

Debreceni Egyetem
Hamburgi Egyetem
Wigner Fizikai Kutatóközpont

A CPT szimmetria használata elektron-proton ütközések magasabb rendű korrekciójának számolásához

Témavezetők:
dr. Moch Sven-Olaf, Hamburgi Egyetem
dr. Somogyi Gábor, Wigner Fizikai Kutatóközpont

Levente Fekésházy
2022

A diplomamunkám és a Tudományos Diákkonferenciára készített dolgozatom közötti különbség(ek):

A diplomamunkámban ez elektron-positron annihilációban keletkező tömeges b -kvarkpár keltési folyamathoz tartozó kevert QED+QCD valós emissziós korrekciókat vizsgáltam, míg jelen dolgozatban a Drell-Yan folyamat és a részben inklúzív mélyen rugalmatlan szórás duplán differenciális hatáskeresztmetszetei között kerestem kapcsolatot a CPT szimmetria segítségével. A két munka tehát két különböző témát dologoz fel, a dolgozatok között átfedés nincs.

Az általam végzett tudományos munka:

A TDK dolgozatomban a proton-proton ütközésben történő leptonpár keletkezés (Drell-Yan folyamat) és a részben inklúzív mélyen rugalmatlan szórás (Semi-Inclusive Deep Inelastic Scattering, SIDIS) duplán differenciális hatáskeresztmetszetei között kerestem kapcsolatot a CPT szimmetria felhasználásával.

A kutatás motivációjául az szolgál, hogy egy ilyen leképezés birtokában a Drell-Yan folyamatra már ismert, magasabb rendű, perturbatív korrekciókból megkaphatóak lennének a SIDIS folyamathoz tartozó hasonló korrekciók; amelyek jelenleg ismeretlenek. Egy ehhez hasonló módszer már létezik az elektron-positron annihiláció és a mélyen rugalmatlan szórás között (Deep Inelastic Scattering, DIS). Egy ilyen számolás jóval egyszerűbbnek ígérkezik, mint a magasabb rendű korrekciók közvetlen kiértékelése a SIDIS folyamatra.

A munka legfontosabb, általam önállóan elvégzett lépései a következők voltak:

- i) önállóan kiszámoltam mind a Drell-Yan, mind a SIDIS folyamathoz tartozó valós emissziós mátrixelemeket vezető rendjén túli első (NLO) rendben.
- ii) a kapott eredményeket automatizált mátrixelem számoló program (FeynCalc) segítségével ellenőriztem, megmutattam, hogy eredményeim helyesek.
- iii) kiszámoltam mindkét folyamathoz a megfelelő valós emissziós fázisteret, eredményeim az irodalommal összevetve ellenőriztem.
- iv) a fentieket felhasználva kiszámoltam a Drell-Yan és a SIDIS folyamatok duplán differenciális hatáskeresztmetszeteinek valós emissziós járulékait a kvantumszíndinamikai perturbációs számítás NLO rendjében.
- v) megalkottam a két hatáskeresztmetszet közötti leképezést a CPT szimmetria felhasználásával. Ennek a leképezésnek a megtalálása a dolgozat fő tudományos eredménye.
- vi) megmutattam, hogy a kapott transzformáció NLO rendben valóban átviszi a Drell-Yan hatáskeresztmetszetet a SIDIS hatáskeresztmetszetbe.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Motiváció	2
1.2. Drell-Yan folyamat	5
1.3. Részben inklúzív mélyen rugalmatlan szórás	7
2. Szerkezetfüggvények számítása	10
3. A partonikus keresztmetszetek kiszámítása	11
3.1. A Drell-Yan folyamat	11
3.2. A SIDIS folyamat	13
4. Leképezés	15
4.1. Változók	16
4.2. A leképezés ellenőrzése	19
5. Konklúzió	21

1. Bevezetés

A világegyetemünk szerkezetének kutatása mindig is kiemelt helyet foglalt el a tudományos közösség érdeklődési körében. Néhány ezer év leforgása alatt az anyag alkotóelemeinek kutatásában Démokritosz atomjaitól eljutottunk a Standard Modelig.

Az egyik alapvető fizikai módszer, amellyel ezen alkotóelemeket vizsgáltuk, a szórási kísérletek voltak. Ezek során a vizsgált tárgyra egy részecskével lövünk, annak tárgyal való kölcsönhatása utáni állapotváltozásából pedig a tárgy tulajdonságaira következtetünk. Legelsőnek fénymikroszkópot használtunk, ami betekintést engedett a mikroméretű tárgyak világába. Azonban, ennél kisebb felbontás eléréséhez már kisebb hullámhosszú, tehát nagyobb energiájú részecskékre volt szükségünk. Rutherford természetes bomlásból származó α részecskék segítségével kiderítette, hogy a kémiai atom egy negatív töltésű elektronfelhőből és egy pozitív töltésű atommagból áll. Ez elindította a mai napig tartó tendenciát, hogy egyre nagyobb és nagyobb energiájú szórási kísérleteket végezzünk. Ezen nagyobb energia eléréséhez töltött részecskéket gyorsítottunk elektromágneses terek segítségével. Mely azt eredményezte, hogy felfedeztük, az atommag is belső szerkezettel rendelkezik; semleges neutronokból és pozitív töltésű protonokból áll.

Mivel töltött részecskéket tudunk a legjobban gyorsítani, így a két fő kísérleti elrendezés az atommag belső szerkezetének megismerésére, a nagyenergiás proton-proton és elektron-proton ütközések lettek. Ezek segítségével felfedeztük, hogy az atommagot alkotó protonok és neutronok is belső szerkezettel rendelkeznek. Az elméleti modell, amely ezen felfedezés magyarázatául szolgált az úgynevezett Parton Modell volt. Azonban ez se tudta az összes kísérleti eredményt maradéktalanul megmagyarázni, például nem adott magyarázatot arra, miért nem látunk szabad kvarkot. A modell hibáinak kijavítására született meg a kvantum-színdinamika (Quantum Chromodynamics, QCD).

Bár a QCD, és a ma elemi részecskéknél gondolt kvarkok és gluonok elmélete már lassan 50 éve ismert, a proton pontos tulajdonságai még mai napig mind elméleti, mind kísérleti kutatások tárgyát képezik. Például, $> 5\sigma$ eltérés mutatkozik a proton sugár mérések között [1, 2], amely eltérés elméleti háttérét rács QCD számításokkal próbálták felderíteni, de jelen pillanatban a számítások még nem elég pontosak [3, 4, 5]. Vagy épp a tengerkvarkok pontos összetételét még mindig nem sikerült megállapítani és aktív kutatás tárgyát képezi [6, 7, 8, 9, 10]. Ezen összeférhetlenségek feloldásához nem csak pontos mérések, de pontos számítások is szükségesek.

Továbbá a proton-proton ütközések tanulmányozása nem csak a proton elemi

szerkezetének megértése miatt fontos. A mai modern, nagyenergiás részecskegyorsítók hadron-hadron ütköztetők, és az ütközések során feltételezzük, hogy a hadronokban alkotóelemeik valamekkora valószínűséggel találhatók meg egy bizonyos impulzussal; nagy energián ezek közelítőleg szabadon lépnek kölcsönhatásba egymással. Az előbb említett valószínűségek univerzálisak, azonban kiszámolásuk a megfelelő pontossággal jelenlegi matematikai eszközeinkkel nem lehetséges [11]; kísérleti megállapításukhoz a kísérő folyamatok pontos elméleti leírása szükséges.

A Standard Modell keretein belül, a nagyenergiás tartományban, perturbatív számolásokat tudunk végezni. Azonban a közelítések rendjének növekedésével a számolások komplexitása hatványozottan nő. A vezető renden túli második (NNLO) és harmadik (NNNLO) rendű számolások a legmodernebb eszközökkel is rendkívül nehezek és időigényesek. Emiatt matematikai egyszerűsítések alkalmazásához kell folyamodnunk. Jelen munkánkban a minden részecskefizikai rendszerben jelenlévő úgynevezett, töltés-partitás-idő (Charge-Parity-Time, CPT) szimmetria felhasználásával próbáltuk egyszerűsíteni a számolásokat.

Ezen NNLO és NNNLO számolások tudományos értéke a jövőben jelentősen megnövekedik az új, nagyobb és akár 50-100-szor pontosabb adatot szolgáltatató gyorsítók megjelenésével (FCC [12], CLIC [13], EIC [14] [15]).¹

A dolgozat szerkezete:

- A bevezetésben prezentáljuk a dolgozatban foglalt kutatás mögötti motivációt és röviden összefoglaljuk a legszükségesebb ismereteket.
- A második részben bemutatjuk a Drell-Yan (DY) és részben inklúzív mélyen rugalmatlan szórás (Semi-Inclusive Deep Inelastic Scattering, SIDIS) vezetőrenden túli első (NLO) rendű számolásunkat.
- A harmadik részben prezentáljuk a leképezést, amit a DY és SIDIS folyamatok között találtunk.
- Végezetül, konklúziót vonunk és összefoglaljuk a kutatásunk eredményét.

1.1. Motiváció

A kvantummechanikai soktest probléma merőben más, mint klasszikus párja. Bár itt is egy csatolt differenciálegyenletrendszer kapunk, a részecskék ugyanabban az

¹FCC = Future Circular Collider, CERN; CLIC = Compact Linear Collider, EIC = Electron-Ion Collider, Brookhaven.

állapotban most megkülönböztethetetlenek. Ez azt eredményezni, hogy átfoglal-
mazhatjuk a problémát; nem azt szeretnénk megtudni melyik részecske, melyik
állapotban van, hanem hány részecske van egy adott állapotban! Ez a mozzanat
kapta a másodkvantálás nevet, mivel ekkor a Hamilton operátor formailag várható-
értékek összegeként áll elő. A modellt kvantumtérelméletnek nevezték el, ugyanis
az elemi objektum nem a részecskék, hanem a terek lettek!

Ha a kölcsönhatási képben vizsgálódunk, amelyben, mind az operátorok, mind
az állapotok időfüggőek, a Hamilton operátort két részre tagolhatjuk ($H = H_0 +$
 H_I). Az egyik a kinetikus rész (H_0), ami a nem kölcsönható rendszert írja le, a
másik a kölcsönhatási tag (H_I). Továbbá, ha ezt ötvözzük az adiabatikus képpel,
amikor is feltételezzük, hogy a kölcsönhatás a részecskék között elhanyagolható, ha
végtelen távol vannak egymástól, a kölcsönható rendszer állapotfüggvénye bármely
időpontban megadható a nemkölcsönható rendszer alapállapotával:

$$|\psi_I(t)\rangle = S(\infty, -\infty)|\psi_0\rangle, \quad (1.1)$$

ahol

$$S(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^n}{n!} \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^t dt_n T[H_I(t_1) \dots H_I(t_n)], \quad (1.2)$$

és a T operátor az időrendező operátor, ez biztosítja a kauzalitást.

$$T(H(t_4)H(t_1)H(t_2)H(t_3)) = H(t_1)H(t_2)H(t_3)H(t_4), \quad (1.3)$$

ha $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

Mindössze a kölcsönhatás Lagrange-sűrűségét kell ismernünk, ezután az 1.2-
ben egyre több tagot megtartva, az S mátrix magasabb rendű, így pontosabb
közelítését felhasználva, a kölcsönható rendszer pontosabb leírását kapjuk.

Azonban ez matematikailag nem egyszerű. Az S mátrixot adott rendben ki-
fejtve, egy bonyolult és hosszú kifejezést kapunk. Emellett a számolás közbenső
lépéseiben divergens integrálok is megjelennek.

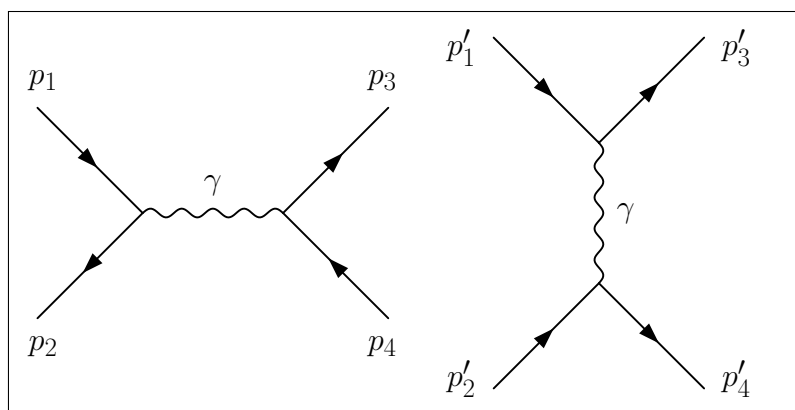
Ezeket a problémákat a XX. század második felében kifejlesztett különböző
matematikai eszközökkel oldották meg. Az amplitúdók kiszámolásához bevezették
a Feynman-diagramok használatát. Ez egy képi módszer, amely lehetővé teszi,
hogy először felvázoljuk a fizikai folyamatokat ábrázoló diagramokat, majd ezeket
lefordítsuk matematikai kifejezésekre.

Ha a kifejezéseinket minden energiára integráljuk, beleértve a nagyon magas és

nagyon alacsony frekvenciákat is, divergenciák jelennek meg; ezeket, sorrendben, ultraibolya (UV), illetve infravörös (IR) jelzőkkel illetjük. A regularizációnak és renormálásnak nevezett matematikai módszerekkel azonban kezelni tudjuk őket.

A regularizációt arra használjuk, hogy pontos jelentést adjunk a végtelen mennyiségeknek, így azok következetesen manipulálhatók a számítás közbelső szakaszaiban. Számos regularizációs séma létezik, a legelterjedtebb a dimenzionális regularizáció. Ez azt jelenti, hogy minden mennyiséget $d = 4 - 2\varepsilon$ dimenzióban számolunk ki, majd a számolások legvégén vesszük az $\varepsilon \rightarrow 0$ határértéket. A renormálás gondoskodik az UV szingularitásokról, amelyek azért jelennek meg, mert az egyenleteinkben a csupasz részecskék tulajdonságait (pl. tömeg vagy töltés) használjuk, és nem a tényleges fizikai tulajdonságokat. Végül az IR szingularitások kiesnek az adott folyamathoz tartozó valós emisszió és a virtuális korrekciók között, a megfelelően definiált, úgynevezett IR és kollinearisan biztonságos fizikai mennyiségek esetében. Ezeket a szingularitásokat azonban még mindig következetes módon kell kezelni, mielőtt a tényleges számítások elvégezhetők lennének. Az egyik lehetőség az, hogy a valós emissziós és a virtuális korrekciók közötti végteleneket úgy "rendezzük át", hogy mindkettőre véges eredményt kapjunk. Ezt a megközelítést kivonási módszernek nevezzük, mivel a divergenciákat kivonjuk a valós emissziós járulékokból, majd integrált formában visszaadjuk a virtuálisakhoz.

A fentebb említett számolási nehézségek arra kényszerítenek bennünket, hogy egyszerűsítéseket keressünk; az egyik ilyen lehetséges számolási trükk az úgynevezett keresztezés.



1. ábra. Feynman-diagramok keresztezése, az egyik ismeretében a másik egyszerű helyettesítéssel megkapható

Egy Feynman-diagram elforgatása során a CPT-szimmetriát használjuk fel arra, hogy egy már kiszámított folyamat Feynman-amplitúdójából egy teljesen

új folyamat Feynman-amplitúdóját kapjuk meg. Ez azért működik, mert a két Feynman-diagram csak a kinematikai változók jelölésében különbözik; ahogy azt az 1 ábrán is láthatjuk ($p'_1 \rightarrow -p_3$ $p'_2 \rightarrow p_1$; $p'_3 \rightarrow p_4$; $p'_4 \rightarrow -p_2$). Az olyan modern számítógépes nyelvek megjelenésével, mint a FORM, Wolfram Mathematica, Maple stb. az ilyen mátrixelemek számítása automatizálhatóvá vált.

Ez a módszer kiterjeszthető differenciális hatáskeresztmetszetekre is, ha a két kifejezés azonos információkat tartalmaz. Azonban, legtöbbször ezen hatáskeresztmetszetek explicit módon nem az impulzusoktól vagy a Mandelstam változóktól függenek, a változéváltás pedig elrejtí a CPT szimmetriát. Egy ilyen leképezés létezik már az elektron-pozitron annihiláció és a mélyen rugalmatlan szórás között (Deep Inelastic Scattering, DIS) [16, 17]. Ez pedig arra motivált minket, hogy a Drell-Yan (DY) és a részben inklúzív mélyen rugalmatlan szórás (Semi-Inclusive Deep Inelastic Scattering, SIDIS) között is keressünk egyet.

Azért esett a SIDIS-re a választásunk, mert ezen folyamatra még nem létezik egzakt NNLO számolás, csak közelítések [18, 19]. Ezek tudományos értéke a közeljövőben növekedni fog [20], mert az új Brookhavenben épülő Elektron-Ion Ütköztető (Electron-Ion Collider, EIC) soha nem látott pontosságú adatokat fog szolgáltatni ezen folyamatról. A precíziós SIDIS mérések közvetlenül a tengerkvarkok rejtélyének megoldásához tud hozzájárulni; követhetve pedig az összes hadron-hadron ütköztető által végzett kísérletekhez tud segítségünkre lenni, hisz a protonon belüli kvark eloszlásra és a fragmetációs függvények pontosabb kísérleti meghatározásához is használható. Utóbbinál a SIDIS kísérletek nagy előnye, hogy az ütköző kvark ízéről is információt szolgáltat, így a PDF-eket az ízekre külön-külön meg lehet határozni.

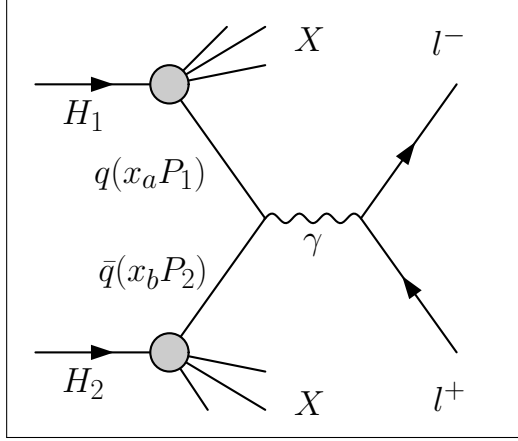
1.2. Drell-Yan folyamat

A hadronütköztetőkben történő leptonpár keltést

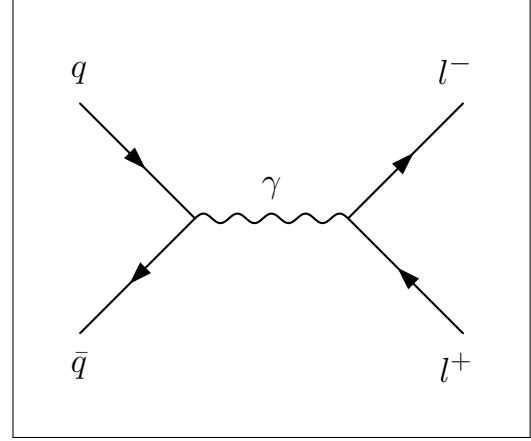
$$H_1 + H_2 \rightarrow l^- l^+ + X \quad (1.4)$$

Drell-Yan-folyamatnak nevezik. Ez azt az esetet írja le, amikor két hadron (amiket a 1.4 egyenletben H_1 és H_2 jelöl) ütközik, és egy lepton-antilepton pár ($l^- l^+$) jön létre további, nem detektált részecskék (X) kíséretében. Ez egy kísérletileg könnyen és pontosan vizsgálható folyamat, mivel a két lepton által a detektorban keltett jelek jól elkülöníthetőek.

A Parton Modell keretein belül a DY folyamat úgy értelmezhető, hogy a H_1 hadron egyik kvarkja annihilálódik a H_2 hadron megfelelő antikvarkjával, így egy



(a) A Drell-Yan folyamat sematikus ábrája.



(b) A $q\bar{q} \rightarrow l^-l^+$ folyamat Feynman-diagramja..

2. ábra. A Drell-Yan folyamat.

semleges bozon keletkezik, amely később egy lepton-antilepton párrá bomlik; a folyamat sematikus ábráját a 2a ábra mutatja.

Ha feltételezzük, hogy az ütköző hadronok nagy energiával rendelkeznek ($1 \text{ GeV} \ll Q$), akkor a keletkező virtuális bozon meglehetősen rövid élettartammal fog rendelkezni, amely alatt a hadronon belül a kvarkok nem lépnek kölcsönhatásba egymással. Így a kvarkokat szabad részecskének tekinthetjük, amelyek a proton P impulzusának egy meghatározott hányadával (x_i) rendelkeznek. Ez azt jelenti, hogy a keresztmetszet valószínűségek kombinációja lesz:

$$d\sigma_{12} = \sum_{a\bar{a}} \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_{\bar{a}} f_{a1}(x_a) f_{\bar{a}2}(x_{\bar{a}}) d\sigma_{a\bar{a}}(x_a P_1, x_{\bar{a}} P_2), \quad (1.5)$$

ahol f_{a1} annak a valószínűsége, hogy x_a impulzusú "a" ízű kvarkot találunk a H_1 -ben, $f_{\bar{a}2}$ pedig annak a valószínűsége, hogy $x_{\bar{a}}$ impulzusú "anti-a" ízű kvarkot találunk a H_2 -ben. Továbbá $d\sigma_{a\bar{a}}(x_a P_1, x_{\bar{a}} P_2)$ a $q\bar{q} \rightarrow l^-l^+$ folyamatnak a partonikus hatáskeresztmetszete, amelynek Feynman-diagramját a 2b ábrán láthatjuk.

Ezen f_i valószínűségi sűrűségek, amiket az angol szakirodalom Parton Density Functions-nek (PDFs) nevez, folyamatfüggetlenek, tehát univerzálisak; ez adja jelentőségüket. Bár az up és down kvarkra kis bizonytalansággal ismerjük ezeket, a nehezebb ízekre ez már nem mondható el. Napjainkban az adatelemzések bizonytalanságának jelentékeny részét adják ezek a PDF bizonytalanságok. [21, 22]

Azonban, a Parton Modell szerint a PDF-eknek Q^2 -től függetlennek kell lenniük; ezt a mérések nem igazolják. Ez az ellentmondás a Parton Modell naivitásából fakad. Ha a magasabb rendű QCD korrekciókat is hozzávesszük, az elméleti szá-

mítások jó egyezést mutatnak a kísérleti eredményekkel. Ezt úgy tehetjük meg, hogy minden olyan emissziót amelynek transzverzális momentuma a detektálási határ alatt van, azt beolvasztjuk a PDF-ekbe. Így nem csak a partonikus hatáskeresztmetszetek lesznek skálafüggőek, de maguk a PDF-ek is. Továbbá ezt a skálafüggést ki is tudjuk számolni, szemben az x függéssel.

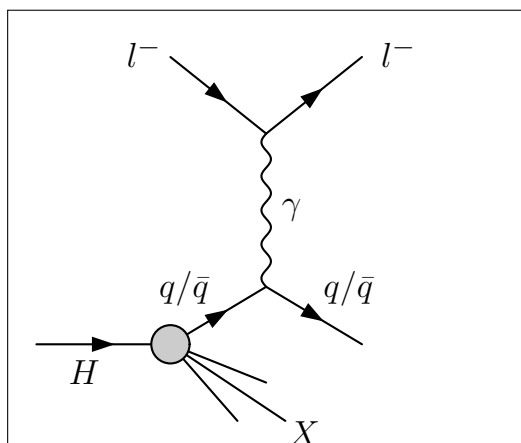
A Drell-Yan folyamat jelentősége abban rejlik, hogy ezzel a folyamattal az elektrogyenge mérhető mennyiségek nagy precizitással meghatározhatóak. Például:

- i) a W bozon tömege és annak szélessége (a $W^\pm$ keletkezés által) [23],
- ii) a gyenge keveredési szög (a γ^*/Z keletkezés által) [24],
- iii) a lepton aszimmetria (W keletkezés) [25].

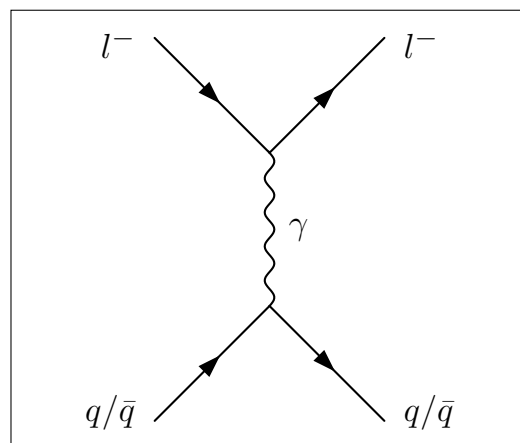
Továbbá, a Z és W bozont tartalmazó események fontosak a hadron-hadron ütköztetők detektorainak kalibrálásához is.

1.3. Részben inklúzív mélyen rugalmatlan szórás

A hadron-hadron ütközések elméleti leírása nehéz, és a nagyszámú végállapoti részecskék azonosítása a kísérletekben kihívást jelent, mivel mindkét bejövő részecske összetett, kvarkokból és gluonokból áll. Ennél egy lépéssel egyszerűbb eset, amikor egy hadront ütköztetünk egy belső szerkezet nélküli részecskével, például egy leptonnal.



(a) A mélyen rugalmatlan szórás folyamat sematikus ábrája.



(b) A $l^- q \rightarrow l^- q$ folyamat Feynman-diagramja.

3. ábra. A mélyen rugalmatlan szórás.

Az ütközési energiától függően több dolog történhet:

1. „nagyon alacsony” energiánál a lepton egy pontszerű részecskét érez.
2. „alacsony” energiákon a lepton egy véges méretű töltött tárgyon szóródik.
3. „nagy” energiákon a lepton hullámhossza elég kicsi ahhoz, hogy a hadron belsőszerkezetét feltárja számunkra, és a kvarkokon szóródjon.

Természetesen ebben az esetben a szórás megszűnik rugalmasnak lenni, ez azt jelenti, hogy a végső hadronikus rendszer tömege már nem a kezdeti rendszer tömegével egyezik meg. Ezeket a szórási eseményeket mélyen rugalmatlan szórásnak (Deep Inelastic Scattering, DIS) nevezzük. Ennek sematikus rajzát a 3a ábrán láthatjuk. Ezt a folyamatot a Parton Modell segítségével értelmezzük, így a hatáskeresztmetszet kiszámolásához szükséges a 3b ábrán látható folyamat partonikus hatáskeresztmetszetének kiszámolása.

A 2b és 3b ábrákon látható Feynman-diagramok vertexeinek összeajtásával a következő kifejezést kapjuk:

$$d\sigma \propto L_{\mu\nu}(p'_1, p'_2)W^{\mu\nu}(p_1, p_2), \quad (1.6)$$

ahol $L_{\mu\nu}(p'_1, p'_2)$ a leptonikus és $W^{\mu\nu}(p_1, p_2)$ a hadronikus rész tenzora. Ha csak a QCD korrekciókat vesszük figyelembe, akkor az előbbi változatlan marad,

$$L_{\mu\nu} = 2(k'_\mu k'_\nu + k'_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}(\vec{k}'\vec{k}' - m_l^2)). \quad (1.7)$$

Bár a hadronikus tenzor pontos formáját nem tudjuk megadni, mégis mondhatunk róla valamit, meg kell őriznie az elektromágneses áramot ($W^{\mu\nu}$). Ezt a megszorítást pedig csak két független tenzorszerkezet teljesíti. Így

$$W^{\mu\nu} = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)F_1(x, Q^2) + \left((p_1)_\mu - q_\mu \frac{p_1 q}{q^2}\right)\left((p_1)_\nu - q_\nu \frac{p_1 q}{q^2}\right)\frac{1}{p_1 q}F_2(x, Q^2), \quad (1.8)$$

ahol q a virtuális foton négyes impulzusa, $Q^2 \equiv -q^2$ és $x = Q^2/(2p_1 q)$. F_1 és F_2 az úgynevezett szerkezetfüggvények, amelyek információt tartalmaznak a hadronon belüli kvarkok impulzuseloszlásáról. Például vezető rendben megmutatható, hogy

a szerkezetfüggvények és a PDF-ek között a következő kapcsolat áll fenn:

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 f_q(x), \quad F_2(x) = \sum_q x e_q^2 f_q(x). \quad (1.9)$$

A DIS egy inklúzív kísérlet, mivel csak a szórt leptonokat detektálja, minden más részecskét figyelmen kívül hagy. A részben inklúzív mélyen rugalmatlan szórási (SIDIS) kísérleteknél a vezető hadront is detektáljuk,

$$l + H \rightarrow l + h + X. \quad (1.10)$$

A vezető hadront az a hadron, amely a beérkező hadron által meghatározott irányra vetítve a legnagyobb impulzussal rendelkezik. Ezzel a módszerrel több információt kapunk, például a kölcsönhatásban résztvevő kvark ízét és annak transzverzális impulzusát.

Differenciális hatáskeresztmetszete a DIS esethez hasonlóan írható fel:

$$\frac{d^3\sigma^h}{dx dy dz} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^2} \left(\frac{1 + (1-y)^2}{2y} \mathcal{F}_T^h(x, z, Q^2) + \frac{1-y}{y} \mathcal{F}_L^h(x, z, Q^2) \right), \quad (1.11)$$

ahol, $x \equiv Q^2/(2Pq)$ a Björken- x , z a kezdőállapotú hadron momentumának azon része, amellyel a vezető hadron rendelkezik, $y \equiv \frac{Pq}{Pp_3}$ pedig a nyaláb energia transzfer. Továbbá, $\mathcal{F}_T^h$ és $\mathcal{F}_L^h$ a transzverzális és longitudinális szerkezetfüggvények. Vezető rendben az

$$\mathcal{F}_T^h(x, z, Q^2) = \sum_q e_q^2 f_q(x, Q^2) D_q^h(z, Q^2), \quad \mathcal{F}_L^h(x, z, Q^2) = 0 \quad (1.12)$$

összefüggések igazak, ahol $D_q^h(z, Q^2)$ a fragmentációs függvényeket jelöli. Ezek tulajdonképpen a PDF-ek inverzei, megadják, hogy a q partonban mekkora valószínűséggel van meg a h hadron. Tehát, hogy a q parton mekkora valószínűséggel fog egy h hadronná átalakulni. Mivel a fragmentációs függvények ízfüggőek, a SIDIS kísérletekben detektált vezető hadronok segítségével információt kapunk ütköző kvark ízéről.

A célunk ezen szerkezetfüggvények meghatározása, mivel mind a fragmentációs, mind a partonsűrűség függvényekről információt hordoznak.

2. Szerkezetfüggvények számítása

Ha a csupasz transzverzális szerkezetfüggvényt $a_s = \alpha_s/4\pi$ sorozataként kezelhetjük és $d = 4 - 2\varepsilon$ dimenzióban számoljuk ki.

$$F^b(a_s^b, Q^2) = \delta(1-x) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_s)^i \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right)^{-i\varepsilon} F_i^b, \quad (2.1)$$

ahol μ a renormálási skála, a_s a csupasz és a_s^b a renormált erős csatolási állandó, amelyeket a következő összefüggés köt össze:

$$a_s^b = a_s - \frac{\beta_0}{\varepsilon} a_s^2 + \left(\frac{\beta_0^2}{\varepsilon^2} - \frac{\beta_1}{2\varepsilon} \right) a_s^3 + \dots, \quad (2.2)$$

ahol a megfelelő β függvény:

$$\beta_0 = \frac{11}{3}C_A - \frac{4}{3}T_F n_f, \quad \beta_1 = \frac{34}{3}C_A^2 - \frac{20}{3}C_A T_F n_f - 4C_F T_F n_f, \quad (2.3)$$

ahol $C_A = 3$, $T_F = 1/2$ és a színalgebrából eredeztethetőek, illetve $n_f = 6$ a kvark ízek száma. A sorfejtésben feltűnő együttthatókat tovább bonthatjuk alaki tényezőkre ($\mathcal{F}_i$) és valós emissziós tagokra ($\mathcal{R}_i$). Például NLO és NNLO rendben:

$$\begin{aligned} F_1^b &= 2\mathcal{F}_1\delta(1-x) + \mathcal{R}_1, \\ F_2^b &= 2\mathcal{F}_2\delta(1-x) + \mathcal{F}_1^2\delta(1-x) + 2\mathcal{F}_1\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Az alaki tényezők analitikus folytatása ismert, így csak a valós emissziós részre kell koncentrálnunk; ez a leképezés a következő alfejezet tárgya.

A leképezés után rekonstruálni kell a struktúra függvényt. Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy ε sorozataként kezeljük:

$$\begin{aligned} F_{T,1} &= -\varepsilon^{-1}P^{(0)} + \varepsilon a_T^{(1)} + \varepsilon^2 b_T^{(1)} + \dots, \\ F_{T,2} &= \frac{1}{2\varepsilon}P^{(0)}(P^{(0)} + \beta_0) - \frac{1}{2\varepsilon} \left(P_{\sigma=1}^{(0)} + 2P^{(0)}c_T^{(1)} \right) + \\ &\quad c_T^{(2)} - P^{(0)}a_T^{(1)} + \varepsilon \left(a_T^{(2)} - P^{(0)}b_T^{(1)} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (2.5)$$

ahol $F_{T,i}$ a renormált csatolásban a sorfejtés együttthatóját jelöli, az együttthatók $a_T^{(i)}, b_T^{(i)}, c_T^{(i)} \dots$ a tömegfaktorizációs képletből olvashatók ki, $P^{(i)}$ pedig az i -edik rendű Altarelli-Parisi magfüggvények. [26]

Tehát a DIS-szerkezetfüggvények kiszámításának lépései a DY-eredményekből:

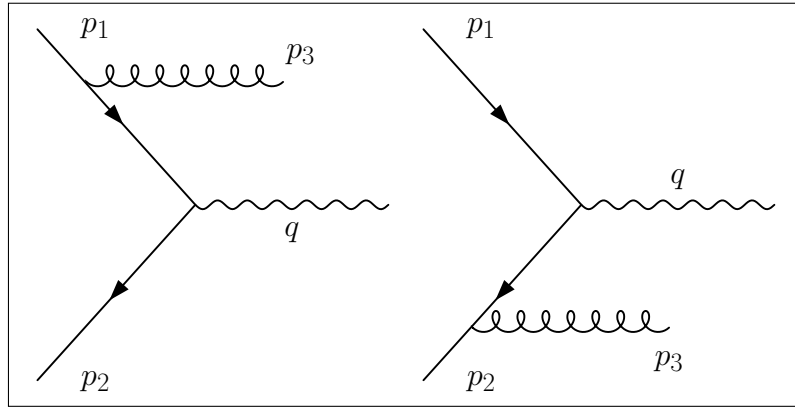
- i) a partonikus hatáskeresztmetszetek valós emissziós járulékának kiszámítása,

- ii) renormalizáció és tömeg faktorizáció elvégzése,
- iii) leképezés elvégzése,
- iv) az előbbi kifejezés sorfejtésének segítségével rekonstruálni a szerkezetifüggvényt.

3. A partonikus keresztmetszetek kiszámítása

3.1. A Drell-Yan folyamat

A leképezés szempontjából csak a hadronikus rész releváns. A QCD NLO rendben további gluon emissziót tapasztalhatunk. A Feynman-diagramok a 4 ábrán láthatók.



4. ábra. A Drell-Yan folyamat hadronikus részének NLO Feynman-diagramjai.

Az amplitúdót önállóan kiszámoltuk $d = 4 - 2\varepsilon$ dimenzióban, a számításokat a Wolfram Mathematica FeynCalc [27, 28, 29] nevezetű csomagjának segítségével ellenőriztük le. Mindkétszer ugyanazt az eredményt kaptuk:

$$|\mathcal{M}_{DY}|^2 = 4e^2 N_c C_F g_s^2 (2 - 2\varepsilon) \frac{1}{s_{13}s_{23}} \left(2s_{12}^2 - 2s_{12}(s_{13} + s_{23}) - s_{13}^2(\varepsilon - 1) - 2s_{13}s_{23}\varepsilon - s_{23}^2(\varepsilon - 1) \right), \quad (3.1)$$

ahol $s_{ij} = 2p_i p_j$ és Mandelstam változóknak nevezzük őket. Az impulzusokat a 4 ábráról lehet leolvasni. A differenciális hatáskeresztmetszet kiszámításához

szükségünk van a fázistér integráljára, amely az NLO esetben a következő

$$\int d\Pi_{DY} = (2\pi)^n \int \frac{d^{n-1}p'_1}{(2\pi)^{n-1}2E'_1} \int \frac{d^{n-1}p'_2}{(2\pi)^{n-1}2E'_2} \times \int \frac{d^{n-1}p_3}{(2\pi)^{n-1}2E_3} \delta^n(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2 - p_3), \quad (3.2)$$

ahol p'_1 és p'_2 a lepton és az anti-lepton, míg p_3 a gluon impulzusát jelöli. A leptonikus rész integrálásával a következő eredményt kapjuk:

$$\int d\Pi_{DY-hadronic} = (2\pi)^n \int \frac{d^{n-1}p_3}{(2\pi)^{n-1}2E_3}. \quad (3.3)$$

Tekintsük a folyamat tömegközépponti (CMS) rendszerét, ahol Θ a nyaláb és a gluon közötti szög. Gömbi koordinátákat alkalmazva,

$$d^{n-1}p_3 = E_3^{n-2} dE_3 d\Omega_{n-1} \Rightarrow \int E_3^{n-3} dE_3 d\Omega_{n-1}. \quad (3.4)$$

Mivel E_3 nem mérhető mennyiség, váltsunk változót; az energiamegmaradás segítségével:

$$\begin{aligned} q^2 &= (p_1 + p_2 - p_3)^2 = s_{12} - 2(p_1 + p_2)p_3 = s_{12} - 2\sqrt{s}E_3 \\ \Rightarrow E_3 &= \frac{s_{12} - q^2}{2\sqrt{s_{12}}}; \quad dE_3 = -\frac{dq^2}{\sqrt{s_{12}}} \\ \Rightarrow \frac{1}{2(2\pi)} \int \frac{(s_{12} - q^2)^{n-3}}{s_{12}^{(n-2)/2}} dq^2 d\Omega_{n-1}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

az $y_{DY} = (1 + \cos(\Theta))/2$ változóval a szögintegrál a következő alakot ölti:

$$\int d\Omega_{n-1} = \frac{2^{n-3}\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})} \int_0^1 (y(1-y))^{(n-4)/2} dy. \quad (3.6)$$

Így a fázistér integrálás mértéke:

$$\begin{aligned} \int d\Pi_{DY-hadronic} &= \frac{2^{\frac{n-2}{2}}(2\pi)^{\frac{n-4}{2}}}{4\Gamma(\frac{n-2}{2})} \int dq^2 \times \\ &\int_0^1 dy_{DY} \frac{(s_{12} - q^2)^{n-3}}{s_{12}^{(n-2)/2}} (y_{DY}(1-y_{DY}))^{(n-4)/2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A szakirodalomban gyakran használják az $x_{DY} = -Q^2/s_{12}$ változót q^2 helyett, ahol $Q^2 = -q^2$. Ezzel a változtatással a Jacobi-determináns $dq^2 = s_{12} dx$ értéket

ad. A Mandelstam-változók a következők lesznek:

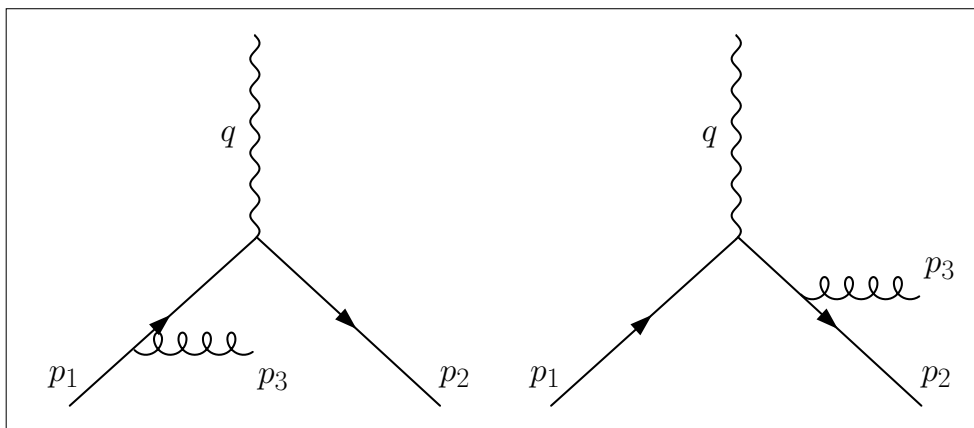
$$\begin{aligned}
s_{12} &= -\frac{Q^2}{x_{DY}} \\
s_{23} &= (p_2 - p_3)^2 = -2p_2 p_3 = -(E_2 E_3 - E_2 E_3 \cos(\Theta)) = \\
&= -\sqrt{s_{12}} \frac{s_{12} - q^2}{2\sqrt{s_{12}}} (1 - \cos(\Theta)) = s_{12} \left(1 + \frac{q^2}{s_{12}}\right) (1 - y_{DY}) = \\
&= -\frac{Q^2}{x_{DY}} (1 - x_{DY}) (1 - y_{DY}) \\
s_{13} &= (p_1 - p_3)^2 = -\frac{Q^2}{x_{DY}} (1 - x_{DY}) y_{DY}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Így a Drell-Yan folyamat kettős differenciális hatáskeresztmetszete $n = 4 - 2\varepsilon$ dimenzióban:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{DY}^{hadronic}}{dx_{DY} dy} &= -4e^2 N_c (2 - 2\varepsilon) (-Q^2)^{1-\varepsilon} C_F g_s^2 \frac{2^{1-\varepsilon} (2\pi)^{-\varepsilon}}{4\Gamma(1-\varepsilon)} \times \\
&\int_0^1 dx_{DY} \int_0^1 dy_{DY} (1 - x_{DY})^{1-2\varepsilon} x_{DY}^{\varepsilon-1} y_{DY}^{-\varepsilon} (1 - y_{DY})^{-\varepsilon} \times \\
&\frac{1}{(x_{DY} - 1)^2 (y_{DY} - 1) y_{DY}} \left((x_{DY}^2 (2y_{DY}^2 - 2y - \varepsilon + 1) + \right. \\
&\quad \left. x_{DY} (-4y_{DY}^2 + 4y_{DY} + 2\varepsilon) + 2y_{DY}^2 - 2y_{DY} - \varepsilon + 1) \right).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

3.2. A SIDIS folyamat

Mint korábban említettük, a leképezés szempontjából csak a hadronikus rész releváns, és NLO-nál további gluonemisszió lép fel. A Feynman-diagramok a 5 ábrán láthatók.



5. ábra. A mélyen rugalmatlan szórás hadronikus részének NLO Feynman-diagramjai..

Az amplitúdót ebben az esetben is önállóan számoltuk ki $d = 4 - 2\varepsilon$ dimenzióban, a számításokat a FeynCalc-kal ellenőriztük le. A két módszer ugyanazt az eredményt adta:

$$|\mathcal{M}_{DIS}|^2 = 4e^2 N_c C_F g_s^2 (2 - 2\varepsilon) \frac{1}{s_{13} s_{23}} \left(2s_{12}^2 + 2s_{12}(s_{13} - s_{23}) - s_{13}^2(\varepsilon - 1) + 2s_{13}s_{23}\varepsilon - s_{23}^2(\varepsilon - 1) \right). \quad (3.10)$$

A fáztér integrálja az NLO esetben a következő:

$$\int d\Pi_{DIS} = (2\pi)^n \int \frac{d^{n-1}p'_2}{(2\pi)^{n-1}2E'_2} \int \frac{d^{n-1}p_2}{(2\pi)^{n-1}2E'_2} \times \int \frac{d^{n-1}p_3}{(2\pi)^{n-1}2E_3} \delta^n(p'_1 + p_1 - p'_2 - p_2 - p_3), \quad (3.11)$$

ahol p'_2 a végállapotú lepton, p_2 a végállapotú kvark és p_3 a gluon lendületét jelöli.

Hagyjuk a leptonikus integrált utoljára, ekkor a hadronikus rész:

$$\int d\Pi_{DIS-hadronic} = (2\pi)^n \int \frac{d^{n-1}p_2}{(2\pi)^{n-1}2E'_2} \times \int \frac{d^{n-1}p_3}{(2\pi)^{n-1}2E_3} \delta^n(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2 - p_3). \quad (3.12)$$

p_2 integrálásával és gömbi koordinátákra váltva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi)^{2-n}}{4E_2E_3} \int dE_3 E_3^{n-2} \int d\Omega_{n-1} \delta(E_q + E_1 - E_2 - E_3) = \\ = \frac{(2\pi)^{\frac{2-n}{2}}}{4\Gamma((n-2)/2)} \int dE_3 E_3^{n-3} \int d\Omega_{n-1} \delta(E_2(E_q + E_1 - E_2 - E_3)). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ha a folyamatot a COM rendszerben vizsgáljuk, és definiáljuk a $y_{DIS} = (1 + \cos(\Theta))/2$ változót,

$$\begin{aligned} \int d\Pi_{DIS-hadronic} &= \frac{(2\pi)^{\frac{2-n}{2}}}{4\Gamma((n-2)/2)} \int dE_3 E_3^{n-3} \times \\ &\quad \times \int_0^1 (y_{DIS}(1 - y_{DIS}))^{(n-4)/2} \delta(2\sqrt{s_{23}}E_3 - s_{23}) = \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{2-n}{2}}}{4\Gamma(\frac{n-2}{2})} s_{23}^{(n-4)/2} \int_0^1 dy_{DIS} (y_{DIS}(1 - y_{DIS}))^{(n-4)/2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Az irodalomból ismert $x_{DIS} = \frac{Q^2}{2p_1q}$ változó bevezetésével a következő képletek-

hez jutunk:

$$\begin{aligned}
x_{DIS} &= \frac{q^2}{2p_1(p_1 - p_2 - p_3)} = \frac{q^2}{-s_{12} - s_{13}} = \frac{Q^2}{Q^2 + s_{23}} \\
\Rightarrow s_{23} &= \frac{Q^2}{x_{DIS}}(1 - x_{DIS}) \\
\Rightarrow s_{13} &= -\frac{Q^2}{x_{DIS}}(1 - y_{DIS}) \\
\Rightarrow s_{12} &= -\frac{Q^2}{x_{DIS}}y_{DIS},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

ahol $Q^2 \equiv -q^2$. Ezzel a paraméterezéssel a DIS folyamat kettős differenciális hatáskeresztmetszete a következő lesz:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{DIS}^{hadronic}}{dx_{DIS} dy} &= -4e^2 N_c (Q^2)^{-\varepsilon} (2 - 2\varepsilon) C_F g_s^2 \frac{(2\pi)^{\varepsilon-1}}{4\Gamma(1-\varepsilon)} \times \\
&\int_0^1 dx_{DIS} \int_0^1 dy_{DIS} (1 - x_{DIS})^{-\varepsilon} x_{DIS}^{\varepsilon} y_{DIS}^{-\varepsilon} (1 - y_{DIS})^{-\varepsilon} \times \\
&\frac{1}{(x_{DIS} - 1)(y_{DIS} - 1)y_{DIS}} \left(x_{DIS}^2(\varepsilon - 1) + 2x_{DIS}(y_{DIS}\varepsilon + y_{DIS} - \right. \\
&\left. 2\varepsilon + 1) + y_{DIS}^2(\varepsilon - 1) - 2y_{DIS}(2\varepsilon + 1) + 4\varepsilon - 2 \right).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

4. Leképezés

A két keresett függvény birtokában, a feladat matematikai megfogalmazása, az hogy keressük azt az f funkcionált, ami teljesíti a

$$f\left(\sigma_{DY}^{real}(x_{DY}, y_{DY})\right) \rightarrow \sigma_{DIS}^{real}(x_{DIS}, y_{DIS}) \tag{4.1}$$

leképezési szabályt. Mivel a fázistér és a dinamika nem kapcsolódik egymáshoz, így feltételezhetjük, hogy a funkcionál faktorizálható:

$$g\left(|\mathcal{M}_{DY}|^2(x_{DY}, y_{DY})\right) \rightarrow |\mathcal{M}_{DIS}|^2(x_{DIS}, y_{DIS}); \tag{4.2}$$

$$h\left(\int \Pi_{DY-hadronic}(x_{DY}, y_{DY})\right) \rightarrow \int \Pi_{DIS-hadronic}(x'_{DY}, y'_{DY}). \tag{4.3}$$

Ahhoz, hogy a DY amplitúdóból megkapjuk a DIS amplitúdót, az eredeti és a keresztezett változóhalmaz között kell megtalálni a leképezési szabályt. Ez a fázistér integrálásnál is fontos szerepet játszik, mert ezen leképezés által a fázistér mértékét változtatjuk meg, tehát már csak a fázistér térfogatán kell változtatni.

Azon az alapon, hogy a két fázistér ugyanazon az intervallumon van értelmezve és folytonos feltételeztük, hogy a

$$\int g\left(\Pi_{DY-hadronic}(x_{DY}, y_{DY})\right) = \int C(x'_{DY}, y') \Pi_{DIS-hadronic}(x'_{DY}, y'_{DY}) \quad (4.4)$$

összefüggés áll fenn a két kifejezés között. Ennek egy elégséges feltétele, ha a két integrandus megegyezik, vagyis ha a két függvény osztható egymással; a C függvényt pedig a két integrandus hányadosa adja.

4.1. Változók

A hatáskeresztmetszetekben az információt a három darab Mandelstam változó hordozza, azonban a háromból csak kettő független, a harmadikat az energiamegmaradás rögzíti. Az előző fejezetekben, a szabad Mandelstam változók helyett áttértünk x -re és y -ra, mivel azok jól mérhetőek és tisztább fizikai jelentéssel bírnak.

Azonban így a CPT szimmetria implicitté válik. Ahhoz, hogy megtaláljuk a keresztezéshez tartozó transzformációt elsőnek fejezzük ki ezeket az új változókat a Mandelstam változókkal:

$$x_{DY} = \frac{q^2}{s_{12}} = -\frac{Q^2}{s_{12}}; \quad x_{DIS} = \frac{q^2}{2p_1 q} = \frac{q^2}{q^2 - s_{23}} = \frac{Q^2}{Q^2 + s_{23}} \quad (4.5)$$

$$y_{DY} = \frac{1 + \cos(\Theta)}{2} = \frac{-s_{23}}{Q^2 + s_{12}}; \quad y_{DIS} = \frac{1 + \cos(\Theta)}{2} = \frac{s_{12}}{s_{12} + s_{13}}. \quad (4.6)$$

A keresztezés a dolgozatban bemutatott impulzus jelölésekkel a következőképpen nyilvánul meg:

$$p_1 \longrightarrow p_1; \quad p_2 \longrightarrow -p_2; \quad p_3 \longrightarrow p_3. \quad (4.7)$$

Esetünkben az indexelés azért nem változik, mert az indexek és részecskék összetartoznak, így csakis az impulzusok előjelére kell koncentrálni. Tehát a Mandelstam változókat a

$$s_{12} \longrightarrow -s_{12} \quad ; \quad s_{13} \longrightarrow s_{13} \quad ; \quad s_{23} \longrightarrow -s_{23}. \quad (4.8)$$

szabályok szerint kell kicserélni a definíciókban. Ekkor azt kapjuk, hogy:

$$x_{DY} = -\frac{Q^2}{s_{12}} \longrightarrow x'_{DY} = -\frac{Q^2}{-s_{12}}, \quad (4.9)$$

$$y_{DY} = \frac{s_{23}}{Q^2 + s_{12}} \longrightarrow y'_{DY} = \frac{-s_{23}}{Q^2 - s_{12}}. \quad (4.10)$$

Az új x'_{DY} és y'_{DY} változókat leellenőrizhetjük úgy, hogy az x'_{DY} -ből kifejezzük s_{23} -at, y'_{DY} -ből s_{12} -at, végül pedig az energiamegmaradást kihasználva ($Q^2 = s_{23} - s_{12} - s_{13}$) megkaphatjuk s_{13} -at.

$$s_{12} = \frac{Q^2}{x'_{DY}}; \quad s_{23} = -\frac{Q^2}{x'_{DY}}(1 - x'_{DY})(1 - y'_{DY}); \quad s_{13} = \frac{Q^2}{x'_{DY}}(1 - x'_{DY})y'_{DY}. \quad (4.11)$$

Láthatjuk, hogy a várakozásnak megfelelően s_{12} és s_{23} kapott egy-egy negatív előjelet.

Matematikai szempontból a transzformáció egyszerű: van egy három egyenletből álló csatolt egyenletrendszerünk, amit megoldva megkapjuk a behelyettesítési szabályokat.

$$\begin{aligned} s_{12} &= s'_{12} = -\frac{s}{x_{DY}} = \frac{s'}{x'_{DY}} \\ s_{23} &= s'_{23} = -\frac{s}{x'_{DY}}(1 - x'_{DY})y'_{DY} = \frac{s'}{x'_{DY}}(1 - x'_{DY})y'_{DY} \\ s_{13} &= s'_{13} = s_{12} - s_{23} + s = -s'_{12} + s'_{23} + s', \end{aligned} \quad (4.12)$$

ahol $s \equiv Q^2$. Az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{aligned} x_{DY} &\longrightarrow 2x'_{DY}y'_{DY} - x'_{DY} - 2y'_{DY} + 2 \\ y_{DY} &\longrightarrow \frac{y'_{DY}}{2y'_{DY} - 1} \\ s &\longrightarrow -\frac{s'(2x'_{DY}y'_{DY} - x'_{DY} - 2y'_{DY} + 2)}{x'_{DY}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Azonban a keresztezés által az új változók fizikai jelentése is megváltozott, ezért újra változót kell váltani. Ha a DIS definíciókat $s_{12} \rightarrow -s_{12}$ és $s_{23} \rightarrow -s_{23}$ változtatásokkal használjuk, akkor a keresztezett és a DIS változók a különböző

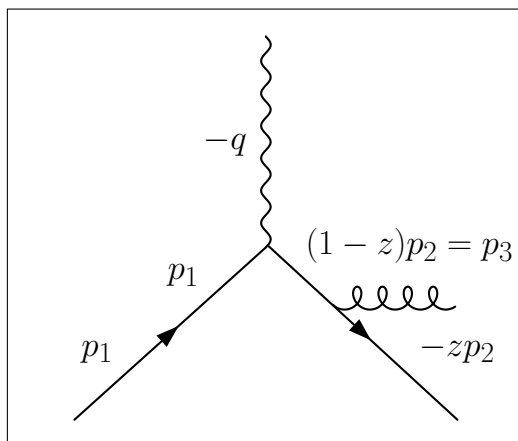
határesetben hasonló szingularitásokkal fognak rendelkezni:

$$x''_{DY} = \frac{Q^2}{Q^2 - s_{23}}; \quad y''_{DY} = \frac{s_{12}}{s - s_{23}}. \quad (4.14)$$

A 6 ábrán látható elrendezésben a végállapotú kollineáris határeset a $z \rightarrow 0$ határértékben nyilvánul meg, ekkor a keresztezett DY, az új keresztezett DY és a DIS változók a következőképpen viselkednek:

$$x'_{DY} = \frac{Q^2}{zs_{12}}; \quad x''_{DY} = -\frac{zs_{12}}{Q^2 - \frac{s_{23}}{1-z}}; \quad x_{DIS} = -\frac{zs_{12}}{Q^2 + \frac{s_{23}}{1-z}}; \quad (4.15)$$

$$y'_{DY} = -\frac{\frac{s_{23}}{1-z}}{Q^2 - zs_{12}}; \quad y''_{DY} = \frac{zs_{12}}{Q^2 - \frac{s_{23}}{1-z}}; \quad y_{DIS} = \frac{-zs_{12}}{Q^2 + \frac{s_{23}}{1-z}}. \quad (4.16)$$



6. ábra. A DIS folyamatban, egy gluon emisszió sematikus ábrája. Az emisszió után feltételezzük, hogy a kvark az impulzusának z szeresével fog rendelkezni, még a kibocsátott gluon $(1-z)$ szeresével.

Tehát egy további transzformációt kell végrehajtanunk, amit a következő egyenletrendszer megoldásával tudunk megkapni:

$$\begin{aligned} s'_{12} &= s''_{12} = \frac{s'}{x'_{DY}} = \frac{s''}{x''_{DY}} y''_{DY} \\ s'_{23} &= s''_{23} = -\frac{s'}{x'_{DY}} (1 - x'_{DY})(1 - y'_{DY}) = -\frac{s'}{x''_{DY}} (1 - y''_{DY}) \\ s'_{13} &= s''_{13} = -s'_{12} + s'_{23} + s' = -s'_{12} + s'_{23} + s'', \end{aligned} \quad (4.17)$$

ahol $s \equiv Q^2$. Az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{aligned} x'_{DY} &\longrightarrow \frac{x''_{DY} - 2y''_{DY}}{y''_{DY}} \\ y'_{DY} &\longrightarrow \frac{x''_{DY} - 1}{x''_{DY} - y''_{DY}} \\ s' &\longrightarrow \frac{s''(x''_{DY} - 2)}{x''_{DY}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Mivel a transzformációk tranzitívek, definiálhatunk egyetlen egy leképezést:

$$\begin{aligned} x_{DY} &\longrightarrow -\frac{x''_{DY} - 2y''_{DY}}{y''_{DY}} \\ y_{DY} &\longrightarrow \frac{x''_{DY} - 1}{x''_{DY} + y''_{DY} - 2} \\ s &\longrightarrow \frac{s''(x''_{DY} - 2)}{x''_{DY}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A DY fázistér integrálra hattanva a leképezést, majd azzal osztva a DIS fázistér faktort ($x''_{DY} = x_{DIS}$, $y''_{DY} = y_{DIS}$)

$$\frac{x''_{DY}}{s'' y''_{DY}{}^{2\varepsilon} (x''_{DY} + y''_{DY} - 2)}. \quad (4.20)$$

Bár a bemutatott hatáskeresztmetszetek nem végesek ezen rendben a renormalizáció elvégzése nem okoz nehézséget, azonban a számolás túlmutat a dolgozat keretein. A leképezés ezen műveletek elvégzése után is működik.

4.2. A leképezés ellenőrzése

A leképezést Wolfram Mathematic-val ellenőriztük le. A következő kód futtatásával belátható, hogy ez a leképezés valóban a DY Feynman-amplitúdót képezi le a DIS-amplitúdóra.

```
rulesDY = {s12 -> -(s/x), s13 -> -(s/x) (1 - y) (1 - x),
s23 -> -(s/x) y (1 - x)};
rulesDIS = {s12 -> -(s /x) y, s13 -> -(s/x) (1 - y),
s23 -> s /x (1 - x)};

PhaseSpaceDY = ((-1)^(1 - ep) s^(1 - ep))/
(2 Gamma[1 - ep]) (1 - x)^(1 - 2 ep)
x^(ep - 1) y^-ep (1 - y)^-ep;
```

```

PhaseSpaceDIS =
s^-ep/(
2 Gamma[1 - ep]) (1 -
x)^-ep x^ep y^-ep (1 - y)^-ep;

AmplitudeDY =
(CF
gs^2 (4 s12^2 - 4 s12 (s13 + s23) - 2 s13^2 (ep - 1) -
4 s13 s23 ep - 2 s23^2 (ep - 1)))/(s12 s13 s23);
AmplitudeDIS =
(CF
gs^2 (4 s12^2 + 4 s12 (s13 - s23) - 2 s13^2 (ep - 1) +
4 s13 s23 ep - 2 s23^2 (ep - 1)))/(s12 s13 s23);

PhaseSpaceDY /. {x -> -((x - 2)/y), y -> (x - 1)/(x + y - 2),
s -> (s (x - 2))/x} // Simplify;
PreFactor =
Simplify[PhaseSpaceDIS/%,
Assumptions -> {x > 0, y > 0, ep > 0, s > 0}];

PhaseSpaceDY AmplitudeDY /. rulesQQtoV // Simplify;
% /. {x -> -((x - 2)/y), y -> (x - 1)/(x + y - 2),
s -> (s (x - 2))/x} // Simplify;
CrossedDY =
Simplify[PreFactor*%,
Assumptions -> {x > 0, y > 0, ep > 0, s > 0}];

DIS = PhaseSpaceDIS AmplitudeDIS /. rulesVQtoQ // Simplify;
Simplify[CrossedDY/DIS,
Assumptions -> {x > 0, y > 0, ep > 0, s > 0}]

```

Eredményül 1-et kaptunk, tehát a talált leképezéssel ténylegesen megkaphatjuk a SIDIS hatáskeresztmetszetet a Drell-Yan hatáskeresztmetszetből!

5. Konklúzió

Leképezés
$x_{DY} \longrightarrow -\frac{x''_{DY}-2y''_{DY}}{y''_{DY}}$
$y_{DY} \longrightarrow \frac{x''_{DY}-1}{x''_{DY}+y''_{DY}-2}$
$s \longrightarrow \frac{s''(x''_{DY}-2)}{x''_{DY}}$
Prefaktor
$\frac{x''_{DY}}{s'' y''_{DY}{}^{2\varepsilon} (x''_{DY}+y''_{DY}-2)}$

1. táblázat. A leképezés a Drell-Yan és a részben inklúzív mélyen rugalmatlan szórás hatáskeresztmetszete között.

Ezen dolgozatban ismertettünk egy olyan leképezést amivel A Drell-Yan (DY) hatáskeresztmetszetből megkaphatjuk a Semi-Inclusive Deep Inelastic Scattering (SIDIS) hatáskeresztmetszetet. Ezen technikával vélhetően gyorsabban tudunk magasabb rendű korrekciókat számolni.

Ezen számítások azért fontosak, mert a közeljövőben megépülő Electron-Ion-Collider soha nem látott pontossággal fog adatokat szolgáltatni a fentebb említett folytamról. Ezen kísérletek segítségével információkat kaphatunk a tengerkvarkok összetételéről és a parton sűrűségfüggvényeket még pontosabban meg tudjuk határozni. Utóbbi különösen fontos, mivel ezen függvények univerzálisak, így minden hadron ütköztető által szolgáltatott adat analízise során felhasználjuk őket.

A dolgozat harmadik fejezete tartalmazza a DY és a SIDIS folyamat NLO QCD korrekcióinak kiszámítását, amit a 2 táblázat foglal össze. A második és utolsó sor összehasonlításával láthatjuk, hogy bár a CPT szimmetriával a Feynman-amplitúdókat keresztezni tudjuk, ez csak akkor triviális, ha a Mandelstam változókat használjuk. Azonban ezen változókat nem tudjuk mérni, ezért áttérünk két új változóra; az x -ek az ütközés energiájáról adnak információt, míg az y -ok az emittált gluon és a nyaláb által bezárt szögről. Az ezen változókkal kifejezett hatáskeresztmetszetek közötti leképezést a negyedik fejezetben mutattuk be; ennek végeredményét a 1 táblázatban láthatjuk. A leképezés nehézségét az adta, hogy az eddig ismert hasonló leképezésekkel szemben itt nem válik külön az x és y transzformáció.

A SIDIS folyamathoz már léteznek NLO számítások, a következő lépcsőfok a tisztán QCD NNLO és a kevert EW+QCD NNLO korrekciók kiszámítása. Ezek jövőbeli kutatások témáját képezik. Reményeink szerint a már létező Drell-Yan számolásokat ezzel a módszerrel fel tudjuk használni a SIDIS NNLO korrekciók kiszámításához.

DY	SIDIS
$-4(s_{12}^2 - s_{12}(s_{13} + s_{23}) - 2s_{13}^2(\varepsilon - 1) - s_{13}s_{23}\varepsilon + 2s_{23}^2(\varepsilon - 1))/(s_{13} s_{23})$	$4(s_{12}^2 + s_{12}(s_{13} - s_{23}) - 2s_{13}^2(\varepsilon - 1) + s_{13}s_{23}\varepsilon + 2s_{23}^2(\varepsilon - 1))/(s_{13} s_{23})$
$s_{12} = 2p_1p_2 = -\frac{Q^2}{x_{DY}};$ $s_{13} = 2p_1p_3 = -\frac{Q^2}{x_{DY}}(1 + x_{DY})y.$ $s_{23} = 2p_2p_3 = -\frac{Q^2}{x_{DY}}(1 + x_{DY})(1 - y);$	$s_{12} = 2p_1p_2 = -\frac{Q^2}{x_{DIS}}y;$ $s_{13} = 2p_1p_3 = -\frac{Q^2}{x_{DIS}}(1 - y);$ $s_{23} = 2p_2p_3 = \frac{Q^2}{x_{DIS}}(1 - x_{DIS});$
$\frac{4(2\pi)^{\varepsilon-1}}{\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dx_{DIS} \int_0^1 dy$ $(1 - x_{DIS})^{-\varepsilon} x_{DIS}^{\varepsilon} y^{-\varepsilon} (1 - y)^{-\varepsilon}$	$\frac{2^{1-\varepsilon}(2\pi)^{-\varepsilon}}{4\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 dx_{DY} \int_0^1 dy$ $(1 - x_{DY})^{1-2\varepsilon} x_{DY}^{\varepsilon-1} y^{-\varepsilon} (1 - y)^{-\varepsilon}$
$-(4(x_{DY}^2(2y^2 - 2y - \varepsilon + 1) + x_{DY}(-4y^2 + 4y + 2\varepsilon) + 2y^2 - 2y - \varepsilon + 1)/(x_{DY} - 1)^2(y - 1)y$	$-8(x_{DIS}^2(\varepsilon - 1) - 2x_{DIS}(y\varepsilon + y - 1) + y^2(\varepsilon - 1) + 2y - 2)/(x_{DIS} - 1)(y - 1)$

2. táblázat. A Drell-Yan és a észben inklúzív mélyen rugalmatlan szórás hatáske-
resztmetszetéhez szükséges kifejezések. Az első sorban a partonikus keresztmetsze-
tek hadronikus részéhez tartozó Feynman-diagramok láthatóak. A második sorban
az ezekből számolt Feynman-amplitúdók. A harmadikban a Mandelstam változók
a szakirodalomban használt változókkal kifejezve. A negyedikben a fázistérinteg-
rálók. Az ötödikben a Feynman-amplitúdók az új változókkal.

Hivatkozások

- [1] J.-P. Karr and D. Marchand, „Progress on the proton-radius puzzle,” *Nature*, vol. 575, pp. 61–62, 11 2019.
- [2] G. Paz, „The proton radius puzzle,” 2019.
- [3] W. Detmold, A. Grebe, and P. Shanahan, „Lattice calculation of the proton charge radius,” 2018.
- [4] C.-D. Han and X.-R. Chen, „Estimating proton radius and proportion of other non-perturbative components in the proton by the maximum entropy method,” *Chinese Physics C*, vol. 41, p. 113103, oct 2017.
- [5] D. Djukanovic, T. Harris, G. von Hippel, P. M. Junnarkar, H. B. Meyer, D. Mohler, K. Ottnad, T. Schulz, J. Wilhelm, and H. Wittig, „Isovector electromagnetic form factors of the nucleon from lattice qcd and the proton radius puzzle,” *Phys. Rev. D*, vol. 103, p. 094522, May 2021.
- [6] W.-C. Chang and J.-C. Peng, „Flavor structure of the nucleon sea,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 79, pp. 95–135, nov 2014.
- [7] D. F. Geesaman and P. E. Reimer, „The sea of quarks and antiquarks in the nucleon,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 82, mar 2019.
- [8] P. E. Reimer, „Measuring the flavor asymmetry in the sea quarks of the proton with the drell–yan process,” *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, vol. 43, no. 3, pp. 815–819, 2011. NanoPHYS 09.
- [9] S. Alekhin, J. Blümlein, K. Daum, K. Lipka, and S. Moch, „Precise charm-quark mass from deep-inelastic scattering,” *Phys. Lett. B*, vol. 720, pp. 172–176, 2013.
- [10] S. Alekhin, J. Blumlein, L. Caminadac, K. Lipka, K. Lohwasser, S. Moch, R. Petti, and R. Placakyte, „Determination of Strange Sea Quark Distributions from Fixed-target and Collider Data,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, no. 9, p. 094002, 2015.
- [11] E. R. N. e. a. Huey-Wen Lin, „Parton distributions and lattice QCD calculations: A community white paper,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 100, pp. 107–160, may 2018.

- [12] R. G. Suarez, „The Future Circular Collider (FCC) at CERN,” in *7th Symposium on Prospects in the Physics of Discrete Symmetries*, 4 2022.
- [13] „The Compact Linear Collider (CLIC) - Project Implementation Plan,” vol. 4/2018, 12 2018.
- [14] V. Guzey, „A u.s.-based electron-ion collider,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1390, p. 012123, nov 2019.
- [15] F. Willeke and J. Beebe-Wang, „Electron ion collider conceptual design report 2021,” 2 2021.
- [16] J. Blumlein, V. Ravindran, and W. L. van Neerven, „The Drell-Yan-Levy relation: $e p$ versus $e^+ e^-$ scattering to $O(\alpha(s)^2)$,” in *5th International Symposium on Radiative Corrections: Applications of Quantum Field Theory to Phenomenology*, 1 2001.
- [17] A. Mitov, S. Moch, and A. Vogt, „Next-to-next-to-leading order evolution of non-singlet fragmentation functions,” *Physics Letters B*, vol. 638, pp. 61–67, jun 2006.
- [18] M. Abele, D. de Florian, and W. Vogelsang, „Approximate NNLO QCD corrections to semi-inclusive DIS,” *Physical Review D*, vol. 104, nov 2021.
- [19] M. Abele, D. de Florian, and W. Vogelsang, „Threshold resummation at n^3 ll accuracy and approximate n^3 lo corrections to semi-inclusive dis,” 2022.
- [20] E. C. Aschenauer, I. Borsa, R. Sassot, and C. V. Hulse, „Semi-inclusive deep-inelastic scattering, parton distributions, and fragmentation functions at a future electron-ion collider,” *Physical Review D*, vol. 99, may 2019.
- [21] C. Willis, R. Brock, D. Hayden, T.-J. Hou, J. Isaacson, C. Schmidt, and C.-P. Yuan, „New method for reducing parton distribution function uncertainties in the high-mass drell-yan spectrum,” *Physical Review D*, vol. 99, mar 2019.
- [22] J. Butterworth, S. Carrazza, A. Cooper-Sarkar, A. D. Roeck, J. Feltesse, S. Forte, J. Gao, S. Glazov, J. Huston, Z. Kassabov, R. McNulty, A. Morsch, P. Nadolsky, V. Radescu, J. Rojo, and R. Thorne vol. 43, p. 023001, jan 2016.
- [23] T. e. a. Aaltonen, „Precise measurement of the w -boson mass with the CDF II detector,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 151803, Apr 2012.

- [24] S. a. a. Chatrchyan, „Measurement of the weak mixing angle with the Drell-Yan process in proton-proton collisions at the LHC,” *Phys. Rev. D*, vol. 84, p. 112002, Dec 2011.
- [25] V. K. et al., „Forward-backward asymmetry of Drell-Yan lepton pairs in pp collisions at $\sqrt{s} = 8\text{TeV}$,” *The European Physical Journal C*, vol. 76, jun 2016.
- [26] G. Altarelli and G. Parisi, „Asymptotic Freedom in Parton Language,” *Nucl. Phys. B*, vol. 126, pp. 298–318, 1977.
- [27] V. Shtabovenko, R. Mertig, and F. Orellana, „FeynCalc 9.3: New features and improvements,” *Computer Physics Communications*, vol. 256, p. 107478, nov 2020.
- [28] V. Shtabovenko, R. Mertig, and F. Orellana, „New developments in feynCalc 9.0,” *Computer Physics Communications*, vol. 207, pp. 432–444, 2016.
- [29] R. Mertig, M. Böhm, and A. Denner, „FeynCalc - computer-algebraic calculation of feynman amplitudes,” *Computer Physics Communications*, vol. 64, no. 3, pp. 345–359, 1991.
- [30] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*. 1985.
- [31] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 3 2014.
- [32] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. Boston: McGraw-Hill, 1971.
- [33] P. Duwentäster, „Master thesis: Parton distribution functions from deep inelastic scattering,” 2019.
- [34] O. Ledwig, „Master thesis: Next-to-leading order qcd corrections to the drell-yan process,” 2019.