

TDK-dolgozat

Szerző: Mészáros Botond

Fogadó felsőoktatási intézet és tanszék:
ELTE-IK Komputeralgebra Tanszék

*Determinisztikus rendszerek
modellterének redukálása nemlineáris
időfejlődés esetében*

Szerző: *Mészáros Botond,*
ELTE-TTK Matematika MSc. 1. év

Témavezető: *Dr. Burcsi Péter,*
ELTE-IK Komputeralgebra Tanszék, docens

Dolgozat elkészültének ideje: 2022.05.06.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Euklideszi terek és jellemzőik	2
1.1. Affin terek	2
1.2. Euklideszi terek	3
2. Euklideszi terek közötti leképezések	4
2.1. Euklideszi terekkel modellezett, időben fejlődő rendszerek	4
2.2. Euklideszi terekkel modellezett, időben fejlődő determinisztikus rendszerek modellterének redukálása	8
2.3. Euklideszi terek közötti leképezések Jet-ei	13
2.4. A lineáris pszeudoinverz fogalma és a Moore-Penrose pszeudoinverz	14
3. Megoldás C^k, $k \in \{1, \dots, \infty\}$ osztályú leképezésekkel	15
3.1. A megoldás megkonstruálása	15
3.2. Newton és az Euklideszi világ képe	23
4. (Pszeudo-)Riemann-sokaságokkal modellezett rendszerek	26
4.1. Fizikai motiváció: A testek kitüntetett mozgási pályái	26
4.2. Topologikus terek, topologikus és sima sokaságok	28
4.3. Érintőtér, érintőnyaláb. Vektor- és tenzormezők	30
4.4. (Pszeudo-)Riemann-sokaságok	32
4.5. Riemann-sokaságok beágyazásai Euklideszi terekbe	33
5. (Pszeudo-)Riemann-sokaságokkal modellezett rendszerek modellterének redukciója	34
5.1. Globális megoldás beágyazással	34
Összefoglalás	34
Köszönet	35
Hivatkozások	36

Bevezetés

Valós rendszerek modellezése során gyakran csak néhány mennyiség időbeli fejlődését szeretnénk nyomon követni: egy fizikai kiterjedéssel rendelkező test helyzetét és impulzusát, járvány során az egészséges, felépült, immunitással rendelkező vagy fertőzött emberek számát, esetleg utóbbiak fertőzőképességét, gazdaság esetében néhány termék árának változását, csak, hogy néhány példát említsek. Mégis, a vizsgálni kívánt mennyiségek időbeli változását gyakran nem lehet egyszerűen nyomon követni – legalábbis egyáltalán nem nyilvánvaló módon –, ezért összetettebb, számos új paraméter időfüggését is leíró modelleket alkotunk, és az új, időfüggő paraméterek segítségével bontjuk tagokra és értjük meg a keresett mennyiségek változásáért felelős mechanizmusokat.

Bár minél összetettebb egy modell, annál nagyobb eséllyel képes helyesen leírni a tényleges vizsgált jelenséget, továbbra is fennáll, hogy a modell komplexitásáért felelős paraméterek nagyobb részére tulajdonképpen nem vagyunk kíváncsiak, azokat *kényszerből*, a biztosabb eredmény és a belső mechanizmusok megértése érdekében vezettük be. Kérdés tehát, hogy ha egy sokváltozós, jól működő modell adott, mellyel csak néhány paraméter időfejlődését akarjuk leírni, találhatunk-e ez alapján olyan, kevesebb paraméterből álló modelleket, melyek hasonló sikerrel képesek leírni a vizsgált mennyiségek időfüggését, egy vizsgált időintervallumban. Dolgozatom egyik fő célja választ találni e kérdésre, oly módon, hogy az praktikusan is alkalmazható, leprogramozható eljárás legyen. Ennek érdekében az eredményeket az absztrakt formán túl a számítástechnikában gyakran alkalmazott lineáris algebra eszköztárával felírva is megadom, segítve a tényleges implementációt.

A dolgozat első fejezetében röviden összefoglalom az affin- és Euklideszi terek néhány alapvető tulajdonságát, melyeknek azok alkalmasságát köszönhetjük modellezési szempontból. A második fejezetben bevezetem a dolgozat első felének egészében használt jelölésrendszert, majd megfogalmazom magát a problémát is abban a formában, amelyben választ szeretnék rá találni. A harmadik fejezetben néhány lépésben megoldom formálisan a problémát, kitérve az alkalmazások szempontjából lényeges kérdésekre. Megvizsgálom azt az esetet is, ha a korlátos számítási kapacitás miatt csak közelítő megoldást adunk (hiszen nem zárt alakban adott leképezést tipikusan közelíteni tudunk), mely esetben hibabecslést adok. Tárgyalom az eljárás alkalmazásának feltételeit és a megkonstruálás módszerének előnyeit. A fejezetet néhány fizikai eredetű gondolattal zárom, mellyel motiválni igyekszem az általánosabb modellezési keretrendszer, a Riemann-sokaság bevezetését.

A dolgozat negyedik fejezetében röviden áttekintem a topologikus terek, topologikus-, sima- és (pszeudo-)Riemann-sokaságok fő tulajdonságait, igyekezve arra, hogy a megjelenő definíciók mellé indoklás is kerüljön. Az ötödik fejezetben megadok egy lehetséges módszert, mellyel a dolgozat első felében tekintett eljárás általánosítható (pszeudo-)Riemann-sokaságok közötti leképezésekre is. Végül, összefoglalom munkám eredményeit és köszönetet mondok a kutatást lehetővé tevő személyeknek, közösségeknek és programoknak a támogatásért.

1. Euklideszi terek és jellemzőik

A legtöbb fizikai modell esetében a modellteret Euklideszi térnek tekintjük, melynek részben praktikus, részben történeti okai vannak. A klasszikus mechanika Newton-i megfogalmazása ugyanis az euklideszi geometria axiómarendszerére épült, így minden további, a klasszikus keretrendszer követő modell is implicite magában hordozta az euklideszi geometriát. Az Euklideszi tér napjainkban is az egyik leggyakrabban tekintett alaptér maradt, noha a 20. századi fizika sok szempontból meghaladta az Euklideszi tér fogalmát: az általános relativitáselmélet a mögöttes geometriával szakítva lényeges általánosításként a (pszeudo-)Riemann-sokaság fogalmát vezette be a fizikába a nagy jelentőségű keretrendszerek közé, míg a kvantummechanika probabilisztikus világképének köszönhetően, a lehetséges mérésekhez tartozó állapotok formális linearkombinációinak tere elvezetett a Hilbert-tér fogalmáig.

A legtöbb tudományterületen azonban továbbra is Euklideszi terekkel modellezünk, hiszen a modellek validálására továbbra is numerikus értékeket jelezni képes mérőberendezéseink állnak rendelkezésre. Így, azáltal, hogy a vizsgált rendszerek állapotait azonosítjuk azokkal a numerikus értékekkel, melyeket adott mérés során az állapothoz társítani tudunk, lényegesen egyszerűbbé válik számos kérdés tárgyalása. Ugyanakkor, mindenképp érdemes átgondolni, hogy melyek azok az alapfeltevések és azonosítások, amelyeket implicite felteszünk az ilyen jellegű modellezés révén, és amelyek néha koncepcionálisan különböző fogalmak összemosásához vezetnek. Ezért a következőkben rövid áttekintését adom az Euklideszi terek mögött álló matematikai képnek.

1.1. Affin terek

Ebben az alfejezetben röviden felelevenítjük az affin tér fogalmát, kiemelve néhány, a fizikai modellezés szempontjából jelentős tulajdonságot.

1. Definíció. Az $(A, \vec{A}, +_A)$ hármast affin térnek nevezzük, ha A egy halmaz, $\vec{A}$ egy vektortér és $+_A : A \times \vec{A} \rightarrow A$ az $\vec{A}$ additív csoportjának egy tranzitív és szabad hatása A -n. Ekkor az A elemeit pontoknak, $\vec{A}$ elemeit pedig *eltolásvektoroknak*, *eltolásoknak* vagy *szabad vektoroknak* nevezzük. Ekkor az $\vec{A}$ teret az *affin térhez rendelt vagy asszociált vektortérnek* nevezzük.

Megjegyzés. Adott $(A, \vec{A}, +_A)$ affin tér esetében tehát $+_A$ -ra teljesülnek az alábbiak:

1. Jobb oldali identitás: $\exists! 0 \in \vec{A} : \forall a \in A : a +_A 0 = a$;
2. Asszociativitás: $\forall v, w \in \vec{A} : \forall a \in A : (a +_A v) +_A w = a +_A (v +_{\vec{A}} w)$;
3. Szabad és tranzitív hatás tulajdonság: $\forall a \in A : +_A^a : \vec{A} \rightarrow A : +_A^a(v) = a +_A v$ bijekció.

Megjegyzés. Ha az $(A, \vec{A}, +_A)$ hármas affin tér, akkor a továbbiakban röviden csak az A alaphalmazon keresztül fogunk rá hivatkozni, amennyiben ez nem okoz félreértést.

Affin terekben nincs természetes megfeleltetés a tér pontjai és a tér pontjain végezhető eltolásokkal azonosítható eltolásvektorok között.

1.2. Euklideszi terek

Ebben az alfejezetben röviden felelevenítjük az Euklideszi tér definícióját és a fizikai modellezés szempontjából releváns tulajdonságait.

2. Definíció. Az $(X, (\bullet, \bullet))$ párt *Prehilbert-térnek*, *belső- vagy skalárszorozatos vektortérnek* vagy egyszerűen *belső- vagy skalárszorozatos térnek* nevezzük, amennyiben X vektortér, illetve a $(\bullet, \bullet) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ leképezés skalárszorozat, ahol általában $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ teljesül.

3. Definíció. Egy, az $\mathbb{R}$ valós számok teste felett értelmezett belső szorozatos teret *Euklideszi vektortérnek* nevezünk.

4. Definíció. Egy, a valós számok teste felett értelmezett affin teret *Euklideszi affin térnek* vagy egyszerűen *Euklideszi térnek* nevezzük, ha a hozzá asszociált vektortér Euklideszi vektortér.

5. Definíció. Legyen az $(E, \vec{E}, +_E)$ Euklideszi tér. Ekkor, az affin terekhez hasonlóan az E halmaz elemeit az Euklideszi tér pontjainak, az asszociált $\vec{E}$ vektortér elemeit pedig *euklideszi vektoroknak* nevezzük. Ekkor az Euklideszi tér dimenziója megegyezik az asszociált Euklideszi vektortér dimenziójával.

Megjegyzés. A továbbiakban, ha Euklideszi terekről beszélünk, az asszociált vektortér elemeinek megnevezéséből elhagyjuk az euklideszi jelzőt.

1. Állítás. Minden Euklideszi vektortérnek létezik ortonormált bázisa.

2. Állítás. Legyen $(E, \vec{E}, +_E)$ Euklideszi tér, és $O \in E$ annak egy pontja. Ekkor az O pont ismeretében definiált $f_O : E \rightarrow \vec{E}$, $f(P) = \overrightarrow{OP}$ leképezés izometria.

Megjegyzés. Az előző két állítás értelmében adott $(E, \vec{E}, +_E)$ Euklideszi tér mellett, egy $O \in E$ pont kiválasztásával izometrikus kapcsolat létesíthető E és $\mathbb{R}^n$ között, ahol $n = \dim(E)$. Ehhez legyen adott az $(O, e_1, \dots, e_n)$ Euklideszi vonatkoztatási rendszer, illetve vezessük be a $h : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h(P) = (e_1 \cdot f_O(P), \dots, e_n \cdot f_O(P))$ leképezést. Ennek inverze is létezik, mégpedig $h^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow E$, $h^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f_O^{-1}(O + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$. Látható tehát, hogy izomorfizmus erejéig minden véges dimenziós Euklideszi térhez rendelt Euklideszi vektortér megegyezik a szokásos műveletekkel ellátott, megfelelő dimenziós valós szám- n -esek vektorterével, innen pedig az origó megválasztásának szabadságától eltekintve maga az Euklideszi tér is izomorf $\mathbb{R}^n$ -el.

Összességében tehát, minden véges $n \in \mathbb{N}$ dimenziós Euklideszi tér izometrikus az $\mathbb{R}^n$ -el, így a továbbiakban vizsgálódásunkkal az $\mathbb{R}^n$ terekre szorítkozhatunk, a szokásos műveletekkel ellátva azt.

2. Euklideszi terek közötti leképezések

2.1. Euklideszi terekkel modellezett, időben fejlődő rendszerek

Determinisztikus rendszerek esetében természetesen felvetül kérdés valamilyen, időtől függő, minden pillanatban jól meghatározott mennyiségek megtalálása és a rendszer ezekkel való vizsgálatának lehetősége. Ehhez általában egy jól kezelhető (tipikusan lineáris) struktúrával ruházzuk fel a vizsgált mennyiségek lehetséges értékeinek terét, és az ebben definiált műveletek és fogalmak segítségével próbáljuk leírni a rendszer belső dinamikáját.

Ahogy arról már röviden írtam, annak érdekében, hogy eldönthető legyen modellünk helytállósága, az végül numerikus értékekkel kell szolgáljon, melyeket mérni lehet, ezért érdemes rögtön feltételezni, hogy olyan struktúrával van dolgunk, ami (lokálisan) paraméterezhető $\mathbb{R}^n$ egy nyílt halmazával.

Egyelőre azzal a további feltételezéssel is élni fogok, hogy ez globálisan is igaz, vagyis felteszem, hogy a vizsgált modell szerint a vizsgált rendszer modelltere az $\mathbb{R}^n$ -el azonosítható Euklideszi tér valamely megfelelően választott $n \in \mathbb{N}$ mellett.

Például, ha adott egy tömegpontokból álló klasszikus fizikai rendszer, akkor annak egy konfigurációját úgy kaphatjuk, hogy rögzítjük az egyes tömegpontok helyzeteit. Az összes lehetséges konfigurációt a konfigurációs tér adja meg, tehát a konfigurációs tér dimenziója megegyezik annak a vektortérnek a dimenziójával, melyben a lehetséges helyvektorok értelmezettek. Jelöljük ezt $\mathbb{R}^m$ -el. Ha ugyanezen rendszer mozgásállapotát szeretnénk leírni, a helyvektorok mellett a sebességvektorokat is rögzíteni kell, a klasszikus fizika elvei alapján pedig ennyi információ egyértelműen meg is határozza a test mozgását. Az összes lehetséges mozgásállapotot a fázistér adja meg, ennek dimenziója tehát az eddigi feltevések mellett kétszerese a konfigurációs tér dimenziójának, hiszen a hely- és sebességvektorok egymással izomorf vektortereknek az elemei és mindkettőt meg kell adnunk a mozgásállapot leírásához. Így a fázistér $\mathbb{R}^{2m}$ -el izomorf. A rendszer konfigurációs térrel való modellezése során tehát a modelltér $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ lenne, míg a fázistérrel való modellezés során a modelltér $\mathbb{R}^{2m} \subseteq \mathbb{R}^n$ adódik, így a megfelelő esetben $n = m$, illetve $n = 2m$ választás mellett, az egyes mennyiségek időfüggését megadó leképezések ismeretében rendelkezésünkre áll a vizsgált rendszer egy modellje. A későbbiekben tehát determinisztikus, időben fejlődő rendszerek modellezése alatt azt értem majd, hogy adott egy megfelelő $\mathbb{R}^n$ -el izomorf modelltér, amelynek a mennyiségei egy adott rendszer lehetséges állapotait írják le, és egy egyértelműen meghatározott $x : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, mely minden adott $t \in \mathbb{R}$ időpillanatban megadja a rendszer $x(t) \in \mathbb{R}^n$ állapotát.

Az, hogy jelen fejezet keretein belül Euklideszi terekkel modellezzük a rendszert, annak felel meg, hogy nem tekintünk semmilyen, a rendszer lehetséges állapotaira vonatkozó megszorítást. Például, a tömegpontokból álló klasszikus fizikai rendszer esetében ez abban nyilvánul meg, hogy az egyes tömegpontok lehetséges helyzeteit és sebességeit folytonosnak és tetszőlegesnek tekintjük, tehát bármely két tömegpont egymástól tetszőleges távolságra lehet, illetve tetszőleges sebességek megengedettek.

Megjegyzem, hogy a konfigurációs teret gyakran konfigurációs sokaságnak is nevezzük, azon-

ban, mivel ebben a fejezetben a modelltereket Euklideszi tereknek tekintjük, célszerűnek találtam nem használni a sokaság szót a félreértések elkerülése végett.

Praktikus szempontokból adott determinisztikus, időben fejlődő rendszer állapotainak időfüggéséről feltesszük, hogy valamilyen $k \in \mathbb{N}$ rendben folytonosak, még akkor is, ha tudjuk, hogy ez valójában nem teljesül (például adott baktériumtörzs populációja). Ez a feltevés modellezési szempontból hasznos, az eredmények értelmezése során természetesen figyelembe vesszük, hogy a modellünk egy közelítés.

6. Definíció. Az $x : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \mathcal{C}^k$ osztályú leképezéssel definiált mennyiséget a determinisztikus, időben fejlődő rendszer időbeli állapotainak, az $x(t)$ mennyiséget a vizsgált rendszer t pillanatbeli *állapotvektor*ának vagy egyszerűen csak *állapot*ának nevezzük, ahol $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

A rendszer állapotainak időfüggésének leírása mellett a teljes időfejlődés megadható a minden pillanatbeli állapotok diszjunkt úniójával.

7. Definíció. Determinisztikus, időben fejlődő rendszer időbeli állapotai megadhatóak az

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_t x(t) = \{(x(t), t) | t \in \mathbb{R}\}$$

halmaz révén, mely egy C^k görbét definiál $\mathbb{R}^{n+1}$ -ben.

Megjegyzés. Az $\mathcal{S}$ halmaz két természetes projekciót is indokol:

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{R}^n \in C^k(\mathcal{S}, \mathbb{R}^n), & \tau : \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty(\mathcal{S}, \mathbb{R}) \\ (x, t) &\overset{\chi}{\mapsto} x \in \mathbb{R}^n & (x, t) &\overset{\tau}{\mapsto} t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ahol a determinisztikusság feltevéséből adódóan τ bijektív leképezés, így létezik annak a $\tau^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$ inverze, mely adott t pillanathoz megadja az $(x(t), t) \in \mathcal{S}$ elemet, tehát $x = \chi \circ \tau$ teljesül.

A fizikai felhasználásokban az állapotvektortól azt várjuk el, hogy $\mathcal{C}^2$ legyen, de a legtöbb területen szintén gyakori feltevés, hogy az állapotvektor magasabb rendű időderiváltjai is létezzenek, vagyis az állapotvektor időfejlődését egy $\mathcal{C}^k$ -ad osztályú leképezés adja meg valamely $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$ -re. Noha a tényleges állapotvektor lehet nem mindenhol tetszőleges rendben differenciálható, megfelelő függvényterek választásával közelíthetjük ilyenek összegével, a gyakorlatban ugyanis nem tudjuk elvégezni a határértékképzést. Gyakran $\mathcal{C}^\infty$ függvények bázisán kifejtve, sorozatokkal közelíthetjük az állapotvektorokat megadó leképezést, így véges sok tag mellett a kapott függvény is $\mathcal{C}^\infty$ -nek tekinthető. Emellett, sima sokaságoknál a folytonos struktúra megkonstruálására azzal jár, hogy $\mathcal{C}^\infty$ függvényekkel dolgozunk, ezek esetében indokolt feltenni, hogy az x leképezés tetszőleges rendben folytonosan differenciálható.

Amikor mennyiségek időbeli fejlődését vizsgáljuk, hajlamosak vagyunk az időbeli kép helyett egy paraméterterbeli *pályára* gondolni. Ennek a megfelelőjét adja az orbit fogalma:

8. Definíció. Az x időfüggő állapotvektorral megadott paraméterterbeli mozgáshoz rendelhető

$$O(\mathcal{S}) = \{x(t) | t \in \mathbb{R}\} = \text{Ran}_\chi(\mathcal{S})$$

halmazt a mozgáshoz tartozó orbitnak nevezzük.

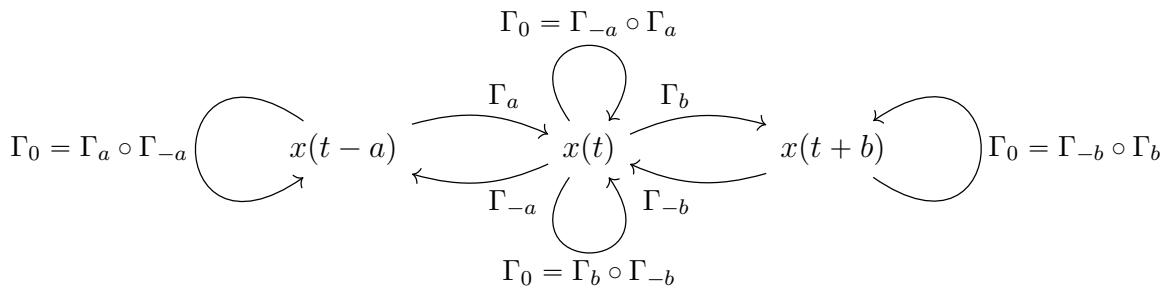
A legtöbb esetben a modellezés célja végső soron valamiféle extrapoláció vagy jóslat felállítás, amelyhez abból indulunk ki, hogy a rendszer állapotát véges sok időpontban ismerjük. A legfontosabb kérdés így a rendszer különböző időkhöz tartozó állapotait összekötő operátor megtalálása. Ehhez előbb definiáljuk az időbeli eltolásért felelős operátort adott $a \in \mathbb{R}$ -re:

$$T_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_a(t) = t + a,$$

mely során hallgatólagosan éltünk a gyakori idealizációval, mely szerint az idő tetszőlegesen kis elemekre osztható. Ez azzal jár, hogy az praktikusan ellenőrizhető differenciaegyenleteket differenciálegyenletekkel közelíthetjük, és ezek eredményeit helyesnek tekinthetjük. Amennyiben létezik is legkisebb időegység, az biztos, hogy ez sok nagyságrenddel kisebb az általunk fizikailag érzékelni képes időktől. Így, noha kérdés, hogy az időbeli diszkretizáció folytonos modellel való felváltásából származó végeelem-korrekciók mértéke hogyan becsülhető, az biztos, hogy ezek a legkisebb lehetséges időintervallum hosszával függnek össze, így, annak nagyságrendjét tekintve, legjobb tudomásunk szerint kimutathatatlan eltérést kapunk. Amennyiben a rendszer valóban determinisztikusnak tekinthető, úgy minden $a \in \mathbb{R}$ -re létezik egy egyértelműen meghatározott időléptetésért felelős leképezés; az időbeli eltolást ismerve el is jutunk e függvények definíciójához:

9. Definíció. A $\Gamma_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt adott rendszer $a \in \mathbb{R}$ -szerinti *időléptető függvényének* nevezünk, ha teljesül rá, hogy $\Gamma_a \circ x = x \circ T_a$, vagyis $\forall t \in \mathbb{R} : \Gamma_a(x(t)) = x(t + a)$.

Megjegyzés. A Γ_a függvény a rendszer meghatározott, a nagyságú időbeli léptetéséért felel. Természetesen fennáll, hogy $\Gamma_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, $\Gamma_a \circ \Gamma_b = \Gamma_b \circ \Gamma_a = \Gamma_{a+b}$, illetve $\Gamma_{-a} = \Gamma_a^{-1}$. E három tulajdonság miatt ezek a függvények egyparaméteres kommutatív csoportot alkotnak, amit az 1-es ábrán szereplő kommutatív diagram foglal össze tetszőleges $a, b, t \in \mathbb{R}$ esetében.



1. ábra. Az időfejlesztő függvények tulajdonságai

Megjegyzés. Célszerű a különböző paraméterekkel jellemzett időléptetések összességére, mint egy leképezésre gondolni, melynek leírásához bevezethetjük tetszőleges időléptetést elvégző leképezést, vagyis az $\mathcal{S}$ halmazon való léptetéshez tartozó függvényt:

$$h : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}, \quad h((x(t), t), a) = (\Gamma_a \circ x, T_a)$$

Amennyiben ez a h függvény ismert, *mindent* tudunk a rendszerről, legalábbis a modell által szolgáltatható numerikus értékeket ismerjük, bár a rendszeren belül megjelenő elvek megértése nem feltétlenül adott.

Ahhoz, hogy mérés segítségével megállapíthassuk a különböző rendszer állapotainak kapcsolatát különböző pillanatokban, a determinisztikusság mellett két egyéb, fontos és (az elméleti vizsgálódás szempontjából jó közelítéssel) általános érvényűnek tekinthető feltételezéssel is élünk a rendszerrel kapcsolatban.

Az első, hogy az időbeli eltolásinvarianciával rendelkezik, vagyis két, különböző időben *azonosan* preparált rendszer belső dinamikája azonos, az nem változik az időben. A második további feltételezés, hogy a rendszer zárt, azaz belső dinamikája az egyetlen, amely időbeli fejlődését meghatározza, külső ingerek nem befolyásolják. Felvetődhet a kérdés, pontosan mit értünk a különböző időben azonosan preparált, zárt rendszeren. Definiálhatjuk a dinamikailag teljes leírású rendszereket úgy, mint olyan rendszerek, melyek állapotainak leírásában az időváltozó nem jelenik meg explicit formában. Azon rendszerek esetében, melyek leírása dinamikailag teljes, vagyis amelyekben minden megjelenő interakciót figyelembe vettünk, definiálható olyan mennyiség, mely időben állandó. Ha nem így lenne, érdemes lehet bővíteni a megfigyelési szempontokat, újabb hatások figyelembevételével. Általában véges sok ilyen hatást kell figyelembevenni (azokat, amelyekről nem tudjuk hatékonyan *elszigetelni* a rendszert, vagy amelyekre eleve kíváncsiak vagyunk). Fizikai rendszerek esetében ilyen mennyiség a rendszer teljes energiája: az energia olyan esetekben változik, amikor időfüggő potenciálban mozog a részecske, például egy külső megfigyelő megpöccinti a berendezést. Ekkor a megfigyelő hatásának figyelembevételével elérhető, hogy a teljes energia már megmaradjon.

Az időbeli eltolásinvariancia feltevéséhez tehát az kell, hogy az adott időintervallumban megjelenő lényeges hatásokat ténylegesen figyelembevegyük, a zártság pedig praktikusán annyit jelent, hogy a figyelembe nem vett hatások elhanyagolása indokolt, és azok a vizsgált időintervallumban várhatóan nem is fognak dominánssá válni valamilyen (gyakran általunk befolyásolható) okból.

Olyan, kényelmesen kis számú paraméterrel leírható makroszkópikus rendszer, amelyre a fenti három feltételezés: teljes determinisztikusság, időbeli eltolásinvariancia és zártság érvényes lenne, valószínűleg nem létezik, ugyanakkor nagyon gyakran - szintén praktikus okok miatt - kiváló közelítéssel igaznak tekinthetőek, mert az időbeli eltolásinvarianciát a rendszerre jellemző időállandókhoz képest kis időbeli távolságokon alkalmazzuk. Például, ha meg akarjuk érteni adott csoportok funkcióját a társadalomban, akkor erről végezhetünk felméréseket; ha az eredményeket néhány héten/hónapon belül igyekszünk kamatoztatni, azok nagy valószínűséggel még hasznosnak bizonyulnak majd, míg néhány évszázados távlatból már az sem egyértelmű, hogy a kérdéses társadalmi csoportok vagy az általuk ellátott funkciók még léteznek. A társadalmi csoportok kialakulása és eltűnése *lassú*, évtizedes nagyságrendű folyamat, emiatt rövid távon állandó berendezkedéssel megadható modellel közelíthetőek a társadalom rögzített csoportjainak folyamatai. A fizikán belül hasonló elképzelés áll az adiabatikus invariánsok fogalma mögött, amikor egy, a rendszer jellemző idejéhez (ez alatt egy $[s]$ mértékegységű, állandó para-

mértért értünk) képest csak nagy időskálán bekövetkező változást kis időket felölelő vizsgálódás során elhanyagolunk, mert első rendben változó paraméterek olyan kombinációja, mely önma-ga már csak magasabb rendben változik (az eljárás koncepcionálisan nagy jelentőséggel bír, az adiabatikus invariáns fogalmára épül például a *régi kvantumelmélet* is, a Bohr-Sommerfeld-féle kvantálási feltétel révén).

Ha a fenti 3 feltétel: teljes determinisztikusság, időbeli eltolásinvariancia és zártság teljesül, akkor a h függvény (elvben) meghatározható. Ezt elvileg megvalósíthatjuk, ha egy minden pillanatban a kérdéses rendszer kurrens állapotait végtelen pontossággal mérni és feldolgozni képes berendezéssel követjük a rendszert, vagy ha feltesszük róla, hogy analitikus is, és véges ideig történő végtelenül pontos mérés után előállítjuk azt ismeretlen időkre.

A gyakorlatban ennél jóval korlátozottabb ismeretek állnak rendelkezésünkre. Egyrészt, véges időlépésekben vagyunk képesek adatokat gyűjteni, így praktikusán a $\Gamma_{\Delta t}, \Gamma_{2\Delta t}, \dots, \Gamma_{k\Delta t}$ operátorok hatását tudjuk meghatározni, ezeket viszont nagy pontossággal (hibát a műszer pontosságából és a rendszer kalibrálásából adódó hiba jelent, illetve az időmérés beli hiba, a környezeti hatásokat általában elhanyagoljuk). Mivel a csoporttulajdonság miatt $\Gamma_{k\Delta t} = \Gamma_{\Delta t} \underbrace{\circ \dots \circ}_{(k-1)\circ} \Gamma_{\Delta t}$,

így a $\Gamma_{\Delta t}$ függvény hatása különböző modelltérbeli állapotokra tetszőlegesen sokszor mérhető, azaz kifejezetten jó esélyünk van $\Gamma_{\Delta t}$ megtalálására. Amennyiben a gyűjtött adatokból sikerült felállítani egy becslést $\Gamma_{\Delta t}$ -re, ami új mérések adatait is rögzített pontossággal leírja, annak Δt -től függő formális alakjából (mely a meglehetősen szigorú csoporttulajdonság feltétele miatt nem lehet *túláságosan bonyolult*) a h függvény is megkonstruálható. Ha nem létezne ilyen, egyértelmű h függvény, az sértené az időbeli léptetés csoporttulajdonságát, vagyis az idő homogenitása sérülne. Ennek magyarázatát már a Riemann-geometriára épülő általános relativitáselmélet szolgáltatja, így értelmetlen lenne ezt a jelenséget az Euklideszi modelltér feltételezése mellett vizsgálni. A csoporttulajdonság teljesülését tehát Földi körülmények között mindenképp elvárjuk, egyébként az időbeli folyamatok modellezésének sem lenne sok értelme. Rögzített időközönként végzett mérésekkel tehát biztosan adott pontossággal meghatározható a $\Gamma_{\Delta t}$ operátor hatása.

Bár modellalkotás céljával a h függvény formális meghatározása fontos feladat, a numerikus számítások esetében mindig adott, véges időléptetésekkel dolgozunk, hiszen, hacsak nem akarjuk sokadjára validálni a modellt, azt *jóslásra* használnánk majd. Eleve nem szeretnénk olyan időlépéseket szimulálni, melyek kisebbek annál az időnél, amire a számítógépnek szüksége van a szimulációra. Így a $\Gamma_{\Delta t}$ ismerete valamilyen kellően kis Δt mellett bőséges információt szolgáltat a modell alkalmazása szempontjából.

2.2. Euklideszi terekkel modellezett, időben fejlődő determinisztikus rendszerek modellterének redukálása

Ebben a fejezetben továbbra is véges dimenziós Euklideszi terekkel modellezhető rendszereket tekintünk, pontosabban a rendszer állapotát megadó vektormennyiség időfejlődését, feltéve, hogy a rendszer belső dinamikáját determinisztikus folyamatok határozzák meg. Feltételezzük,

hogy a rendszer időfejlődését leíró modell ismert és az állapottér magas dimenziós, tehát számítási okokból célszerű redukálni a paraméterek számát.

A gyakorlatban jelentős kihívás olyan modelleket alkotni, melyek bizonyos mennyiségek időbeli fejlődését hosszabb távon is helyesen le tudják írni, így gyakori stratégia, hogy *alapmennyiségek* időfejlődését határozzuk meg, melyekből aztán kellően nagyszámú új, a rendszer állapotával potenciálisan együtt változó paramétert állíthatunk elő. Ez abból a meggyőződésből származik, hogy az egyszerűbb összefüggéseket tekintjük valósnak, így ha adott esetben egy rendszer modellezése során egy magasabb dimenziós modellterben lényegesen egyszerűbb dinamikát tapasztalunk, mint egy alacsonyabb dimenziós modellterben, akkor a magasabb dimenziós modellterhez tartozó leírást tekintjük helyesnek. Néhány példa alaplammennyiségekre és belőlük származtatható további mennyiségekre:

- Fizikai rendszerek esetében a helyvektor és az impulzusvektor, melyekből a távolság, energia, impulzusmomentum számítható, vagy a hullámfüggvény, melyből tetszőleges kvantummechanikai rendszeren értelmezett hermitikus operátor valószínűségeloszlásának időfejlődése megkapható;
- Társadalmi-gazdasági rendszerek esetében az adott társadalmat alkotó személyek listája, az adott árucikkek és termékek (ár)listája, melyekből különböző gazdasági és jóléti mutatók kalkulálhatóak;
- Egészségügyi rendszerek esetében az emberek életkora, alapbetegségei, kapcsolati hálója, melyekből adott pillanatban meghatározható a vírusfertőzés esélye.

Maguknak az alaplammennyiségeknek a fogalmát valamelyest definiálja is az elvárás, hogy kellően egyszerű időfejlődéssel rendelkezzenek. Pont azért vezetjük be őket, mert azon kevés fogalmak egyikét reprezentálják, melyeket viszonylag könnyen le tudunk írni. Ehhez hozzátartozik az a praktikus elvárás, hogy a lehető legtöbb (vagy legalábbis a számunkra érdekes) mennyiséget meg lehessen határozni belőlük a későbbiek során, így általános esetben szinte biztos, hogy nem lesz bijektív kapcsolat egy rigurózus modell alaplammennyiségei és a számunkra érdekes mennyiségek között, melyeket ezekből képezni tudunk. Emellett az alaplammennyiségek időfejlődése jellemzően csatolt, így létezik egy minimális (a szabadsági fokok számával megegyező) számú alaplammennyiség, mely valós rendszerek esetében egy igen nagy szám. A gyakorlatban mindent tekinthetünk alaplammennyiségnek, aminek ismerjük az időfüggését (bár olyan, egymástól nem független mennyiségek esetében érdemes egyet kiválasztani, ahol egyszerű a két mennyiség közötti összefüggés), így praktikusán a rendelkezésünkre álló modellek limitálják azt, hogy mit tekinthetünk alaplammennyiségnek. Mivel a legtöbb mennyiség nem alaplammennyiség (nincs kézenfekvő modellünk arra, hogy leírjuk időbeli fejlődését), így tetszőleges paraméter időfejlődése leggyakrabban nem közvetlenül felírható, hanem csak közvetve: az alaplammennyiségekkel kifejeze, és az alaplammennyiségek időfejlődését figyelembevéve adhatjuk meg a keresett időbeli változást.

Mivel a modelltől és az abban érvényes időfejlődéstől elvárjuk az egyszerű formát, általában magas dimenziós modelltereket kapunk, hiszen a vizsgált rendszer egyszerű leírásáért cserébe

újabb, önálló értelmezéssel rendelkező paramétereket vezetünk be. Például, egy test kinetikus energiájának az időfüggését adott esetben egzaktul le tudnánk írni, ami egy egydimenziós modellteret jelentene, de a fizikai elvek ismeretében mégis a legalább 6 dimenziós fázisteret tekintjük, és azon belül oldjuk meg a feladatot, majd származtatjuk a 6 dimenziós mennyiség-ből az energiát. Attól függetlenül, hogy milyen modellteret tekintünk és azt milyen mögöttes meggondolásokból, általában csak néhány mennyiség időbeli fejlődésének a leírását szeretnénk megvalósítani, tehát feleslegesnek tűnik, hogy a kérdéses, kis számú mennyiség leírásához egy rendkívül magas dimenziós modellterben végezzük el sorra az időbeli léptetést és a néhány mennyiség származtatását, hiszen ez gyakran analitikusan nem, csak számítógéppel elvégezhető, ami rengeteg erőforrást jelent. Ehelyett, ha már ismert a magas dimenziós időfejlesztő operátor, sokkal izgalmasabb kérdés, hogy a magas dimenziós modellter vektorai és az alacsony dimenziós mennyiségek közötti megfeleltetés ismeretében fel tudunk-e írni egy olyan időfejlesztő operátort egy, az eredetinél alacsonyabb dimenziós modellterben, amelyből jó pontossággal azonos eredmény származtatható.

Tegyük fel, hogy egy determinisztikus, időben fejlődő rendszert Euklideszi térrel modellezzünk, és legyen ennek dimenziója n . Ekkor a modellter izomorf $\mathbb{R}^n$ -el. A feltevésünk szerint a rendszernek minden pillanatban adott egy $x \in \mathbb{R}^n$ állapotvektora. Eközben keressük $m \leq n$ mennyiség időfejlődését, melyek mindegyike kifejezhető minden pillanatban az n darab mennyiség egy ismert $\phi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeként. Ekkor, a 2-es ábra tanulsága szerint megkonstruálhatóak az egyes $q_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mennyiségeket és azok időfejlődését reprezentáló függvények: $q_i = \phi_i \circ \chi \circ \tau^{-1}$, ahol $i = 1, \dots, m$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R} & \xrightleftharpoons[\tau]{\tau^{-1}} & \mathcal{S} & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\phi_i} & \mathbb{R} \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & & q_i = \phi_i \circ \chi \circ \tau^{-1} &
 \end{array}$$

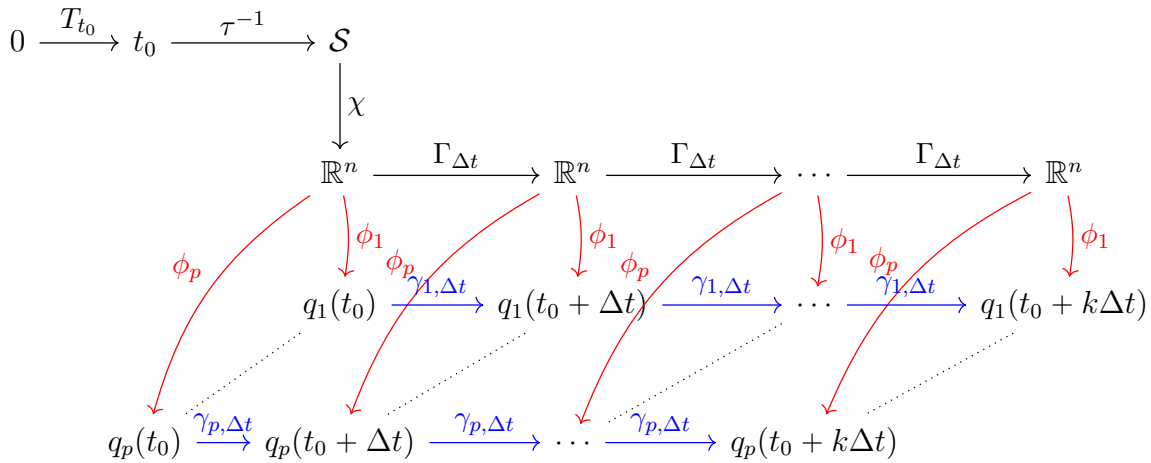
2. ábra. Paraméterek kiszámítása

Tegyük fel, hogy a rendszer időfejlődését megadó $\Gamma_{\Delta t} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ léptető operátort ismerjük valamely $\Delta t \in \mathbb{R}$, $\Delta t > 0$ lépéssel és kíváncsiak lennénk az egyes q_i mennyiségekre a $t_0 + k\Delta t$ időpontokban, ahol $k \in \mathbb{N}$. Dfiniálhatjuk a q_i -t tetszőleges pillanatban megadó $Q_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezéseket úgy, hogy $q_i(t_0 + k\Delta t) = Q_i(t_0, k\Delta t)$ teljesüljön. Összességében tehát fennáll a $Q_i(t_0, k\Delta t) = \phi_i \circ \Gamma_{k\Delta t} \circ \chi \circ \tau^{-1} \circ T_{t_0}(0)$ összefüggés, amint azt a 3-as ábra szemlélteti.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \xrightarrow{T_{t_0}} & t_0 & \xrightarrow{\tau^{-1}} & \mathcal{S} & & \\
 & & & & \downarrow \chi & & \\
 & & & & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Gamma_{\Delta t}} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Gamma_{\Delta t}} & \dots & \xrightarrow{\Gamma_{\Delta t}} & \mathbb{R}^n \\
 & & & & \downarrow \phi_i & & \downarrow \phi_i & & \downarrow \phi_i & & \downarrow \phi_i \\
 & & & & q_i(t_0) & & q_i(t_0 + \Delta t) & & \dots & & q_i(t_0 + k\Delta t)
 \end{array}$$

3. ábra. Paraméterek időfüggése közvetetten

Általános esetben tehát a következőképp járhatunk el: megkeressük adott pillanatban a rendszer állapotterében a megfelelő elemet $(x(t_0) \in \mathbb{R}^n)$, majd azt időben léptetjük az ismert dinamika alapján $(\Gamma_{\Delta t})$, a végeredményt pedig a folyamat végén leképezzük (ϕ_i) a számunkra érdekes, gyakran alacsonyabb dimenziós paramétertérbe $(q(t) \in \mathbb{R}^p)$. Egyértelmű, hogy a fenti eljárás - noha helyes eredményre vezet - számítási szempontból egyáltalán nem praktikus, főleg, ha $p \ll n$ eset áll fenn, mert egyre-másra léptetünk a magas dimenziós térben, ami rengeteg erőforrást foglal le, talán indoklatlanul sokat is. Sajnos a $p \ll n$ eset szinte mindig fennáll, tehát lényegesen több változón keresztül tudjuk magyarázni a folyamatokat, mint amennyinek az időbeli változását nyomon szeretnénk követni. Az n dimenziós modellterre való visszavezetés célja végső soron mégis csak az, hogy segédmenyiségeket kapjunk, melyek révén meghatározhatóvá válnak a kérdéses q_i mennyiségek időfüggését leíró függvények. Így természetes módon ismét felvetődik a kérdés, megkonstruálható-e a $\Gamma_{\Delta t}$ kifejezés ismeretében egy $\gamma_{i,\Delta t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ időléptetés magában az új paramétertérben, és ha igen, pontosan miként? A legfőbb gondot az okozza, hogy a ϕ_i leképezések inverzei általában nem léteznek, amiről a dolgozatban később még részletesebben is írni fogok. A cél minden esetre az lenne, hogy a 3-as diagramot *kiegészítsük* egy megfelelő $\gamma_{i,\Delta t}$ időbeli léptetéssel úgy, ahogy a 4-es ábra jelzi. A kiegészítés annak felel meg, hogy olyan kommutatív diagramot akarunk, melyben az egyes élek idő- és memóriakomplexitása különböző, a kisebb dimenziós eljárások ugyanis döntően gyorsabbak lehetnek.



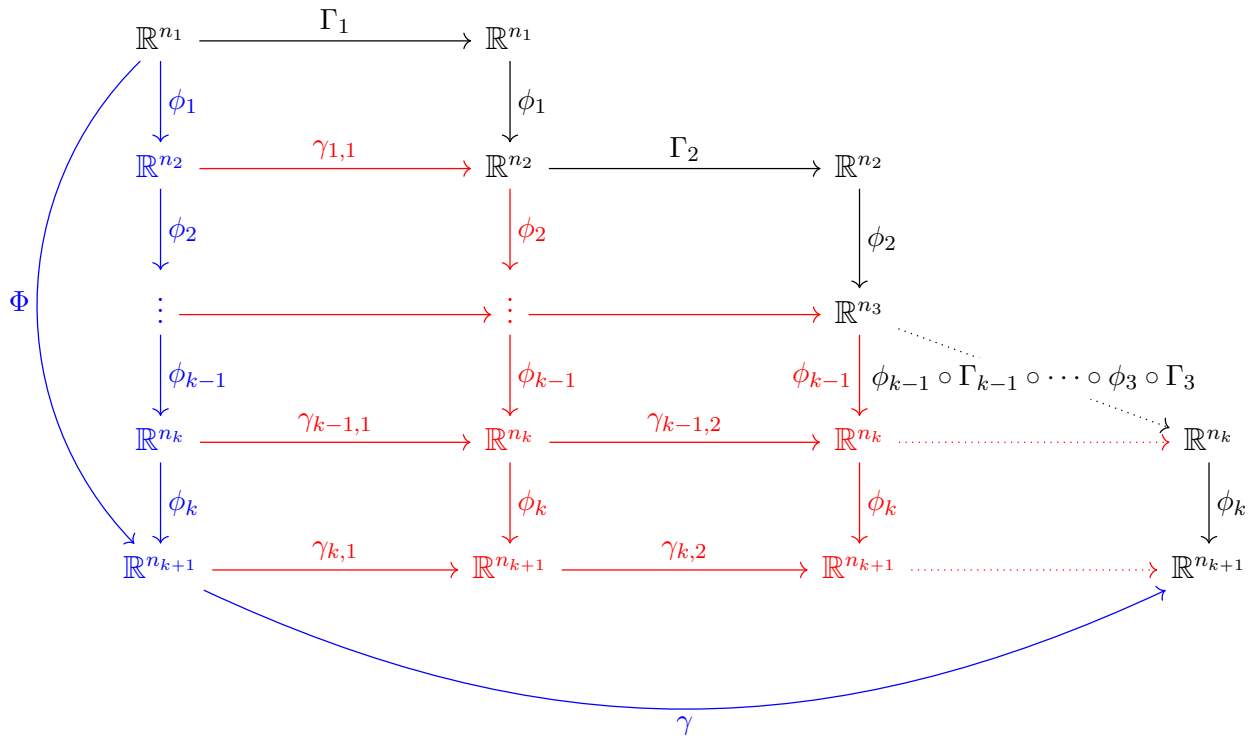
4. ábra. Paraméterek időfüggésének közvetlen megadása

A feladat megoldása redukálható az 5-ös ábrázolt négyszögű gráffal reprezentált leképezési diagramban való megfelelő kiegészítő él megtalálására, ahol X és Y valamilyen alapterek (most Euklideszi terek), a Γ és ϕ leképezések ismertek (esetleg valamilyen többletfeltételt kielégítenek, például adott rendben folytonosak, simák, analitikusak), miközben keressük a γ leképezést. Ez redukálható a jobb oldali ábrán található feladatra $A = X$, $B = Y$, $C = Y$ alapterekkel, illetve $a = \phi$, $b = \phi \circ \Gamma$ és $c = \gamma$ szereposztással.

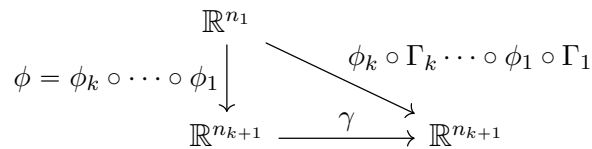


5. ábra. A paraméterek leírásával ekvivalens probléma

A valóságban még ennél is összetettebb eljárással dolgozunk. Előbb rengeteg adatot gyűjtünk, majd ezekből valamilyen statisztikai mennyiségeket képzünk, majd ezeket elemezzük, adott esetben az adatok egy részéből újabb átlagokat számítva, végül eljutva a számunkra érdekes mennyiségekig, melyek tárolására lényegesen kevesebb számítógépes memória szükséges, mint az azok meghatározásához vezető adatok tárolására. Például, több mérést végezve kiátlagoljuk a mennyiségeinket a környezeti zaj kiszűréséhez, majd hibát becslünk és azokat az adatsorokat, melyek túl nagy bizonytalanságot okoznának, kizárjuk. Ezután új mennyiségeket származtatunk, amelyek között összefüggéseket keresünk, és a kapott összefüggések alakjából következtetünk a számunkra releváns mennyiségek értékeire. Összetettebb - és reális - eseten tehát nem egy konkrét leképezésről, hanem egy leképezéssorozatról beszélhetünk, amint azt a 6-os ábra is szemlélteti. Ennek a feladatnak a megoldása visszavezethető a 5-ös ábrán bemutatott feladat megoldására, hiszen alapvetően ilyen elemekből épül fel a teljes eljárásorozat. Ezt szemlélteti a 7-es ábra.



6. ábra. Leképezéssorozat esete



7. ábra. A 6-os ábrával ekvivalens leképezéssorozat

A továbbiakban azt fogom vizsgálni, hogy mit mondatunk az 5-ös ábrával ekvivalens alakú feladatok megoldhatóságáról abban az esetben, ha az X és Y terek véges dimenziós Euklideszi terek, illetve a Γ és ϕ leképezések valamilyen rendben folytonosak, simák vagy analitikusak. A későbbiekben látni fogjuk, hogy Euklideszi modellterek mellett, ha adott $p \in \mathbb{R}^n$ pontban

$\phi \in \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és $\Gamma_{\Delta t} \in \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, lehetséges egy olyan $\gamma_{\Delta t} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezés megkonstruálása, melyre az 5-ös diagram jó közelítéssel kommutatív diagram lesz, vagyis amelyre $\gamma_{\Delta t} \circ \phi|_p = \phi \circ \Gamma_{\Delta t}|_p \pmod{x^{k+1}}$ teljesül. Mi több, az itt alkalmazott eljárást alkalmazható abban az esetben is, ha a modelltereket (pszeudo-)Riemann-sokaságok adják.

A megoldás megkonstruálásához két fogalomra lesz szükségünk: az egyik a Jet-ek, a másik a pszeudinverz fogalma.

2.3. Euklideszi terek közötti leképezések Jet-ei

Ebben a fejezetben emlékeztetjük az olvasót az adott $p \in \mathbb{R}^n$ pontban értelmezett Jet-ek fogalmára, azzal a céllal, hogy az Euklideszi modellterek esetében használt tárgyalásmódot később formálisan is alkalmazni tudjuk majd a (pszeudo-)Riemann-sokaságokkal modellezett rendszerek leírásakor.

10. Definíció. Legyen $p \in \mathbb{R}^n$ és jelölje szokás szerint $\mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ alakú, a p pontban $k \in \mathbb{N}$ rendben folytonosan differenciálható függvények vektorterét. Jelölje most $\sim_p^r \subseteq \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $r \in \{0, \dots, k\}$ azt az ekvivalenciarelációt, amely szerint két $f, g \in \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ leképezés akkor ekvivalens, ha a deriváltjainak $p \in \mathbb{R}^n$ pontban felvett értéke megegyezik az r -edik deriválttal bezárólag, vagyis $f \sim_p^r g \iff f^{(i)}(p) = g^{(i)}(p) \forall i \in \{0, \dots, r\}$. A $\mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) / \sim_p^r$ kvóciensteret a $\mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektortér $\mathbb{R}^n \ni p$ -beli $\{0, \dots, k\} \ni r$ -ed rendű Jet-terének nevezzük.

11. Definíció. A $J_p^{k,r} : \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $J_p^{k,r} f := J_p^{k,r}(f) = [f]_{\sim_p^r}$ leképezést az $f \in \mathcal{C}_p^k$ függvény p -beli r -ed rendű Jet-jének nevezzük.

Megjegyzés. Ha $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$, akkor az egyszerűbb, $\mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n)$ és $J_p^{k,r}(\mathbb{R}^n)$ jelöléseket használjuk.

Megjegyzés. Ha $r = k$, akkor úgy a $\mathcal{J}_p^{k,k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és $J_p^{k,k}$ jelölésekből elhagyjuk a második k -t, rájuk egyszerűen csak $\mathcal{J}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, illetve J_p^k módon hivatkozva.

Megjegyzés. Ha $\mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ helyett $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ osztályú leképezésekkel dolgozunk, vagyis $\forall f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \forall p \in \mathbb{R}^n : f \in \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ teljesül, akkor is kiírjuk a $p \in \mathbb{R}^n$ ponttól való függést a Jet-tér és a függvényhez rendelt Jet esetében, hiszen azok egy adott pontban értelmezett ekvivalenciaosztályokat jelölnek. Ezért szorítkoztam a definícióban az adott p pontban k -ad rendben folytonosan differenciálható függvényekre, mely sokkal kisebb megszorítást jelent a vizsgált leképezésekre, így általánosabb definícióhoz vezet.

Megjegyzés. A $\mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vagy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ típusú, sima leképezések esetében a jelölésekben kiírjuk az ∞ -t, jelölésben tehát a $\sim_p^\infty \subseteq \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ekvivalenciarelációt, $\mathcal{J}_p^{\infty,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ Jet-teret és a $J_p^{k,r} : \mathcal{C}_p^\infty \rightarrow \mathcal{J}_p^{\infty,r}$, $J_p^{\infty,r} f := J_p^{\infty,r}(f) = [f]_{\sim_p^\infty}$ Jet-hozzárendelést használjuk. A $\mathcal{J}_p^{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és $J_p^{\infty,\infty}$ helyett egyszerűen a $\mathcal{J}_p^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ Jet-tér jelölést és $\mathcal{J}_p^\infty$ Jet-hozzárendelést használjuk.

3. Állítás. Euklideszi terek közötti leképezések esetében egy $f \in \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ függvényhez rendelt $J_p^{k,r} f$ r -Jet az f függvény $p \in \mathbb{R}^n$ pontbeli közelítő r -ed rendű Taylor-polinomjának feleltethető meg.

12. Definíció. Legyen $p \in \mathbb{R}^n$ és $q \in \mathbb{R}^m$ két, tetszőleges pont és tekintsük az adott p pontból a q pontba képező, $k \in \mathbb{N}$ rendben folytonosan deriválható leképezések vektorterét: $\mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)_q = \{f \in \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) | f(p) = q\}$. Definiálható azon leképezések Jet-tere is, melyek adott p pontból a q pontba való leképezéseket valósítják meg, mégpedig $\mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)_q = \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)_q / \sim_p^r$. Emellett, egy ilyen f leképezéshez tartozó $\{0, \dots, k\} \ni r$ -ed rendű Jet hozzárendelést $J_{p,q}^{k,l}$ -ként jelölünk, tehát $J_{p,q}^{k,l} : \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)_q \rightarrow \mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)_q$, $J_{p,q}^{k,l} f := J_{p,q}^{k,l}(f) = [f]_{\sim_p^r}$.

Megjegyzés. Az origót origóba képező leképezések $\mathcal{J}_0^{k,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)_0$ Jet-terének jelölésekor, ha nem okoz félreértést, nem írjuk ki a $q = 0$ tagot.

A Jet-terek között értelmezhető talán legfontosabb művelet a Jet-ek kompozíciója:

13. Definíció. Legyen $p \in \mathbb{R}^n$ és $f \in \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Legyen $q = f(p) \in \mathbb{R}^m$ és $g \in \mathcal{C}_q^l(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$. Legyen $s = g(q) \in \mathbb{R}^o$. A $J_p^{k,r} : \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és a $J_q^{l,v} : \mathcal{C}_q^l(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o) \rightarrow \mathcal{J}_q^{l,v}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$ leképezések jól definiáltak. Legyen $u = \min\{k, l\}$, ekkor a $J_p^{k,r}$ és $J_q^{l,v}$ leképezések ismeretében definiálható minden $z \in \{0, \dots, u\}$ értékekhez a szintén jól definiált kompozíciós művelet, mégpedig $\star : \mathcal{J}_p^{u,z}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)_q \times \mathcal{J}_q^{u,z}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)_s \rightarrow \mathcal{J}_p^{u,z}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^o)_s$, $J_{p,q}^{u,z} g \star J_{p,q}^{u,z} f := J_{p,s}^{u,z}(f \circ g)$. Ezt a $\star$ műveletet a megfelelő Jet-ek *kompozíciójának* nevezzük.

Általános esetben a k Jet-ek egyenlősége gyengébb megkötés, mint a leképezések egyenlősége. Ha azonban sima és analitikus függvényekről beszélünk, akkor a kettő ekvivalens, ezt rögzíti a

4. Tétel. Legyen $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ két Euklideszi tér és $\Phi, \zeta \in C^\infty(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ két sima és analitikus leképezés. Ekkor a $J_p^\infty \Phi = J_p^\infty \zeta$ teljesülése ekvivalens azzal, hogy $\Phi = \zeta$ a $\text{Dom}(\Phi) \cap \text{Dom}(\zeta)$ tartományon.

Bizonyítás. A 3-as állítás értelmében a $J_p^\infty \Phi = J_p^\infty \zeta$ feltétel ekvivalens azzal, hogy a két függvény Taylor-sora megegyezik. Mivel mindkét függvény sima és analitikus, így a Taylor-sorok előállítják az adott leképezést azok értelmezési tartományán, ahol tehát a két függvény egyenlő.

■

2.4. A lineáris pszeudoinverz fogalma és a Moore-Penrose pszeudoinverz

Az előző fejezetekben megfogalmazott feladat esetében triviális megoldást adhatunk, ha a kérdéses terek azonos dimenziósak és a köztük levő leképezés bijektív. Általában azonban nem ez a helyzet, a két tér dimenziói különböznek, vagy pedig, ha azonosak is, a kettő közötti leképezés képe már kisebb dimenziós. Ezért nagy haszna van azoknak az eljárásoknak melyek kisebb dimenzióba történő leképezésekhez tudnak megadni olyan általánosított inverzet, mellyel bizonyos, általában valamilyen normaminimalizálási feltételeket ki tudnak elégíteni.

Amennyiben a kérdéses terek Euklideszi terek és a köztük való leképezés lineáris, úgy, mindkét térben bázist választva a megfelelő leképezés reprezentálható egy valós mátrixsal. Ennek az esetnek a tárgyalása jelentős szakirodalommal rendelkezik, melynek egyik alapműve a [1], melyben Penrose bizonyítja, hogy minden ilyen mátrixnak létezik pszeudoinverze:

5. Tétel. Legyen $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ két véges dimenziós Euklideszi tér és $\mathcal{A} : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ lineáris leképezés. Legyen $n = \dim \mathcal{E}_1, m = \dim \mathcal{E}_2$. Tekintjük az $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ terek egy tetszőleges bázisát, melyen reprezentáljuk az $\mathcal{A}$ leképezést egy $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m,n}$ valós mátrixként. Ekkor létezik és egyértelmű az az $A^+ \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n,m}$ mátrix, melyre az alábbi négy feltétel teljesül:

- $AA^+A = A$ és $A^+AA^+ = A^+$
- $(AA^+)^* = AA^+$ és $(A^+A)^* = A^+A$

14. Definíció. A 5-ös tételben szereplő A^+ mátrixot az A mátrix Moore-Penrose pseudoinverzének nevezzük.

6. Állítás. Amennyiben a 5-ös tételben szereplő A mátrix olyan, hogy az $A^*A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m,m}$ mátrix invertálható, akkor $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$, és így A^+ bal oldali inverze is A -nak, vagyis $A^+A = 1_{m,m}$ teljesül. Hasonlóan, ha az $AA^* \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n,n}$ mátrix invertálható, akkor $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$, és így A^+ jobb oldali inverze is A -nak, vagyis $AA^+ = 1_{n,n}$ teljesül.

3. Megoldás $\mathcal{C}^k$, $k \in \{1, \dots, \infty\}$ osztályú leképezésekkel

3.1. A megoldás megkonstruálása

15. Definíció. Legyen $\Phi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ két Euklideszi tér közötti leképezés, $k \in \mathbb{N}_0$ és jelöljük a $\text{CDom}_k(\Phi) = \{p \in \mathcal{E}_1 \mid \Phi \in \mathcal{C}_p^k(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)\}$ halmazt, mely azokat a $p \in \mathcal{E}_1$ pontokat tartalmazza, ahol a Φ függvény $\mathcal{C}_p^k(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ -beli.

16. Definíció. Legyen $\Phi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ két Euklideszi tér közötti leképezés, $k \in \mathbb{N}_0$ és $q \in \mathcal{E}_2$. Jelölje a $\text{CDom}_{k,q}(\Phi) = \text{CDom}_k(\Phi) \cap \{p \in \mathcal{E}_1 \mid \Phi(p) = q\}$ halmazt, mely azokat a $p \in \mathcal{E}_1$ pontokat tartalmazza, ahol a Φ függvény $\mathcal{C}_p^k(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ -beli és ahol a függvény felveszi a q értéket.

A következő tétel a dolgozat egyik fő eredménye.

7. Tétel. Legyen $\mathcal{E}_1 \approx \mathbb{R}^n$ és $\mathcal{E}_2 \approx \mathbb{R}^m$ két Euklideszi tér, $\Gamma : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1$ és $\phi, \psi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ három leképezés. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $p \in \text{CDom}_k(\Gamma) \cap \text{CDom}_{k,0}(\phi) \subseteq \mathcal{E}_1$ olyan pont, hogy $\Gamma(p) \in \text{CDom}_{k,0}(\psi)$ teljesül. Jelölje $\phi_p^{(1)} := \partial^{(1)}\phi(p)$ a ϕ leképezés első deriváltját a p pontban, mely egy $\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ típusú lineáris leképezés. Legyen φ_p a $\phi_p^{(1)}$ lineáris leképezés jobb oldali doinverze, mely egy $\mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_1$ alakú lineáris leképezés, és $\phi_p^{(1)} \circ \varphi_p = \text{id}_{\mathcal{E}_1}$ teljesül. Vezessük be a következő folytonos (ezáltal egyben korlátos) $\gamma_{\phi(p)}^{(i)} : \otimes_i \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2$, $i \in \{0, \dots, k\}$ multilineáris leképezéseket:

$$\gamma_{\phi(p)}^{(i)} = \left[\sum_{s=0}^j \psi_{\Gamma(p)}^{(s)} \sum_{\Xi \in P_0(s,i)} \Gamma_p^{(\otimes \Xi)} - \sum_{s=0}^{l-1} \gamma_{\phi(p)}^{(s)} \sum_{\sigma \in P(s,i)} \phi_p^{(\otimes \sigma)} \right] [\varphi_p^{\otimes i}], \quad i \in \{0, \dots, j\},$$

ahol $\psi_q^{(j)}$, $\phi_q^{(j)}$ és $\Gamma_q^{(j)}$ a ψ , ϕ és Γ függvények multilineáris sorfejtésének j -edik tagját jelölik a q pontban. Emellett $P_0(s, i)$ az összes olyan $(l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{N}_0^s$ halmaza, amelyre $l_1 + \dots + l_s = i$ teljesül, $P(s, i)$ az összes olyan $(l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{N}^s$ halmaza, amelyre $l_1 + \dots + l_s = i$ teljesül.

Jelöljük a $\gamma_{\phi(p)}^{(i)}$ leképezések $\{1, \dots, k\} \ni j$ -edik részösszegét: $\gamma_{\phi(p),j} = \sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)}$. Az így definiált $\gamma_j : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2$ folytonos és korlátos leképezés teljesíti a $J_p^{k,j} (\gamma_{\phi(p),j} \circ \phi) = J_p^{k,j} (\psi \circ \Gamma)$ összefüggést minden $j \in \{1, \dots, k\}$ értékre.

Bizonyítás. A 13-as definíció alapján tudjuk, hogy a $J_p^{k,j} (\gamma \circ \phi) = J_p^{k,j} (\psi \circ \Gamma)$ kijelentés ekvivalens azzal, hogy $J_{\phi(p)}^{k,j} \gamma \star J_p^{k,j} \phi = J_{\Gamma(p)}^{k,j} \psi \star J_p^{k,j} \Gamma$ fennáll. Elégséges tehát a $J_{\phi(p)}^{k,j} \gamma$, $J_p^{k,j} \phi$, $J_{\Gamma(p)}^{k,j} \psi$ és $J_p^{k,j} \Gamma$ j -Jet-ekre megmutatni, hogy e második összefüggés teljesül.

A 3-as állítás értelmében a $J_{\phi(p)}^{k,j} \gamma$, $J_p^{k,j} \phi$, $J_{\Gamma(p)}^{k,j} \psi$ és $J_p^{k,j} \Gamma$ leképezések mindegyike azonosítható a kérdéses γ, ϕ, ψ és Γ leképezések p -, $\phi(p)$ - és $\Gamma(p)$ -beli, megfelelő rendű közelítő Taylor-polinomjaival, melyek $j \leq k$ és a p -re kirótt feltételből adódóan léteznek. Vezessük be a

$$\begin{aligned} \Gamma_p^{(i)} : \otimes_i \mathcal{E}_1 &\rightarrow \mathcal{E}_1, & \Gamma_p^{(i)} &:= \partial^{(i)} \Gamma(p) & i\text{-lineáris leképezés,} \\ \phi_q^{(i)} : \otimes_i \mathcal{E}_1 &\rightarrow \mathcal{E}_2, & \phi_q^{(i)} &:= \partial^{(i)} \phi(q) & i\text{-lineáris leképezés,} \\ \psi_q^{(i)} : \otimes_i \mathcal{E}_1 &\rightarrow \mathcal{E}_2, & \psi_q^{(i)} &:= \partial^{(i)} \psi(q) & i\text{-lineáris leképezés,} \end{aligned}$$

multilineáris leképezéseket, melyekkel előállíthatjuk a ϕ, ψ és Γ leképezések megfelelő Jet-jeit:

$$J_p^{k,j} \Gamma \sim_p^j \sum_{l=0}^j \Gamma_p^{(l)}, \quad J_p^{k,j} \phi \sim_p^j \sum_{l=0}^j \phi_p^{(l)}, \quad \text{valamint} \quad J_{\Gamma(p)}^{k,j} \psi \sim_{\Gamma(p)}^j \sum_{l=0}^j \psi_{\Gamma(p)}^{(l)}$$

Olyan γ leképezést keresünk, melyre $\text{CDom}_k(\gamma) \neq \emptyset$, ráadásul $\phi(p) \in \text{CDom}_k(\gamma)$ teljesül, vagyis k -ed rendben folytonosan differenciálható a $\phi(p)$ pontban. Ennek megfelelően a γ -t is multilineáris tagok összegeként írhatjuk fel. Legyenek ezek a $\gamma_{\phi(p)}^{(i)} : \otimes_i \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2$ leképezések, melyekkel

$$J_{\phi(p)}^{k,j} \gamma \sim_p^j \sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)}$$

Legyen most $q \in \mathcal{E}_1$, $\phi(q) \in \text{CDom}_j(\gamma_{j,\phi(p)})$ és jelölje $x = q - p \equiv (x^1, \dots, x^n)$, ahol $\equiv$ a szokásos megfeleltetés $\mathcal{E}_1$ és $\mathbb{R}^n$ között. Írjuk fel a bizonyítandó állítás bal oldalát:

$$\begin{aligned} J_p^{k,j} (\gamma_j \circ \phi) &= J_{\phi(p)}^{k,j} \gamma \star J_p^{k,j} \phi \sim_p^j \sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)} \left(\left[\sum_{s=0}^j \phi_p^{(s)}(x^{\otimes s}) \right]^{\otimes i} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)} \left(\sum_{s_1=0}^j \phi_p^{(s_1)}(x^{\otimes s_1}) \otimes \dots \otimes \sum_{s_i=0}^j \phi_p^{(s_i)}(x^{\otimes s_i}) \right) = \\ &= \sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)} \left[\sum_{s_1=0}^j \dots \sum_{s_i=0}^j [\phi_p^{(s_1)} \otimes \dots \otimes \phi_p^{(s_i)}] (x^{\otimes (s_1 + \dots + s_i)}) \right] = \\ &= \sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)} \left[\sum_{\sigma} \phi_p^{(\otimes \sigma)} (x^{\otimes (\sum \sigma)}) \right], \end{aligned}$$

ahol $\sigma = (s_1, \dots, s_i)$ a megfelelő rendezett index- i -seket jelöli, $\phi_p^{(\otimes \sigma)} := \phi_p^{(s_1)} \otimes \dots \otimes \phi_p^{(s_i)}$ és $\sum \sigma = s_1 + \dots + s_i$. A kapott kifejezés tartalmazni fog $x^{\otimes l}$ tagokat $l \in \{0, \dots, j^2\}$ rendben, azonban a $\sim_p^{k,j}$ ekvivalenciarelációval való faktorálás miatt ezekből elég csupán az $l \in \{0, \dots, j\}$

tagokat megtartani. Ezért érdemes áttérni az l -eken vett összegzésre, a következőképp:

$$J_p^{k,j}(\gamma_j \circ \phi) = J_{\phi(p)}^{k,j} \gamma \star J_p^{k,j} \phi \sim_p^j \sum_{l=0}^j \left[\sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)} \sum_{\sigma \in P_0(i,l)} \phi_p^{(\otimes \sigma)} \right] (x^{\otimes l}),$$

ahol $P_0(i, l)$ az összes olyan $(s_1, \dots, s_i) \in \mathbb{N}_0^i$ halmaza, amelyre $s_1 + \dots + s_i = l$ teljesül. A bizonyítandó egyenlőség jobb oldalán álló kifejezés is felírható hasonló módon:

$$\begin{aligned} J_p^{k,j}(\psi \circ \Gamma) &= J_{\Gamma(p)}^{k,j} \psi \star J_p^{k,j} \Gamma \sim_p^j \sum_{i=0}^j \psi_{\Gamma(p)}^{(i)} \left(\left[\sum_{s=0}^j \Gamma_p^{(s)}(x^{\otimes s}) \right]^{\otimes i} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^j \psi_{\Gamma(p)}^{(i)} \left(\sum_{s_1=0}^j \Gamma_p^{(s_1)}(x^{\otimes s_1}) \otimes \dots \otimes \sum_{s_i=0}^j \Gamma_p^{(s_i)}(x^{\otimes s_i}) \right) = \\ &= \sum_{i=0}^j \psi_{\Gamma(p)}^{(i)} \left[\sum_{s_1=0}^j \dots \sum_{s_i=0}^j [\Gamma_p^{(s_1)} \otimes \dots \otimes \Gamma_p^{(s_i)}] (x^{\otimes (s_1 + \dots + s_i)}) \right] = \\ &= \sum_{i=0}^j \psi_{\Gamma(p)}^{(i)} \left[\sum_{\sigma} \Gamma_p^{(\otimes \sigma)} (x^{\otimes (\sum \sigma)}) \right], \end{aligned}$$

mely kifejezés szintén tartalmazni fog $x^{\otimes l}$ tagokat $l \in \{0, \dots, j^2\}$ rendben, melyekből ismételtelen elég csupán az $l \in \{0, \dots, j\}$ tagokat megtartani. Érdemes ezúttal is áttérni az l -eken vett összegzésre, a következőképp:

$$J_p^{k,j}(\psi \circ \Gamma) = J_{\Gamma(p)}^{k,j} \psi \star J_p^{k,j} \Gamma \sim_p^j \sum_{l=0}^j \left[\sum_{i=0}^j \psi_{\Gamma(p)}^{(i)} \sum_{\sigma \in P_0(i,l)} \Gamma_p^{(\otimes \sigma)} \right] (x^{\otimes l})$$

Azt kapjuk tehát, hogy adott γ_j leképezés akkor teljesíti a $J_p^{k,j}(\gamma_j \circ \phi) = J_p^{k,j}(\psi \circ \Gamma)$ összefüggést, ha a következő teljesül:

$$\sum_{l=0}^j \left[\sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)} \sum_{\sigma \in P_0(i,l)} \phi_p^{(\otimes \sigma)} \right] (x^{\otimes l}) \sim_p^j \sum_{l=0}^j \left[\sum_{i=0}^j \psi_{\Gamma(p)}^{(i)} \sum_{\sigma \in P_0(i,l)} \Gamma_p^{(\otimes \sigma)} \right] (x^{\otimes l})$$

ami ekvivalens azzal, hogy:

$$\sum_{l=0}^j \left[\sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)} \sum_{\sigma \in P_0(i,l)} \phi_p^{(\otimes \sigma)} - \sum_{i=0}^j \psi_{\Gamma(p)}^{(i)} \sum_{\Xi \in P_0(i,l)} \Gamma_p^{(\otimes \Xi)} \right] (x^{\otimes l}) = 0$$

Mivel $x \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, a fenti egyenletből $j+1$ darab egyenletet kapunk, mindegyik az egyes $x^{\otimes l}$, $l \in \{0, \dots, j\}$ rendű járulékok eltűnéséért felel. Ezek, rögzített l mellett:

$$\sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)} \sum_{\sigma \in P_0(i,l)} \phi_p^{(\otimes \sigma)} = \sum_{i=0}^j \psi_{\Gamma(p)}^{(i)} \sum_{\Xi \in P_0(i,l)} \Gamma_p^{(\otimes \Xi)}$$

Vegyük észre, hogy eredményül $j + 1$ egyenletet kaptunk, melyekből meg szeretnénk határozni a $\gamma_{\phi(p)}^{(i)}$, $i \in \{0, \dots, j\}$ mennyiséget. Mindegyik egyenletben minden különböző rendű mennyiség szerepel a $\gamma_{\phi(p)}^{(0)}$, $\phi_p^{(0)}$, $\psi_{\Gamma(p)}^{(0)}$ és $\Gamma_p^{(0)}$ szabad tagok miatt, így az egyenletrendszer megoldása összességében nehéz feladat lenne. Mivel azonban a tétel feltevése értelmében $\phi \in \mathcal{C}_p^k(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)_0$ és $\psi \in \mathcal{C}_{\Gamma(p)}^k(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)_0$, így $\phi_p^{(0)} = \phi(p) = 0$ és $\psi_{\Gamma(p)}^{(0)} = \psi(\Gamma(p)) = 0$, az $x^{\otimes l}$ -es, $l \in \{0, \dots, j\}$ járulékot adó tagokra vonatkozó egyenletek mindegyikében a $\gamma_{\phi(p)}^{(i \in \{0, \dots, l\})}$ tagok jelennek meg (a magasabb rendűek tartalmazzák a $\phi_p^{(0)} = 0$ és $\psi_{\Gamma(p)}^{(0)} = 0$ tagokat, így multilinearitásukból adódóan zérus a járulékuk). Ezáltal esély adódik az egyenletrendszer iteratív megoldására, minden lépésben meghatározva a $\gamma_{\phi(p)}^{(l)}$ -t a már ismert $\gamma_{\phi(p)}^{(i)}$, $\phi_p^{(s)}$, $\psi_{\Gamma(p)}^{(s)}$ és $\Gamma_p^{(s)}$ mennyiségekkel, ahol $i \in \{0, \dots, l-1\}$ és $s \in \{0, \dots, l\}$. Az így adódó egyenlet tehát rögzített $l \in \{0, \dots, j\}$ érték mellett:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_{\phi(p)}^{(i)} \sum_{\sigma \in P(i,l)} \phi_p^{(\otimes \sigma)} + \gamma_{\phi(p)}^{(l)} \sum_{\sigma \in P(l,l)} \phi_p^{(\otimes \sigma)} &= \sum_{i=0}^l \psi_{\Gamma(p)}^{(i)} \sum_{\Xi \in P_0(i,l)} \Gamma_p^{(\otimes \Xi)} \\ \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_{\phi(p)}^{(i)} \sum_{\sigma \in P(i,l)} \phi_p^{(\otimes \sigma)} + \gamma_{\phi(p)}^{(l)} \phi_p^{(0) \otimes l} &= \sum_{i=0}^l \psi_{\Gamma(p)}^{(i)} \sum_{\Xi \in P_0(i,l)} \Gamma_p^{(\otimes \Xi)}, \end{aligned}$$

ahol $P(i, l)$ az összes olyan $(s_1, \dots, s_i) \in \mathbb{N}^i$ halmaza, amelyre $s_1 + \dots + s_i = l$ teljesül, és kihasználtuk, hogy $P(l, l) = \{ \underbrace{1, \dots, 1}_{l \text{ darab } 1\text{-es}} \}$. Átcsoportosítva a tagokat, és felhasználva a $\phi_p^{(0)}$ leképezés φ_p jobb-oldali inverzét, kapjuk a tételben szereplő sorfejtési tagokat:

$$\gamma_{\phi(p)}^{(i)} = \left[\sum_{s=0}^i \psi_{\Gamma(p)}^{(s)} \sum_{\Xi \in P_0(s,i)} \Gamma_p^{(\otimes \Xi)} - \sum_{s=0}^{i-1} \gamma_{\phi(p)}^{(s)} \sum_{\sigma \in P(s,i)} \phi_p^{(\otimes \sigma)} \right] [\varphi_p^{\otimes i}], \quad i \in \{0, \dots, j\},$$

tehát a $J_p^{k,j}(\gamma_j \circ \phi) = J_p^{k,j}(\psi \circ \Gamma)$ feltétel teljesülését minden $j \in \{1, \dots, k\}$ értékre beláttuk. Az egyes leképezések, illetve magának a γ_j leképezés folytonosságának és korlátosságának belátása maradt hátra. Mivel a γ , ϕ , ψ és Γ leképezésekről feltesszük, hogy k -ad rendben folytonosan deriválhatóak, így minden $r \in \{0, \dots, k\}$ deriváltjuk létezik és folytonos is. Mivel véges dimenziós Euklideszi tereket tekintünk, vagyis $\dim(\mathcal{E}_1) = n < \infty$ és $\dim(\mathcal{E}_2) = m < \infty$, illetve a $\gamma_{\phi(p)}^{(i)}$ előállításában folytonos függvények összege és szorzata szerepel, így adódik, hogy maguk a $\gamma_{\phi(p)}^{(i)}$ multilineáris leképezések is folytonosak, ezáltal korlátosak. Mivel a γ^j részösszeg ezen véges sok folytonos és korlátos leképezés összegeként áll elő, így ő maga is folytonos és korlátos lesz. ■

Megjegyzés. Az 5-ös tétel egy speciális esete jelent meg az időfejlődő rendszerek modellterredukciójának példájában, amikor $\psi = \phi$ teljesül.

Megjegyzés. Az 5-ös tételben a $\phi_p^{(1)}$ lineáris leképezés nemzérus volta sokkal inkább technikai, mint elvi probléma. Amennyiben ugyanis létezne (adott oldali) invertálási eljárás multinomiális leképezések esetében is, úgy tetszőleges, nemzérus ϕ leképezés esetében meg tudnánk konstruálni a megfelelő $\gamma^{(i)}$ multinomiális tagokat, a ϕ leképezés multinomiális sorfejtésének legelső el nem tűnő tagjának ilyen inverze ismeretében. Erre, vagyis multinomiális leképezés invertálására általános esetben azonban legjobb tudomásom szerint nem létezik módszer a szakirodalomban.

Megjegyzés. Az 7-es tételben szereplő minden $\gamma_{\phi(p)}^{(i)}$ mennyiség korlátos, azaz léteznek olyan $C_i \in \mathbb{R}$ számok, hogy

$$\forall y \in \mathbb{R}^m : \left\| \gamma_{\phi(p)}^{(i)}(y^{\otimes i}) \right\| \leq C_i \|y\|^i$$

teljesül, tehát a j -edik részösszegre fennáll a

$$\left\| \gamma_{j,\phi(p)}(y) \right\| = \left\| \sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)}(y^{\otimes i}) \right\| \leq \sum_{i=0}^j \left\| \gamma_{\phi(p)}^{(i)}(y^{\otimes i}) \right\| \leq \sum_{i=0}^j C_i \|y\|^i$$

egyenlőtlenség. Sima és analitikus ϕ és Γ leképezések esetében tehát a jobb oldali becslés egy hatványsor lesz, melynek R konvergenciasugara

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup \sqrt[i]{C_i}}, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} \in (0, \infty) \\ 0, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} = \infty \\ \infty, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} = 0 \end{cases}$$

Ennek következményeként kimondható a következő

8. Tétel. Legyen $\mathcal{E}_1 = \mathbb{R}^n$ és $\mathcal{E}_2 = \mathbb{R}^m$ két Euklideszi tér, $\Gamma : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1$, $\phi, \psi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ három leképezés, $k \in \mathbb{N}$ és $p \in \mathcal{E}_1$ úgy, hogy teljesüljenek a 7-es tétel feltételei. A 7-es tétel értelmében a $\gamma_{\phi(p)}^{(i)}$ leképezések $\mathbb{N} \ni j$ -edik részösszeg folytonos és korlátos leképezés, mely teljesíti a $J_p^{k,j}(\gamma_{\phi(p),j} \circ \phi) = J_p^{k,j}(\phi \circ \Gamma)$ összefüggést minden $j \in \mathbb{N}$ értékre. A $\gamma_{j,\phi(p)}$ sorozat pontonként konvergens a $B_R(\phi(p)) = \{y \in \mathbb{R}^m | d_{\mathbb{R}^m}(y, \phi(p)) < R\}$ halmazon, azon túl pedig divergens, ahol

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup \sqrt[i]{C_i}}, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} \in (0, \infty) \\ 0, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} = \infty \\ \infty, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} = 0 \end{cases}$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló az előző megjegyzésből. ■

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a 7-es tételben szereplő $J_p^{k,j}(\gamma_{\phi(p),j} \circ \phi) = J_p^{k,j}(\phi \circ \Gamma)$ megkötés gyengébb annál, hogy $\gamma_{\phi(p),j} \circ \phi(q) = \phi \circ \Gamma(q) \forall q \in \mathbb{R}^n, \phi(q) \in \text{Dom}(\gamma_{\phi(p),j})$ lenne, az eltérés mértéke azonban becsülhető, melyet rögzít az alábbi

9. Tétel. Legyenek ϕ, ψ és Γ a 7-es tételben meghatározott tulajdonságú, $k+1$ rendben folytonosan differenciálható leképezések és legyen $\gamma_{\phi(p),j} = \sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)}$, $j \in \{0, \dots, k\}$ a megkonstruált $\mathcal{C}^{k+1}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2)$ folytonos leképezés j -edik részösszege. Jelölje $Q = \{q \in \mathbb{R}^n, \phi(q) \in C\text{Dom}_j(\gamma_{j,\phi(p)})\}$ az összes olyan $\mathcal{E}_1$ -beli pont halmazát, amit a ϕ leképezés a $\gamma_{j,\phi(p)}$ értelmezési tartományába képez. Ekkor $\forall q \in Q$ pontra

$$\left\| \gamma_{j,\phi(p)} \circ \phi(q) - \psi \circ \Gamma(q) \right\| \leq \frac{\|\phi(q) - \phi(p)\|^{(j+1)}}{(j+1)!} \cdot \sup_{u \in Q} \left\| (\psi \circ \Gamma)^{(j+1)}(u) - (\psi \circ \Gamma)^{(j+1)}(p) \right\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\gamma_{j,\phi(p)} = \sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)}$ a megfelelő $k \geq j$ -edik sorösszeg. Ekkor γ_j megkonstruálásából tudjuk, hogy az $i > j$ rendű deriváltak eltűnnek, azaz $\gamma_{\phi(p)}^{(i>j)} = \partial^{(i>j)} \gamma_{\phi(p)} = 0_i$, ahol $0_i : \bigotimes_i \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2$, $0_i(x) = 0$ az egyes tenzorszorzatterek zérus leképezései. Konstrukció szerint $(\gamma_{\phi(p),j} \circ \phi)^{(l \leq j)} = (\psi \circ \Gamma)^{(l \leq j)}$, tehát a $\gamma_{\phi(p),j} \circ \phi - \psi \circ \Gamma$ függvénynek a $J_p^{k+1,j}(\gamma_{\phi(p),j} \circ \phi - \psi \circ \Gamma)$ j -Jet előállítja a j -ed rendű Taylor-polinomját. Végül, a Taylor-polinommal való közelítés hibatagjának normájára vonatkozó általános becslés révén kapjuk a tételben megnevezett felső korlátot.

Megjegyzés. A legjobb közelítés, amire még hibát tudunk becsülni a deriváltak ismeretében, maga a k -adik részösszeg, melyre:

$$\|\gamma_{k,\phi(p)} \circ \phi(q) - \phi \circ \Gamma(q)\| \leq \frac{\|\phi(q) - \phi(p)\|^{(k+1)}}{(k+1)!} \cdot \sup_{u \in Q} \|(\psi \circ \Gamma)^{(k+1)}(u) - (\psi \circ \Gamma)^{(k+1)}(p)\|$$

A legjobb becslés is jó lehet, ha a $\psi \circ \Gamma$ képe korlátos, mert ekkor meg tudjuk becsülni a $\gamma_{k,\phi(p)}$ leképezés alkalmazásának legnagyobb hibáját, éspedig:

10. Tétel. Legyen $\mathcal{E}_1 = \mathbb{R}^n$ és $\mathcal{E}_2 = \mathbb{R}^m$ két Euklideszi tér, $\Gamma : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1$ és $\phi, \psi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ három leképezés, és jelölje A az olyan $p \in CDom_k(\Gamma) \cap CDom_{k,0}(\phi) \subseteq \mathcal{E}_1$ pontok halmazát, hogy $\Gamma(p) \in CDom_{k,0}(\psi)$ teljesül, vagyis:

$$A = \{p \in CDom_k(\Gamma) \cap CDom_{k,0}(\phi) \subseteq \mathcal{E}_1 \mid \Gamma(p) \in CDom_{k,0}(\psi)\}$$

Legyen $p \in A$ tetszőleges. Ha $(\psi \circ \Gamma)[A]$ korlátos, akkor létezik egy, csak a választott p ponttól függő hibabecslés a teljes közelítésre, éspedig:

$$\|(\gamma_k \circ \phi - \psi \circ \Gamma)(u)\| \leq \sup_{q \in A} \left[\frac{\|\phi(q) - \phi(p)\|^{(k+1)}}{(k+1)!} \cdot \sup_{u \in (\psi \circ \Gamma)[A]} \|(\psi \circ \Gamma)^{(k+1)}(u) - (\psi \circ \Gamma)^{(k+1)}(p)\| \right]$$

Bizonyítás. Egyértelmű a 9-es tételből. ■

Megjegyzés. A 10-es tétel egy fontos következménye, hogy kiválaszthatunk egy olyan $p \in A$ pontot, amelyre a $\gamma \circ \phi = \psi \circ \Gamma$ összefüggés sérülése garantáltan minimális lesz, és ez adja majd a legjobb közelítést adott k rendben:

$$\min_{p \in A} \sup_{q \in A} \left[\frac{\|\phi(q) - \phi(p)\|^{(k+1)}}{(k+1)!} \cdot \sup_{u \in (\psi \circ \Gamma)[A]} \|(\psi \circ \Gamma)^{(k+1)}(u) - (\psi \circ \Gamma)^{(k+1)}(p)\| \right]$$

A 7-es tétel következménye, hogy ha a ϕ, ψ és Γ leképezések simák és analitikusak, akkor $\gamma_{\phi(p)} \circ \phi = \psi \circ \Gamma$ teljesül minden megfelelő p -re, ezt rögzíti az alábbi

11. Tétel. Legyen $p \in \mathcal{E}_1$ egy pont, Γ és ϕ, ψ a 7-es tétel feltételeit kielégítő sima és analitikus leképezések. Jelöljük K -val a következő halmazt:

$$K = \{q \in \mathcal{E}_1 \mid q \in CDom_\infty(\Gamma) \cap CDom_{\infty,0}(\phi), \Gamma(q) \in CDom_\infty(\psi) \text{ d}_{\mathcal{E}_2}(\phi(q), \phi(p)) < R\},$$

ahol R jelöli a 8-as tételben felírt konvergenciasugarat. Ekkor, a 7-es tételben megkonstruált $\gamma_{\phi(p)}$ függvény minden $p \in K$ pontban teljesíti a $\gamma_{\phi(p)} \circ \phi = \psi \circ \Gamma$ összefüggést.

Bizonyítás. A 9-es tétel értelmében az 7-es tételben megkonstruált $\gamma_{\phi(p)}$ leképezés minden $j \in \mathbb{N}$ -re teljesíti a $\gamma_{\phi(p)}^{(j)} \circ \phi^{(j)} = \psi^{(j)} \circ \Gamma^{(j)}$ összefüggést. Mivel Γ és ϕ, ψ analitikus, így az egyes multilineáris tagok egyenlőségét kimondó összefüggés két oldalán megjelenő tagok egyenlősége miatt $\gamma_{\phi(p)} \circ \phi$ is analitikus lesz. Így $J_p^\infty(\gamma_{\phi(p)} \circ \phi) = J_p^\infty(\gamma_{\phi(p)} \circ \phi)$ fennáll, és mindkét oldalon analitikus függvények állnak, amiből a bizonyítást már a 4-es tétel szolgáltatja. ■

Amennyiben a ϕ és ψ leképezések megegyeznek, a 11-es tétel értelmében analitikus Γ és ϕ mellett a következő is állítható:

12. Tétel. Legyen $p \in \mathcal{E}_1$ egy pont, Γ és ϕ, ψ a 7-es tétel feltételeit kielégítő sima és analitikus leképezések, és legyen ismét K a 11-es tételben megadott halmaz. Ha a K halmaz a Γ leképezésre zárt, vagyis $\forall p \in K : \Gamma(p) \in K$ vagy másképp $\Gamma|_K \in \text{Aut}(K)$, akkor a 7-es tételben megkonstruált $\gamma_{\phi(p)}$ függvény minden $p \in K$ pontban, minden $l \in \mathbb{N}$ mellett teljesíti a $\gamma_{\phi(p)}^k \circ \phi = \phi \circ \Gamma^k$ összefüggést, ahol adott leképezés k -adik hatványa alatt az önmagával vett k -szoros kompozícióját értjük. Másképp, a 8-as ábrán szereplő diagram kommutatív.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\Gamma} & \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\Gamma} & \dots & \xrightarrow{\Gamma} & \mathcal{E}_1 \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi & \downarrow \phi & \downarrow \phi \\ \mathcal{E}_2 & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{E}_2 & \xrightarrow{\gamma} & \dots & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{E}_2 \end{array}$$

8. ábra. Kommutatív diagram sima és analitikus Γ és ϕ mellett

Bizonyítás. A bizonyítás során teljes indukciót használunk. Legyen adott $\mathbb{N} \ni k$ -hoz a következő kijelentés:

$$P(k) : \gamma_{\phi(p)}^k \circ \phi = \phi \circ \Gamma^k$$

A 11-es tételből tudjuk, hogy $k = 1$ esetén, a tétel feltételei mellett $P(1)$ igaz. Tegyük fel, hogy valamely $\mathbb{N} \ni k$ -ra $P(k)$ igaz. Ahhoz, hogy $P(k+1)$ is igaz lehessen, elsősorban a két oldalon álló mennyiségek értelmezettsége kell adott $p \in K$ pontban, mely a K halmaz Γ -ra való zártsága mellett nem jelent problémát. Emellett:

$$P(k+1) : \gamma_{\phi(p)}^{k+1} \circ \phi = \phi \circ \Gamma^{k+1} \quad \leftrightarrow \quad \gamma \circ [\gamma_{\phi(p)}^k \circ \phi] = \phi \circ \Gamma^{k+1}$$

Mivel $P(k)$ szerint $\gamma_{\phi(p)}^k \circ \phi = \phi \circ \Gamma^k$, így, felhasználva $P(1)$ -et:

$$\gamma \circ [\phi \circ \Gamma^k] = \phi \circ \Gamma^{k+1} \quad \leftrightarrow \quad [\gamma \circ \phi] \circ \Gamma^k = \phi \circ \Gamma^{k+1} \quad \leftrightarrow \quad \phi \circ \Gamma \circ \Gamma^k = \phi \circ \Gamma^{k+1} \quad \text{igaz,}$$

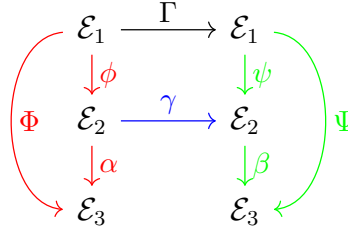
amivel a tétel állítását bizonyítottuk. ■

Megjegyzés. Az előző tételek igen erős megszorításából engedni lehet úgy, hogy a kapott eljárás számítási szempontból továbbra is hasznos lehessen. Legyen ugyanis $\mathcal{E}_1 = \mathbb{R}^n$ és $\mathcal{E}_3 = \mathbb{R}^l$ két Euklideszi tér, $p \in \mathcal{E}_1$ egy pont és $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Legyen $\Gamma : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1$ olyan, hogy $p \in \text{CDom}_\infty(\Gamma)$ és $\Phi, \Psi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_3$ két tetszőleges leképezés. Legyen $\mathcal{E}_2 = \mathbb{R}^m$ szintén Euklideszi

tér és tegyük fel, hogy létezik olyan $\phi, \psi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ leképezéspár és $\alpha, \beta : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3$ olyan leképezések, hogy $p \in \text{CDom}_{\infty 0}(\phi)$ és $\Gamma(p) \in \text{CDom}_{\infty}(\psi)$, illetve $\Phi = \alpha \circ \phi$ és $\Psi = \beta \circ \psi$ teljesül. Jelöljük K -val a következő halmazt:

$$K = \{q \in \mathcal{E}_1 \mid q \in \text{CDom}_{\infty}(\Gamma) \cap \text{CDom}_{\infty 0}(\phi), \Gamma(q) \in \text{CDom}_{\infty}(\psi) \ d_{\mathcal{E}_2}(\phi(q), \phi(p)) < R\},$$

ahol R jelöli a 8-as tételben felírt konvergenciasugarat. Ekkor a Γ, ψ, ϕ leképezésekkel a 7-es tétel módszerével megkonstruálható olyan $\gamma_{\phi(p)}$ leképezés, mely teljesíti a $[\gamma_{\phi(p)} \circ \phi] = [\psi \circ \Gamma]$ összefüggést a K halmazon, vagyis amire a 9-es diagram kommutatív.



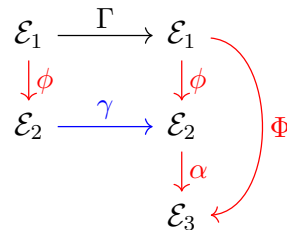
9. ábra. Kommutatív diagram sima és analitikus Γ, ψ és ϕ mellett, adott Φ, Ψ leképezésekből kiindulva

Speciálisan, ha $\phi = \psi$ teljesül, akkor ennél több is mondható, ezt rögzíti a következő

13. Tétel. Legyen $\mathcal{E}_1 = \mathbb{R}^n$ és $\mathcal{E}_3 = \mathbb{R}^l$ két Euklideszi tér, $p \in \mathcal{E}_1$ egy pont és $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Legyen $\Gamma : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1$ olyan, hogy $p \in \text{CDom}_{\infty}(\Gamma)$ és $\Phi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_3$ tetszőleges leképezés. Legyen $\mathcal{E}_2 = \mathbb{R}^m$ szintén Euklideszi tér és tegyük fel, hogy létezik olyan $\phi : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ és $\alpha : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3$ leképezés, hogy $p \in \text{CDom}_{\infty 0}(\phi)$ és $\Gamma(p) \in \text{CDom}_{\infty}(\phi)$, illetve $\Phi = \alpha \circ \phi$ teljesül. Jelöljük K -val a következő halmazt:

$$K = \{q \in \mathcal{E}_1 \mid q \in \text{CDom}_{\infty}(\Gamma) \cap \text{CDom}_{\infty 0}(\phi), \Gamma(q) \in \text{CDom}_{\infty}(\phi) \ d_{\mathcal{E}_2}(\phi(q), \phi(p)) < R\},$$

ahol R jelöli a 8-as tételben felírt konvergenciasugarat. Ekkor a 7-es tételben megkonstruált $\gamma_{\phi(p)}$ leképezés teljesíti a $[\alpha \circ \gamma_{\phi(p)} \circ \phi] = [\Psi \circ \Gamma]$ összefüggést a K halmazon. Másképp, a 10-es diagram kommutatív.



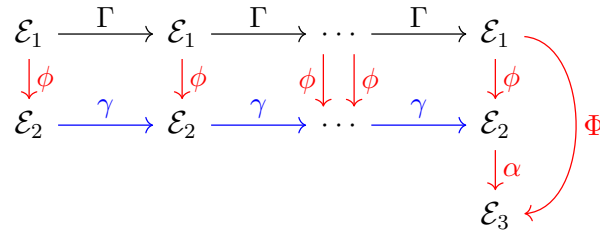
10. ábra. Kommutatív diagram sima és analitikus Γ és ϕ mellett, adott Φ mellett

Bizonyítás. Mivel $\Phi = \alpha \circ \phi$, így a bizonyítandó állítás ekvivalens azzal, hogy $\alpha \circ \gamma_{\phi(p)} \circ \phi = \alpha \circ \phi \circ \Gamma$. Mivel az 8-as tétel értelmében a K halmazon $\gamma_{\phi(p)} \circ \phi = \phi \circ \Gamma$, a tétel állítása nyilvánvalóan következik. ■

A fenti tételt a 12-es tétellel kombinálva adódik az alábbi

14. Tétel. A 13-as tétel feltételeinek eleget tevő a Γ és ϕ mellett tetszőleges $\mathbb{N} \ni k$ -ra $\alpha \circ \gamma_{\phi(p)}^k \circ \phi = \Phi \circ \Gamma^k$ teljesül, vagyis az 12-es ábrán szemléltetett diagram is kommutatív.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik az 12-es és 13-as tételekből. ■



11. ábra. Kommutatív diagram sima és analitikus Γ és ϕ mellett, adott Φ mellett

Megjegyzés. A 14-es tétel rendkívül hasznos lehet az alkalmazások szempontjából, főleg, ha $l < m \ll n$ teljesül, hiszen ekkor megvalósítható a probléma egy lényeges redukciója: $\mathcal{E}_1$ -ben való számítások elvégzése helyett elegendő a sokkal kisebb dimenziós $\mathcal{E}_2$ térben elvégezni a megfelelő számításokat.

3.2. Newton és az Euklideszi világ képe

Az Euklideszi terekkel modellezett rendszerekről való rövid tárgyalást ezzel a fejezettel szeretném lezárni. A tudomány már rég túllépett a modellezés, mint megfelelő dimenziós Euklideszi terekbe való beágyazás gyakorlatán; s noha modellezés során ma is a leggyakrabban Euklideszi modellterekből indulunk ki, az főként praktikus szempontok, és nem elvi korlátok következménye. Csak nagyon röviden, néhány szót ejtenék arról, amint a 17. században kiépült tudományos keretrendszer geometriai elveinek a mindennapi tapasztalatokkal való szembenállása végső soron elvezetett az általánosabb térfogalom, a topologikus-, sima- és Riemann-sokaságok felépítéséig, melyek ilyen szempontból inkább tekinthetők a tudományos értelmezés természetesebb megfogalmazási lehetőségei utáni vágyódások, mintsem formális általánosítók eredményeinek.

Az emberek mindig is alkottak világmodelleket, mely később meghatározta mindennapjait, hitvilágukat, szokásaikat. A tudományos gondolkodás a kritikus gondolkodással együtt fejlődött, lassú változását a társadalmi viszonyok nagyban meghatározták. A modern tudomány megszületését Newtonhoz kötjük, aki 1686. július 5-én publikálta *A természetfilozófia matematikai alapjai* - röviden *Principia* - című könyvét. Newton maga filozófiai munkaként tekintett eredményére: a *Principia* harmadik könyvének 1713-as kiadása végéhez hozzáadott, a gravitációról szóló megjegyzésben a fizikára, mint kísérleti filozófiára hivatkozik (lásd: 3.2-es fordított idézet). Newton három törvénye tehát elsősorban rendkívüli filozófiai siker, hiszen mérhetővé tette a dolgok mozgásához kapcsolódó fogalmakat.

Nem túlzás azt állítani, hogy a *Principia* filozófiai magatartásbeli újdonságot is jelentett. Descartes az Arisztotelészi világszemlélettől elszakadni képes új tudományos magatartás megalkotása érdekében előtérbe állította a kételkedést, és az emberi öntudat látszólagos bizonyosságából kiindulva, az embertől közelített a külső világ felé. Ezzel szemben Newton filozófiájában bizonyos értelemben kitüntette az érzékelt világot, elfogadta annak objektív létezését (melyet

erős, Istenbe vetett hite indokolt) és elsősorban a filozófia olyan kérdéseire fókuszált, melyek megválaszolására saját keretrendszerén keresztül esélyt látott. Ennek szellemében a környező világban megismétlődő jelenségek nem a megfigyelő elméjének szüleményei, hanem ténylegesen megtörténő események, melyek a valóság törvényeiről árulkodnak. Ami megismételhető, az megismerhető. A mechanika Newton által lefektetett törvényei azt az ismételt megfigyelést foglalják keretbe, miszerint adott körülmények között *a testek mozgása változhat*. A mozgás szabályos megismétlődésének miertjére a válasz kézenfekvőnek tűnt: a 17. század erősen vallásos embere nyilvánvaló tényként fogadta el, hogy a *lélektelen* objektumok nem képesek dönteni saját sorsuk, így saját mozgásuk felől sem: pusztán elszenvedői a *lélekkel rendelkezők* (emberek) akaratának. Így természetesnek tűnt, miért dobhatunk el egy követ (izmaink vagy a katapultok terhelőképességén belül) tetszőleges kezdősebességgel és szögben, ahogy az is, hogy ezt követően a kő miért rajzol ki újra és újra oly szabályos pályát: az ugyanis, mint akaraterő nélküli, köteles követni ugyanazt az útvonalat, melyet az őt megelőző kövek is bejártak. A mozgást ebben a leírásban két mennyiség jellemzi: az, hogy mennyire változik a test helyzete, illetve az, hogy milyen *masszivitású* test végzi a mozgást.

A kvantitatív leíráshoz azonban nemnyilvánvaló út vezetett: a keretrendszer megalkotásához olyan absztrakciós lépésekre volt szükség, melyek elsőre nyilvánvalóan ütközni látszottak a mindennapi tapasztalattal. Newton a fizikai világ leírását egy Euklidesz által már jól meghatározott matematikai keretrendszerhez kötötte (lásd: [2]), mely akkoriban az ismert legkomolyabb tudományos munkák egyikének számított. Az Euklideszi geometria kitüntetett görbéi az egyenesek, ezek létre épül a teljes geometriai keretrendszer. Newton első törvénye ezt helyezi keretbe: az inerciarendszerek létezése tulajdonképpen kitünteti az egyeneseken történő mozgást, az egyenletesség pedig következik az egyenletesen folyó idő feltételezéséből ¹. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás természetes mozgási pályaként való kitüntetése azonban konstraintuitív egy olyan világban, ahol a mozgó objektumok (mindennapi környezetünkben) mozgásuk során parabolapályákat követnek. Newton ezt az eltérést az erő megfelelő definiálásával magyarázta: minden esetben (de nem csak akkor), ha egy test mozgása eltér a számára természetes, egyenes vonalú egyenletes mozgástól, azt egy környező test jelenlétének, és annak mozgásának hatására teszi. Ennek a képnek egy természetes következménye, hogy a mozgás csak (1) a többi test helyzetétől és (2) a többi test mozgásától függ, vagyis az erőben nem jelenhet meg elsőnél nagyobb rendű derivált ². Ugyanakkor, a gravitáció jelensége látszólag ellentmond ennek a képnek, hiszen a lelektelen testek (bolygók) nem érintkeznek egymással és látszólag nem is mozgatják őket lélekkel rendelkező entitások (lásd: Feynman és az angyalok [4]).

¹Tegyük fel, hogy a *globális idő* t , amihez képest saját óránkkal egy $T(t)$ időt mérünk, melynek függvényében le akarjuk írni egy, az abszolút idő függvényben egyenes vonalú egyenletes mozgást végző test egydimenziós mozgását. Ekkor, ha az óránk által leolvasott idő nemlineárisan függ az abszolút időtől, egy látszólagos új erő jelenik meg a rendszerben, melyet annak leírása során figyelembe kell venni (lásd: [3] 26. oldal):

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dt} \frac{dx}{dT} \right) = \frac{d^2T}{dt^2} \frac{dx}{dT} + \left(\frac{dT}{dt} \right)^2 \frac{d^2x}{dT^2} \quad \rightarrow \quad F = m \frac{d^2x}{dT^2} = -m \frac{\frac{d^2T}{dt^2} \frac{dx}{dT}}{\left(\frac{dT}{dt} \right)^2}$$

²Azt, hogy ez a feltevés modellezési szempontból miért állja meg a helyét, sokan vizsgálták már. Egy lehetséges érv a magasabb deriváltak figyelembevételével szemben az Ostrogradsky-instabilitás potenciális megjelenési lehetősége olyan klasszikus mechanikai rendszerek esetében, melyek mozgásegyenleteikben második deriváltnál magasabb rendű tagokat is tartalmazhatnak.

A keretrendszer mögötti filozófiai, illetve a keretrendszer megfogalmazását alkotó matematikai elvek ütközésének horderejét mi szemlélteti, hogy maga Newton is értetlenül állt a gravitáció jelensége előtt, mely a környezetünkben a parabola pályák megjelenéséért felelős, ahogy azt a 3.2-es idézet is mutatja. Mindezek tudatában természetes óhaj volt olyan, lehetséges további keretrendszereknek a vizsgálata, melyekben a kitüntetett mozgási pályák eltérhetnek az egyenestől, megnyitva az utat a fizikai megfigyeléseink egy természetesebb leírása felé.

"Nem voltam képes felfedezni a gravitáció e tulajdonságainak okát [a megfigyelt - a szerk] jelenségekből, és nem állítok fel hipotéziseket; mert ami nem a jelenségekből származik, azt hipotézisnek kell nevezni; és a hipotéziseknek... nincs helye a kísérleti filozófiában... Nekünk pedig elég az, hogy a gravitáció valóban létezik, és az általunk megmagyarázott törvények szerint működik, és az égitestek és a tengerünk minden mozgására bőséges magyarázattal szolgál."

(5.1.-es, általam fordított idézet Newtontól, [3]-es forrás, 40. oldal)

"Az, hogy egy test hathat egy másikra távolról, vákuumon keresztül, minden más dolog közvetítése nélkül, mely által és melyen keresztül a hatás és erő átvihető egyikről a másikra, számomra olyan nagy abszurditás, hogy azt hiszem, senki, aki filozófiai kérdésekben kompetens gondolkodási képességgel rendelkezik, nem eshet ebbe [a csapdába - a szerk] bele..."

(5.2.-es, általam fordított idézet Newtontól, [3]-es forrás, 41. oldal)

4. (Pseudo-)Riemann-sokaságokkal modellezett rendszerek

4.1. Fizikai motiváció: A testek kitüntetett mozgási pályái

A Riemann-geometria fizikába való bevezetését legnagyobb részben a gravitációs térben mozgó testek problémája motiválta. Ha adott testet magára hagyunk, azt tapasztaljuk, hogy az mozogni fog. A testek mozgásának leírásában jelentős (praktikus) segítség azoknak a pályáknak az ismerete, melyeket a magukra hagyott testek követni látszanak, hiszen - amennyiben elfogadjuk, hogy az általunk érzékelt mozgás során tényleg *semmilyen hatás* sem hat a magárahagyottságuknál fogva *szabad* testekre (ami bizonyos szempontból *meggyőződés* kérdése, mert nincs ténylegesen magára hagyott test), akkor - ezek a pályák adják meg a mozgást (kölcson)hatások hiányában. Ezeket a pályákat a mozgás természetes pályáinak nevezzük.

Ahogy arra az előző fejezetben kitértünk, a klasszikus mechanika világképében a mozgás természetes pályái egyenesek: feltesszük, hogy léteznek olyan vonatkoztatási rendszerek, melyekben minden magára hagyott test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Az egyenes vonalú mozgás érthetőbb, mint az egyenletesség feltevése; utóbbihoz az kell, hogy megfelelően definiáljuk a globális idő fogalmát, amit megtehetünk (lásd: [3] 1.5.-ös fejezet). Ez alapján azt gondolhatnánk, hogy minden test egyenes vonalú egyenletes mozgást *szeretne* végezni, melytől csak akkor tér el, ha *erővel* hatunk rá. Így valóban eljutunk a mozgások egy (klasszikusan) helyes leírásához, a Newton-törvényekhez. Ezekhez azonban hozzátartozik az erő fizikai definíciójának leglényegesebb feltevése, miszerint az akkor érzékelhető, ha egy test mozgása eltér az egyenes vonalú egyenletestől, melyet a szabad testek természetes pályájának választottunk. Vegyük észre, hogy ez a választás - noha empirikusan jól alátámasztott, mégis - önkényes: ha úgy tekintenénk, hogy minden magára hagyott test oszcilláló mozgást végez, akkor az erőt úgy definiálnánk, mint hatásokat, amik eltérítik a testet így választott, *új* természetes pályájától. Ekkor az űrben egyenes vonalú egyenletes mozgást végző test pályáját úgy magyarázhatnánk, hogy anyag (tehát közvetlen kölcsönhatás) hiányában is a tér minden pontjában jelen van egy *rejtélyes* erő, mely eltéríti a testeket *természetes* pályájuktól.

A természetes pályák megállapítása önkény, amit a fizikai környezetünkben megjelenő domináns hatások befolyásolnak. Könnyen elképzelhető olyan világ, amelyben praktikus szempontból érdemes másnak választani a természetes mozgást. Például, ha egy egyenletesen gyorsított világban élnénk (jó közelítéssel abban élünk, legalábbis a gyorsítatlanhoz képest sokkal jobb közelítéssel), vagyis az érzékelhető környezetünkben minden testnek azonos gyorsulást adnánk, akkor az addig egyenes vonalú pályák valahogy módosulnának: lehet, hogy egyenesek maradnak, de többé már nem egyenletes az ezeken való mozgás, sőt, általában egyáltalán nem egyenesek lesznek az új pályák. Mi azonban mindig azt tapasztalnánk, hogy a magukra hagyott, *szabad* testek a így kapott pályákat követik, a környezetünkben zajló folyamatok leírásához nem csak kényelmesebb, de racionálisnak tűnő választás lenne ezeket tekinteni a mozgás természetes pályáinak. Ekkor *eldönthetetlen* kérdés lenne, hogy a mozgás természetes pályái ténylegesen azok, amiket tapasztalunk, vagy pedig egy állandó gyorsulásnak kitett világban élünk: mindkettőre fel lehetne építeni a fizikai fogalmakat.

Ha szabadon megválaszthatjuk, mit tekintünk a testek természetes pályájának, adja magát a kérdés: mit érdemes? A Newton-féle gravitációs törvény alapján minden gravitációs térbe helyezett testre a saját tömegével arányos erő hat, így a test tömegétől függetlenül azonos gyorsulásmezőt érzékel:

$$m\mathbf{a} = - \underbrace{\gamma}_{\approx m} \nabla \Phi = -m \frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} = -\nabla \Phi \quad (1)$$

ahol $\Phi = \frac{GM}{r}$ a gravitációs potenciál. Szigorúan véve a két oldalon két különböző, a testhez köthető mennyiség kellene megjelenjen: az erőhatásokkal szembeni ellenállást kifejező m tömeg és a gravitációs hatást közvetítő valamely γ együttható. Mivel azonban a kísérleti tapasztalat azt mutatja, hogy a kettő nagyon kis hibán belül megegyezik, legalábbis érdemes elgondolkodni a gravitációs gyorsulás egyetemességén: ha a gravitációs gyorsulás minden test számára azonos gyorsulásként nyilvánul meg, akkor annak jelenlétében minden magára hagyott test azonos (általában nem egyenes vonalú) pályákon fog (általában nem egyenletesen) mozogni, hacsak valamilyen további erővel nem hatunk rá. Létezik tehát egy *rejtélyes* erő a tér minden pontjában, ami az űrben mozgást végző testeket eltéríti természetes pályájuktól. Ez a felismerés már több évszázada ismert. Természetesen, a newtoni inerciarendszerek szellemében jogunk van minderre úgy gondolni, mint egy mindenhol jelenlévő, hely- és időfüggő gyorsulásmezőre, amely minden testet folyamatosan eltérít a számára természetes, egyenes vonalú egyenletes mozgás pályájától. Ha praktikus leírást akarunk adni arról a világról, melyben gravitációs hatások is megjelennek - mégpedig a mi világunkban megjelennek -, érdemes a mozgás természetes pályáinak azokat a pályákat választani, melyet a gravitációs térben mozgó *szabad* (más erőnek nem kitett) testek követnek, és erre építeni a fizikát. Ilyen szempontból a Newton-i keretrendszer a gravitációs hatásoktól távoli, szabadon mozgó test aszimptotikus viselkedéséhez, az egyenes vonalú mozgáshoz igazította a természetes pályákat, mely egy lehetséges, de nem a legnyilvánvalóbb választás.

A helyfüggő gyorsulásmezők és a gravitáció esete közötti lelkes párhuzamvonás után érdemes elgondolkodni azon, hogy ez a párhuzam mennyire vehető komolyan. Ahogy azt az olvasó bizonyosan észrevette, a hasonlóságok érzékeltetésének áráként néhány fontos részlet felett hallgatólagosan elsíklottunk. Az első, hogy a testek önmaguk is gravitációs teret keltenek maguk körül, így módosítják a gyorsulásmezőt, amitől az előző gondolatmenet eltekint. Azonban, minket azok az esetek érdekelnek, mikor a gravitációs mezőt nem módosítják lényegesen a behelyezett testek, így a gondolatkísérlet során a gravitációs rendszerek olyan konfigurációját modellezzük, ahol *nincs* visszahatás: ennek megfelelően *végtelenül kis* tömegű próbatesteket tekintünk, az ezek keltette gravitációs tértől eltekintünk. Hangsúlyozzuk, itt tényleg az a cél, hogy úgy tekintsük, nincs visszahatás, noha a konvencionálisan elfogadott hatás-visszahatás elve miatt hivatkozunk a végtelen kis tömegű test absztrakciójára, mely valószínűleg elviekben sem létezhet. Pedig egyáltalán nem fizikátlan egy kölcsönhatás két tagja közül az egyiket kitüntetni - például nemegyensúlyi rendszerek modellezése során [5] - ameddig fejben tarjuk a feltevések körülményeit és céljait.

A második lényeges különbség megértéséhez gondoljuk át, hogy minden gyorsulás másodrendű járulékot ad a mozgásokhoz (ennek bizonyításáért lásd: [6] 87-89. oldalak), *lokálisan* nem

érzékelhetőek a gyorsulásból származó hatások. Természetesen, a *lokalitást* itt az adott tartománybeli görbület nagysága határozza meg: praktikusán ott húzzuk meg a vonalat a szűk környezet és a tág környezet között, ahol a másodrendű hatások - noha néhány nagyságrendes különbséggel - kimutathatóvá válnak a lokális hatások mellett. Ha elfogadjuk az általunk érzékelt fizikai törvények univerzalitását, akkor tetszőleges pont szűk környezetében a speciális relativitáselmélet szabályait kell uralkodónak tekinteni, ezért a téridőt lokálisan a Minkowski-féle téridőmodellnek kell leírnia. Hangsúlyozzuk, lokálisan *nem tudunk* különbséget tenni gravitációs és tetszőleges gyorsulásmező között. Tehát, a testektől független gyorsulásmezők és a gravitációs terek közötti újabb lényeges különbség, hogy utóbbi globális szabályoknak is eleget tesz, például egy mozdulalan gömbszimmetrikus objektum körül gömbszimmetrikus, amit méréssel kimutathatunk, de ahhoz olyan tartományokban kell vizsgálgatni, ahol nemcsak, hogy a gravitációs mező érzékelhető hatásokat fejt ki, de a metrika sem tekinthető állandónak. Ez egyben azt is jelenti, hogy többé nem lesz fizikailag megkonstruálható globális koordináta-rendszer, hiszen a gravitáció miatt nem tudjuk értelmezni két, távoli test távolságát. Euklideszi terekben ez azért volt lehetséges, mert létezett egy egyértelmű megfeleltetés pontpárok és mérhető (normával ellátható) mennyiségek, vektorok között, melyek egyben a legrövidebb utat adták; így vált definiálhatóvá két, tetszőleg pontbeli test távolsága. Ha azonban elkezdjük deformálni a teret, kénytelenek leszünk a lokálisan értelmezhető távolságokra támaszkodni, melyekből összefüggő tér esetében ugyan felépíthetőek lehetnek globális útvonalak tetszőleges pontok között, de a metrika változása miatt elveszik a tér további, folytonos deformálásával konzisztens egyértelmű kapcsolat pontpárok és őket összekötő *legrovidebb* görbék között. Következtetésként, a kovariáns egyidejűség hiányát is tekintve, le kell mondanunk a tér környezeti struktúrájának távolságokkal való modellezéséről. Ugyanakkor, attól még, hogy nem tudjuk kvantifikálni két, tetszőleges pont távolságát, állíthatjuk konzisztensen azt, hogy ezek egymás környezetében találhatóak, a környezetet pedig fizikailag értelmezni tudjuk két test közötti kölcsönhatás mértékének ismeretében.

Azoknak a tereknek az elképzelése, ahol a pontok mellett környezeteket is megadunk, de távolságfogalommal nem feltétlenül tudjuk ellátni, elvezet a topologikus terek fogalmához. Fizikailag ez azzal a felismeréssel ekvivalens, hogy a távolság fogalma általános esetben egy hasznos, de globális fizikai jelentéssel többé nem bíró fogalomká degradálódik, helyette az igazán lényeges információk maradnak: a lokális kapcsolati rendszerek, melyek - a fizika lokalitását elfogadva - maradéktalanul fizikaiak.

4.2. Topologikus terek, topologikus és sima sokaságok

Az előző fejezetben állítottaknak megfelelően attól még, hogy nem tudjuk számszerűsíteni két, tetszőleges pont távolságát, állíthatjuk konzisztensen, hogy ezek egymás környezetében találhatóak. Ha fizikai motivációt keresünk erre a kérdésre, azt mondhatjuk, hogy a környezet fogalmát továbbra is értelmezni tudjuk a két test közötti kölcsönhatás ismeretében.

Azokat a tereket, ahol a pontok mellett környezeteket is megadunk, de távolságfogalmat nem feltétlenül tudunk bevezetni, topologikus tereknek nevezzük. A továbbiakban röviden összefog-

laljuk a lényeges definíciókat (részletekért lásd: [7], [8]).

17. Definíció. Legyen X egy halmaz. Egy X -en értelmezett τ topológia az X halmaz olyan, *nyílt halmazoknak* nevezett részhalmazainak gyűjteménye, melyre teljesülnek a következők:

1. $X, \emptyset \in \tau$, vagyis a teljes tér és az üreshalmaz nyílt,
2. $\forall \{U_i \in \tau\}_{i \in I} : \bigcup_i U_i \in \tau$, ahol I egy indexhalmaz, vagyis tetszőlegesen sok nyílt halmaz uniója is nyílt,
3. $\forall \{U_i \in \tau\}_{i=1}^n : \bigcap_i U_i \in \tau$, ahol $n \in \mathbb{N}$, vagyis véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.

Ekkor az (X, τ) párt *topologikus térnek* nevezzük. Emellett, egy (X, τ) topologikus tér *bázisának* nevezzük azt a $\mathcal{B} \subset \tau$ kollekciót, melyre $\forall U \in \tau$ nyílt halmaz felírható $\mathcal{B}$ -beli elemek úniójaként.

Amikor metrikus terekben konvergens sorozatok határértékének egyértelműségét bizonyítjuk, kihasználjuk, hogy két zérus távolságú elem azonos. Általános topologikus térben több, különböző elemnek is lehet azonos minden környezete, ugyanakkor megkövetelhetjük, hogy ez ne forduljon elő. Az ilyen topologikus tereket nevezzük Hausdorff-tulajdonságú tereknek:

18. Definíció. Egy (X, τ) topologikus tér *Hausdorff-tulajdonságú*, ha minden különböző pontjának létezik diszjunkt környezete.

A geometriában az egybevágósági transzformáció jelöli az ekvivalenciát. Két topologikus tér akkor ekvivalens, ha *homeomorfizmus* köti össze őket. Ezzel megfogalmazható, mit jelent, ha egy topologikus tér lokálisan Euklideszi:

19. Definíció. Egy (M, τ) topologikus tér *lokálisan Euklideszi*, ha $\forall p \in M$ pontjának van olyan $U \in \tau$ környezete, melyre létezik $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfizmus. Ekkor azt mondjuk, hogy a topologikus tér *m-dimenziós*.

Számos, praktikus vizsgált rendszer modelljével szemben alapvető elvárás, hogy minden pontjának legyen azonos dimenziójú környezete, legyen egyértelmű konvergenciafogalom és megszámlálható bázis (integráláshoz). Így kapjuk a topologikus sokaság definícióját:

20. Definíció. Egy megszámlálható bázisú, Hausdorff-tulajdonságú, m dimenziós lokálisan Euklideszi topologikus teret *topologikus m-sokaságnak* nevezzük.

A sokaságok megkonstruálásakor le kell mondanunk számos, megszokott globális fogalomról. Tetszőleges sokaság esetében általában nincs globális koordinátarendszer, így az Euklideszi terekben kiépített algebrai és analitikus fogalmaink topologikus sokaságokon való alkalmazásához előbb érdemes koordinátákat bevezetnünk.

21. Definíció. Legyen M egy topologikus m -sokaság és $U \in \tau$ legyen M egy nyílt halmaza, továbbá $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfizmus. Ekkor az (U, ϕ) párt *koordinátatérképnek*, vagy egyszerűen *térképnek*, a $(\phi(U), \phi^{-1})$ párt pedig (lokális) *paraméterezésnek* nevezzük. A térképet $U \ni p$ -re *centráltnak* nevezzük, ha $\phi(p) = 0$ teljesül. A ϕ leképezést *koordinátázásnak*, a $\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$ összefüggéssel definiált $\{x^i : U \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^m$ leképezéseket (*lokális koordinátáknak* nevezzük.

Adott sokaság egyes pontjait több térképpel is lefedhetünk, ilyenkor elvárjuk, hogy a két lefedés kompatibilis legyen abban az értelemben, hogy az egyes *átviteli függvények* folytonosak (simák) legyenek:

22. Definíció. Legyen M topologikus m -sokaság és (U, ϕ) , (V, ψ) két térképezés úgy, hogy $U \cap V \neq \emptyset$. A két térképezést $\mathcal{C}^k$ *rendben kompatibilisnek* mondjuk, ha $\forall x \in \phi[U \cap V]$ -re $\psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ illetve $\forall y \in \psi[U \cap V]$ -re $\phi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvények $\mathcal{C}^k$ -k, azaz létezik és folytonos minden $r \leq k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ rendű deriváltjuk. A $\mathcal{C}^\infty$ rendben kompatibilis térképeket *simán kompatibilisnek* nevezzük.

Azt szeretnénk, ha egy sokaságot úgy térképeznénk, hogy minden térképe valamilyen rendben kompatibilis legyen. Erre vezetjük be az atlasz fogalmát:

23. Definíció. Legyen M topologikus m -sokaság és $\{U_i\}_{i \in I}$ az M egy nyílt fedése és $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ekkor az $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ -t $\mathcal{C}^k$ *atlasznak* nevezzük, ha az egyes térképezések páronként $\mathcal{C}^k$ kompatibilisak. A $\mathcal{C}^\infty$ atlaszt *sima atlasznak* nevezzük. Egy $\mathcal{C}^k$ atlasz *maximális*, ha egy másik $\mathcal{C}^k$ atlasznak sem része, vagyis minden kompatibilis térképezést tartalmaz.

Ha az Euklideszi terekben megismert differenciál- és integrálszámítást sokaságokra is definiálni szeretnénk, azt a térképeken keresztül tehetjük meg. Ezért nagyon fontos, hogy olyan sokaságokkal dolgozzunk, ahol ezek a térképek magas rendben kompatibilisak. Ez vezet a differenciálható sokaság fogalmának bevezetéséhez:

24. Definíció. Az $(M, \mathcal{A})$ párt $\mathcal{C}^k$ -*sokaságnak* vagy egyszerűen *differenciálható m -sokaságnak* nevezzük, ha M egy topologikus m -sokaság és $\mathcal{A}$ egy ehhez tartozó $\mathcal{C}^k$ rendű atlasz. A $\mathcal{C}^\infty$ -sokaságokat *sima m -sokaságoknak* nevezzük.

4.3. Érintőtér, érintőnyaláb. Vektor- és tenzormezők

A klasszikus, geometriai képben egy vektor két pont között húzott irányított szakasz, azaz *bilokális* objektum; ha ezt a képet szeretnénk továbbvinni, a két pontot összekötő geodetikus fogalmát kapnánk, mely általános esetben azonban nem kell, hogy létezzen, vagy egyértelmű legyen. Egy valahonnan valamerre mutató vektor képe helyett eredményesebb megérteni, mit jelent egy vektortér: adott néhány, (lineárisan) független *irány*, amiknek bevezethetjük a formális lineárkombinációját, hogy teljes, zárt teret kaphassunk. Globális koordináták híján nem várhatjuk el, hogy létezzen egy globális vektortér a sokaság felett, minden pontban külön bevezetünk egy-egy vektorteret, melyet érintőtérnek nevezünk. Nem meglepő, hogy sima sokaságokon ezek az objektumok sima leképezésekből születnek majd:

25. Definíció. Legyen M és N két sima m -, n -sokaság. Azt mondjuk, hogy az $f : M \rightarrow N$ leképezés *sima*, ha minden $p \in M$ pontra léteznek olyan (U, ϕ) és (V, ψ) térképezések, hogy ha $p \in U$, $f(p) \in V$ és $f[U] \subseteq V$, akkor a $h = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, $h : \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ leképezés *sima*.

Megjegyzés. Szokásos jelölésben $\mathcal{F}(M, N) = \{f : M \rightarrow N\}$, illetve $\mathcal{F}(M) := \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$. A későbbiekben szokás $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$ jelölés helyett egyszerűen $\mathcal{F}(M)$ -et használni. Sima sokaságokon ez annak felel meg, hogy a vektorterek elemeit nem sima, hanem *csak* $\mathcal{C}^k(M)$ függvényekkel súlyozzuk valamely $k \in \mathbb{N}$ -re, ami nagyobb szabadságot jelent a fizikai alkalmazások szempontjából, így nem csak a sima leképezéseket tekintjük az M -en érvényes függvényeknek. Az M feletti sima, valós leképezések halmazát $\mathcal{C}^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ sima}\}$ módon definiáljuk.

A $\mathcal{C}^\infty(M)$ vektortér a függvények terén szokásos összeadással és skalárral szorzással. Ezek azonban a teljes sokaságon definiáltak, így bevezethetünk olyan lineáris leképezéseket, amelyek valós számokat rendelnek hozzájuk minden pontban.

26. Definíció. Legyen M egy sima sokaság és $p \in M$ egy pontja. A $v_p : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezést p -beli derivációnak nevezzük, ha teljesül az alábbi:

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M) : v_p(fg) = f(p) \cdot v_p(g) + g(p) \cdot v_p(f)$$

27. Definíció. A $\mathcal{C}^\infty(M)$ összes p -beli derivációinak halmazát $T_p(M)$ -el jelöljük és az M sokaság p -beli érintőterének nevezzük. $T_p(M)$ elemeit p -beli érintővektoroknak nevezzük. Ha tekintjük a sokaság minden pontjához rendelt érintőterek halmazát, az érintőnyalábot kapjuk:

$$T(M) = \coprod_{p \in M} T_p(M) = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p(M)\}$$

Megjegyzés. Létezik egy természetes projekció $T(M)$ -ről M -re, mely az érintőnyaláb egy eleméhez hozzárendeli, hogy az melyik pontban értelmezett vektort kódol:

$$\pi : T(M) \rightarrow M, \quad \forall (p, v) \in T(M) : (p, v) \xrightarrow{\pi} p \in M$$

Megjegyzés. A sokaság minden pontjában van egy vektorterünk, azt felhasználva a sokaság minden pontjában értelmezhetőek (k, l) típusú $T_p^{(k, l)}(M)$ tenzormezők is, $T_p(M)$ -ből és duálisából kiindulva, a szokásos műveletekkel. $T(M)$ definíciójához hasonlóan, diszjunkt unióval előállíthatók az érintő (k, l) -típusú tenzornyalábok, melyek mindegyikéhez tartozik egy természetes $\pi_{(k, l)} : T^{(k, l)}(M) \rightarrow M$ projekció, az érintőnyalábhoz hasonlóan. A $T^{(k, l)}(M)$ önmagában is sokaság minden $k, l \in \mathbb{N}$ -re.

Az alkalmazások során tenzormezőkkel dolgozunk: minden pontban kiválasztunk egyetlen tenzort a rendelkezésre álló végtelen közül. Azt mondjuk, hogy *elszeljük* az érintő tenzornyalábot, vagyis kiválasztunk az elemei közül pontosan annyit, amennyi pont van az M -ben úgy, hogy minden pontra jusson egy, az abban a pontban definiált tenzor:

28. Definíció. Ha M egy sima m -sokaság és $T^{(k, l)}(M)$ az érintő (k, l) -típusú tenzornyalábja, akkor az $s_{k, l} : M \rightarrow T^{(k, l)}(M)$ leképezést *szelésnek* nevezzük, ha $\pi_{(k, l)} \circ s = \text{id}_M$. Speciálisan, egy sokaságon értelmezett minden vektormező halmaza $\mathcal{X}(M) = \{X : M \rightarrow T(M) \mid X \text{ szelés}\}$.

Megjegyzés. Egy $X \in \mathcal{X}(M)$ vektormező az M sokaság minden $p \in M$ pontjában definiál egy $X_p : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést, egyértelműen. Így definiálható egy $X \in \mathcal{X}(M)$ vektormező

$f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ függvényre való hatása, mely a sokaság minden pontjához egy számot rendel hozzá. Az eredmény tehát maga is egy sima leképezés a sokaságról $\mathbb{R}$ -re:

$$X(f) : M \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \quad \forall p \in M : [X(f)](p) = X_p(f) \in \mathbb{R}$$

Megjegyzés. Minden $T_p(M) \in T(M)$ érintőtérben tetszőleges bázist definiálhatunk. Praktikus elvárás, hogy ezek *folytonosan* változzanak, tehát olyan sima $\{B_i \in \mathcal{X}(M)\}_{i=1}^m$ vektormezőket tekintünk, melyek a sokaság minden pontjának érintőterében bázist alkotnak. Ekkor minden vektormező kifejthető ezen a bázison, ám ezúttal az együttthatókkal együtt maguk a bázisok is változnak.

Megjegyzés. Legyen M egy sima m -sokaság. Ekkor a sokaság bármely $p \in M$ pontjára, rögzített $\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$ mellett a

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^m} \right|_p : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f) := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

derivációk bázist alkotnak $T_p(M)$ -ben. Egy vektormező kifejtését a fenti bázison *koordinátaki-fejtésnek* nevezzük.

Egy érdekes következménye a fentieknek, hogy ahhoz, hogy az általunk érzékelt, lokális törvényeket kiterjeszthessük egy sokasággal modellezett térre (pl. az általános relativitáselméletben az Univerzum modelljétől elvárhatjuk, hogy minden pontban lokálisan a speciális relativitáselmélet törvényeit tapasztaljuk), csakis peremmentes, sima sokaságokra hagyatkozhatunk, hiszen peremes sokaság esetében a perempontok kisebb dimenziós környezettel rendelkeznek, mely sértené a megfigyeléseink univerzalitásának feltevését. Ha emellett figyelembe vesszük az esti égboltról érkező sugárzás fluxusának végeességét, eljutunk Einstein híres megállapításához, mely szerint az Univerzumnak végesnek, de határtalannak (peremmentes sokaságnak) kell lennie. A kijelentés helyesebben úgy hangzana, hogy mindez nem az Univerzumról szóló megállapítás, pusztán annak a részének a struktúrájáról, ahol a fizikai univerzalitás elve nem sérül, tehát ahol csupán a környezetünkben megismert jelenségek játszanak szerepet. Ebből a szemszögből el is várjuk, hogy az általános relativitáselmélet viselkedése szingulárisává váljon fekete lyukak vagy hasonló, általunk nem tapasztalt, extrém fizikai körülmények környezetében.

4.4. (Pseudo-)Riemann-sokaságok

A lokális Euklidesziség biztosította a sokaság tetszőleges pontja minden környezetének azonos számú valós paraméterrel történő leírásának lehetőségét, metrikát nem vettünk át. A sokaság érintőnyalábjához tetszőleges metrikus tenzormezőt társítva különböző lokális geometriákat alkothatunk. Ezzel el is jutottunk a Riemann-sokaság definíciójához:

29. Definíció. Az (M, g) párt *Riemann m -sokaságnak* nevezzük, ha M sima m -sokaság és $g : M \rightarrow T^{(2,0)}(M)$ sima szelés, melyre minden $p \in M$ -re $g_p : T_p^{(0,2)}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, nemelfajuló, pozitív definit és szimmetrikus.

A pozitív definit metrika megkövetelése erős megszorítás, mely szerint csak $(0, m)$ indexű metrikákkal dolgozhatunk Riemann-sokaságok esetében, miközben a számunkra érdekes Lorentz-metrika indexe $(1, m - 1)$. A megoldás, hogy lazítunk a metrikára kirótt pozitív definitivitáson, eljutva a pszeudo-Riemann-sokaság definíciójához:

30. Definíció. Az (M, g) párt *pszeudo-Riemann m -sokaságnak* nevezzük, ha M sima m -sokaság és $g : M \rightarrow T^{(2,0)}(M)$ sima szelés, melyre minden $p \in M$ -re $g_p : T_p^{(0,2)}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, nemelfajuló és szimmetrikus. Minden Riemann-sokaság egyben pszeudo-Riemann-sokaság is.

Megjegyzés. Az (M, g) párt, ahol $g = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$, Minkowski-térnek nevezzük.

4.5. Riemann-sokaságok beágyazásai Euklideszi terekbe

A 20. század közepéig, a topologikus-, sima- és további sokaságok elméletének kidolgozása mellett jelentős dilemma volt annak a kérdésnek az eldöntése, hogy vajon létezhet-e olyan sokaság, mely nem ágyazható be egy nem megfelelő dimenziós Euklideszi térbe. A kérdés megválaszolása több lépésben zajlott, annak függvényében, hogy a sokaság struktúrájának mely részét akartuk a beágyazás során megtartani. Így számos beágyazási tétel létezik, annak függvényében, hogy milyen többletstruktúrát akarunk reprezentálni a beágyazási térben, melyek közül mi most a Whitney-féle beágyazási tételt prezentáljuk. További részleteket az olvasó a [7]-es könyv 99-es oldalától kezdődően olvashat. Ugyanakkor, a beágyazás mellett az immerzió fogalma is gyakran használatos, általában immerzióval kisebb dimenziós térbe is vetíthetünk "beágyazhatunk", cserébe a struktúra, legalábbis néhol hibásan reprezentálódhat.

15. Tétel. *Whitney-féle beágyazási tétel: Minden sima m -sokaság beágyazható egy legfeljebb $2m + 1$ dimenziós Euklideszi térbe.*

Ugyanakkor gyakran már csak filozófiai okokból sem célszerű beágyazva vizsgálni adott sokaságok belső struktúráját, hiszen egy rendszert tekinthetünk egy sokaságon belül *létezőnek* úgy, hogy a beágyazási teret nem tekintjük létezőnek, melyre jó példa a relativitáselmélet téridő-koncepciója. Ez annak felel meg, hogy a rendszer állapotait azonosítjuk a sokaság pontjaival, így a beágyazás során a beágyazási tér minden további pontjának modell szempontjából nem tulajdonítható jelentés. Számítási szempontból azonban mindenképp praktikus a beágyazási tér többletstruktúráját felhasználni, majd a kapott eredményeket egyszerűen visszaprojektálni a sokaságra. Ha azonban mégis létezőnek tekintjük a beágyazási tér pontjait, hangsúlyozni kell, hogy pusztán a sokaságon végzett műveletekkel ekvivalens eredményre jutunk a beágyazás alkalmazásával is.

5. (Pseudo-)Riemann-sokaságokkal modellezett rendszerek modellterének redukciója

5.1. Globális megoldás beágyazással

A Whitney-féle beágyazási tétel értelmében minden sima peremes vagy peremmentes m -sokaság beágyazható $\mathbb{R}^{2m+1}$ -be. Amennyiben a rendelkezésünkre álló számítási kapacitások megfelelőek ahhoz, hogy egy Euklideszi térbe való beágyazást elvégezhessünk, megkonstruálhatjuk a dolgozat első felében tárgyalt probléma megoldását (pseudo-)Riemann-sokaságok közötti leképezések esetében is.

16. Tétel. Legyen M és N két Riemann-sokaság, $G : M \rightarrow M$, $F : M \rightarrow N$ adott. Legyenek a $\iota_M : M \hookrightarrow \varepsilon(M) \approx \mathbb{R}^m$ és $\iota_N : N \hookrightarrow \varepsilon(N) \approx \mathbb{R}^n$ beágyazásokat megfelelő m, n dimenziószámok mellett olyanok, hogy a $\Gamma := \pi_M \circ G \circ \iota_M$, $\Gamma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $\phi := \pi_N \circ F \circ \iota_N$, $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezések simák és analitikusak, ahol $\pi_M : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ és $\pi_N : \mathbb{R}^n \rightarrow N$ kanonikus projekciók, melyekre $\pi_{M,N} \circ \iota_{M,N} = \text{id}_{M,N}$ teljesül. Ekkor a $g := \iota_N \circ \gamma \circ \pi_N$, $g : N \rightarrow N$ kifejezésre teljesül a

$$\iota_N \circ (g \circ F) \circ \pi_M = \iota_N \circ (F \circ G) \circ \pi_M$$

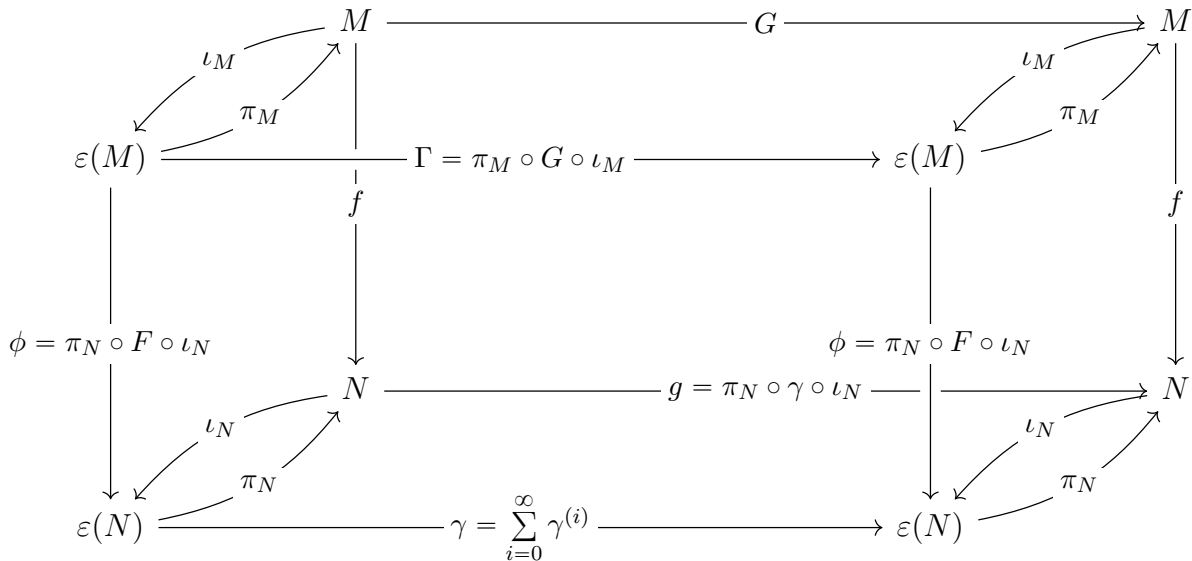
összefüggés, ahol $\gamma = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^{(i)}$ a (7)-es tétel szerint megkonstruált függvény, mely teljesíti a $\gamma \circ \phi = \phi \circ \Gamma$ feltételt.

Bizonyítás. A (7)-es tétel szerint megkonstruált γ függvényre teljesül a $\gamma \circ \phi = \phi \circ \Gamma$ feltétel, vagyis $\iota_N \circ \gamma \circ \phi \circ \pi_M = \iota_N \circ \phi \circ \Gamma \circ \pi_M$ is teljesül. $\pi_{M,N} \circ \iota_{M,N} = \text{id}_{M,N}$ miatt ez ekvivalens a

$$\iota_N \circ (g \circ F) \circ \pi_M = \iota_N \circ (F \circ G) \circ \pi_M$$

feltétellel, mellyel egyben nyerjük a tétel bizonyítását. ■

Megjegyzés. A (16)-es tétel megkonstruálásának módszerét a 12-es ábra szemlélteti.



12. ábra. Riemann-sokaságok közötti megfeleltetési feladat globális megoldása beágyazással

Összefoglalás

Dolgozatom középpontjában adott terek közötti, általában nemlineáris leképezések gráfjainak kommutatív diagrammá való kiegészítésének kérdése állt. A kérdés redukálható arra az esetre, amikor a gráfban pusztán egy új él elhelyezésével köröket alakíthatunk ki; így elegendő három- vagy négyszögekkel foglalkozni, egy hiányzó éllel. Munkám eredményéül sikerült megoldanom a feladatot, ha az egyes terek Riemann-sokaságok (speciálisan Euklideszi terek), algoritmust adva a lokálisan legkisebb eltérést adó megoldás megkonstruálására, ami sima és analitikus leképezések esetében egzakt megoldást ad. Ennek hibáját is becsültem. A megoldásnak komplex rendszerek dimenzióredukált modellezésén túl alkalmazásai lehetnek az algebrai topológiában és a kategóriaelméletben, ahol nagy jelentőségűek a kommutatív diagramok, bár e kérdés vizsgálata túlmutatott jelen dolgozat céljain.

Hogy rámutathassak a kérdés fontosságára, és az olvasó számára motiválni tudjam a bevezetett fogalmakat, általánosításokat, a megjelenő terek egyikét egy determinisztikus rendszer modellterével, egy leképezést pedig e rendszer időfejlődését megadó operátorral azonosítottam. Ebben az értelmezésben a dolgozatomban megoldott feladat a következőt is jelentette: ha adott egy nagyszámú paraméterrel leírt rendszer időfejlődése és egy eljárás, amivel a rendszer egy pillanatnyi állapotából meghatározható egy (gyakran alacsonyabb dimenziós) mennyiség, úgy megkonstruálható az időfejlődést megadó leképezés ezen mennyiségek terén. A módszer így alkalmas nemlineáris időfejlődő determinisztikus rendszerek modellterének redukálására. Fizikai példa erre nagy szabadsági fokú rendszerek véges sok (hidrodinamikai, termodinamikai vagy statisztikus) tulajdonságának az időbeli leírása, melynek pont a nemlinearitás az egyik legnagyobb nehézsége. Az eljárás gyakorlati jelentőségét szemlélteti, hogy azt időben fejlődő rendszerek modellterének dimenzióredukációjára alkalmazva drasztikusan csökkenhet az eljárás idő- és memóriakomplexitása.

Köszönet

Szeretnék köszönetet mondani barátaimnak, a Bolyai Kollégium, az Eötvös József Collegium és a Márton Áron Szakkollégium közösségének szellemi támogatásáért, melynek hála e kutatás megvalósulhatott. A kutatás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-21-1 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült, illetve az ELTE Márton Áron Szakkollégiumának anyagi támogatásával. Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Andai Attilának és belső konzulensemnek, Dr. Nagy Mártonnak a folyamatos támogatásukért, amik a szakdolgozat megvalósításában és a világról alkotott szemléletmódom formálásában kitartóan szerepet vállaltak. Szeretnék köszönetet mondani Dr. Burcsi Péternek a kutatásaimban való három éves útmutatásáért.

Végezetül, hálával tartozom családomnak minden területen nyújtott folyamatos támogatásukért, mely nélkül nem valósulhatott volna meg e kutatás.

Hivatkozások

- [1] Roger Pensrose. A generalized inverse for matrices. 1955.
- [2] T.L. Heath (Translator) Euclid (Author), Dana Densmore (Editor). *Euclid's Elements*. Green Lion Press, 2002.
- [3] John Archibald Wheeler Charles W. Misner, Kip S. Thorne. *Gravitation*. Princeton University Press, 1970.
- [4] Feynman's lecture: Angels beating their wings to push the planets discovery of the law of gravitation. <https://www.youtube.com/watch?v=c1Grg-ANSQE>. Hozzáférve: 2021-01-22.
- [5] A new theory for systems that defy newton's third law. <https://www.quantamagazine.org/a-new-theory-for-systems-that-defy-newtons-third-law-20211111/>. Hozzáférve: 2021-11-23.
- [6] Anthony Zee. *Einstein Gravity in a Nutshell*. Princeton University Press, 2013.
- [7] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013.
- [8] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Springer, 2011.