb{F}$ test felett. Legyenek $r, s \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tetszőleges elemek. Ekkor írhatjuk, hogy

$$r = \sum_{\mu=1}^k a_\mu \otimes b_\mu, \quad s = \sum_{\nu=1}^l c_\nu \otimes d_\nu, \quad (1.125)$$

ahol $k, l \in \mathbb{N}$ és

$$\begin{aligned} a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_l &\in \mathcal{A}, \\ b_1, \dots, b_k, d_1, \dots, d_l &\in \mathcal{B}. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \tau(r \cdot s) &= \tau \left(\left(\sum_{\mu=1}^k a_\mu \otimes b_\mu \right) \cdot \left(\sum_{\nu=1}^l c_\nu \otimes d_\nu \right) \right) \\ &= \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l \tau((a_\mu \otimes b_\mu) \cdot (c_\nu \otimes d_\nu)) = \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l \tau(a_\mu c_\nu \otimes b_\mu d_\nu) \\ &= \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l b_\mu d_\nu \otimes a_\mu c_\nu = \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l (b_\mu \otimes a_\mu) \cdot (d_\nu \otimes c_\nu) \\ &= \left(\sum_{\mu=1}^k b_\mu \otimes a_\mu \right) \left(\sum_{\nu=1}^l d_\nu \otimes c_\nu \right) = \left(\sum_{\mu=1}^k \tau(a_\mu \otimes b_\mu) \right) \left(\sum_{\nu=1}^l \tau(c_\nu \otimes d_\nu) \right) \\ &= \tau \left(\sum_{\mu=1}^k a_\mu \otimes b_\mu \right) \cdot \tau \left(\sum_{\nu=1}^l c_\nu \otimes d_\nu \right) = \tau(r) \cdot \tau(s). \end{aligned} \quad (1.127)$$

Tehát látható, hogy τ kompatibilis az algebrák tenzorszorzatán definiált szorzásművelettel is.

1.22. Állítás. *Legyenek $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ és $(\mathcal{B}, +, \cdot)$ adott algebrák az $\mathbb{F}$ test felett. Ekkor a*

$\tau : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ transzpozíció egy algebra izomorfizmus, ami által nyerjük a $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ azonosítást.

Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egységelemes algebrák, akkor

$$\tau(e_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}) = \tau(e_{\mathcal{A}} \otimes e_{\mathcal{B}}) = e_{\mathcal{B}} \otimes e_{\mathcal{A}} = e_{\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}}, \quad (1.128)$$

azaz ekkor τ az egységelemet az egységelembe képezi. Ennek következtében ekkor τ egy egységelemes algebra izomorfizmus.

Ezt követően térjünk rá a mátrixalgebrák vizsgálatára.

1.23. Definíció. A tenzorszorzat univerzalitása miatt létezik pontosan egy olyan

$$\hat{\text{tr}} : \mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.129)$$

lineáris funkcionál, amelyre tetszőleges $N \times N$ -es X, Y komplex mátrixok esetén teljesül, hogy

$$\hat{\text{tr}}(X \otimes Y) = \text{tr}(X) \text{tr}(Y). \quad (1.130)$$

Ezt a leképezést a $\mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N}$ térre kiterjesztett trace funkcionálnak nevezzük.

1.24. Tétel. Legyen $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor tetszőleges $r, s \in \mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N}$ elemek esetén

$$\hat{\text{tr}}(r \cdot s) = \hat{\text{tr}}(s \cdot r) \quad (1.131)$$

Bizonyítás. Tetszőleges $r, s \in \mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N}$ elemek esetén írhatjuk, hogy

$$r = \sum_{\mu=1}^k A_{\mu} \otimes B_{\mu}, \quad s = \sum_{\nu=1}^l C_{\nu} \otimes D_{\nu}, \quad (1.132)$$

ahol $k, l \in \mathbb{N}$ és

$$A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k, C_1, \dots, C_l, D_1, \dots, D_l \in \mathbb{C}^{N \times N}. \quad (1.133)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \hat{\text{tr}}(r \cdot s) &= \hat{\text{tr}} \left(\left(\sum_{\mu=1}^k A_{\mu} \otimes B_{\mu} \right) \cdot \left(\sum_{\nu=1}^l C_{\nu} \otimes D_{\nu} \right) \right) = \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l \hat{\text{tr}}((A_{\mu} \otimes B_{\mu}) \cdot (C_{\nu} \otimes D_{\nu})) \\ &= \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l \hat{\text{tr}}((A_{\mu} C_{\nu}) \otimes (B_{\mu} D_{\nu})) = \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l \text{tr}(A_{\mu} C_{\nu}) \cdot \text{tr}(B_{\mu} D_{\nu}) \\ &= \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l \text{tr}(C_{\nu} A_{\mu}) \cdot \text{tr}(D_{\nu} B_{\mu}) = \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l \hat{\text{tr}}((C_{\nu} A_{\mu}) \otimes (D_{\nu} B_{\mu})) \\ &= \sum_{\mu=1}^k \sum_{\nu=1}^l \hat{\text{tr}}((C_{\nu} \otimes D_{\nu}) \cdot (A_{\mu} \otimes B_{\mu})) \\ &= \hat{\text{tr}} \left(\left(\sum_{\nu=1}^l C_{\nu} \otimes D_{\nu} \right) \cdot \left(\sum_{\mu=1}^k A_{\mu} \otimes B_{\mu} \right) \right) = \hat{\text{tr}}(s \cdot r). \end{aligned} \quad (1.134)$$

■

1.25. Megjegyzés. Az előző tétel következtében a $\hat{\text{tr}}$ funkcionál ciklikus abban az értelemben, hogy tetszőleges $r, s, t \in \mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N}$ esetén

$$\hat{\text{tr}}(r \cdot s \cdot t) = \hat{\text{tr}}(s \cdot t \cdot r) = \hat{\text{tr}}(t \cdot r \cdot s). \quad (1.135)$$

Ezután tekintsük ismét a $\mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N}$ algebrát. A

$$\begin{aligned} \omega_1 : \mathbb{C}^{N \times N} \times \mathbb{C}^{N \times N} &\rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}, & (A, B) &\mapsto \text{tr}(A) \cdot B, \\ \omega_2 : \mathbb{C}^{N \times N} \times \mathbb{C}^{N \times N} &\rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}, & (A, B) &\mapsto \text{tr}(B) \cdot A \end{aligned} \quad (1.136)$$

leképezések lineárisak. A tenzorszorzat univerzalitása miatt egyértelműen léteznek a

$$\begin{aligned} \text{tr}_1 : \mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N} &\rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}, \\ \text{tr}_2 : \mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N} &\rightarrow \mathbb{C}^{N \times N} \end{aligned} \quad (1.137)$$

lineáris transzformációk, melyekre teljesül, hogy tetszőleges $A, B \in \mathbb{C}^{N \times N}$ esetén

$$\text{tr}_1(A \otimes B) = \omega_1(A, B), \quad \text{tr}_2(A \otimes B) = \omega_2(A, B), \quad (1.138)$$

azaz

$$\text{tr}_1(A \otimes B) = \text{tr}(A) \cdot B, \quad \text{tr}_2(A \otimes B) = \text{tr}(B) \cdot A. \quad (1.139)$$

1.26. Definíció. Legyen $N \in \mathbb{N}$ és $i \in \mathbb{N}_2$ tetszőlegesek. Ekkor az előző

$$\text{tr}_i \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N}, \mathbb{C}^{N \times N}) \quad (1.140)$$

lineáris transzformációt a $\mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N}$ algebra i -edik tenzori faktorára vonatkozó parciális trace-nek nevezzük.

1.27. Állítás. Az eddigi jelöléseket használva teljesülnek a

$$\text{tr} \circ \text{tr}_1 = \hat{\text{tr}}, \quad \text{tr} \circ \text{tr}_2 = \hat{\text{tr}} \quad (1.141)$$

relációk.

Bizonyítás. Legyen $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Vegyük észre, hogy tetszőleges $A, B \in \mathbb{C}^{N \times N}$ mátrixok esetén

$$\text{tr} \circ \text{tr}_1(A \otimes B) = \text{tr}(\text{tr}_1(A \otimes B)) = \text{tr}(\text{tr}(A)B) = \text{tr}(A) \text{tr}(B) = \hat{\text{tr}}(A \otimes B). \quad (1.142)$$

Teljesen hasonlóan

$$\begin{aligned} \text{tr} \circ \text{tr}_2(A \otimes B) &= \text{tr}(\text{tr}_2(A \otimes B)) = \text{tr}(\text{tr}(B)A) \\ &= \text{tr}(B) \text{tr}(A) = \text{tr}(A) \text{tr}(B) = \hat{\text{tr}}(A \otimes B). \end{aligned} \quad (1.143)$$

Mivel a $\mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N}$ tér minden eleme előáll az $A \otimes B$ alakú elemi tenzorok véges lineáris kombinációjaként, így evidens, hogy

$$\mathrm{tr} \circ \mathrm{tr}_1 = \hat{\mathrm{tr}}, \quad \mathrm{tr} \circ \mathrm{tr}_2 = \hat{\mathrm{tr}}. \quad (1.144)$$

■

2. Poisson-zárójel

Ebben a fejezetben először a Poisson-zárójellel és a Hamiltoni dinamikával foglalkozunk, majd áttekintjük a tenzori Poisson-zárójel elméletét. Az ebben a fejezetben bemutatott tételek és definíciók ismertetéséhez az [7, 11] könyveket és a [9] cikket használtuk.

2.1. Poisson-zárójel és Hamiltoni dinamika

Tekintsünk az $\mathbb{R}^{2n}$ térben egy nem-üres, nyílt részhalmazt, jelöljük P -vel. A P halmazra fázistérként gondolunk, a pontjaira vezessük be a

$$\mathbf{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in P \quad (2.1)$$

jelölést. A P felett értelmezett valós értékű végtelenszer folytonosan differenciálható függvények terét jelölje

$$C^\infty(P, \mathbb{R}) = C^\infty(P). \quad (2.2)$$

A $C^\infty(P)$ téren bevezethetjük a standard Poisson-zárójelet az alábbi módon:

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \in C^\infty(P), \quad (2.3)$$

ahol $k \in \mathbb{N}_n$ tetszőleges index és $f, g \in C^\infty(P)$ tetszőleges függvények. A Poisson-zárójel bi- $\mathbb{R}$ -lineáris, azaz mindkét változójában $\mathbb{R}$ -lineáris, antiszimmetrikus, azaz tetszőleges $f, g \in C^\infty(P)$ függvényekre

$$\{g, f\} = -\{f, g\}, \quad (2.4)$$

teljesíti a Jacobi-azonosságot, azaz tetszőleges $f, g, h \in C^\infty(P)$ függvényekre

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0, \quad (2.5)$$

és teljesíti a Leibniz-szabályt:

$$\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, h\}. \quad (2.6)$$

A valós értékű sima függvények egységelemes kommutatív és asszociatív algebrája egy Poisson-algebrát alkot a Poisson-zárójellel. Jelölésben a

$$(C^\infty(P), +, \mathbb{R}, \cdot, \{\cdot, \cdot\}) \quad (2.7)$$

algebrai struktúra egy valós Poisson-algebra. A valós értékű függvények mellett gyakran célszerű a komplex értékű függvényekkel dolgozni. Adott P fázistér esetén jelölje $C^\infty(P, \mathbb{C})$ a P

felett definiált komplex értékű végtelenszer differenciálható függvények terét. Egy komplex értékű függvény akkor és csak akkor sima, ha a valós és képzetes része is sima. A pontonként értelmezett műveletekkel $C^\infty(P, \mathbb{C})$ egy egységelemes kommutatív és asszociatív komplex algebrát alkot, azaz

$$(C^\infty(P, \mathbb{C}), +, \mathbb{C}, \cdot) \quad (2.8)$$

egy kommutatív egységelemes asszociatív algebra. Ezután terjesszük ki a Poisson-zárójelet ezen komplex algebrára. Tetszőleges $f, g \in C^\infty(P, \mathbb{C})$ függvényekre legyen

$$\{f, g\} := (\{ \operatorname{Re}(f), \operatorname{Re}(g) \} - \{ \operatorname{Im}(f), \operatorname{Im}(g) \}) + i(\{ \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(g) \} + \{ \operatorname{Im}(f), \operatorname{Re}(g) \}). \quad (2.9)$$

Ekkor

$$\{f, g\} \in C^\infty(P, \mathbb{C}). \quad (2.10)$$

2.1. Tétel. *Az előbb definiált*

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(P, \mathbb{C}) \times C^\infty(P, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(P, \mathbb{C}), \quad (f, g) \mapsto \{f, g\} \quad (2.11)$$

leképezés bi- $\mathbb{C}$ -lineáris és tetszőleges $f, g \in C^\infty(P, \mathbb{C})$ függvényekre antiszimmetrikus:

$$\{g, f\} = -\{f, g\}. \quad (2.12)$$

Teljesíti a Jacobi-azonosságot, azaz tetszőleges $f, g, h \in C^\infty(P, \mathbb{C})$ függvényekre

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0, \quad (2.13)$$

és érvényes rá a Leibniz-szabály, azaz tetszőleges $f, g, h \in C^\infty(P, \mathbb{C})$ függvényekre

$$\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, h\}. \quad (2.14)$$

Bizonyítás. Tetszőleges $f \in C^\infty(P, \mathbb{C})$ függvény esetén vezessük be az alábbi rövidítéseket:

$$f_r := \operatorname{Re}(f), \quad f_i := \operatorname{Im}(f). \quad (2.15)$$

Ekkor $f = f_r + i f_i$ és

$$\begin{aligned} \{f, g\}_r &= \{f_r, g_r\} - \{f_i, g_i\}, \\ \{f, g\}_i &= \{f_r, g_i\} + \{f_i, g_r\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ezután a valós értékű függvényekre vett Poisson-zárójel antiszimmetriáját kihasználva tetszőleges $f, g \in C^\infty(P, \mathbb{C})$ esetén írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \{g, f\}_r &= \{g_r, f_r\} - \{g_i, f_i\} = -\{f_r, g_r\} - (-\{f_i, g_i\}) \\ &= -(\{f_r, g_r\} - \{f_i, g_i\}) = -\{f, g\}_r \end{aligned} \quad (2.17)$$

és

$$\{g, f\}_i = \{g_r, f_i\} + \{g_i, f_r\} = -\{f_i, g_r\} - \{f_r, g_i\} = -\{f, g\}_i. \quad (2.18)$$

Tehát

$$\{g, f\} = -\{f, g\}, \quad (2.19)$$

azaz a Poisson-zárójel komplex értékű függvényekre antiszimmetrikus.

Most legyenek $f, g, h \in C^\infty(P, \mathbb{C})$ tetszőleges függvények, ekkor

$$\begin{aligned} \{f + g, h\}_r &= \{(f + g)_r, h_r\} - \{(f + g)_i, h_i\} \\ &= \{f_r + g_r, h_r\} - \{f_i + g_i, h_i\} \\ &= \{f_r, h_r\} + \{g_r, h_r\} - \{f_i, h_i\} - \{g_i, h_i\} \\ &= \{f, h\}_r + \{g, h\}_r = (\{f, h\} + \{g, h\})_r, \end{aligned} \quad (2.20)$$

illetve

$$\begin{aligned} \{f + g, h\}_i &= \{(f + g)_r, h_i\} + \{(f + g)_i, h_r\} \\ &= \{f_r, h_i\} + \{g_r, h_i\} - \{f_i, h_r\} + \{g_i, h_r\} \\ &= \{f, h\}_i + \{g, h\}_i = (\{f, h\} + \{g, h\})_i. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Vezessünk be egy $z \in \mathbb{C}$ tetszőleges elemet. Az $x = \operatorname{Re}(z)$ és $y = \operatorname{Im}(z)$ jelölésekkel

$$z \cdot f = (x + iy) \cdot (f_r + if_i) = (x \cdot f_r - y \cdot f_i) + i \cdot (x \cdot f_i + y \cdot f_r). \quad (2.22)$$

Ebből következően

$$\begin{aligned} \{z \cdot f, g\} &= \{(z \cdot f)_r, g_r\} - \{(z \cdot f)_i, g_i\} + i(\{(z \cdot f)_r, g_i\} + \{(z \cdot f)_i, g_r\}) \\ &= \{x \cdot f_r - y \cdot f_i, g_r\} - \{x \cdot f_i + y \cdot f_r, g_i\} \\ &\quad + i(\{x \cdot f_r - y \cdot f_i, g_i\} + \{x \cdot f_i + y \cdot f_r, g_r\}) \\ &= x\{f_r, g_r\} - y\{f_i, g_r\} - x\{f_i, g_i\} - y\{f_r, g_i\} \\ &\quad + i(x\{f_r, g_i\} - y\{f_i, g_i\} + x\{f_i, g_r\} + y\{f_r, g_r\}) \\ &= (x + iy) \cdot (\{f_r, g_r\} - \{f_i, g_i\}) \\ &\quad + (ix - y) (\{f_r, g_i\} + \{f_i, g_r\}) \\ &= z \cdot \{f, g\}_r + z \cdot i \{f, g\}_i = z \cdot (\{f, g\}_r + i \{f, g\}_i) = z \cdot \{f, g\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Tehát a komplex értékű függvényekre vett Poisson-zárójel $\mathbb{C}$ -lineáris az első változójában. Az antiszimmetriából következően a második változójában is $\mathbb{C}$ -lineáris, tehát bi- $\mathbb{C}$ -lineáris.

Ezután legyenek $f, g, h \in C^\infty(P, \mathbb{C})$ tetszőleges elemek. Felhasználva, hogy a valós értékű függvényeken vett Poisson-zárójel teljesíti a Jacobi-azonosságot,

$$\begin{aligned}
\{\{f, g\}, h\}_r &= \{\{f, g\}_r, h_r\} - \{\{f, g\}_i, h_i\} \\
&= \{\{f_r, g_r\} - \{f_i, g_i\}, h_r\} - \{\{f_r, g_i\} + \{f_i, g_r\}, h_i\} \\
&= \{\{f_r, g_r\}, h_r\} - \{\{f_i, g_i\}, h_r\} - \{\{f_r, g_i\}, h_i\} - \{\{f_i, g_r\}, h_i\},
\end{aligned} \tag{2.24}$$

amit használva látható, hogy

$$\begin{aligned}
&(\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\})_r \\
&= \{\{f, g\}, h\}_r + \{\{g, h\}, f\}_r + \{\{h, f\}, g\}_r \\
&= \{\{f_r, g_r\}, h_r\} - \{\{f_i, g_i\}, h_r\} - \{\{f_r, g_i\}, h_i\} \\
&\quad - \{\{f_i, g_r\}, h_i\} + \{\{g_r, h_r\}, f_r\} - \{\{g_i, h_i\}, f_r\} \\
&\quad - \{\{g_r, h_i\}, f_i\} - \{\{g_i, h_r\}, f_i\} + \{\{h_r, f_r\}, g_r\} \\
&\quad - \{\{h_i, f_i\}, g_r\} - \{\{h_r, f_i\}, g_i\} - \{\{h_i, f_r\}, g_i\} = 0.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Hasonlóan,

$$\begin{aligned}
\{\{f, g\}, h\}_i &= \{\{f, g\}_r, h_i\} + \{\{f, g\}_i, h_r\} \\
&= \{\{f_r, g_r\} - \{f_i, g_i\}, h_i\} + \{\{f_r, g_i\} + \{f_i, g_r\}, h_r\} \\
&= \{\{f_r, g_r\}, h_i\} - \{\{f_i, g_i\}, h_i\} + \{\{f_r, g_i\}, h_r\} + \{\{f_i, g_r\}, h_r\},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

amit használva látható, hogy

$$\begin{aligned}
&(\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\})_i \\
&= \{\{f, g\}, h\}_i + \{\{g, h\}, f\}_i + \{\{h, f\}, g\}_i \\
&= \{\{f_r, g_r\}, h_i\} - \{\{f_i, g_i\}, h_i\} + \{\{f_r, g_i\}, h_r\} \\
&\quad + \{\{f_i, g_r\}, h_r\} + \{\{g_r, h_r\}, f_i\} - \{\{g_i, h_i\}, f_i\} \\
&\quad + \{\{g_r, h_i\}, f_r\} + \{\{g_i, h_r\}, f_r\} + \{\{h_r, f_r\}, g_i\} \\
&\quad - \{\{h_i, f_i\}, g_i\} + \{\{h_r, f_i\}, g_r\} + \{\{h_i, f_r\}, g_r\} = 0.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Tehát a komplex értékű függvényekre vett Poisson-zárójel teljesíti a Jacobi-azonosságot.

Végül legyenek $f, g, h \in C^\infty(P, \mathbb{C})$ tetszőleges elemek. Ekkor

$$\begin{aligned}
\{f, g \cdot h\}_r &= \{f_r, (g \cdot h)_r\} - \{f_i, (g \cdot h)_i\} = \{f_r, g_r \cdot h_r - g_i \cdot h_i\} - \{f_i, g_r \cdot h_i + g_i \cdot h_r\} \\
&= \{f_r, g_r \cdot h_r\} - \{f_r, g_i \cdot h_i\} - \{f_i, g_r \cdot h_i\} - \{f_i, g_i \cdot h_r\} \\
&= \{f_r, g_r\}h_r + g_r\{f_r, h_r\} - \{f_r, g_i\}h_i - g_i\{f_r, h_i\} \\
&\quad - \{f_i, g_r\}h_i - g_r\{f_i, h_i\} - \{f_i, g_i\}h_r - g_i\{f_i, h_r\} \\
&= (\{f_r, g_r\} - \{f_i, g_i\})h_r - (\{f_r, g_i\} + \{f_i, g_r\})h_i \\
&\quad + g_r(\{f_r, h_r\} - \{f_i, h_i\}) - g_i(\{f_r, h_i\} + \{f_i, h_r\}) \\
&= \{f, g\}_r \cdot h_r - \{f, g\}_i \cdot h_i + g_r \cdot \{f, h\}_r - g_i \cdot \{f, h\}_i \\
&= (\{f, g\} \cdot h)_r + (g \cdot \{f, h\})_r = (\{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, h\})_r.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Teljesen hasonlóan,

$$\begin{aligned}
\{f, g \cdot h\}_i &= \{f_r, (g \cdot h)_i\} + \{f_i, (g \cdot h)_r\} = \{f_r, g_r \cdot h_i + g_i \cdot h_r\} + \{f_i, g_r \cdot h_r - g_i \cdot h_i\} \\
&= \{f_r, g_r \cdot h_i\} + \{f_r, g_i \cdot h_r\} + \{f_i, g_r \cdot h_r\} - \{f_i, g_i \cdot h_i\} \\
&= \{f_r, g_r\}h_i + g_r\{f_r, h_i\} + \{f_r, g_i\}h_r \\
&\quad + g_i\{f_r, h_r\} + \{f_i, g_r\}h_r + g_r\{f_i, h_r\} - \{f_i, g_i\}h_i - g_i\{f_i, h_i\} \\
&= (\{f_r, g_r\} - \{f_i, g_i\})h_i + (\{f_r, g_i\} + \{f_i, g_r\})h_r \\
&\quad + g_r(\{f_r, h_i\} + \{f_i, h_r\}) + g_i(\{f_r, h_r\} - \{f_i, h_i\}) \\
&= \{f, g\}_r \cdot h_i + \{f, g\}_i \cdot h_r + g_r \cdot \{f, h\}_i + g_i \cdot \{f, h\}_r \\
&= (\{f, g\} \cdot h)_i + (g \cdot \{f, h\})_i = (\{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, h\})_i.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Tehát teljesül a Leibniz-szabály. ■

Az előző tétel következtében a

$$(C^\infty(P, \mathbb{C}); +, \cdot, \{\cdot, \cdot\}) \tag{2.30}$$

algebrai struktúra egy Poisson-algebrát alkot a komplex számok teste felett.

A fázistéren a koordinátákra teljesülnek a

$$\{q_k, q_l\} = 0, \quad \{p_k, p_l\} = 0, \quad \{q_k, p_l\} = \delta_{k,l} \quad (k, l \in \mathbb{N}_n) \tag{2.31}$$

összefüggések. A Poisson-zárójeleket így teljesítő koordinátákat kanonikus koordinátáknak is szokás hívni. A Poisson-zárójel segítségével Hamiltoni dinamikát is be tudunk vezetni, a Hamilton-féle dinamikát generáló

$$\mathcal{H} \in C^\infty(P, \mathbb{R}) \tag{2.32}$$

tetszőleges, valós értékű függvény segítségével. Az

$$X_{\mathcal{H}} : C^\infty(P, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(P, \mathbb{C}), \quad f \mapsto X_{\mathcal{H}}f = \{f, \mathcal{H}\} \quad (2.33)$$

leképezés egy elsőrendű differenciáloperátor, aminek alakja:

$$X_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right). \quad (2.34)$$

Ha veszünk egy valamely $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ nyitott intervallum felett definiált

$$\gamma : I \rightarrow P, \quad t \mapsto \gamma(t) \quad (2.35)$$

sima görbét, akkor ez a $\mathcal{H}$ által generált dinamikának a megoldása, ha bármely $f \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ és bármely $t \in I$ esetén

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = (X_{\mathcal{H}}(f))(\gamma(t)). \quad (2.36)$$

A dinamikát generáló $\mathcal{H}$ függvényt a rendszer Hamilton-függvényének szokás nevezni. A (2.1) egyenletben bevezetett koordinátákat tekintve, felhasználva a (2.36) összefüggést, a γ görbe komponensei kielégítik a

$$\frac{dq_k(\gamma(t))}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}(\gamma(t)) \quad \text{és} \quad \frac{dp_k(\gamma(t))}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}(\gamma(t)) \quad (2.37)$$

Hamilton-egyenleteket.

2.2. Tenzori Poisson-zárójel

Ebben az alfejezetben a tenzori Poisson-zárójellel és legfontosabb tulajdonságaival foglalkozunk.

Vezessük be az $N \times N$ -es $E_{k,l}$ elemi mátrixot, melynek elemeit így definiáljuk:

$$(E_{k,l})_{i,j} = \delta_{k,i} \delta_{l,j} \quad (i, j \in \mathbb{N}_N). \quad (2.38)$$

Az elemi mátrixok összessége bázist alkot a $\mathbb{C}^{N \times N}$ térben. Az elemi mátrixok segítségével tetszőleges

$$A : P \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}, \quad B : P \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N} \quad (2.39)$$

sima függvények

$$A = \sum_{i,j=1}^N A_{i,j} E_{i,j}, \quad B = \sum_{k,l=1}^N B_{k,l} E_{k,l} \quad (2.40)$$

alakban írhatók, ahol

$$A_{i,j}, B_{k,l} \in C^\infty(P, \mathbb{C}). \quad (2.41)$$

Ezen felbontást felhasználva az A és B függvények tenzori Poisson-zárójelét az

$$\{A \circ B\} := \sum_{i,j,k,l=1}^N \{A_{i,j}, B_{k,l}\} E_{i,j} \otimes E_{k,l} \quad (2.42)$$

formulával definiáljuk.

Ezután vizsgáljuk meg, hogy a tenzori Poisson-zárójel esetén hogyan jelenik meg az antiszimmetrikusság. Kihhasználva, hogy a Poisson-zárójel antiszimmetrikus, valamint felhasználva a transzpozíció műveletét (1.21 definíció),

$$\begin{aligned} \{A \circ B\} &= \sum_{i,j,k,l=1}^N \{A_{i,j}, B_{k,l}\} E_{i,j} \otimes E_{k,l} = - \sum_{i,j,k,l=1}^N \{B_{k,l}, A_{i,j}\} E_{i,j} \otimes E_{k,l} \\ &= - \sum_{i,j,k,l=1}^N \{B_{k,l}, A_{i,j}\} \tau(E_{k,l} \otimes E_{i,j}) = - \tau \left(\sum_{i,j,k,l=1}^N \{B_{k,l}, A_{i,j}\} E_{k,l} \otimes E_{i,j} \right) \\ &= - \tau(\{B \circ A\}). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ezt követően a Leibniz-szabályt megvizsgálva, kiírással belátható, hogy

$$\{A \circ BC\} = \{A \circ B\} \mathbf{1} \otimes C + \mathbf{1} \otimes B \{A \circ C\}. \quad (2.44)$$

Tehát a tenzori Poisson-zárójelre érvényes a Leibniz-szabály. Ezután tanulmányozzuk a Jacobi-azonosságot. Tetszőleges $A, B, C \in C^\infty(P, \mathbb{C}^{N \times N})$ függvények esetén

$$\begin{aligned} \{A \circ \{B \circ C\}\} &= \left\{ \sum_{i,j=1}^N A_{i,j} E_{i,j} \circ \sum_{k,l,r,s=1}^N \{B_{k,l}, C_{r,s}\} E_{k,l} \otimes E_{r,s} \right\} \\ &= \sum_{i,j,k,l,r,s=1}^N \{A_{i,j}, \{B_{k,l}, C_{r,s}\}\} E_{i,j} \otimes E_{k,l} \otimes E_{r,s}, \end{aligned} \quad (2.45a)$$

$$\{C \circ \{A \circ B\}\} = \sum_{i,j,k,l,r,s=1}^N \{C_{r,s}, \{A_{i,j}, B_{k,l}\}\} E_{r,s} \otimes E_{i,j} \otimes E_{k,l}, \quad (2.45b)$$

$$\{B \circ \{C \circ A\}\} = \sum_{i,j,k,l,r,s=1}^N \{B_{k,l}, \{C_{r,s}, A_{i,j}\}\} E_{k,l} \otimes E_{r,s} \otimes E_{i,j}, \quad (2.45c)$$

A (2.45a), (2.45c) és (2.45b) kifejezéseket összeadva nem nullát kapunk. Viszont a tenzorszorzat univerzalitása miatt létezik pontosan egy olyan

$$\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N}) \quad (2.46)$$

lineáris operátor, amelyre tetszőleges $X, Y, Z \in \mathbb{C}^{N \times N}$ mátrixok esetén

$$\varepsilon(X \otimes Y \otimes Z) = Z \otimes X \otimes Y. \quad (2.47)$$

Könnyen látható, hogy

$$\varepsilon^2(X \otimes Y \otimes Z) = Y \otimes Z \otimes X. \quad (2.48)$$

Vegyük észre, hogy az ε operátor felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\{A \circledast \{B \circledast C\}\} + \varepsilon(\{C \circledast \{A \circledast B\}\}) + \varepsilon^2\{B \circledast \{C \circledast A\}\} = 0. \quad (2.49)$$

Azaz, a mátrix értékű függvények tenzori Poisson-zárójele esetén (2.49) módon jelenik meg a Jacobi-azonosság. A Jacobi-azonosság révén kapcsolatba hozható az r -mátrixok elmélete a Yang–Baxter-egyenletekkel, de ennek a tárgyalásától ebben a dolgozatban eltekintünk.

A fejezet lezárásaként vegyük észre, hogy a parciális trace definíciója (1.26) alapján tetszőleges $A, B \in C^\infty(P, \mathbb{C}^{N \times N})$ függvények esetén

$$\begin{aligned} \text{tr}_2(\{A \circledast B\}) &= \text{tr}_2 \left(\sum_{i,j,k,\ell=1}^N \{A_{i,j}, B_{k,\ell}\} E_{i,j} \otimes E_{k,\ell} \right) = \sum_{i,j,k,\ell=1}^N \{A_{i,j}, B_{k,\ell}\} \text{tr}(E_{k,\ell}) E_{i,j} \\ &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^N \{A_{i,j}, B_{k,\ell}\} \delta_{k,\ell} E_{i,j} = \sum_{i,j} \left\{ A_{i,j}, \sum_{k=1}^N B_{k,k} \right\} E_{i,j} \\ &= \sum_{i,j=1}^N \{A_{i,j}, \text{tr}(B)\} E_{i,j} = \{A, \text{tr}(B)\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

3. Lax-egyenlet, r -mátrix

Ebben a fejezetben bevezetjük a Lax-párokat és a hozzájuk kapcsolódó legfontosabb tételeket, ezután pedig definiáljuk az r -mátrixokat. A fejezetben szereplő bizonyításokhoz a [7, 12] könyvekre és a [9, 13] cikkekre támaszkodtunk.

3.1. Lax-egyenlet

Terjesszük ki a Poisson-zárójelet a mátrix értékű sima függvényekre. Legyen $N \in \mathbb{N}$, továbbá

$$L : P \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}, \quad \mathbf{x} \mapsto L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{1,1}(\mathbf{x}) & \cdots & L_{1,N}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{N,1}(\mathbf{x}) & \cdots & L_{N,N}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

egy tetszőleges sima függvény, azaz bármely $k, l \in \mathbb{N}_N$ esetén $L_{k,l} \in C^\infty(P, \mathbb{C})$. Ekkor a mátrix értékű L függvénynek egy tetszőleges $h \in C^\infty(P, \mathbb{C})$ függvénnyel vett Poisson-zárójele

$$\{L, h\} = \begin{bmatrix} \{L_{1,1}, h\} & \cdots & \{L_{1,N}, h\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{L_{N,1}, h\} & \cdots & \{L_{N,N}, h\} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

A korábban (2.38) bevezetett elemi mátrixokkal a definíció az alábbi alakba írható:

$$\{L, h\} = \sum_{k,l=1}^N \{L_{k,l}, h\} E_{k,l}. \quad (3.3)$$

3.1. Definíció. A mátrix értékű

$$L : P \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N} \quad \text{és} \quad A : P \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N} \quad (3.4)$$

sima függvényekből képzett (L, A) pár egy Lax-párt alkot valamely $\mathcal{H} \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ Hamilton-függvénnyel jellemzett klasszikus mechanikai rendszerhez, ha teljesítik az

$$\{L, \mathcal{H}\} = [A, L] \quad (3.5)$$

Lax-egyenletet.

3.2. Tétel. Az (L, A) pár akkor és csak akkor alkot Lax-párt a $\mathcal{H}$ által generált dinamikához, ha a dinamika bármely

$$\gamma : (a, b) \rightarrow P, \quad t \mapsto \gamma(t) \quad (3.6)$$

megoldása esetén

$$\frac{dL(\gamma(t))}{dt} = [A(\gamma(t)), L(\gamma(t))] \quad (t \in (a, b)). \quad (3.7)$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy (L, A) egy Lax-párt alkot a $\mathcal{H}$ Hamilton-függvénnyel jellemzett mechanikai rendszerhez. Ekkor a dinamika egy tetszőleges

$$\gamma: (a, b) \rightarrow P, \quad t \mapsto \gamma(t) \quad (3.8)$$

megoldása esetén az elemi mátrixokat használva (2.36) egyenletből kiindulva, (3.3) és (3.5) alapján bármely $t \in (a, b)$ esetén teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \frac{dL(\gamma(t))}{dt} &= \sum_{k,l=1}^N \frac{dL_{k,l}(\gamma(t))}{dt} E_{k,l} = \sum_{k,l=1}^N \{L_{k,l}, \mathcal{H}\}(\gamma(t)) E_{k,l} \\ &= \{L, \mathcal{H}\}(\gamma(t)) = [A(\gamma(t)), L(\gamma(t))]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tehát ha (L, A) egy Lax-párt alkot, akkor a $\mathcal{H}$ által generált dinamika tetszőleges γ megoldása mentén teljesül a (3.7) egyenlet.

A fordított irányú bizonyításhoz tegyük fel, hogy a dinamika tetszőleges γ megoldása esetén teljesül a (3.7) egyenlet. Ekkor egy tetszőleges $\mathbf{x} \in P$ pontot rögzítve, a közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó kezdeti érték problémák megoldásairól szóló egzisztencia és unicitás tétel lokális esete garantálja, hogy a dinamikának van olyan

$$\gamma: (a, b) \rightarrow P, \quad t \mapsto \gamma(t) \quad (3.10)$$

megoldása, melyre teljesül, hogy

$$0 \in (a, b) \quad \text{és} \quad \gamma(0) = \mathbf{x}. \quad (3.11)$$

Ezt a megoldást választva, a (3.7) egyenlet miatt, a (2.36) és (3.3) egyenleteket felhasználva:

$$\begin{aligned} \{L, \mathcal{H}\}(\mathbf{x}) &= \sum_{k,l=1}^N \{L_{k,l}, \mathcal{H}\}(\mathbf{x}) E_{k,l} = \sum_{k,l=1}^N \{L_{k,l}, \mathcal{H}\}(\gamma(0)) E_{k,l} \\ &= \sum_{k,l=1}^N \left. \frac{dL_{k,l}(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0} \cdot E_{k,l} = \left. \frac{dL_{k,l}(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= [A(\gamma(0)), L(\gamma(0))] = [A(\mathbf{x}), L(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Mivel ez a fázistér minden pontjára teljesül, az (L, A) pár valóban Lax-párt alkot a $\mathcal{H}$ Hamilton-függvénnyel jellemzett mechanikai rendszerhez. ■

Ezután vizsgáljuk meg egy $\mathcal{H}$ Hamilton-függvényhez társított (L, A) Lax-pár esetén az L mátrix időfejlődését a dinamika tetszőleges γ megoldása mentén. A továbbiakban az $N \times N$ -es komplex, nem-nulla determinánsú mátrixok csoportját $GL(N, \mathbb{C})$ jelöli.

3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az*

$$L : P \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N} \quad \text{és} \quad A : P \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N} \quad (3.13)$$

sima függvényekből álló (L, A) pár Lax-párt alkot a $\mathcal{H} \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ Hamilton-függvénnyel jellemzett mechanikai rendszerhez. Egy tetszőleges $\mathbf{x} \in P$ pontot tekintve legyen

$$\gamma : (a, b) \rightarrow P, \quad t \mapsto \gamma(t) \quad (3.14)$$

egy olyan megoldása a $\mathcal{H}$ által generált dinamikának, amely kielégíti a

$$0 \in (a, b) \quad \text{és} \quad \gamma(0) = \mathbf{x}. \quad (3.15)$$

kezdeti feltételt. Jelölje

$$S : (a, b) \rightarrow GL(N, \mathbb{C}), \quad t \mapsto S(t) \quad (3.16)$$

azt az egyértelműen létező sima függvényt, melyre teljesül, hogy $S(0) = \mathbf{1}$ és

$$\frac{dS(t)}{dt} = A(\gamma(t))S(t) \quad (t \in I). \quad (3.17)$$

Ekkor bármely időpillanatban

$$L(\gamma(t)) = S(t)L(\mathbf{x})S(t)^{-1}. \quad (3.18)$$

Azaz az L mátrix időfejlődése a dinamika bármely megoldása mentén hasonlósági transzformációkkal történik.

Bizonyítás. Tetszőleges $t \in I$ esetén legyen

$$\Phi(t) = S(t)^{-1}L(\gamma(t))S(t) \in \mathbb{C}^{N \times N}. \quad (3.19)$$

A $t = 0$ időpillanatban kirótt kezdeti feltételek alapján

$$\Phi(0) = S(0)^{-1}L(\gamma(0))S(0) = L(\mathbf{x}). \quad (3.20)$$

A Φ mátrix függése a t változótól sima. Az S függvényt definiáló (3.17) egyenletet, a 3.2 tételt és a Leibniz-szabályt felhasználva

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t)}{dt} &= S(t)^{-1} \left(-\frac{dS(t)}{dt} S(t)^{-1} L(\gamma(t)) + \frac{dL(\gamma(t))}{dt} + L(\gamma(t)) \frac{dS(t)}{dt} S(t)^{-1} \right) S(t) \\ &= S(t)^{-1} \left(\frac{dL(\gamma(t))}{dt} - [A(\gamma(t)), L(\gamma(t))] \right) S(t) = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Tehát $\Phi(t)$ mátrix értéke egy t -től független konstans mátrix. A (3.20) egyenlet miatt tehát bármely t esetén $\Phi(t) = L(\mathbf{x})$. A (3.19) defícióval összevetve a tétel állítása következik. ■

A (3.18) egyenletet tekintve látható, hogy az $L(\gamma(t))$ mátrix spektrumára teljesül a

$$\sigma(L(\gamma(t))) = \sigma(L(\mathbf{x})) \quad (t \in I) \quad (3.22)$$

összefüggés.

3.4. Tétel. *Ha az $L, A : P \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ függvények a $\mathcal{H} \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ Hamilton-függvénnyel jellemzett dinamikának egy Lax párját szolgáltatják, akkor az L sajátértékei mozgásállandók.*

A sajátértékek helyett szokás használni a

$$\mathcal{H}_\ell = \frac{1}{\ell} \text{tr}(L^\ell) \in C^\infty(P, \mathbb{C}) \quad (3.23)$$

függvényeket. A (3.18) egyenletből következik, hogy

$$L(\gamma(t))^\ell = (S(t)L(\mathbf{x})S(t)^{-1})^\ell = S(t)L(\mathbf{x})^\ell S(t)^{-1}, \quad (3.24)$$

tehát

$$\mathcal{H}_\ell(\gamma(t)) = \frac{1}{\ell} \text{tr}(L(\gamma(t))^\ell) = \frac{1}{\ell} \text{tr}(S(t)L(\mathbf{x})^\ell S(t)^{-1}) = \frac{1}{\ell} \text{tr}(L(\mathbf{x})^\ell) = \mathcal{H}_\ell(\mathbf{x}). \quad (3.25)$$

Ebből az egyenletből látható, hogy a $\mathcal{H}_\ell$ függvény mozgásállandó tetszőleges $\ell \in \mathbb{N}$ esetén.

3.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy az*

$$L : P \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N} \quad \text{és} \quad A : P \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N} \quad (3.26)$$

sima függvényekből álló (L, A) pár Lax-párt alkot a $\mathcal{H} \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ Hamilton-függvénnyel jellemzett mechanikai rendszerhez. Ekkor tetszőleges

$$g : P \rightarrow GL(N, \mathbb{C}), \quad \mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}) \quad (3.27)$$

sima függvény esetén az

$$\tilde{L} = gLg^{-1} \quad \text{és} \quad \tilde{A} = gAg^{-1} + \{g, \mathcal{H}\}g^{-1} \quad (3.28)$$

függvényekből képzett $(\tilde{L}, \tilde{A})$ pár ugyancsak Lax-párt alkot a $\mathcal{H}$ -val jellemzett rendszerhez.

Bizonyítás. A Leibniz-szabályt felhasználva

$$\begin{aligned} \{\tilde{L}, \mathcal{H}\} &= \{gLg^{-1}, \mathcal{H}\} = \{g, \mathcal{H}\}Lg^{-1} + g\{L, \mathcal{H}\}g^{-1} + gL\{g^{-1}, \mathcal{H}\} \\ &= \{g, \mathcal{H}\}Lg^{-1} + g[A, L]g^{-1} - gLg^{-1}\{g, \mathcal{H}\}g^{-1} \\ &= \{g, \mathcal{H}\}g^{-1}\tilde{L} + [gAg^{-1}, gLg^{-1}] - \tilde{L}\{g, \mathcal{H}\}g^{-1} \\ &= [gAg^{-1}, \tilde{L}] + [\{g, \mathcal{H}\}g^{-1}, \tilde{L}] = [\tilde{A}, \tilde{L}]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

■

Az (L, A) párról a $(\tilde{L}, \tilde{A})$ párra történő áttérést a g függvény által generált gauge-transzformációnak szokták nevezni.

3.2. r -mátrix

Az L Lax-mátrix sajátértékeiből nyerhető első integrálok felcserélhetősége kapcsolatba hozható egy, az önmagával vett tenzori Poisson-zárójelre vonatkozó algebrai követelménnyel.

3.6. Tétel. Legyen

$$L : P \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N} \quad (3.30)$$

egy tetszőleges olyan sima függvény, ami diagonalizálható abban az értelemben, hogy alkalmas globálisan definiált

$$S \in C^\infty(P, GL(N, \mathbb{C})), \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in C^\infty(P, \mathbb{C}^{N \times N}) \quad (3.31)$$

sima függvények segítségével teljesül az

$$L = S \Lambda S^{-1} \quad (3.32)$$

reláció. Tegyük fel továbbá, hogy az L mátrix sajátértékei páronként kommutálnak a Poisson-zárójelre nézve, azaz tetszőleges $k, l \in \mathbb{N}_N$ esetén

$$\{\lambda_k, \lambda_l\} = 0. \quad (3.33)$$

Ekkor megadható olyan globálisan definiált

$$r : P \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N}, \quad \mathbf{x} \mapsto r(\mathbf{x}) \quad (3.34)$$

sima függvény, hogy

$$\{L, L\} = [r, L \otimes \mathbf{1}] - [\tau(r), \mathbf{1} \otimes L], \quad (3.35)$$

ahol τ a korábban definiált transzpozíció (1.21). Ezt az r függvényt r -mátrixnak nevezzük.

Bizonyítás. A tenzori Poisson-zárójel definíciója alapján a Poisson-zárójelre vonatkozó Leibniz-szabály segítségével belátható, hogy az (3.32) egyenletben kirótt feltevés következtében írhatjuk, hogy

$$\{L, L\} = (S \otimes S) \{\Lambda, \Lambda\} (S^{-1} \otimes S^{-1}) + [r, L \otimes \mathbf{1}] - [\tau(r), \mathbf{1} \otimes L], \quad (3.36)$$

ahol

$$r = (\mathbf{1} \otimes S) \{S, L\} (S^{-1} \otimes S^{-1}) + \frac{1}{2} [\{S, S\} (S^{-1} \otimes S^{-1}), \mathbf{1} \otimes L]. \quad (3.37)$$

Az (3.33) egyenletben megfogalmazott feltevés értelmében viszont

$$\{\Lambda, \Lambda\} = \left\{ \sum_{k=1}^N \lambda_k E_{k,k}, \sum_{l=1}^N \lambda_l E_{l,l} \right\} = \sum_{k,l=1}^N \{\lambda_k, \lambda_l\} E_{k,k} \otimes E_{l,l} = 0, \quad (3.38)$$

melynek következtében a (3.36) összefüggés a (3.35) alakot ölti. ■

3.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy az*

$$L \in C^\infty(P, \mathbb{C}^{N \times N}), \quad r \in C^\infty(P, \mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N}) \quad (3.39)$$

függvények kielégítik az

$$\{L \circledast, L\} = [r, L \otimes \mathbf{1}] - [\tau(r), \mathbf{1} \otimes L] \quad (3.40)$$

relációt. Ekkor a

$$\mathcal{H}_\ell = \frac{1}{\ell} \text{tr}(L^\ell) \in C^\infty(P, \mathbb{C}), \quad (\ell \in \mathbb{N}) \quad (3.41)$$

függvényekre teljesül, hogy tetszőleges k, ℓ esetén

$$\{\mathcal{H}_k, \mathcal{H}_\ell\} = 0. \quad (3.42)$$

Bizonyítás. Tetszőleges $k, \ell \in \mathbb{N}$ elemek rögzítését követően látható, hogy

$$\{\mathcal{H}_k, \mathcal{H}_\ell\} = \left\{ \frac{1}{k} \text{tr}(L^k), \frac{1}{\ell} \text{tr}(L^\ell) \right\} = \frac{1}{k\ell} \{\text{tr}(L^k), \text{tr}(L^\ell)\} = \frac{1}{k\ell} \hat{\text{tr}}(\{L^k \circledast, L^\ell\}). \quad (3.43)$$

Ezután alkalmazzuk a Leibniz-szabályt a jobb oldalon szereplő tenzori Poisson-zárójelre. Az $L^0 = \mathbf{1}$ konvenció alkalmazásával

$$\begin{aligned} \{L^k \circledast, L^\ell\} &= \sum_{j=0}^{\ell-1} (\mathbf{1} \otimes L^j) \{L^k \circledast, L\} (\mathbf{1} \otimes L^{\ell-1-j}) \\ &= \sum_{j=0}^{\ell-1} (\mathbf{1} \otimes L^j) \left(\sum_{i=0}^{k-1} (L^i \otimes \mathbf{1}) \{L \circledast, L\} (L^{k-1-i} \otimes \mathbf{1}) \right) (\mathbf{1} \otimes L^{\ell-1-j}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} (L^i \otimes L^j) \{L \circledast, L\} (L^{k-1-i} \otimes L^{\ell-1-j}). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ezt a formulát használva a $\hat{\text{tr}}$ funkcionál ciklikus tulajdonsága arra vezet, hogy

$$\begin{aligned} \hat{\text{tr}}(\{L^k \circledast, L^\ell\}) &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \hat{\text{tr}}((L^i \otimes L^j) \{L \circledast, L\} (L^{k-1-i} \otimes L^{\ell-1-j})) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \hat{\text{tr}}(\{L \circledast, L\} (L^{k-1-i} \otimes L^{\ell-1-j})) \\ &= k \cdot \ell \cdot \hat{\text{tr}}(\{L \circledast, L\} (L^{k-1} \otimes L^{\ell-1})). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Tehát a fenti formulában megjelent az L mátrix önmagával vett tenzori Poisson-zárójelre, amire alkalmazhatjuk az (3.40) feltevést. Észrevehetjük, hogy $\hat{\text{tr}}$ funkcionál ciklikus tulajdonsága következtében

$$\begin{aligned} \hat{\text{tr}}([r, L \otimes \mathbf{1}](L^{k-1} \otimes L^{\ell-1})) &= \hat{\text{tr}}(r(L^k \otimes L^{\ell-1}) - (L \otimes \mathbf{1})r(L^{k-1} \otimes L^{\ell-1})) \\ &= \hat{\text{tr}}(r(L^k \otimes L^{\ell-1})) - \hat{\text{tr}}(r(L^k \otimes L^{\ell-1})) = 0, \end{aligned} \quad (3.46)$$

és teljesen hasonlóan

$$\hat{\text{tr}}([\tau(r), \mathbf{1} \otimes L](L^{k-1} \otimes L^{\ell-1})) = 0. \quad (3.47)$$

A (3.43) egyenletet tekintve, a (3.40) feltételt behelyettesítve a (3.45) egyenletbe a

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_k, \mathcal{H}_\ell\} &= \frac{1}{k\ell} \hat{\text{tr}}(\{L^k \otimes L^\ell\}) \\ &= \hat{\text{tr}}([r, L \otimes \mathbf{1}](L^{k-1} \otimes L^{\ell-1})) - \hat{\text{tr}}([\tau(r), \mathbf{1} \otimes L](L^{k-1} \otimes L^{\ell-1})) = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

összefüggést kapjuk. ■

3.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy az*

$$L \in C^\infty(P, \mathbb{C}^{N \times N}), \quad r \in C^\infty(P, \mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N}) \quad (3.49)$$

függvények kielégítik a

$$\{L \otimes L\} = [r, L \otimes \mathbf{1}] - [\tau(r), \mathbf{1} \otimes L] \quad (3.50)$$

relációt. Ekkor tetszőleges

$$g \in C^\infty(P, GL(N, \mathbb{C})) \quad (3.51)$$

elem esetén a g függvény által generált gauge-transzformációval nyert

$$\tilde{L} = gLg^{-1} \quad (3.52)$$

függvény kielégíti az

$$\{\tilde{L} \otimes \tilde{L}\} = [\tilde{r}, \tilde{L} \otimes \mathbf{1}] - [\tau(\tilde{r}), \mathbf{1} \otimes \tilde{L}] \quad (3.53)$$

egyenletet, ahol

$$\tilde{r} = (g \otimes g)r(g^{-1} \otimes g^{-1}) + (\mathbf{1} \otimes g)\{g \otimes L\}(g^{-1} \otimes g^{-1}) + \frac{1}{2}[\{g \otimes g\}(g^{-1} \otimes g^{-1}), \mathbf{1} \otimes \tilde{L}]. \quad (3.54)$$

Bizonyítás. Bevezetve a

$$\Delta = (\mathbf{1} \otimes g)\{g \otimes L\}(g^{-1} \otimes g^{-1}) + \frac{1}{2}[\{g \otimes g\}(g^{-1} \otimes g^{-1}), \mathbf{1} \otimes \tilde{L}] \quad (3.55)$$

elemet, a Leibniz-szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\{\tilde{L} \otimes \tilde{L}\} = (g \otimes g)\{L \otimes L\}(g^{-1} \otimes g^{-1}) + [\Delta, \tilde{L} \otimes \mathbf{1}] - [\tau(\Delta), \mathbf{1} \otimes \tilde{L}]. \quad (3.56)$$

Az (3.50) feltevésből következően

$$\begin{aligned} &(g \otimes g)\{L \otimes L\}(g^{-1} \otimes g^{-1}) \\ &= (g \otimes g)([r, L \otimes \mathbf{1}] - [\tau(r), \mathbf{1} \otimes L])(g^{-1} \otimes g^{-1}) \\ &= [(g \otimes g)r(g^{-1} \otimes g^{-1}), \tilde{L} \otimes \mathbf{1}] - [\tau((g \otimes g)r(g^{-1} \otimes g^{-1})), \mathbf{1} \otimes \tilde{L}]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Ezt az egyenletet az előzőbe visszahelyettesítve megkapjuk a kívánt formulát. ■

3.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy az*

$$L \in C^\infty(P, \mathbb{C}^{N \times N}), \quad r \in C^\infty(P, \mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N}) \quad (3.58)$$

függvények kielégítik az

$$\{L \circledast L\} = [r, L \otimes \mathbf{1}] - [\tau(r), \mathbf{1} \otimes L] \quad (3.59)$$

relációt. Ekkor tetszőleges ℓ természetes szám esetén fennáll a

$$\{L, \mathcal{H}_\ell\} = [\text{tr}_2(r \cdot (\mathbf{1} \otimes L^{\ell-1})), L] \quad (3.60)$$

Lax-egyenlet.

Bizonyítás. Legyen $\ell \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges rögzített elem. Ekkor a (3.41) definíciót felidézve, a (2.50) következtében

$$\{L, \mathcal{H}_\ell\} = \frac{1}{\ell} \{L, \text{tr}(L^\ell)\} = \frac{1}{\ell} \text{tr}_2(\{L \circledast L^\ell\}). \quad (3.61)$$

Az $r \in C^\infty(P, \mathbb{C}^{N \times N} \otimes \mathbb{C}^{N \times N})$ függvény felírható

$$r = \sum_{\mu=1}^k a_\mu \otimes b_\mu \quad (3.62)$$

alakban, ahol $k \in \mathbb{N}$, továbbá

$$a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in C^\infty(P, \mathbb{C}^{N \times N}) \quad (3.63)$$

alkalmas függvények. A transzpozíció 1.21 definíciója alapján

$$\tau(r) = \sum_{\mu=1}^k b_\mu \otimes a_\mu, \quad (3.64)$$

tehát a (3.59) feltevés a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \{L \circledast L\} &= \sum_{\mu=1}^k [a_\mu \otimes b_\mu, L \otimes \mathbf{1}] - \sum_{\mu=1}^k [b_\mu \otimes a_\mu, \mathbf{1} \otimes L] \\ &= \sum_{\mu=1}^k [a_\mu, L] \otimes b_\mu - \sum_{\mu=1}^k b_\mu \otimes [a_\mu, L]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Ezt az előállítást felhasználva, az $L^0 = \mathbf{1}$ konvencióval a Leibniz-szabály arra vezet, hogy

$$\begin{aligned} \{L \circledast L^\ell\} &= \sum_{j=0}^{\ell-1} (\mathbf{1} \otimes L^j) \{L \circledast L\} (\mathbf{1} \otimes L^{\ell-1-j}) \\ &= \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{\mu=1}^k [a_\mu, L] \otimes (L^j b_\mu L^{\ell-1-j}) - \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{\mu=1}^k b_\mu \otimes (L^j [a_\mu, L] L^{\ell-1-j}). \end{aligned} \quad (3.66)$$

A kapott formulában az összegekre külön-külön alkalmazva a tr_2 operátort,

$$\begin{aligned}
 \text{tr}_2 \left(\sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{\mu=1}^k [a_\mu, L] \otimes (L^j b_\mu L^{\ell-1-j}) \right) &= \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{\mu=1}^k \text{tr}(L^j b_\mu L^{\ell-1-j}) [a_\mu, L] \\
 &= \sum_{\mu=1}^k \left(\sum_{j=0}^{\ell-1} \text{tr}(b_\mu L^{\ell-1-j}) \right) [a_\mu, L] = \ell \sum_{\mu=1}^k \text{tr}(b_\mu L^{\ell-1}) [a_\mu, L] \\
 &= \ell \left[\sum_{\mu=1}^k \text{tr}(b_\mu L^{\ell-1}) a_\mu, L \right] = \ell \left[\sum_{\mu=1}^k \text{tr}_2(a_\mu \otimes (b_\mu L^{\ell-1})), L \right] \\
 &= \ell \left[\text{tr}_2 \left(\sum_{\mu=1}^k (a_\mu \otimes b_\mu) \cdot (\mathbf{1} \otimes L^{\ell-1}) \right), L \right] = \ell [\text{tr}_2(r \cdot (\mathbf{1} \otimes L^{\ell-1})), L],
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

illetve

$$\begin{aligned}
 \text{tr}_2 \left(\sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{\mu=1}^k b_\mu \otimes (L^j [a_\mu, L] L^{\ell-1-j}) \right) &= \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{\mu=1}^k \text{tr}(L^j [a_\mu, L] L^{\ell-1-j}) b_\mu \\
 &= \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{\mu=1}^k \left(\text{tr}(L^j a_\mu L^{\ell-1-j}) - \text{tr}(L^{j+1} a_\mu L^{\ell-1-j}) \right) b_\mu \\
 &= \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{\mu=1}^k \left(\text{tr}(a_\mu L^\ell) - \text{tr}(a_\mu L^\ell) \right) b_\mu = 0.
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Ennek következtében

$$\begin{aligned}
 \text{tr}_2(\{L^\otimes, L^\ell\}) &= \text{tr}_2 \left(\sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{\mu=1}^k [a_\mu, L] \otimes (L^j b_\mu L^{\ell-1-j}) - \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{\mu=1}^k b_\mu \otimes (L^j [a_\mu, L] L^{\ell-1-j}) \right) \\
 &= \ell [\text{tr}_2(r \cdot (\mathbf{1} \otimes L^{\ell-1})), L].
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

A kapott formulát a (3.61) egyenletbe helyettesítve megkapjuk a Lax-egyenletet. ■

4. Példák

Ebben a fejezetben két nevezetes rendszerre tekintjük át a hozzájuk rendelhető Lax-párt és r -mátrixot. Az első a nyílt Toda-rendszer, amivel részletesebben foglalkozunk. A második a Calogero-Moser-Sutherland rendszer különböző variánsai, amelyek esetén ismertetjük a hozzájuk tartozó Lax-párokat és r -mátrixokat. A fejezetben a [14–19] cikkek és az [1, 20] könyvek alapján dolgoztunk.

4.1. Nyílt Toda-rendszer

A nyílt Toda-rendszert M. Toda vezette be a [14] cikkben. A nyílt Toda-rendszer sorban elhelyezkedő, kölcsönható részecskék rendszere, amelyben a kölcsönhatás exponenciális és csak a szomszédos elemek között jelenik meg. A fázistér $P = \mathbb{R}^{2n}$, a Hamilton-függvény pedig a következő alakban írható fel

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=2}^n e^{q_i - q_{i-1}}. \quad (4.1)$$

Ezután felírhatók a hamiltoni mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= p_i, & 1 \leq i \leq n, \\ \dot{p}_i &= \begin{cases} e^{q_2 - q_1}, & \text{ha } i = 1, \\ e^{q_{i+1} - q_i} - e^{q_i - q_{i-1}}, & \text{ha } 2 \leq i \leq n-1, \\ -e^{q_n - q_{n-1}}, & \text{ha } i = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Vezessük be H. Flaschka ([17, 18]) jelöléseit:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} e^{\frac{q_k - q_{k+1}}{2}} \quad (1 \leq k \leq n-1), \\ b_k &= -\frac{1}{2} p_k \quad (1 \leq k \leq n). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Az a_k -ra és b_k -ra a (2.33) egyenletben bevezetett differenciáloperátor segítségével felírható, hogy

$$\begin{aligned} X_H(a_k) &= \begin{cases} 2a_1^2, & \text{ha } k = 1, \\ 2(a_k^2 - a_{k-1}^2), & \text{ha } 2 \leq k \leq n-2, \\ -2a_{n-1}^2, & \text{ha } k = n-1. \end{cases} \\ X_H(b_k) &= a_k(b_{k+1} - b_k), \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.1. Tétel. A (4.3) függvények segítségével definiáljuk az alábbi, P fázistér felett értelmezett $n \times n$ -es mátrix értékű függvényeket:

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \\ & a_2 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & & 0 \\ -a_1 & 0 & a_2 & \\ & -a_2 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & & & -a_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

amiket az elemi mátrixok (2.38) segítségével az alábbi alakba írhatunk:

$$L = \sum_{k=1}^n b_k E_{k,k} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (E_{k,k+1} + E_{k+1,k}), \quad A = \sum_{k=1}^{n-1} a_k (E_{k,k+1} - E_{k+1,k}). \quad (4.6)$$

Az L és A függvények a nyílt Toda-lánc egy Lax-párját adják.

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy L és A teljesítik a (3.7) Lax-egyenletet. A (3.7) egyenlet jobb oldalát tekintve először

$$[A, L] = \left[\sum_{k=1}^{n-1} a_k (E_{k,k+1} - E_{k+1,k}), \sum_{l=1}^n b_l E_{l,l} + \sum_{l=1}^{n-1} a_l (E_{l,l+1} + E_{l+1,l}) \right]. \quad (4.7)$$

Az (4.7) jobb oldala az alábbi alakba írható:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^n a_k b_l ([E_{k,k+1}, E_{l,l}] - [E_{k+1,k}, E_{l,l}]) \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n+1} a_k a_l ([E_{k,k+1}, E_{l,l+1}] + [E_{k,k+1}, E_{l+1,l}] - [E_{k+1,k}, E_{l,l+1}] - [E_{k+1,k}, E_{l+1,l}]). \end{aligned} \quad (4.8)$$

A (2.38) egyenlet alapján

$$[E_{i,j}, E_{k,l}] = E_{i,l} \delta_{k,j} - \delta_{i,l} E_{k,j}, \quad (4.9)$$

amit felhasználva a (4.8) átírható:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^n a_k b_l (E_{k,l} \delta_{l,k+1} - \delta_{k,l} E_{l,k+1} - E_{k+1,l} \delta_{l,k} + \delta_{k+1,l} E_{l,k}) \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n+1} a_k a_l (E_{k,l+1} \delta_{l,k+1} - \delta_{k,l+1} E_{l,k+1} + E_{k,l} \delta_{k+1,l+1} - \delta_{k,l} E_{l+1,k+1} \\ & - E_{k+1,l+1} \delta_{l,k} + \delta_{k+1,l+1} E_{l,k} - E_{k+1,l} \delta_{l+1,k} + \delta_{k+1,l} E_{l+1,l}) \\ & = \sum_{k=1}^{n-1} a_k (b_{k+1} E_{k,k+1} - b_k E_{k,k+1} - b_k E_{k+1,k} + b_{k+1} E_{k+1,k}) \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 E_{k,k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 E_{k+1,k+1} + \sum_{k=1}^{n-2} a_k a_{k+1} E_{k,k+2} \\ & - \sum_{l=1}^{n-2} a_{l+1} a_l E_{l,l+2} + \sum_{l=1}^{n-2} a_{l+1} a_l E_{l+2,l} - \sum_{k=1}^{n-2} a_k a_{k+1} E_{k+2,k}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ennek a kifejezésnek az utolsó négy tagja nullát ad, a többi tagot pedig átrendezhetjük a

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k(b_{k+1} - b_k)(E_{k,k+1} + E_{k+1,k}) + 2a_l^2 E_{l,l} + \sum_{k=1}^{n-1} 2(a_k^2 - a_{k-1}^2)E_{k,k} - 2a_{n-1}^2 E_{n,n} \quad (4.11)$$

alakra. A (4.4) alapján a (4.11) az alábbi alakra hozható:

$$\sum_{k=1}^n X_H(b_k)E_{k,k} + \sum_{k=1}^{n-1} X_H(a_k)(E_{k,k+1} + E_{k+1,k}) = X_H(L) = \frac{dL}{dt}, \quad (4.12)$$

azaz megkaptuk a (3.7) egyenlet bal oldalát, így a (4.6) egy Lax-párját adja a nyílt Toda-rendszernek. ■

4.2. Tétel. *Az elemi mátrixok segítségével megadott*

$$r = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} (E_{k,l} \otimes E_{l,k} - E_{l,k} \otimes E_{k,l}) \quad (4.13)$$

konstans függvény egy r -mátrixot szolgáltat a nyílt Toda-rendszer L Lax mátrixához.

Bizonyítás. Először tekintsük a (4.3)-ban bevezetett a_k, b_k változók Poisson-zárójelét:

$$\begin{aligned} \{a_k, b_l\} &= \left\{ \frac{1}{2} e^{\frac{q_k - q_{k+1}}{2}}, -\frac{1}{2} p_l \right\} = -\frac{1}{8} e^{\frac{q_k - q_{k+1}}{2}} \delta_{k,l} + \frac{1}{8} e^{\frac{q_k - q_{k+1}}{2}} \delta_{k+1,l} \\ &= -\frac{1}{4} a_k (\delta_{k,l} - \delta_{k+1,l}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

A (2.31)-ben felírt kanonikus kommutációs relációkat tekintve belátható, hogy tetszőleges $k, l \in \mathbb{N}_n$ esetén

$$\{a_k, a_l\} = 0, \quad \{b_k, b_l\} = 0. \quad (4.15)$$

Ezután írjuk fel az L Lax-mátrix önmagával vett Poisson-zárójelét:

$$\{L, L\} = \left\{ \sum_{k=1}^n b_k E_{k,k} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (E_{k,k+1} + E_{k+1,k}), \sum_{l=1}^n b_l E_{l,l} + \sum_{l=1}^{n-1} a_l (E_{l,l+1} + E_{l+1,l}) \right\}, \quad (4.16)$$

amit a (4.15) alapján, az azonosan nulla tagokat elhagyva, tovább írhatunk:

$$- \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n \{a_l, b_k\} E_{k,k} \otimes (E_{l,l+1} + E_{l+1,l}) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^n \{a_k, b_l\} (E_{k,k+1} + E_{k+1,k}) \otimes E_{l,l}. \quad (4.17)$$

Vegyük észre, hogy (4.17) egy ékszorzás, az első tag indexeit megcserélve. Felhasználva (4.14)-et, az L mátrix önmagával vett Poisson-zárójele:

$$\{L, L\} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} a_k (E_{k,k+1} + E_{k+1,k}) \wedge (E_{k+1,k+1} - E_{k,k}). \quad (4.18)$$

Ezután tekintsük a (3.35) egyenlet jobb oldalát:

$$[r, L \otimes \mathbf{1}] - [\tau(r), \mathbf{1} \otimes L] = [r, L \otimes \mathbf{1}] - \tau([r, L \otimes \mathbf{1}]). \quad (4.19)$$

Látható, hogy elegendő a $[r, L \otimes \mathbf{1}]$ kommutátort meghatározni. A (4.13) r -mátrixot beírva:

$$[r, L \otimes \mathbf{1}] = \frac{1}{4} \left(\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} [E_{k,l}, L] \otimes E_{l,k} - \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} [E_{l,k}, L] \otimes E_{k,l} \right). \quad (4.20)$$

Az $1/4$ -es szorzótényezőtől eltekintve, a (4.20) első tagját véve, beírva az L (4.6) mátrixot, az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} [E_{k,l} \sum_{j=1}^n b_j E_{j,j} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (E_{j,j+1} + E_{j+1,j})] \otimes E_{l,k} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \sum_{j=1}^{n-1} b_j [E_{k,l}, E_{j,j}] \otimes E_{l,k} + \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \sum_{j=1}^{n-1} a_j [E_{k,l}, E_{j,j+1}] \otimes E_{l,k} \\ &+ \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \sum_{j=1}^{n-1} a_j [E_{k,l}, E_{j+1,j}] \otimes E_{l,k}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

A (4.9) felhasználásával és a szummázás átírásával (4.21) tovább írható:

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \sum_{j=1}^n b_j (E_{k,j} \delta_{j,l} - \delta_{k,j} E_{j,l}) \otimes E_{l,k} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_j \delta_{j,l} \sum_{k=1}^{l-1} E_{k,j+1} \otimes E_{l,k} - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_j \delta_{k,j+1} \sum_{l=k+1}^n E_{j,l} \otimes E_{l,k} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_j \delta_{j+1,l} \sum_{k=1}^{l-1} E_{k,j} \otimes E_{l,k} - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=2}^n a_j \delta_{k,j} \sum_{l=k+1}^n E_{j+1,l} \otimes E_{l,k} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} (b_l - b_k) E_{k,l} \otimes E_{l,k} + \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{l-1} a_l E_{k,l+1} \otimes E_{l,k} \\ &- \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{l=k+2}^n a_k E_{k,l} \otimes E_{l,k+1} + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^l a_l E_{k,l} \otimes E_{l+1,k} \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n a_k E_{k+1,l} \otimes E_{l,k}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A (4.20) kifejezés második tagjára teljesen hasonlóan:

$$\begin{aligned} - \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} [E_{l,k}, L] \otimes E_{k,l} &= - \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} (b_k - b_l) E_{l,k} \otimes E_{k,l} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n a_k E_{l,k+1} \otimes E_{k,l} \\ &+ \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^l a_l E_{l,k} \otimes E_{k,l+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+2}^n a_k E_{l,k} \otimes E_{k+1,l} \\ &+ \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{l-1} a_l E_{l+1,k} \otimes E_{k,l}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

A transzpozíció definíciójára (1.21) emlékezve, világos, hogy tetszőleges X, Y mátrixok esetén

$$X \otimes Y - \tau(X \otimes Y) = X \otimes Y - Y \otimes X = X \wedge Y. \quad (4.24)$$

Így a (4.19) az alábbi alakú lesz:

$$\begin{aligned}
[r, L \otimes \mathbf{1}] - [\tau(r), \mathbf{1} \otimes L] &= \frac{1}{4} \left(\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} (b_l - b_k) E_{k,l} \wedge E_{l,k} - \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} (b_k - b_l) E_{l,k} \wedge E_{k,l} \right. \\
&+ \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{l-1} a_l E_{k,l+1} \wedge E_{l,k} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n a_k E_{l,k+1} \wedge E_{k,l} \\
&- \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{l=k+2}^n a_k E_{k,l} \wedge E_{l,k+1} + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^l a_l E_{l,k} \wedge E_{k,l+1} \\
&+ \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^l a_l E_{k,l} \wedge E_{l+1,k} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+2}^n a_k E_{l,k} \wedge E_{k+1,l} \\
&- \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n a_k E_{k+1,l} \wedge E_{l,k} + \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{l-1} a_l E_{l+1,k} \wedge E_{k,l} \left. \right) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} a_k (E_{k,k+1} + E_{k+1,k}) \wedge (E_{k+1,k+1} - E_{k,k}) = \{L, {}^\circ L\}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Azaz teljesül a (3.35) egyenlet, a (4.13) ténylegesen r -mátrixot szolgáltat a nyílt Toda-rendszerhez. ■

4.2. Calogero–Moser–Sutherland-rendszerek

A valós egyenesen mozgó n -részcskés kölcsönható dinamikai rendszerek fázisterét az $\mathbb{R}^{2n}$ tér alkalmas nyílt részhalmaza szolgáltatja, a dinamikát generáló Hamilton-függvény

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2 + \sum_{1 \leq k < l \leq n} v(q_k - q_l) \tag{4.26}$$

alakú. Ekkor v egy egyváltozós sima függvény, tehát csak olyan dinamikát tekintünk, amelyben a részecskék páronként hatnak kölcsön, a párkölcsönhatást pedig a v potenciál jellemzi. A hamiltoni mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_k &= p_k, \\
\dot{p}_k &= \sum_{s=1}^{k-1} v'(q_s - q_k) - \sum_{s=k+1}^n v'(q_k - q_s).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

A Calogero–Moser–Sutherland-rendszereknek több variánsa van, attól függően, hogy milyen alakú a párpotenciál. Ha a potenciál

$$v(q) = \frac{\mu^2}{q^2} \tag{4.28}$$

alakú, ahol $\mu \neq 0$ tetszőleges valós szám, akkor a leírt rendszer a racionális Calogero–Moser–Sutherland-rendszer. Ha a potenciált a

$$v(q) = \frac{\mu^2}{\sin(q)^2} \quad (0 < q < \pi) \tag{4.29}$$

formulával adjuk meg, akkor az a trigonometrikus Calogero–Moser–Sutherland-rendszert írja le. Amennyiben a

$$v(q) = \frac{\mu^2}{\sinh(q)^2} \quad (r > 0) \quad (4.30)$$

párpotenciállal jellemezzük a modellt, akkor ez a hiperbolikus Calogero–Moser–Sutherland-rendszert adja. Alkalmas határesetben a racionális, trigonometrikus és hiperbolikus modellek származtathatók a Weierstrass-féle elliptikus $\wp$ -függvény segítségével definiált

$$v(q) = \mu^2 \wp(q; \omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 \in (0, \infty) \text{ és } -i\omega_2 \in (0, \infty) \quad (4.31)$$

párpotenciállal jellemzett elliptikus Calogero–Moser–Sutherland-rendszerekből, ahol

$$\wp(q; \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{q^2} + \sum_{m,n \neq 0} \left(\frac{1}{(q - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right). \quad (4.32)$$

4.3. Tétel. A

$$\begin{aligned} L_{j,k} &= p_j \delta_{j,k} + i(1 - \delta_{j,k})w(q_j - q_k) \\ M_{j,k} &= \delta_{j,k} \sum_{i \neq j} z(q_i - q_j) - (1 - \delta_{j,k})y(q_j - q_k) \end{aligned} \quad (4.33)$$

függvények (y, z páros függvények) a racionális, trigonometrikus és hiperbolikus Calogero–Moser–Sutherland-rendszereknek egy Lax-párját adják, ha teljesülnek az alábbiak:

$$\begin{aligned} v(q) &= w^2(q), \quad z(q) = \frac{w''(q)}{2w(q)}, \quad y(q) = -w'(q), \\ w(q_1)w'(q_2) - w(q_2)w'(q_1) &= w(q_1 + q_2)(z(q_2) - z(q_1)). \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.4. Tétel. *A racionális, trigonometrikus és hiperbolikus Calogero–Moser–Sutherland-rendszerek esetén az*

$$r = - \sum_{i \neq j} \frac{w'(q_i - q_j)}{w(q_i - q_j)} E_{i,j} \otimes E_{j,i} + \sum_{i \neq j} w(q_i - q_j) E_{i,i} \otimes (E_{i,j} - E_{j,i}) \quad (4.35)$$

függvény egy r -mátrixot szolgáltat az L Lax mátrixhoz, ha teljesülnek a 4.3 tételben megfogalmazott függvényegyenletek.

A Calogero–Moser–Sutherland-rendszerekkel kapcsolatos első eredmények például a [21–25] cikkekben jelentek meg és az elméletük komoly fejlődésnek indult, jelenleg is aktívan folynak a kutatások. A Calogero–Moser–Sutherland-rendszereknek több általánosítása is megjelent, például a Ruijsenaars–Schneider-modell, ami relativisztikus általánosítás [26, 27]. J. F. Diejen pedig bevezette a több csatolási állandóval jellemzett, külső potenciált is tartalmazó relativisztikus deformációkat [28, 29]. A klasszikus van Diejen rendszerek kapcsán a [30, 31] cikkek friss eredményeket tartalmaznak.

Hivatkozások

- [1] A.M. Peremolov. *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras, vol. 1.* Birkhäuser, Basel, 1990.
- [2] C. L. Charlier. *Die Mechanik des Himmels.* De Gruyter, Lipcse, 1927.
- [3] F. Calogero. *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments.* Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [4] E.H. Lieb and W. Liniger. Exact analysis of an interacting Bose gas. i. the general solution and the ground state. *Phys. Rev.*, 130:1605, 1963.
- [5] W. Heisenberg. Zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 49 (9):619–636, 1928.
- [6] R.J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics.* Academic Press, London, 1982.
- [7] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon. *Introduction to Classical Integrable Systems.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [8] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer, New York, 2003.
- [9] O. Babelon and C-M. Viallet. Hamiltonian structures and Lax equations. *Phys. Lett.*, B 237:411–416, 1990.
- [10] *Fizika és Geometria.* Óbányai fizikus-matematikai nyári iskola (1997), Budapest, 2003.
- [11] V. I. Arnold. *A mechanika matematikai módszerei.* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [12] G. Arutyunov. *Elements of Classical and Quantum Integrable Systems.* UNITEXT for Physics. Springer, Cham, 2019.
- [13] P. D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Commun. Pure Appl. Math.*, 21:467–490, 1968.
- [14] M. Toda. Vibration of a chain with nonlinear interaction. *Japan Phys. Soc.*, 22:431, 1967.
- [15] M. Toda. Wave propagation in anharmonic lattices. *Japan Phys. Soc.*, 23:501–506, 1967.

-
- [16] M. Toda. Waves in nonlinear lattices. *Progr. Theor. Ph. Suppl.*, 45:174–200, 1970.
- [17] H. Flaschka. Toda lattice I. *Phys. Rev.*, B9:1924–1925., 1974.
- [18] H. Flaschka. Toda lattice II. *Progr. Theor.*, 51:703–716., 1974.
- [19] J. Avan and M. Talon. Classical r-matrix structure for the Calogero model. *Phys. Lett.*, B 303:33., 1993.
- [20] J. Hoppe. *Lecture Notes on Integrable Systems, Lecture Notes in Physics, m 10*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [21] F. Calogero. Solution of the one-dimensional N -body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials. *J. Math. Phys.*, 12:419–436, 1971.
- [22] J. Moser. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations. *Adv. Math.*, 16:197–220, 1975.
- [23] B. Sutherland. Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. *Phys. Rev. A*, 4:2019–2021, 1971.
- [24] I. M. Krichever. Elliptic solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation and integrable systems of particles. *Funct. Anal. Appl.*, 14:282–290, 1980.
- [25] D. Kazhdan, B. Konstant, and S. Sternberg. Hamiltonian group actions and dynamical systems of Calogero type. *J. Math. Phys.*, XXXI:481–507, 1978.
- [26] S. N. M. Ruijsenaars. A new class of integrable models and its relations to solitons. *Ann. Phys. (N. Y.)*, 170:370–405, 1986.
- [27] S. N. M. Ruijsenaars. Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities. *Commun. Math. Phys.*, 110:191–213, 1987.
- [28] J. F. van Diejen. Deformations of Calogero-Moser systems and finite Toda chains. *Theor. Math. Phys.*, 99:549–554, 1994.
- [29] J. F. van Diejen. Difference Calogero-Moser systems and finite Toda chains. *J. Math. Phys.*, 36:1299–1323, 1995.
- [30] B. G. Puztai and T. F. Görbe. Lax representation of the hyperbolic van Diejen dynamics with two coupling parameters. *Commun. Math. Phys.*, 354:829–864, 2017.

- [31] B. G. Puztai. Self-duality and scattering map for the hyperbolic van Diejen systems with two coupling parameter (with an appendix by S. Ruijsenaars). *Commun. Math. Phys.*, 359:1–60, 2018.

NYILATKOZAT

Alulírott Sallai Krisztina, Fizikus MSc szakos hallgató (Neptun azonosító: MIGRPX) a Klasszikus integrálható rendszerek algebrai elmélete című diplomamunka szerzője fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések általános szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Szeged, 2022. május 7.

a hallgató aláírása