



Szimmetriasértés inhomogén komplex rendszerekben

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM

FIZIKA KAR

FIZIKA SZAK

Szerző

BENEDEK KRISTÓF

Témavezetők

DR. NÉDA ZOLTÁN, EGYETEMI TANÁR

DR. SÁNDOR BULCSÚ, EGYETEMI ADJUNKTUS

2022. MÁJUS 10.

Kivonat

Kölcsönható oszcillátor sokaságokban a rendszert jellemző paraméterek homogén megválasztása a kollektív viselkedésnek egy erős stabilitásához vezet. Nemrég megmutatták, hogy létezhet azonban a paramétereknek egy olyan heterogén kiosztása, amely ennél is stabilabb megoldást eredményez. Ez a nemvárt szimmetriasértés komplex fizikai és biológiai rendszerekben számos gyakorlati alkalmazással rendelkezik. Kutatásaink során kimutattuk ezen szimmetriatörés jelenlétét különböző topológiájú dinamikus rendszerekben. Két egyszerű és nagyon általános fizikai modellt tanulmányoztunk: rugó-tömb rendszereket illetve Kuramoto típusú oszcillátorokat. Megfigyeltük ezen nemtriviális szimmetriasértés jelenségét lineáris rugó-tömb rendszerek esetén, és két lehetséges megvalósítást adunk aszimmetrikus optimális paraméter kiosztásra. Kutatási módszereink a dinamikus rendszerek stabilitás vizsgálatára és számítógép szimulációs kísérletekre alapszanak.

XXV. ERDÉLYI TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA
CONFERINȚA ȘTIINȚIFICĂ STUDENȚEASCĂ DIN TRANSILVANIA (CȘST), EDIȚIA A XXV-A
25TH TRANSYLVANIAN STUDENTS' SCIENTIFIC CONFERENCE (TSSC)
reál- és humántudományok • științe reale și umane • real and human sciences

2022. 05. 19 – 2022. 05. 22

Kolozsvári Magyar Diákszövetség • Uniunea Studențească Maghiară din Cluj
400083 Kolozsvár, Petőfi Sándor/Avram Iancu utca 21 • tel./fax: 0755116251
e-mail: etdk@kmdsz.ro, etdk.kolozsvar@gmail.com • honlap/web: <https://etdk.kmdsz.ro>

Témavezetői igazolás

Alulírott Alulírott *Néda Zoltán* és *Sándor Bulcsú* igazoljuk, hogy *Benedek Kristóf* III. éves fizikus hallgató a *Szimmetriasértés inhomogén komplex rendszerekben* című dolgozatát az alulírottak szakmai irányításával készítette el, és javasoljuk az említett tudományos munka bemutatását a 2022-es XXV. Reál- és Humántudományi Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencián (ETDK).

dr. Néda Zoltán egyetemi tanár
Babeș-Bolyai Tudományegyetem, Fizika kar

dr. Sándor Bulcsú, egyetemi adjunktus
Babeș-Bolyai Tudományegyetem, Fizika kar

Kolozsvár, 2022. március 11.

Tartalomjegyzék

Bevezető	1
1. Rugó-tömb modell	4
1.1. A vizsgált rendszer	4
2. Tanulmányok a rugó-tömb modell esetén	11
2.1. Az optimális út az egyensúlyi állapothoz: első eset	11
2.2. Az optimális út az egyensúlyi állapothoz: második eset	19
3. A klasszikus (elsőrendű) Kuramoto oszcillátor-sokaság	25
3.1. Átlagidő vizsgálatok különböző statisztikákra	26
3.2. Stabilitás és szinkronizáció vizsgálat sajátérték analízissel	29
4. Tehetetlenségi (másodrendű) Kuramoto oszcillátor-sokaság	34
4.1. Átlagidő vizsgálatok	35
4.2. Sajátérték vizsgálatok	36
4.2.1. Párhuzam a rugó-tömb modellel	38
Következtetések és továbbfejlesztési lehetőségek	41
Következtetések	41
Alkalmazások	42
Továbbfejlesztési lehetőségek	42
Függelék	43
A. A rugó-tömb modell egyenletei abszolút és relatív koordináta-rendszerekben	44
B. A λ sajátérték optimális kiválasztásának matematikai érvelése	46
C. A rugó tömb modell sajátértékeinek kiszámítása analitikusan, speciális esetben	50
D. A sajátértékek kiszámítása elsőrendű Kuramoto modell esetén	53

Bevezető

Szinkronizációs jelenségek vizsgálata egyre nagyobb figyelmet kapott az elmúlt száz két évtizedben [1, 2, 3]. Ezen jelenségekről kiderült, hogy nemcsak elméleti szempontból jelentősek, hanem valós mérnöki problémákhoz kapcsolódnak és szociális jelenségekben is megjelennek. A szinkronizáció témaköre elősegíti ugyanakkor az interdiszciplináris kutatásokat, és a fizika nagyobb szerephez való jutását, mivel a területhez kapcsolódó módszereivel predikciókat képes adni látszólag nem-fizikai rendszerek időbeni fejlődéséről, stabilitásáról, egyensúlyi állapotáról.

Dinamikus rendszerek szempontjából a szinkronizációt érintő tanulmányok [2, 3] felvetik a kérdést, hogy hogyan lehet eljutni a kulcsfontosságú szinkron állapotba, azaz a rendszer fixpontjába optimális módon. Egyik elterjedt módszer, hogy a rendszer elemei között, vagy azok paramétereiben homogenitást feltételeznek, így a rendszer maga degenerálttá válik és a megoldásokat egy kisebb dimenziós altérben kell keresni. Ez természetesen egy, általában, mesterséges választást feltételez, melyet kívülről viszünk a rendszerbe. Nemrég kimutatták [4] valós fizikai rendszerben is, az addig többnyire csak elméleti síkon tanulmányozott *konverz szimmetriatörést* (converse symmetry breaking). Ez újabb lehetőségeket vet fel az optimalizációs problémák szempontjából, mivel nem feltételez homogenitást a rendszerben, még teljesen identikus elemek esetén sem. Ezáltal, egy lehetséges, potenciálisan stabilabb [2] megoldást ad a rendszer paramétereinek egy optimális megválasztására. Ez a megoldáshalmaz meglepő módon általában nem tükrözi a rendszer szimmetriáját, meg lehet az teljesen egyforma karakterisztikájú elemekből áll [2].

A jelenség nemcsak elméleti síkon fontos, hanem gyakorlati alkalmazások egész sora felé nyit lehetőségeket, mint például elektromos hálózatok modellezése és szinkronizációja [2], biológiai rendszerek leírása [5], társadalmi jelenségek vizsgálata [6] és sok ismert fizikai alapmodell újraértékelése.

Jelen dolgozat ezen nem triviális szimmetriasértést, a hozzátartozó optimális, általánosan nem homogén paraméterhalmazt vizsgálja különböző topológiájú kölcsönható oszcillátor sokaság esetén.

A továbbiakban két általános fizikai modellt ismertetünk, melyek esetén tanulmányoztuk ezen érdekes szimmetriatörést: rugó-tömb rendszereket, illetve Kuramoto típusú oszcillátorokat. Rugó tömb rendszer esetén a jelenség felismerése mellett két lehetséges megoldást is adunk aszimmetrikus optimális paraméter kiosztásra. Kuramoto modellekből kettőt tanulmányoztunk behatóan: a klasszikus (elsőrendű) Kuramoto modellt [7, 8] és a másodrendű idő szerinti deriváltat tartalmazó, ún. *tehetetlenségi Kuramoto oszcillátor rendszert* [9]. Az elsőrendű, klasszikus Kuramoto modell esetén megmutatjuk, hogy

módszereink a szimmetrikus paraméterkiosztásra fognak optimális dinamikát adni. Ezáltal egy példát szolgáltatunk arra, hogy nem mindig létezik optimális aszimmetrikus paraméter-megoldáshalmaz. A másodrendű rendszer esetén igazoljuk, hogy létezik ezen heterogén optimum. Ilyen esetekben két különböző megközelítésből vizsgáljuk a rendszert: fixpont környékén, és a teljes folyamatra vonatkozólag. A tehetetlenségi Kuramoto rendszer esetén továbbá azt is megmutatjuk, hogy ez egyenértékű a rugó-tömb rendszerrel az egyensúlyi helyzet környezetében, partikuláris kezdeti paramétereket rögzítve. Eredményeinket dinamikus rendszerek stabilitás vizsgálataira jellemző számításokkal és numerikus szimulációkkal kapjuk.

Az első két fejezetben az egyszerű rugó-tömb modell tanulmányozását mutatjuk be. Két módszert adunk meg az optimumok eléréséhez attól függően, hogy mely paramétereket tartjuk változtathatónak. A rendszer bemutatásával kezdődik a 1. fejezet, majd a két optimizációs lehetőség tárgyalása a 2.1. és 2.2. alfejezetek tartalma.

A harmadik fejezet a komplexebb topológiájú és csatolású klasszikus Kuramoto rendszer vizsgálatait foglalja össze. A rendszer általános bemutatása után, 3. fejezetben, szintén két vizsgálati módszert mutatunk be és foglaljuk össze az eredményeiket. A vizsgálati módszerek a 3.1. fejezetben az r_{lim} rendparaméter által szabályozható átlagos szinkronizációs idő kiszámítására, a 3.2. fejezetben pedig a fixpont körüli stabilitás vizsgálatra alapszanak.

A negyedik fejezetben, hasonló stílusban tárgyaljuk a tehetetlenségi Kuramoto rendszert és kapcsolatos eredményeket. A 4. fejezet szintén a rendszer bevezetésével és általános leírásával kezdődik. Ez, mint látni fogjuk, megtartja az elsőrendű Kuramoto sokaság struktúráját és csatolását, de egyenleteiben megjelennek idő szerinti másodrendű deriváltak is. A fejezet további részeiben az elsőrendű Kuramoto rendszer vizsgálatokor alkalmazott módszerek által nyert eredmények kiértékelése kap helyet. Ezek ugyancsak átlagidő vizsgálatokat (4.1. alfejezet) és sajátérték analíziseket (4.2. alfejezet) jelentenek.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném köszönetemet kifejezni a vezető tanárainnak, Néda Zoltán és Sándor Bulcsú professzoroknak, akiktől rengeteget tanultam a munka során. Úgyszintén szeretnék megköszönni mindent szüleimnek és húgomnak.

1. fejezet

Rugó-tömb modell

Rugó-tömb modellek széles körben alkalmazottak a fizikában, mint például szilárdtestek rácsrezgéseinek a leírására [10], közlekedési és közgazdasági jelenségek modellezésére [11, 12], földrengések statisztikájának a leírására [13], vagy lavinaszerű törés és töredezési jelenségek leírására. A modell-családot 1967-ben R. Burridge és L. Knopoff [14] vezette be, hogy megmagyarázzák a Gutenberg és Richter-féle empirikus törvényt földrengések nagyság-eloszlására vonatkozólag [15].

Egyetlen oszcillátor mozgásegyenlete és ennek megoldása jól ismert. Ha sebességgel arányos csillapítást is feltételezünk akkor a test x pozíciójának dinamikáját leíró egyenlet:

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - \gamma x, \quad (1.1)$$

ahol m az oszcillátor tömege, β a csillapítási együttható, γ pedig a rugóállandó. Ezen együtthatók egyszerű átskálázásával az egyenlet egyszerűbb alakra hozható:

$$\left. \begin{array}{l} b = \frac{\beta}{m} \\ k = \frac{\gamma}{m} \end{array} \right\} \Rightarrow \ddot{x} = -b\dot{x} - kx. \quad (1.2)$$

A rugó-tömb modell az (1.2) egyenlettel, vagy esetleg komplexebb súrlódási erővel leírható oszcillátorok lineáris csatolását jelenti különböző topológiákban.

1.1. A vizsgált rendszer

Egyszerű rugó-tömb topológiák esetén is kimutatták a nem-triviális szimmetriatörés jelenlétét [2]. Vizsgálatunk első lépése, hogy ezen eredményeket reprodukáljuk, illetve mélyebben megvizsgáljuk a problémát. Az eredmények megismétlése fontos volt a jelenség mélyebb megértése szempontjából, és hogy tapasztalatainkat sikerrel kamatoztathassuk komplexebb topológiájú rendszerek esetén is.

A rugó-tömb modellre alapozott rendszerünk egy egydimenziós, lineáris topológiával rendelkező, csatolt oszcillátor rendszer. A rendszer három elemből áll, melyeket identikusnak tekintünk (azonos m tömegűek), illetve az ezeket összekötő két rugóból, melyek nyugalmi, l_{0i}

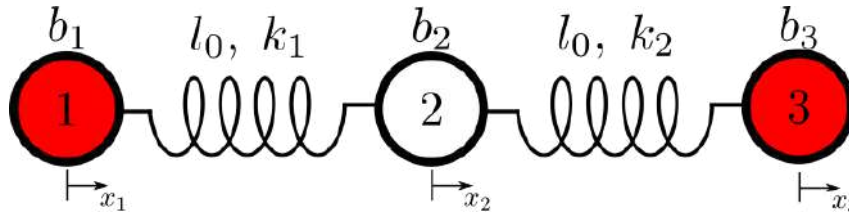
hosszait azonosnak tekintjük¹:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = m_3 = m \\ l_{01} &= l_{02} = l_0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

A dinamikát vezérlő csatolt differenciál-egyenletrendszer megadható a:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 &= -b_1\dot{x}_1 - k_1(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2 &= -b_2\dot{x}_2 - k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_2 - x_3) \\ \ddot{x}_3 &= -b_3\dot{x}_3 - k_2(x_3 - x_2), \end{cases} \quad (1.4)$$

formában, ahol az x_i távolságok az egyes oszcillátorok nyugalmi helyzetéhez képest mért elmozdulások (lásd a Függelék A. fejezetét).



1.1. ábra. A vizsgált rugó-tömb rendszer: lineáris topológiájú oszcillátor sokaság szabad végpontokkal.

A rendszer vizsgálata numerikus integrálással történik a Python nyelv ODEINT függvénybe beépített FORTRAN csomag *lsoda* módszerével. A 1.2. és 1.3. ábrák esetén 10 időegységre futtattuk a szimulációt, $\Delta t = 4 \cdot 10^{-2}$ nagyságú időlépéssel. A potenciális energiát a

$$E_p = \frac{1}{2} (k_1(x_1 - x_2)^2 + k_2(x_2 - x_3)^2) \quad (1.5)$$

képlet adja, a kezdőfeltételek és paraméterek pedig: $(k_1, k_2) = (1, 1)$, $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2)$, $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = (0, 0, 0)$ voltak

A rendszer esetén az egyik releváns mennyiség, ami a dinamikát jellemzi az a potenciális energia lecsengésének idősora. Ez az idősor azonban csak mint szemléltetés használható, mivel:

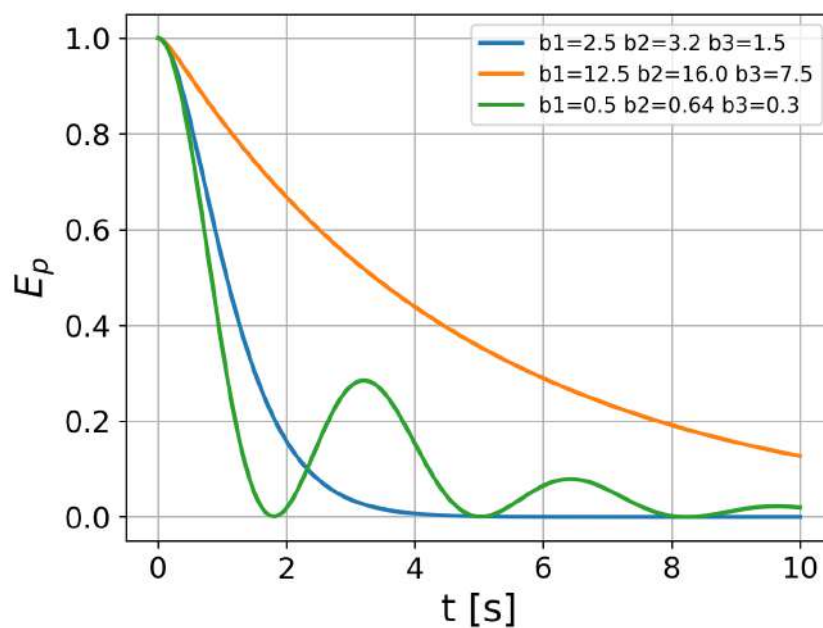
- Az energia-idősorok esetén meg kellene határozni egy küszöbértéket, mely az egyensúlyi állapotnak felel meg. Gyakorlatban nehéz energiát mérni, így ez nem egy megfelelő választás.
- Ez az idősor nem ad egyértelmű választ arra vonatkozólag, hogy milyen a rendszer

¹Ezen megállapítás nem lesz releváns, mivel az egyenleteink függetlenek lesznek a nyugalmi hosszaktól. Ezeket szimmetria okokból választjuk egyformának. Részletekért lásd A. fejezetet.

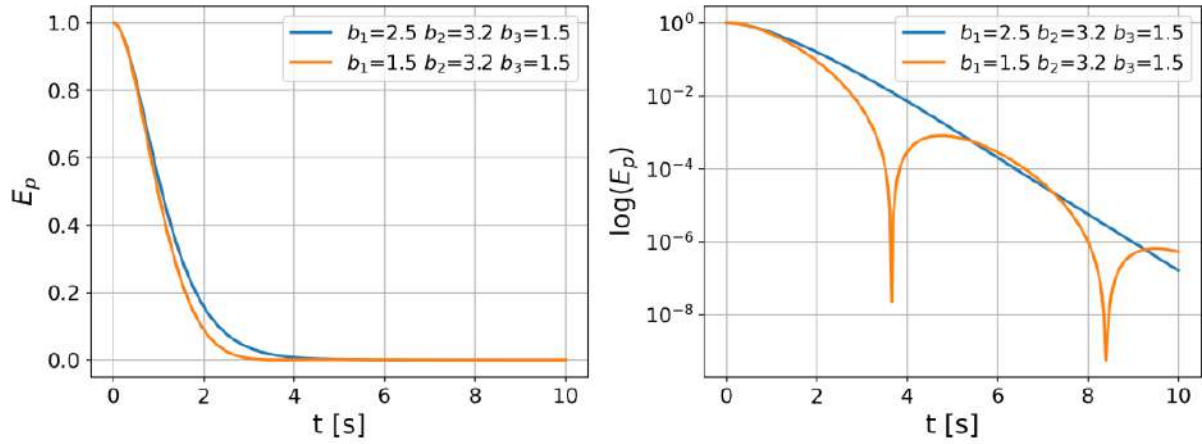
stabilitása, illetve adott felbontás alatt az esetleges oszcillációk nem nyilvánvalók. Néhány ilyen esetet szemléltetünk az 1.2. és 1.3. ábrákon.

A 1.2. ábrán három energiagörbe időszora látható. A sárga vonallal jelölt görbe esetén az energia lassú csökkenését látjuk, míg a zöld esetén a lefutás gyors, de nem marad meg a null szinten, hanem oszcillál. A kék vonallal jelölt görbe esetén nem veszünk észre oszcillációt és jelentősen rövidebb idő alatt esik a potenciális energia a nullszintre, mint a sárga görbe esetén.

A tapasztaltak alapján azt mondhatjuk, hogy a kék görbével energia-időszor optimális csökkenésű, mivel legrövidebb idő alatt oszcilláció nélkül éri el az egyensúlyi állapotot a rendszer.



1.2. ábra. A potenciális energia időszora, különböző b_i csillapítási tényező- hármasok esetén. Az optimális esetben (kék görbe) az energiagörbe csökkenése a leggyorsabb, túlsillapított esetben (sárga görbe) igen lassú, míg alulsillapított esetben (zöld görbe) oszcilláció jön létre. Mindhárom esetben a kezdeti feltételek: $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2)$ és $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = (0, 0, 0)$, valamint $(k_1, k_2) = (1, 1)$.



1.3. ábra. A potenciális energia idősorai normál és log-normál skálán szimmetrikus és aszimmetrikus paraméterelosztás esetén. Log-normál skálán nem-triviális oszcillációk figyelhetők meg.

A 1.3. ábra jobboldali ábráján a szimmetrikus esetben (kék görbe) gyorsabb az energia csökkenést látunk, míg az aszimmetrikus paraméterelosztása (sárga görbe) esetén. Logaritmikus skálán nézve, a szimmetrikus esetben azonban nem monoton csökken az energia. Ezen és a hasonló esetek létezése miatt a potenciális energia idősorok nem a legmegfelelőbbek a korrekt vizsgálatok elvégzéséhez. A kezdeti feltételek megegyezők a 1.2. ábránál megadottakkal.

Láttuk tehát, hogy az idősorok nem használhatók a rendszer precíz analíziséhez. Emiatt más módszerekre van szükségünk amelyek jellemzik az optimális csillapítási folyamatot. A stabilitás, fixpontba való konvergálás és szinkronizáció vizsgálatát dinamikai rendszerek [16] és Kuramoto oszcillátorok [8] esetén részletesen tanulmányozták.

Lineáris dinamikai rendszerek esetén a rendszer időbeli evolúciója analitikus formában is megadható, amelyhez azonban a dinamikus rendszer Jakobi mátrixának sajátérték vizsgálata szükséges. Ezt a következő példával mutathatjuk meg (részleteket lásd a Függelék B. fejezetében). Legyen egyetlen oszcillátor, amit az alábbi egyenlet vezérel:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + kx = 0. \quad (1.6)$$

Ezen egyenlet megoldása $x(t) = e^{rt}$ alakú. Az r értéke *karakterisztikus egyenletből* kapható meg:

$$r^2 + br + k = 0, \quad (1.7)$$

aminek a megoldása:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2}. \quad (1.8)$$

A mozgás-egyenletrendszer általános megoldása a következő formában írható a karakterisztikus

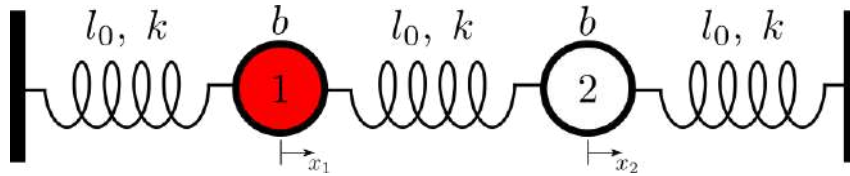
egyenlet gyökeivel:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}, \quad (1.9)$$

ahol C_1, C_2 kezdeti feltételek alapján meghatározható konstansok.

Az optimális megoldás azt jelenti, hogy x_i , $i = \overline{1, 3}$ a kitérés a folyamat végén állandó, azaz a rezgés lecsengett, és ez a lecsengés a legrövidebb idő valósul meg. Ez akkor történik meg, ha r a lehető legnegatívabb értéket veszi fel.

A karakterisztikus egyenlet megoldásai egyenértékűek a dinamikus rendszer elsőrendű mozgásegyenleteihez tartozó mátrixnak (Jakobi mátrixnak) a sajátértékeivel. Ezt egy példával mutatjuk meg (részletes számítások a Függelék B. fejezetében). Legyen két oszcillátor két fal között az alábbi ábra szerint elhelyezve:



1.4. ábra

A rendszer mozgás-egyenletrendszer, azonos tömegeket feltételezve:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\beta\dot{x}_1 - 2\gamma x_1 + \gamma x_2 \\ m\ddot{x}_2 &= -\beta\dot{x}_2 - 2\gamma x_2 + \gamma x_1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

A két egyenletet végigosztva m -el és bevezetve a már ismert jelöléseket, illetve összeadva, majd kivonva egymásból őket:

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = -b \frac{d(x_1 + x_2)}{dt} - k(x_1 + x_2) \quad (1.11)$$

$$\frac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = -b \frac{d(x_2 - x_1)}{dt} - 3k(x_2 - x_1). \quad (1.12)$$

Egy változócserevel a két karakterisztikus egyenlet könnyen megoldható és a (1.7) egyenletben bevezetett r megadható egyszerűen, mint:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2} \quad (1.13)$$

$$r_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 12k}}{2}. \quad (1.14)$$

A továbbiakban írjuk át a (1.10) rendszert elsőrendűvé. Ekkor az mozgás-egyenletrendszer

mátrixa:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2k & k & -b & 0 \\ k & -2k & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

A mátrix $\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ sajátértékegyenletét megoldva, ahol λ a mátrix sajátértéke:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 12k} \right) \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{2} \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4k} \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Azaz a λ_i , $i = \overline{1,4}$ megegyezik az r_i , $i = \overline{1,4}$ -vel. Tehát az egyenletek megoldásai a rendszer Jakobi mátrixának sajátértékei. A fenti példa igazolja, hogy a rendszer egyensúlyi állapotát jellemző *fixpont* stabilitásvizsgálata², ekvivalens a rendszer megoldásainak vizsgálatával.

A fenti példa tükrében az energia idősorok helyett érdekesebb a rendszer egyenleteiből képzett Jakobi mátrix sajátértékeit tanulmányozni, hiszen azok jellemzik, hogy milyen gyorsan tartanak a trajektóriák a stabil állapot fele, ugyanakkor azt is, hogy mennyire stabil a rendszer.

A fenti példában megadott rendszer (1.15) egyenlettel megadott mátrixában megjelent a $b_1 = b_2 = b$ paraméter. Az általánosan N darab (N darab oszcillátor esetén) csillapítási tényezőt változtatva a sajátértékek is változnak, azaz a stabilitás erőssége is. Viszont létezik olyan optimális paraméterkiosztás, melyre a stabilitás a legerősebb a többihez képest és a rendszer a leggyorsabban tart a fixpontba.

A rendszer csillapítási optimumait megadó sajátértékeket a következőképpen határozhatjuk meg:

1.1. Definíció (Lokálisan optimális megoldás). Adott $(b_1, b_2, \dots, b_N)$ paraméterkiosztás esetén lokálisan optimális megoldásnak nevezzük a λ_i sajátértékek közül legnagyobb, nem nulla valós résszel rendelkezőt:

$$\lambda_{opt.} = \max(\operatorname{Re}(\lambda_i)), \quad i = \overline{1, 2N}. \quad (1.17)$$

A megoldás optimális, mivel a megoldások közül ez lesz a vezető tag, mely a rendszer konvergenciáját jellemzi.

²Mely a rendszer Jakobi mátrixának sajátérték vizsgálatát jelenti

1.2. Definíció (Globálisan optimális megoldás). A $\lambda_{opt.}$ sajátérték halmazból, melyeket különböző paraméterekre kapunk, az a **globálisan** optimális megoldás amelyik, a legkisebb, nem nulla valós résszel rendelkezik:

$$\lambda_{glob. opt.} = \min(\lambda_{opt.}) . \quad (1.18)$$

Az (1.1) definíció megadja a vezető megoldásokat, az (1.2) definíció pedig megadja, hogy ezek közül a rezgés mely esetben cseng le a leggyorsabban.

Az (1.4) egyenletekkel leírt rendszer felépítésénél fogva eltolási szimmetriával (is) rendelkezik. Az oszcillátor sokaság teljes egészét eltolva nem változnak meg az azt leíró egyenletek, sem azok megoldásai. Így nem egyetlen fixpont a rendszer egyensúlyi állapota, hanem egy ú.n. *invariáns egyenes*. Azaz a rendszer a csillapított oszcilláció során translációt végezhet.

Az 1.3. ábra esetén láttuk, hogy nemcsak az energiagörbe gyors csökkenése fontos, hanem a végállapot stabilitása is. Ez számos esetben lehet releváns tényező, például generátorok csatlóása esetén [2], ahol nem triviális probléma a frekvencia-szinkron fenntartása külső és belső perturbációk potenciális megjelenései miatt. Az optimum fogalma ezt a stabilitást is magában hordozza. Egy dinamikai rendszer sajátértékek valós részének negativitása a fixpontok stabilitását is jellemzi [16].

2. fejezet

Tanulmányok a rugó-tömb modell esetén

Ebben a fejezetben az (1.4) egyenletekkel leírt, 1.1. ábrán szemléltetett rugó-tömb modellt tárgyaljuk: bemutatjuk a kapott eredményeket és két lehetőséget is adunk az optimális megoldás elérésére heterogén paraméterelosztással.

A két feladat közti különbség abban áll, hogy mely paramétereket tekintjük rögzítettnek. Mivel a rendszerben szimmetriatörést keresünk, így az oszcillátorok tömegbeli azonosságát nem változtatjuk meg. Két kézenfekvő lehetőség kínálkozik:

1. a b_i csillapítási tényezőket módosítjuk és ezek terében keresünk megoldást. A csillapítási tényezők módosítása értelmezhető úgy, mintha az egyes elemek különböző viszkozitású közegekben operálnának, vagy a testek mérete, alakja különböző.
2. a k_i rugóállandók a változtatható paraméterek (gyakorlatilag az egyes elemek közti csatolás mértékét változtatjuk).

2.1. Az optimális út az egyensúlyi állapothoz: első eset

Az első feladat esetén rögzítjük k_i rugóállandókat:

$$\forall i : k_i = 1, \quad i = \overline{1, 2} \quad (2.1)$$

értékre. A legjobb megoldást a bevezetett meghatározások alapján választjuk ki a sajátértékegyenlet megoldásai közül. A rendszer lineáris csatolású, ezért az eredményként kapott $\text{Re}(\lambda_{glob. opt.})$ nemcsak a fixpont körüli stabilitást és konvergencia sebességét adja meg, hanem valóban a teljes folyamatot jellemzi.

Használva a következő jelöléseket, a rendszer (1.4) egyenleteit átírva elsőrendű differenciál-egyenletrendszerre:

$$\begin{array}{ll} u_1 = x_1 & u_4 = \dot{x}_1 \\ u_2 = x_2 & u_5 = \dot{x}_2 \\ u_3 = x_3 & u_6 = \dot{x}_3 \end{array} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_4 \\ \dot{u}_2 = u_5 \\ \dot{u}_3 = u_6 \\ \dot{u}_4 = -b_1 u_4 - k_1(u_1 - u_2) \\ \dot{u}_5 = -b_2 u_5 - k_1(u_2 - u_1) - k_2(u_2 - u_3) \\ \dot{u}_6 = -b_3 u_6 - k_2(u_3 - u_2) \end{cases} \quad (2.3)$$

Az egyenletrendszer mátrixa pedig:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -b_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_1 - k_2 & k_2 & 0 & -b_2 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 & 0 & -b_3 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Egyszerűbb alakban:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{P} & -\mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

ahol $\mathbf{O}$ harmadrendű nullmátrix, $\mathbf{I}$ harmadrendű egységmátrix, $\mathbf{B}$ 3×3 -as négyzetes diagonális mátrix, melynek átlóján a csillapítási együtthatók szerepelnek és $\mathbf{P}$ 3×3 -as négyzetes mátrix, amelynek elemei: $P_{ij} = \frac{\partial F_{i+3}(\vec{u})}{\partial u_j}$. $\vec{u} = (u_1, \dots, u_6)$ az új változók a rendszer elsőrendűvé írásakor, $F_j(\vec{u})$ pedig az $\dot{u}_j$ -hez tartozó egyenlet. A sajátértékegyenlet :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \mathbf{M} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{v} \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{v} \\ \vdots \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
& \det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -k & k & 0 & -b_1 - \lambda & 0 & 0 \\ k & -2k & k & 0 & -b_2 - \lambda & 0 \\ 0 & k & -k & 0 & 0 & -b_3 - \lambda \end{vmatrix} = \\
& = \lambda^6 + b_1\lambda^5 + b_2\lambda^5 + b_3\lambda^5 + 4k\lambda^4 + b_1b_2\lambda^4 + b_1b_3\lambda^4 + b_2b_3\lambda^4 + 3kb_1\lambda^3 + 2kb_2\lambda^3 + 3kb_3\lambda^3 \\
& + b_1b_2b_3\lambda^3 + 3k^2\lambda^2 + kb_1b_2\lambda^2 + 2kb_1b_3\lambda^2 + kb_2b_3\lambda^2 + k^2b_1\lambda + k^2b_2\lambda + k^2b_3\lambda = 0. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

A (2.6) egyenlet általánosan hatod fokú, analitikusan nem megoldható. Csak speciális esetekben lehetséges analitikusan kezelni (lásd a Függelék C. fejezetét).

A b_2 értékét rögzítjük és b_1, b_3 -al pedig bejárunk egy megfelelően megválasztott paraméterteret. Minden így kapott (b_1, b_2, b_3) paraméterkiosztásra kiszámoljuk rendszer mátrixának sajátértékeit, majd optimumot választunk és azt ábrázoljuk a paramétertérben.

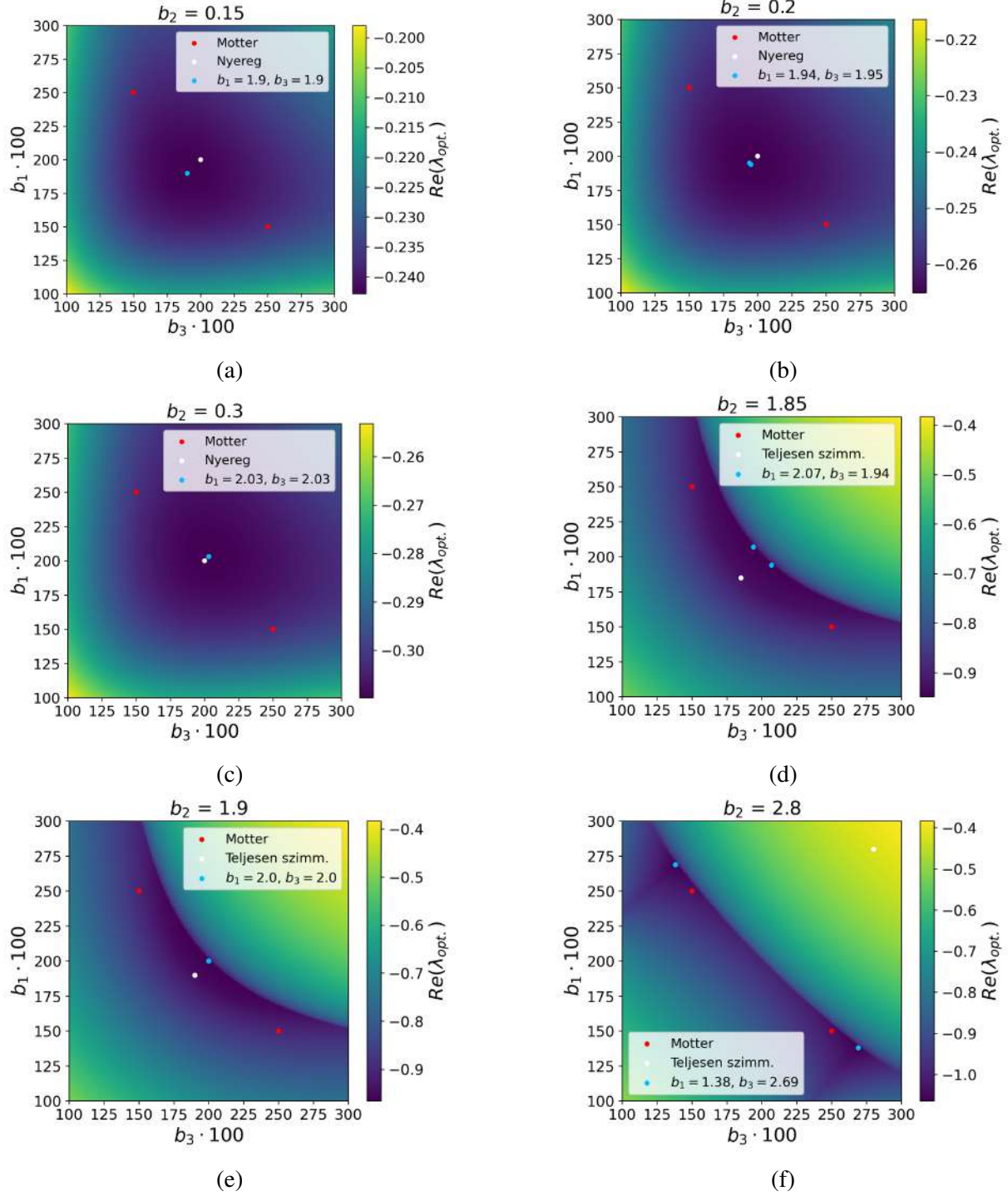
A rendszert partikuláris esetben ($b_2 = 3.17$) tanulmányozta *Motter et al.* [2]. Az ábrákon feltüntetett *Motter* pont felel meg ennek az optimumnak. A vizsgálataink során viszonyítási alapként használtuk.

Az 2.1. és 2.2. ábrákon bemutatunk néhány így kapott eredményt.

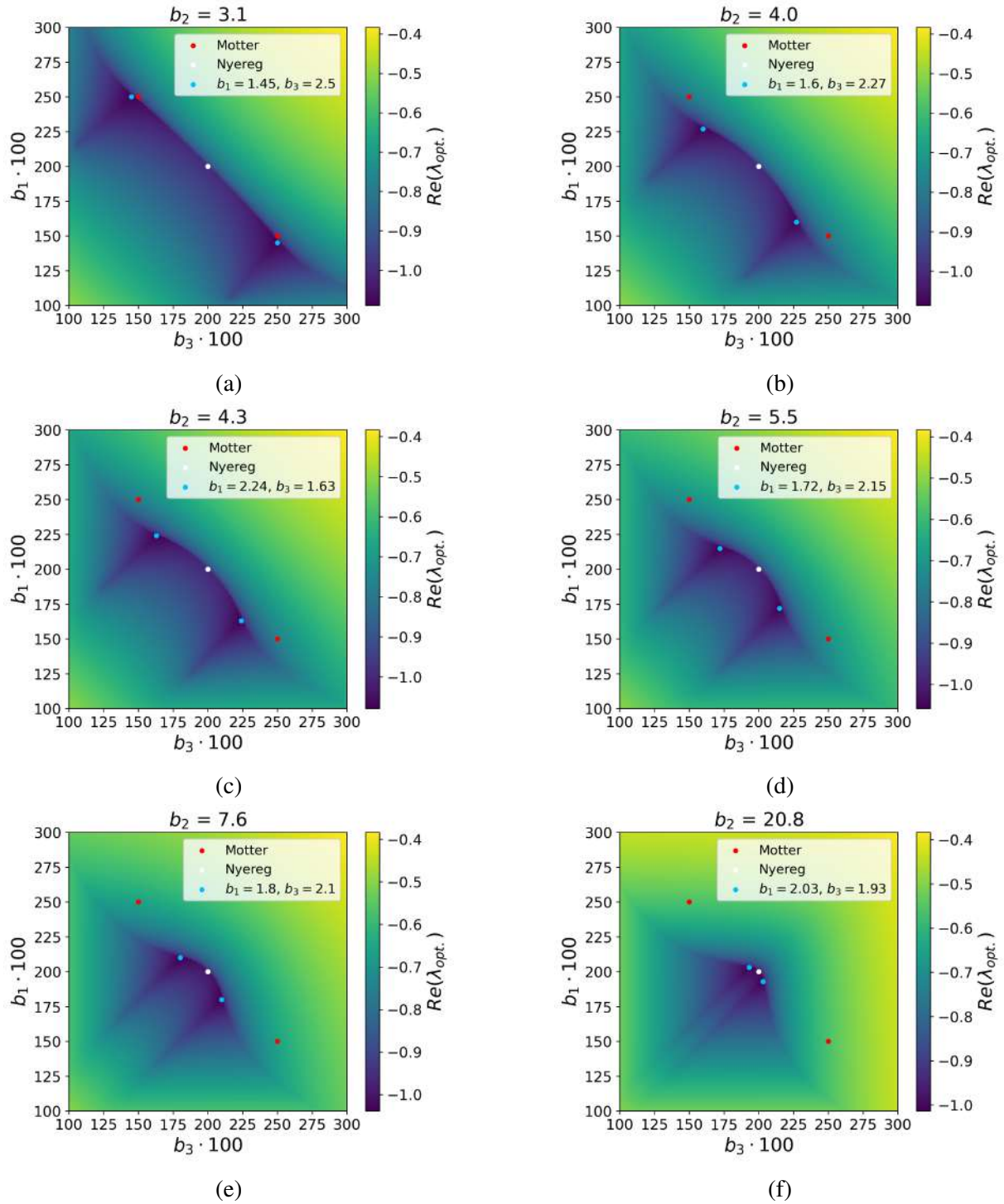
A 2.1a.-2.1c. ábrákon a b_2 relatív kis értéket vesz fel. Az optimum ekkor a főátlón helyezkedik el, viszont eltér a b_1, b_3 -ban szimmetrikus *Nyereg* ponttól. Növelve a b_2 értékét, adott küszöb után szétválik az optimum, és két, b_i paraméterekben aszimmetrikus pontot (2.1d. ábra) kapunk megoldásnak (az ábrán csak az egyik pont értékei vannak feltüntetve, a másik ennek a tükrözése). Még tovább növelve a b_2 értékét az optimum újra összeesik egy főátlón elhelyezkedő ponttá (2.1e. ábra), majd ez a kollapszáló viselkedés megszűnik, miután a b_2 meghaladja a 2.5-ös értéket, és ezek után stabilan két megoldásunk marad, melyek aszimmetrikusak b_i paraméterekben és egymás tükrözései^{3,4}. Az ábrákon megjelenő pontok: az értékekkel ellátott pont az adott eset optimális megoldása, a *Nyereg* jelzéssel ellátott pont a tartomány közepe, a *Teljesen szimm.* jelzéssel ellátott pont pedig a teljesen szimmetrikus b_i paraméterkiosztás esetét jelenti, ahol $b_1 = b_2 = b_3$.

³A két megoldás egymásnak fordítottja: ebben visszaköszön a tekintett rendszer szimmetriája.

⁴A sokkal részletesebb ábrákat lásd ???. fejezetben.



2.1. ábra. Az ábrákon különböző rögzített b_2 esetekre a paramétertereket ábrázoltuk. A színskóddal szemléltetjük a lokálisan optimális megoldást és feltüntetjük a globális optimumokat a Motter pont és a Nyereg, illetve teljesen szimmetrikus pontokkal együtt.



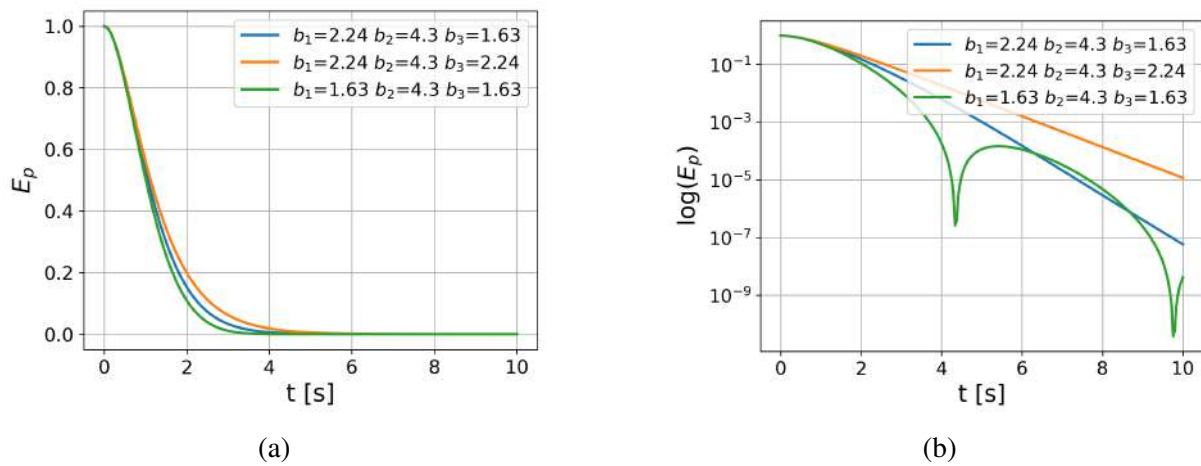
2.2. ábra. Paraméterterek ábrái különböző b_2 rögzítésekre, ahol már nem figyelhető meg a megoldások kollapszusa. A színkód a kiválasztott vezető sajátértékek valós részének felel meg. Rögzített b_2 esetén az ábrákon színkóddal szemléltetjük a (b_1, b_3) térben a lokálisan optimális megoldást. Feltüntetjük késsel a globálisan optimális megoldást és a karakterisztikus nyeregpontot.

A 2.2a.-2.2f ábrák mindegyike abból a b_2 tartományból származik, ahol már nem figyelhető meg az optimális megoldások kollapszusa. A 2.2a. ábrán a két optimum meglehetősen távol van egymástól, majd a b_2 paraméter értékének növelésével elkezdenek közeledni mind egymáshoz,

mind a főátlóhoz. Elérve egy bizonyos b_2 értéket, ez a folyamat olyannyira lelassul, hogy csupán b_2 extrém beállításával fog bekövetkezni változás a megoldások elhelyezkedésében.

A fenti eredmények alapján megfogalmazható pár lényeges következtetés:

- Az optimális energia lefutáshoz vezető utat, ahol nem találunk oszcillációt az energiagörbében és a csillapítás a legoptimálisabb, nem szimmetrikus paraméterkiosztás esetén kapjuk meg. Hogy az energia idősorokkal is vizualizáljuk ezt, a 2.2c. sajátértékeket feltüntető ábrának megfelelő energiagörbék esetében:



2.3. ábra. Energia idősorok normál és log-normál skálán a 2.2c. ábrának megfelelő paraméterek esetén, illetve a nekik megfelelő szimmetrikus b_1, b_3 esetben.

- Ezen nem várt szimmetriasértés igazolja más csoportok munkáját [2]. Ugyanakkor egy kontra-intuitív eredményt jelent egy igen egyszerű rendszer esetében, mely arra enged következtetni, hogy bizonyos esetekben az optimum nem feltétlenül tükrözi a rendszer szimmetriáját

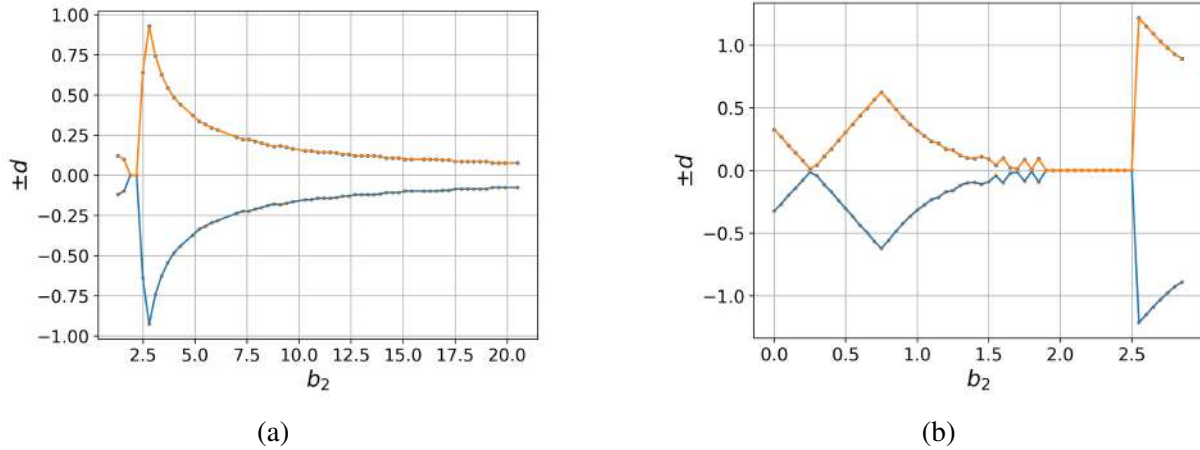
Ahogy láttuk a 2.1. ábra esetén, az optimális megoldások elfajultsága adott b_2 tartományon, amely $b_2 \in [0, 2.5]$ közé tehető, változik: a kezdeti elfajult megoldás kettéválik, majd kollapszál újra eggyé, végül újra kettéválik. A következőkben definiálunk egy mennyiséget, amely megadja az optimum távolságát a paramétertartomány közepétől.

2.1. Definíció (Távolság paraméter). Azt a mennyiséget, mely a globális optimum(ok) távolságát megadja a paramétertér centrumától, távolság paraméternek nevezzük:

$$d^2 = (b_1 - b_c)^2 + (b_3 - b_c)^2. \quad (2.7)$$

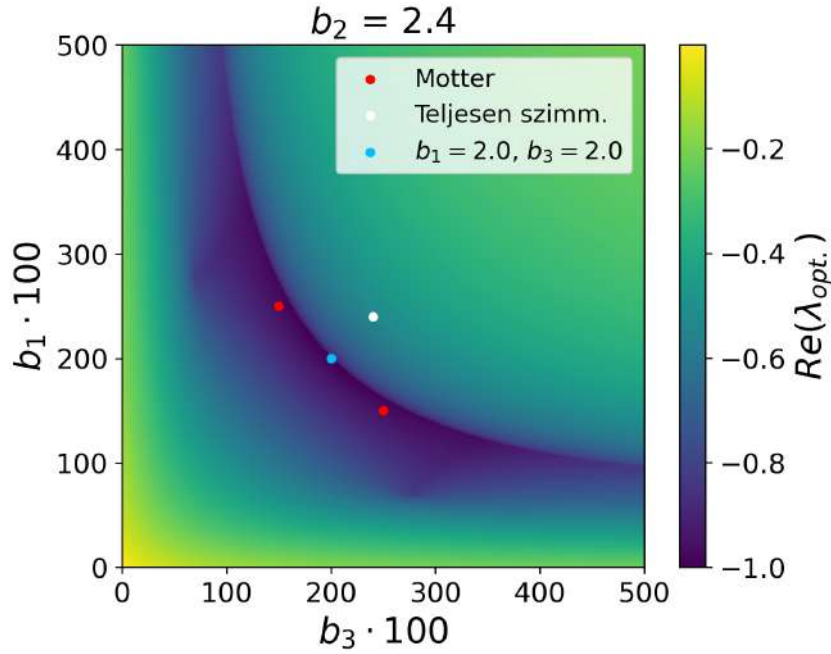
A használt paraméterterek esetén b_c értéke 2.

A 2.1. meghatározással bevezetett mennyiséget vizsgáltuk a teljes $b_2 \in [0, 20.8]$ tartományon, illetve ennek egy leszűkített részén. Éles változás következik be a $b_2 \in [2.45, 2.55]$ intervallumon (2.4b. ábra). Ez, a rendszer egyfajta fázis változásának is tekinthető.



2.4. ábra. A 2.4a. ábrán a távolság paraméter teljes b_2 -re vonatkozó tartományon való változását ábrázoltuk. A 2.4b. ábrán az a tartomány látható nagyobb felbontásban, ahol a rendszert legerősebben jellemző fázisváltozás jelenik meg.

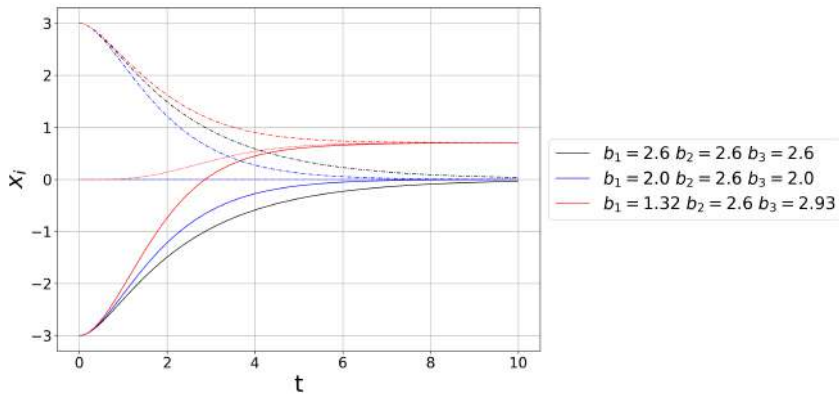
Megnövelve a (b_1, b_3) tartomány méretét, a jelenség nem tűnik el, sőt az ábra színekódjának tendenciája alapján megmarad (Lásd 2.5. ábra; a tartomány széle felé a sajátértékeke való részei növekedni kezdenek.). Az, hogy ezen oszcilláció a megoldások számában minek hatására következik be még egy nyitott kérdés számunkra, és ismét azt illusztrálja, hogy nagyon egyszerű rendszerekben is számos újdonságot lehet felfedezni új megközelítésekkel. A jelenség további vizsgálódási alapot biztosít a rendszerrel kapcsolatban.



2.5. ábra. A fázisátmenet környékén nagyobb paramétertér esetén sem válik szét az optimális megoldás.

Visszatérve a 1.1. alfejezetben tett kijelentésünkhöz, miszerint a rendszer fixpontja egy *invariáns egyenes*, ez meg is mutatható, ha megnézzük a rendszer koordináta idősorát adott paraméterelosztásra (2.6. ábra).

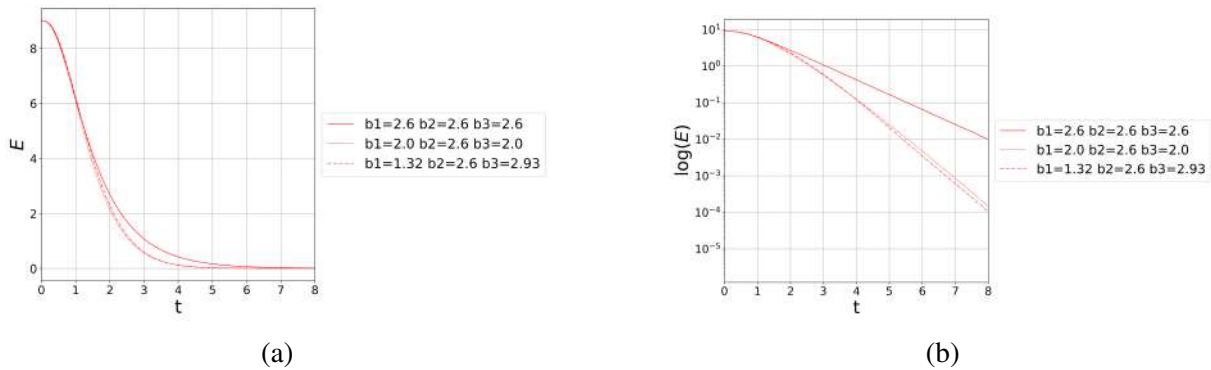
Ebben az esetben újra megvizsgálhatjuk az energia idősorokat is. Az optimális sajátérték alapján választott paraméterekre gyorsabban csökkenő energiagörbéket kapunk (2.7b. ábra), mint szimmetrikus esetben.



2.6. ábra. A rendszer x_i , $i = \overline{1, 3}$ kitéréseinek idősora.

A rendszer fixpontja egy invariáns egyenes, melynek bármely pontjában véget érhet a csillapodási folyamat (2.6. ábra). Az egyes esetekben az x_i elmozdulások állandó értékre állnak be megfelelő idő eltelte után. Az, hogy az egyes esetekhez tartozó x_i -k értékei megegyeznek nem azt jelenti, hogy a rendszer egy pontban éri el a nyugalmi állapotot, hanem, hogy az

elmozdulások változatlanok. Az ábra szemlélteti a rendszer transzláció invarianciáját is (ha a rendszer nem szenved transzlációt, akkor az egyensúlyi állapotban $x_i = 0$, 2.6. ábrán kék és fekete görbék, míg transzláció esetén $x_i \neq 0$, 2.6. ábrán piros görbe). A piros görbe esetén a rendszer eltolódott a kezdeti állapothoz képest.



2.7. ábra. A rugó-tömb rendszer teljes energiáinak idősora normál és log-normál skálán. $k_i = 1$ minden esetben.

A 2.7a. ábrán a teljes energia idősorát látjuk normál skálán, míg a 2.7b. ábrán ugyancsak a teljes energia idősora figyelhető meg log-normál skálán. Az ábrák alapján vizuálisan is megfigyelhető (főként a log-normál skála esetén), hogy az aszimmetrikus paraméterelosztások esetében gyorsabb csillapodásunk van, mint szimmetrikus paraméterhalmaz esetén.

2.2. Az optimális út az egyensúlyi állapothoz: második eset

Ahogy az előzőekben megmutattuk, létezik a szimmetriatörés a rendszer optimális viselkedése szempontjából: egy identikus elemekből álló sokaság optimális csillapítását egy heterogén paraméterelosztás adja meg. Az eddigi munkánk részben reprodukciója volt *Motter et al.* tanulmányainak [2], illetve egy részletesebb vizsgálata. Az újdonság amit találtunk az a megoldások számának oszcillációja $b_2 \in [0, 2.5]$ tartományon.

A következőkben egy másik esetet adunk meg, melyet *Motter et al.* nem vizsgáltak, arra vonatkozólag, hogyan lehet optimumot elérni. Az előző alfejezetben a változtatható paraméterek a b_i csillapítási tényezők voltak, melyet felfoghattunk, mintha az oszcillátorok különböző viszkozitású környezetben operáltak volna, avagy különböző méretűek/alakúak lettek volna. Egy másik kézenfekvő lehetőség a variálható paraméterekre az oszcillátorok csatolásának mértéke, azaz a k_i -k variálhatósága. Ez nagyon könnyen megtehető anélkül, hogy a rendszer szimmetriáját megtörnénk. Például, ha a rugókat különböző anyagokból készítjük, de hosszukat, vastagságukat, egyéb paramétereiket megtartjuk.

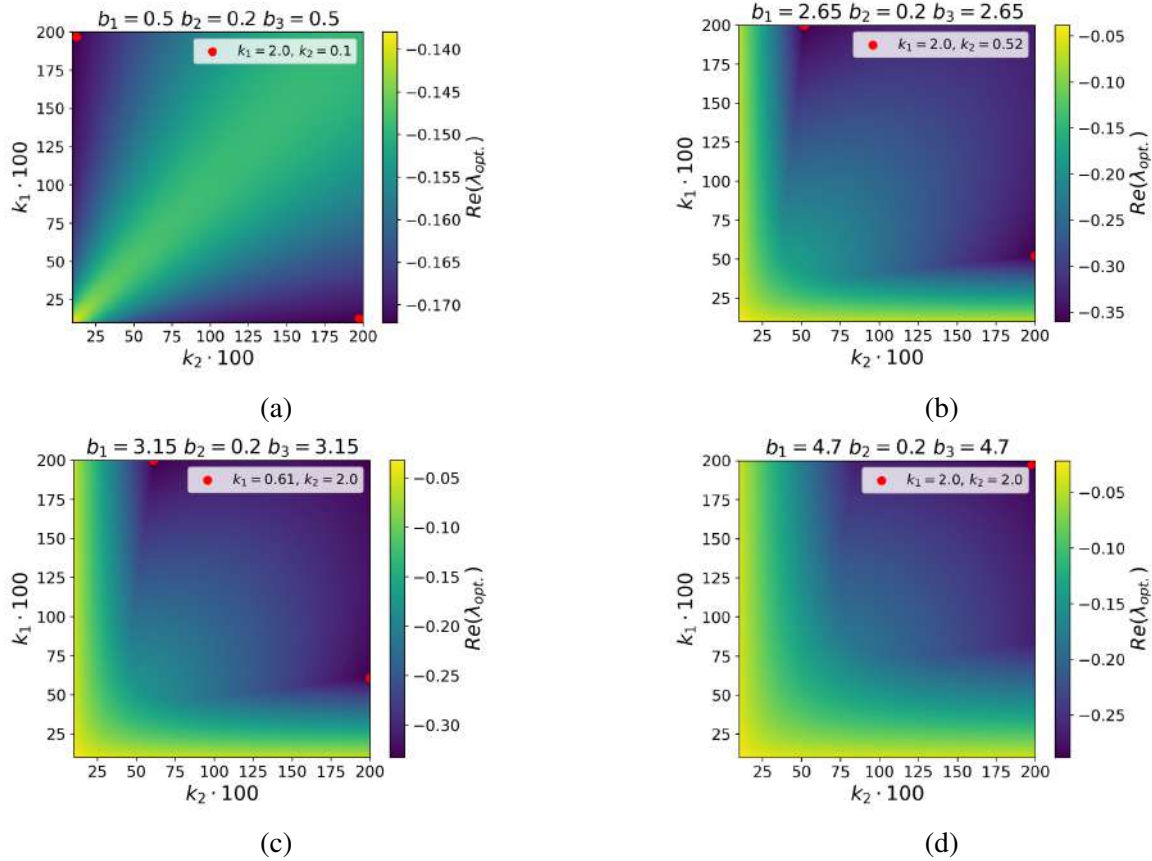
A rendszer (2.5) egyenlettel megadott mátrixát alakra nem befolyásolja a második esetben a feladatunk. A szimmetriát még jobban érzékeltetendő, a továbbiakban a $(b_1 = b_3 = b)$

feltevéssel fogunk élni. Ekkor a sajátértékegyenlet:

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -b - \lambda & 0 & 0 \\ k_1 & -k_1 - k_2 & k_2 & 0 & -b_2 - \lambda & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 & 0 & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

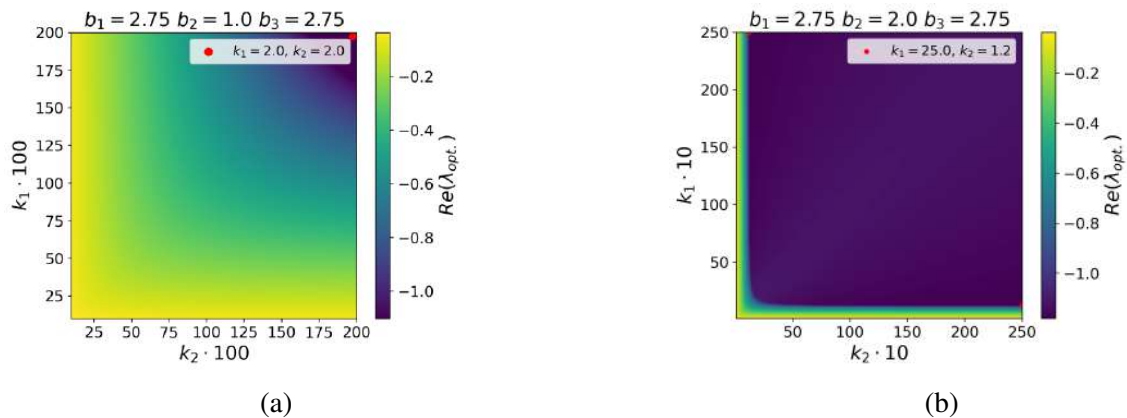
A 2.1. fejezetben megjegyeztük, hogy ez az egyenlet csak speciális esetben kezelhető analitikusan. Ez a speciális eset akkor következik be, ha $b_i = b$, mindhárom csillapítási együttható megegyezik és a változtatható paraméterek a k_i csatolások. A rendszer mátrixa ilyen esetben erősen elfajult lesz, azaz a sajátértékek többszörösen elfajultak lesznek (ezt matematikailag is igazolhatjuk, lásd A Függelék C. fejezetében).

A vizsgálati módszerek ugyancsak hasonlóak a 2.1. fejezetben leírtakhoz. Bejártuk a megengedett paramétertartományt, majd a már ismert szabály szerint kiválasztottuk az optimális megoldásokat. Különbségnek tekinthető azonban, hogy a rendszert szimmetrikusan tartandó, b_1, b_3 paramétereket egyformának választjuk. Egy paraméterteret adott b_1, b_2, b_3 kiosztás jellemez. Ezt a teret bejárva egy tetszőleges, esetünkben $step_{b_{13}} = 0.05$ lépéssel növeljük a b_1, b_3 értékét. Ezeket a lépéseket sorba végezve eljutunk b_1, b_3 határához. Ezt a határt elérve egy $step_{b_2} = 0.01$ lépéssel növeljük b_2 értékét és megismételjük az előbbi eljárást. Ekkor az alábbiakhoz hasonló paraméterter-portrékhoz jutunk:



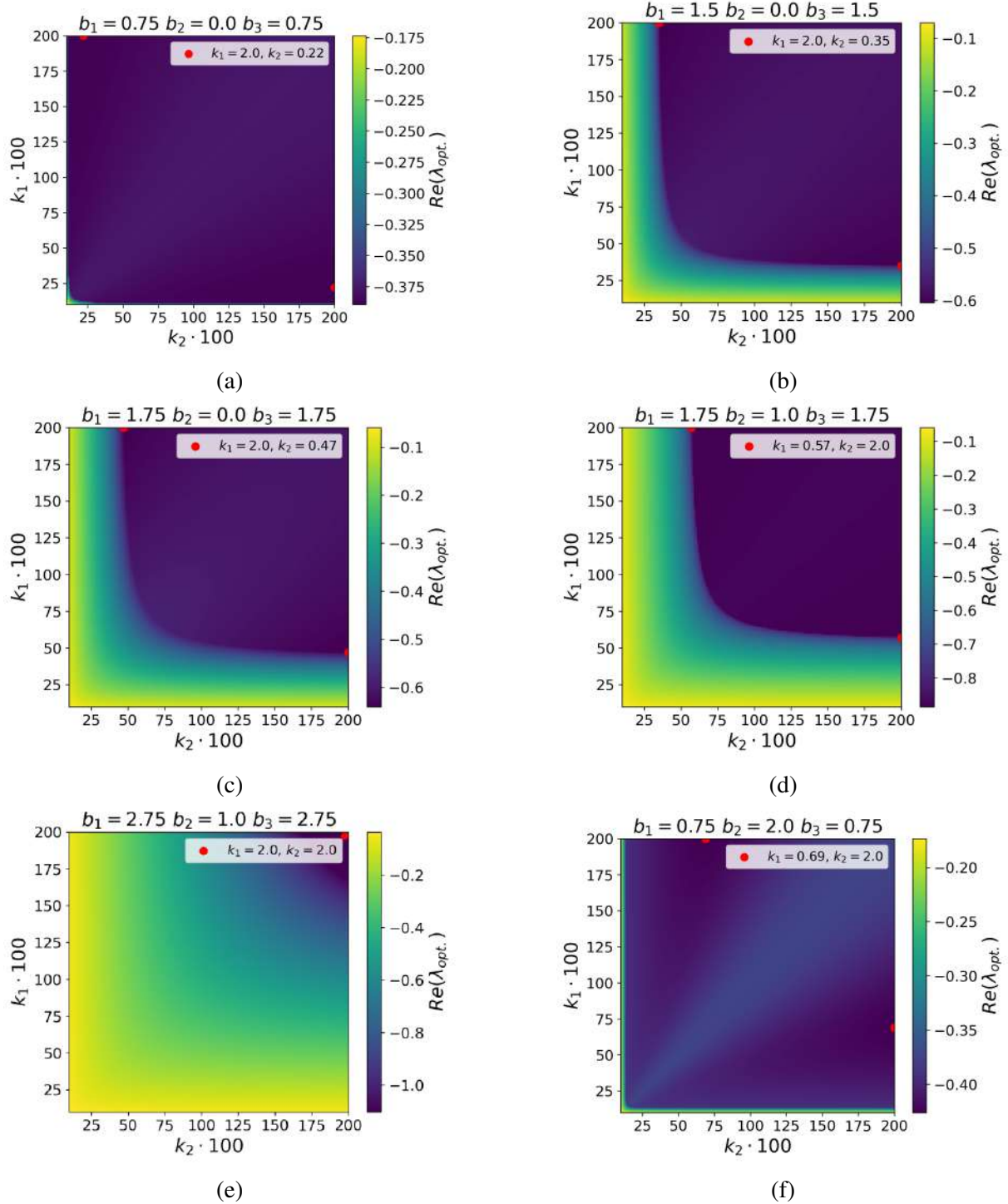
2.8. ábra. Kis b_2 -k esetében a lokális optimum a (k_1, k_2) paraméterterben színkóddal ábrázolva. A globális optimumot/optimumokat a piros pont szemlélteti.

A kis b_2 -k határeseit a 2.8. ábrán szemléltettük. A kezdeti két optimum (2.8a. ábra) a b_1, b_3 növekedésével elkezd a főátló fele közelíteni (2.8c. ábra). Ez azonban csak annak köszönhető, hogy határt szabtuk a paraméterternek. Ha nem tesszük ezt meg (2.9. ábra), akkor az optimális megoldásokból mindig kettő van, amelyek szimmetrikusan helyezkednek el a főátlóra, de nem jelentenek szimmetrikus paraméterkiosztást. A 2.9a. és 2.9b. ábrákon a b_1, b_2, b_3 paraméterek ugyanazok, azonban a k_1, k_2 paraméterter mérete eltér.



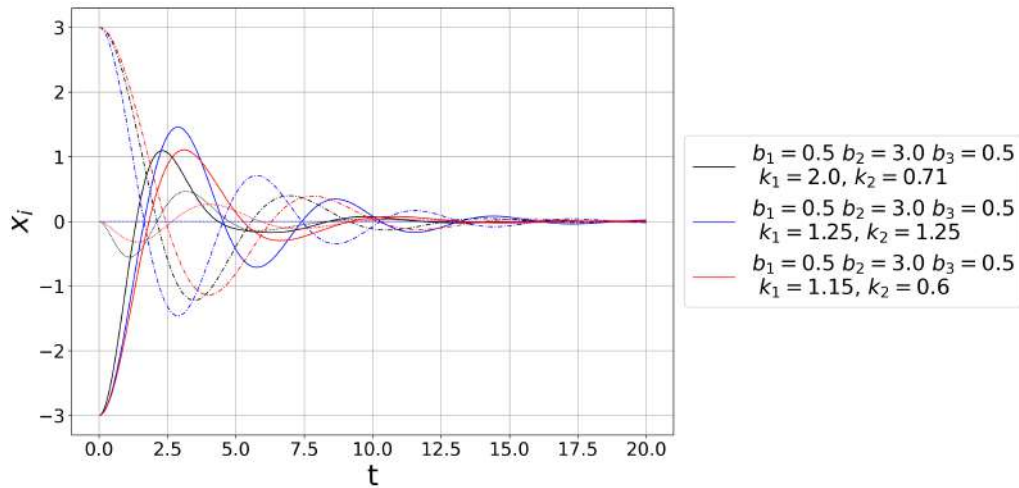
2.9. ábra. A paraméter tér növelésének hatása a globális optimum vizualizációjára.

Növeljük a paraméterteret, akkor a megoldások mindig a tartomány szélén tartózkodnak, és kettő van belőlük. 2.9a. és 2.9b. ábrák ugyanazon paraméterekre készültek. A különbség csak a megengedett paramétertér mérete. A 2.9b. ábra esetén ez $12.5\times$ nagyobb mindkét tengelyen, mint a 2.9a. ábra esetén. Látjuk, hogy a második ábrán elvárás szerint a két megoldás a tartomány szélén helyezkedik el, és kettő van belőle, szemben a kisebb tartomány esetével.

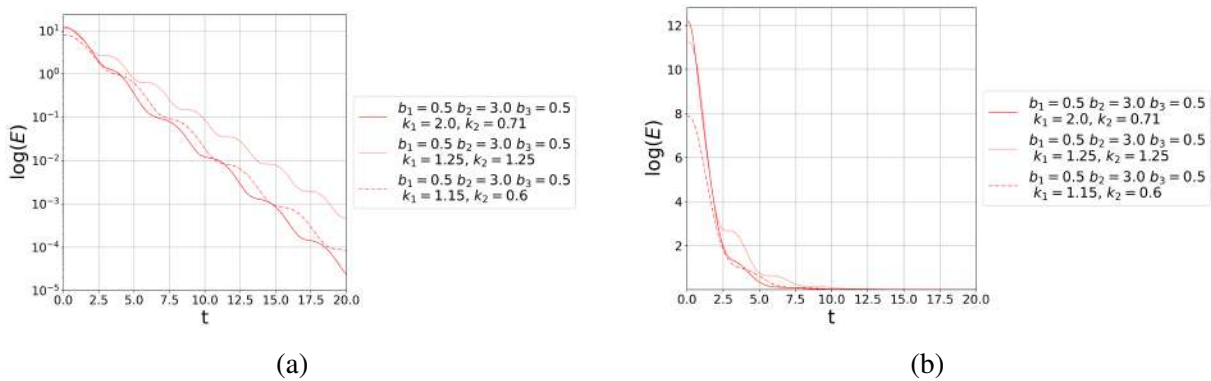


2.10. ábra. $Ab_2 \geq 1$ esete. A lokális optimumok a $k_1 - k_2$ paramétertérben.

Láttuk, hogy a k_i csatolások változtathatósága ugyancsak egy szimmetriatörést visz a rendszerbe. Ha most megnézzük a kitérések és energiák idősorait, akkor különbségeket látunk a 2.1. alfejezetbeliekhez képest. Az így kapott optimum jobb a szimmetrikus paraméterelosztásoknál, ellenben a görbék monoton csökkenése már nem lesz megfigyelhető. Ez, a b_i paramétereket állandónak tartásával magyarázható, mivel így nem változtatható az oszcillációk csillapítása. A k_i -k változtatásával tehát csak a leggyorsabb csökkenés és a stabilitás biztosítható.



2.11. ábra. A rendszer elemeinek kitérés idősora. Látjuk, hogy az oszcillációk megengedetté válnak, amikor a b_i -k rögzítettek, és a k_i paramétertérben vagyunk. Az aszimmetrikus csatolás ekkor is gyorsabb lecsengést eredményez.



2.12. ábra. Teljes energia idősorok normál és log-normál skálákon.

A 2.12a. ábrán a teljes energia idősorát látjuk normál skálán, míg a 2.12b. ábrán ugyancsak a teljes energia idősora figyelhető meg log-normál skálán. Itt is látható, hogy a csatolások variálásával az energiagörbékben eltűnik a monoton lefutás.

Összegzőképpen elmondhatjuk, hogy a csatolások változtatása is egy lehetséges út az optimális szinkron eléréséhez annak árán, hogy általános esetben feladjuk azon megkötésünket,

hogy a kitérés és energia idősorok monoton csökkenjenek. Speciálisan megválasztott b_i -k esetén azonban ezek monotonná válhatnak. Ez a módszer újdonságot hoz a *Motter et al.* [2, 4] által nyert eredmények mellé, és újból igazolják a szimmetriatörés jelenlétét egy relatív egyszerű rendszer és modell esetén. Az eredményeink azt is alátámasztják, hogy nem várt aszimmetriát követelhet meg bizonyos optimális viselkedés eléréséhez egy dinamikus rendszer. [17].

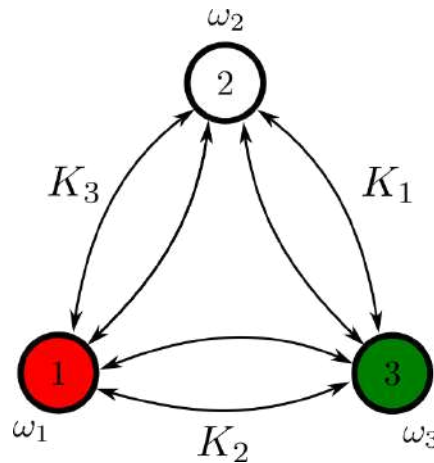
3. fejezet

A klasszikus (elsőrendű) Kuramoto oszcillátor-sokaság

A szinkronizációs jelenségek matematikai, fizikai, biológiai, kémiai és szociális vonatkozásokban jelen pillanatban is intenzív kutatási terület [7]. Ilyen jelenségek leírására vezette be Kuramoto Yoshiki a róla elnevezett modellt 1975-ben [18, 19]. Bevezetése óta sok variánsa alakult ki ennek a modellnek. Napjainkig ez az egyik legelterjedtebb és legalapvetőbb keretrendszere a szinkronizációs jelenségek és/vagy csatolt rendszerek leírásának. Az egyik legegyszerűbb variánsa, az úgynevezett *klasszikus Kuramoto modell*, mely csupán a fázisszögek elsőrendű idő szerinti deriváltjait tartalmazza. Matematikai megfogalmazásban az egy dimenziós rendszer mozgásegyenletei:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^n (K_{ii+j} \cdot \sin(\theta_{i+j} - \theta_i) + K_{ii-j} \cdot \sin(\theta_{i-j} - \theta_i)). \quad (3.1)$$

Ez az egyenlet $j = \overline{1, n}$ szomszédokkal való kölcsönhatást fejez ki előre és hátra irányban. Az i futóindex 1-től az oszcillátorok számával megegyező N -ig megy. A csatolási állandók indexeiben az első i index megadja, hogy melyik oszcillátort csatoljuk, míg a második, $i + j$ indexből a j pedig megadja, hogy az i -től számított hányadik oszcillátorral csatoljuk azt. Például a K_{13} esetén $i = 1$, $i + j = 3$, vagyis az egyes oszcillátor a harmadikkal (a tőle számított másodikkal) van csatolva. Tételezzük fel, hogy $N = 3$. Ekkor a rendszer egy sematikus ábrázolása a következőképpen nézne ki:



3.1. ábra. Az elsőrendű Kuramoto modell $N = 3$ oszcillátor esetén.

Természetesen a (3.1) egyenletekkel leírt modellben a K_{ii+j} csatolási tényezők megválasztásával a rendszer nemcsak adott n szomszédokkal lehet csatolt két irányban, de a csatolás megvalósítható egy irányban is. A továbbiakban a következő feltételezésekkel élünk:

- a rendszerben $N = 3$ oszcillátor van;
- ezek mindkét irányban, legközelebbi szomszéd, $n = 1$, csatolással rendelkeznek;
- a változtatható paraméter, melyek terében keressük az optimális, megoldást a K_{ij} csatolási állandók;
- az ω_i sajátfrekvenciák megegyeznek és időben állandó kezdeti értékük van.

Ez a rendszer már mind topológiában, mind csatolásban komplexebb az 1. fejezetben tárgyalt rugó-tömb modellnél, hisz a csatolás szinuszos és nem lineáris. A fentebb felsoroltak tükrében vezessünk be egy új jelölést a csatolási együtthatókra, hogy csökkentsük az indexek számát. Az általunk tekintett modellben általánosan a θ_i és θ_{i-1} fázisszögekkel jellemzett oszcillátorokat a K_{i+1} -es csatolási állandó köti össze (lásd a 3.1. ábrát).

A rendszer tanulmányozása során teszünk néhány megkötést. Ezek abban állnak, hogy:

- rögzítjük K_2 értékét 2.5-re;
- a csatolási állandók összegét állandónak tarjuk $\sum_i K_i = konst. = 3K_2 = 7.5$.

3.1. Átlagidő vizsgálatok különböző statisztikákra

Az *átlagidő vizsgálatok* módszere eltér az eddigiekben használt módszerektől. A rendszer linearizációja és mátrixának sajátértékvizsgálata a szinuszos kapcsolás miatt csak a fixpont környékén adja meg az optimális szinkronizációt és stabilitást. Ha viszont a teljes folyamatot akarjuk vizsgálni, akkor ez nem egy hasznos mennyiség. Mivel a rendszer szinkronizációjához szükséges időt akarjuk itt optimalizálni, a rendparaméter segítségével fogjuk ezt most megtenni.

3.1. Definíció (Szinkron és fixpont három oszcillátor esetén). *Kuramoto rendszer esetén szinkron alatt azt értjük, amikor az oszcillátor sokaság egyetlen Ω körfrekvenciával (szinkronizációs körfrekvencia) mozog:*

$$\forall i, j : \Delta\theta = \theta_i - \theta_j = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

Mivel csak három elemből álló rendszert vizsgálunk, a [8] alapján, a szinkron csak a $\Delta\theta = 2k\pi$ esetben stabil. Ezek a feltételek megadják a fixpont értelmezését is egyben a $\Delta\theta$ által.

3.2. Definíció (Rendparaméter). *Kuramoto modell esetén az r rendparaméter megadja a rendszer szinkronizációs fokát egy időpillanatban. Ez egy 0 és 1 közötti szám, ahol $r = 0$ a*

szinkron teljes hiányának felel meg, míg az $r = 1$ a teljes szinkronnak:

$$r = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \right|, \quad (3.3)$$

ahol N az oszcillátorok száma, θ_j pedig az j -ik oszcillátorhoz tartozó fázisszög.

A rendparamétert minden integrációs lépésben kiszámítva felállíthatunk egy szabályt. Ha $r \geq r_{lim}$ értéket veszi fel, akkor a rendszert szinkronizáltnak tekintjük⁵. Az r_{lim} eléréséhez tartozó idő pedig megadja a szinkronizációhoz szükséges időtartamot. A vizsgálatokat $r_{lim} \in \{0.8, 0.9, 0.995\}$ értékekre végeztük. Az átlagidő módszere abban áll, hogy a fentebb leírt megkötések szerint adott tartományból nr_K darab (K_1, K_2, K_3) csatolás kiosztást generálunk, majd minden egyes csatolás kiosztást nr_P darab kezdeti $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ fázisszög kiosztásra lefuttatjuk, és a kapott szinkronizációs idők átlagát kiszámoljuk. Az nr_P , azaz a statisztika növelése javítja a kapott eredményeket. A vizsgálatok $nr_P \in \{1000, 5000, 10000\}$ statisztikákra történtek. Nyilván az integrálási módszerek és időszámítás numerikája is ad egy hibahatárt, ami alatt az eredményeinket nem fogadhatjuk el pontosnak. A használt integrálási módszer a Python nyelv scipy csomagjának `solve_ivp()` függvénye, melyen belül egy negyed rendű Runge-Kutta solver implementációt hívtunk meg.

Az elsőrendű Kuramoto rendszer ilyen feltételek melletti vizsgálatának eredményei a 3.2. ábrán láthatók összefoglalva, melyeket numerikus szimulációk segítségével kaptunk a fent leírtak szerint. A rendszer szimmetriája miatt a K_i paraméterek variációja ezekben az esetekben nem hozott szimmetriatörést, sőt az oszcillátorok kezdeti körfrekvenciájának eltérő megválasztása és a különböző r_{lim} értékek sem okoztak számottevő változást.

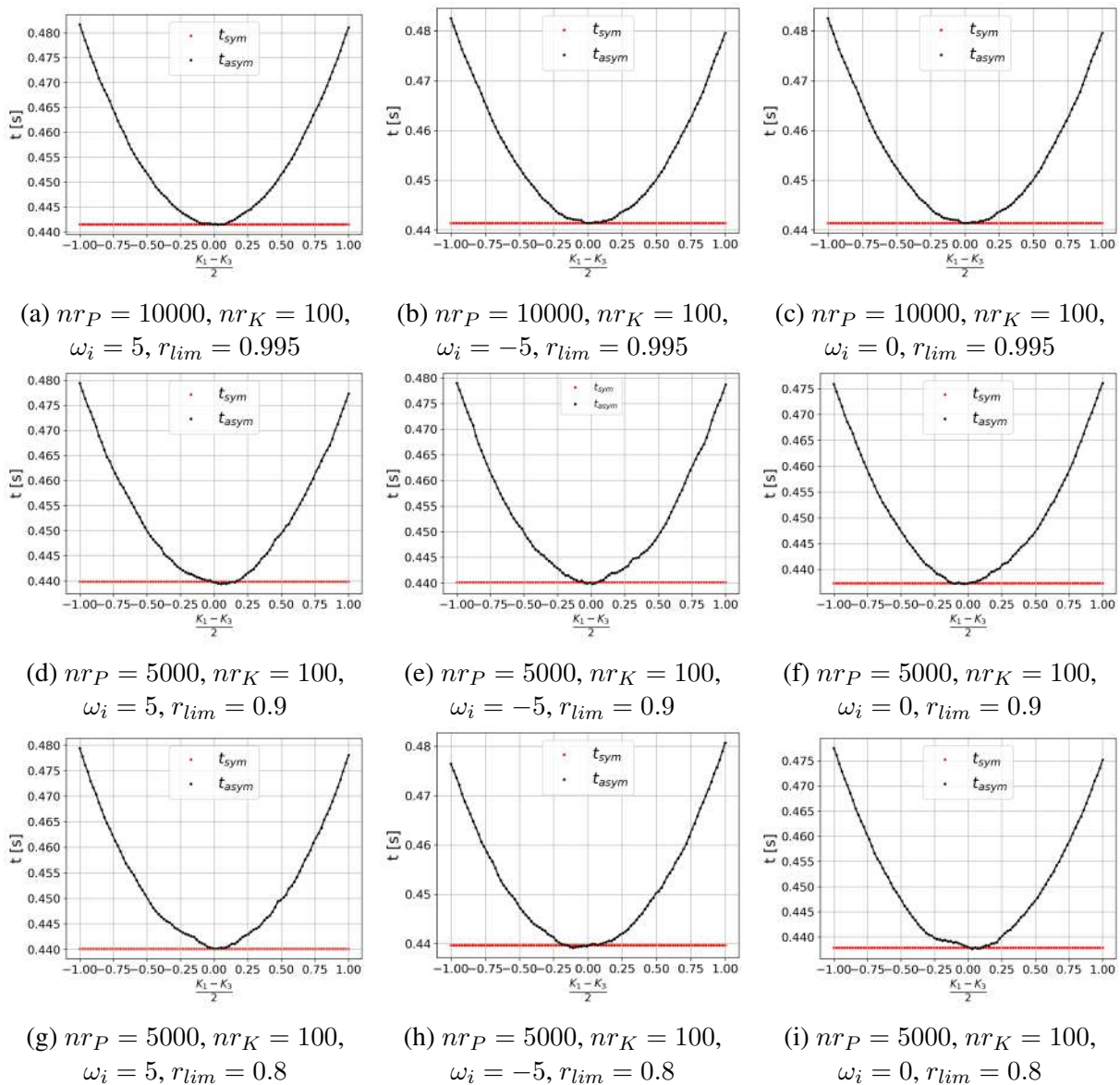
Ha szimmetriatörésről beszélhetnénk, akkor azt várnánk, hogy $\omega_i = 0$ esetén megjelenjen a $\frac{K_1 - K_3}{2} = 0$ -ra szimmetrikusan egy jól kivehető időbeni minimum a szimmetrikus piros vonalhoz képest, azaz a fekete vonal essen a piros alá, úgyhogy 0-ban legyen minimuma és időben jól kivehető legyen (karakterisztikus idővel összemérhető legyen). Az $\omega_i < 0$ esetben azt várnánk, hogy ugyanez a minimum balra, $\omega_i > 0$ esetben jobbra tolódjon el, de ugyancsak jól kivehető legyen.

Ugyancsak ezt a rendszert vizsgáltuk olyan esetben is, amikor a csatolás nem két irányban történt, hanem csak az egy irányban (3.3. ábra). A következtetésünk ebben az esetben is az volt, hogy ez nem okoz szimmetriatörést a rendszerben a teljes folyamatra nézve, az optimális paraméter kiosztás a szimmetrikus. Ekkor a rendszer egyenletei:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^n (K_{i-j} \cdot \sin(\theta_{i+j} - \theta_i)). \quad (3.4)$$

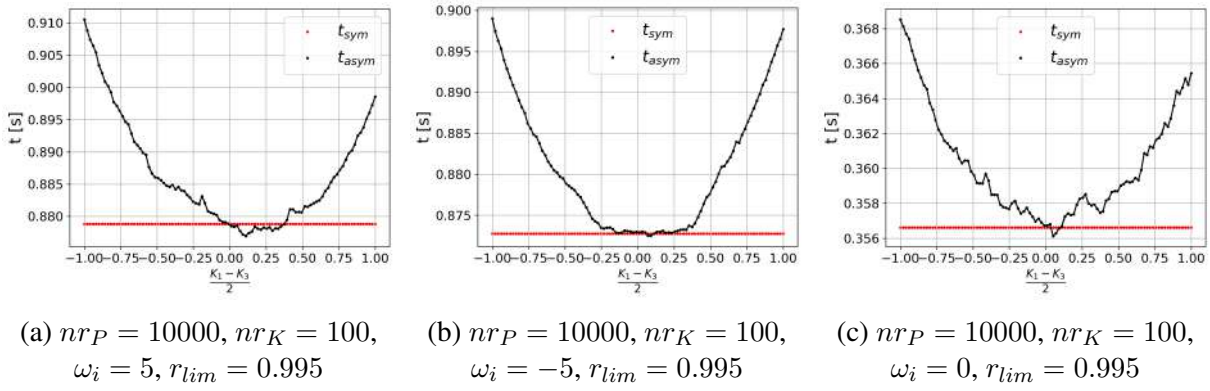
⁵A jelen rendszer esetén nem léteznek fázisblokkolt állapotok.

A 3.2. ábrán a különböző paraméterek esetére kapott átlagidők láthatók. A piros pontok által alkotott egyenes a szimmetrikus $K_1 = K_2 = K_3 = K = 2.5$ eseteknek megfelelő átlagidő, míg a fekete pontok alkotta görbe az aszimmetrikus K_i paraméterelosztásból kapott átlag szinkronidők. Egy kiosztást akkor tekintünk jobbnak (optimálisnak) a szimmetrikus esethez képest, ha a fekete görbe a piros alá esik és időskálán jelentős, karakterisztikus időhöz mérten, eltérést látunk. Az egyes képek alatt megadjuk a vizsgált rendszer lényeges paramétereit. Az ábráról egyértelműen kitűnik, hogy soha nem jelenik meg jobb eset, a teljesen szimmetrikus $K_i = 2.5$ esethez képest. Továbbá az is megfigyelhető, hogy a kezdeti ω_i oszcillátor sajátfrekvenciák nagysága és előjele sem befolyásolja az átlagokat ha elég nagy statisztikát tekintünk. Az oszcillátorok minden esetben mindkét irányban első-szomszéd szomszéd csatolás esetén lettek elemezve.



3.2. ábra. Különböző paraméterekre kapott átlag szinkronizációs idők klasszikus Kuramoto modell esetén, amikor a csatolás két irányú. Az ábrán a szinkronizációs időt (Oy tengely) ábrázoltuk a két szélső csillapítási tényező különbsége felének (Ox tengely) a függvényében.

A 3.3. ábrán a különböző paraméterek esetére kapott átlagidők láthatók csak egyirányú csatolás esetén. A piros pontok által alkotott egyenes a szimmetrikus $K_1 = K_2 = K_3 = K = 2.5$ eseteknek megfelelő átlag szinkronidők, míg a fekete pontok alkotta görbe az aszimmetrikus K_i paraméterkiosztásból kapott átlag szinkronidők változását ábrázolják. Az egyes képek alatt olvashatók a pontos kezdeti értékek az egyéb paramétereknek. A következtetés hasonló a 3.2. ábra esetén megfogalmazottal, mivel a szimmetrikus kiosztás adta idő alá eső aszimmetrikus optimumok nem konzisztensek, és az eltérés csak harmadik, illetve negyedik tizedesben jelentkezik. A csatolások iránya sem tolja el a rendszer optimumát a szimmetrikus paraméterkiosztástól.



3.3. ábra. Különböző paraméterekre kapott átlag szinkronizációs idők klasszikus Kuramoto modell esetén, amikor a csatolás egy irányú.

3.2. Stabilitás és szinkronizáció vizsgálat sajátérték analízissel

Mivel a teljes folyamatra nézve nem tudunk újat mondani a rendszerrel kapcsolatban, ezért megvizsgáltuk fixpont környékén is rendszert. A módszer alapjaiban ugyanaz, mint a 2.1. fejezetben azzal a különbséggel, hogy itt nem lineáris a rendszer csatolása. A stabilitás vizsgálati módszereit ilyen esetekben részletesen tanulmányozták már [8, 16]. Ha egy forgó vonatkoztatási rendszerből nézzük az oszcillátor sokaságot [8], akkor bevezethetünk egy változócsereit: $u_i = \theta_i - \omega t$. Ekkor a stabilitást és szinkronizációt jellemző matematikai objektum az úgynevezett *Jakobi-mátrix*, melynek elemei megadhatók mint:

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial F_i(\mathbf{u})}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{u}^*}, \quad \dot{u}_j = F_j(\mathbf{u}), \quad (3.5)$$

ahol $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_N^*)$ a fixpontnak megfelelő vektor. Ez egybeesik a 3.1. meghatározásban megadott pontokkal. $N = 3$ oszcillátor esetén első szomszéd kapcsolatban kifejtethetjük ezt az

egyenletet a következő alakra:

$$J_{ij} = K_{i+1} \cos(u_{i-1}^* - u_i^*) \delta_{i-1,j} - (K_{i+1} \cos(u_{i-1}^* - u_i^*) + K_{i-1} \cos(u_{i+1}^* - u_i^*)) \delta_{i,j} + K_{i-1} \cos(u_{i+1}^* - u_i^*) \delta_{i+1,j}. \quad (3.6)$$

Figyelembe véve a fixpontokat a Jakobi-mátrix elemei:

$$\begin{cases} J_{ii} = -K_{i+1} - K_{i-1} \\ J_{ii+1} = K_{i-1} \\ J_{ii-1} = K_{i+1} \end{cases}. \quad (3.7)$$

Ez egy 3×3 mátrixot jelent elsőrendű Kuramoto modellt tekintve. A sajátértékek analitikusan megadhatók általános alakban (részletekért lásd a Függelék D. fejezetét):

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\sqrt{(K_1)^2 - K_1 K_2 + (K_2)^2 - K_1 K_3 - K_2 K_3 + (K_3)^2} - (K_1 + K_2 + K_3) \\ \lambda_3 = \sqrt{(K_1)^2 - K_1 K_2 + (K_2)^2 - K_1 K_3 - K_2 K_3 + (K_3)^2} - (K_1 + K_2 + K_3) \end{cases}. \quad (3.8)$$

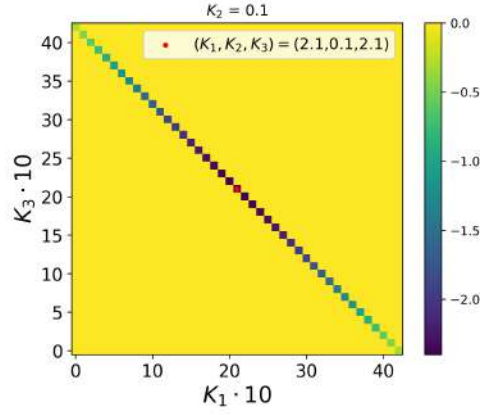
Ezek közül a lokális optimumot, $\lambda_{opt.}$, a:

$$\lambda_{opt.} = \sqrt{(K_1)^2 - K_1 K_2 + (K_2)^2 - K_1 K_3 - K_2 K_3 + (K_3)^2} - (K_1 + K_2 + K_3). \quad (3.9)$$

kifejezés adja.

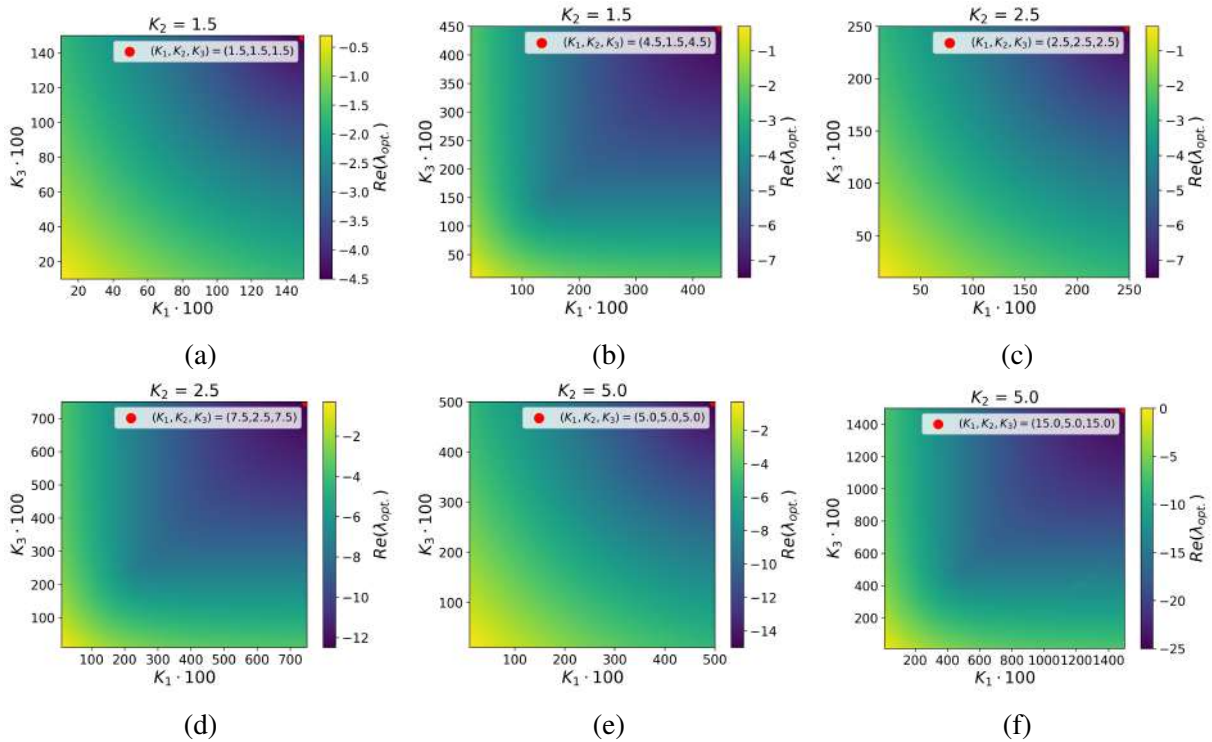
Ezeket a sajátértékeket számoltuk numerikusan, és ábrázoltuk a (K_1, K_3) paramétertérben rögzített K_2 esetén két feltételt használva. Az első feltétel az 3.1. alfejezetben leírt volt, miszerint a $\sum_{i=1}^3 K_i = konst.$ összeg állandó (3.4. ábra). Ekkor visszakaptuk az előző alfejezet eredményeit, azaz az optimális kiosztás a paramétertér közepén szimmetrikus K_1, K_3 esetén valósul meg (lásd 3.4. ábrát).

A 3.4. ábrán a színkód a $\lambda_{opt.}$ sajátértékeknek (valós részeinek) felel meg. Az egyszínű sárga terület, azaz az identikusan 0 tartomány, azon pontokat jelöli, ahol a $\sum_i K_i = konst$ nem teljesül.



3.4. ábra. Optimális szinkronizáció idő színskóddal ábrázolva, rögzített $\sum_{i=1}^3 K_i = konst.$ összeg esetén.

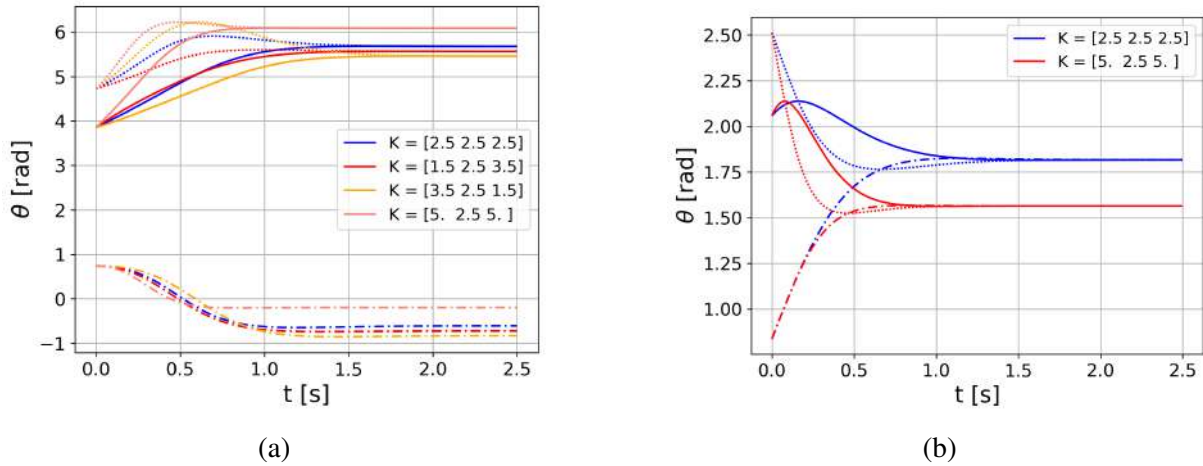
A második esetben hagytuk, hogy adott K_1, K_3 határon belül a teljes teret bejárhassuk, vagyis megszüntettük a $\sum_{i=1}^3 K_i = konst.$ feltételt. Ekkor azt tapasztaltuk, hogy fixpont körül a rendszer mindig akkor szinkronizálódik a leggyorsabban és legstabilabban, amikor K_1, K_3 a lehető legnagyobb értéket veszik fel (K_2 rögzített!). Ez nem más mint egy a főátlón elhelyezkedő pont, mely a tartomány legszélén az origótól legtávolabb helyezkedik el (3.5. ábra).



3.5. ábra. Az ábrákon a különböző paraméterek esetére kapott optimális sajátértékeket ábrázoltuk a K_1, K_3 függvényében rögzített K_2 esetén. Az optimális szinkronizációnak megfelelő megoldások a főátlón helyezkednek el a legtávolabb az origótól.

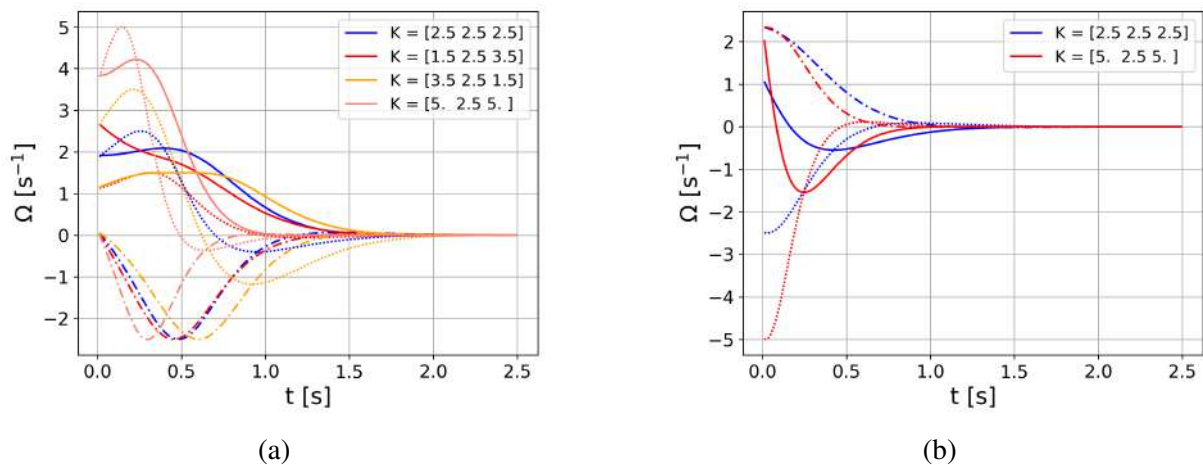
Mindezen eredmények alátámasztása érdekében megvizsgáltuk numerikus szimulációkkal

a $\theta_i(t)$ (3.6. ábra) és $\Omega_i(t)$ (3.7. ábra) idősorokat, ahol Ω_i a rendszer körfrekvenciája, ez nem feltétlenül ugyanaz, mint az oszcillátorok ω_i sajátfrekvenciái, melyek értékét állandónak tekintettük ($\omega_i = 0$). Az eredményeket kiértékelve, ezen görbék alátámasztják a fentebbi megállapításinkat. A kezdeti fázisszögek véletlenszám-generátorral lettek kiválasztva.



3.6. ábra. $\theta_i(t)$ idősorok különböző kapcsolási állandók esetén klasszikus Kuramoto rendszerben. A különböző színek különböző csatolási állandó kiosztásokat jelölnek, míg a vonaltípusok az egyes oszcillátorokat.

A 3.6. ábrán a $\theta_i(t)$ idősorok láthatók. A 3.6a. ábrát vizsgálva egyértelmű, hogy a $(K_1, K_2, K_3) = (5, 2.5, 5)$ paraméterkiosztás görbéi gyorsabban lecsengenek, mint az aszimmetrikus kiosztásra kapott görbék. A rögzített K_i összeg győzelme itt nem nyilvánvaló még, de megvizsgálva a 3.7a. ábrát ez is rögtön nyilvánvalóvá válik. Az 3.6b. ábrán a két szimmetrikus esetet vetettük össze. Láthatóan, a nagyobb K_1, K_3 paraméterkiosztás gyorsabb szinkronizációt mutat, ahogy a sajátérték vizsgálatok ezt kimutatták.



3.7. ábra. $\Omega_i(t)$ idősorok különböző kapcsolási állandók esetén, klasszikus Kuramoto rendszerben. A különböző színek különböző csatolási állandó kiosztásokat jelölnek, míg a vonaltípusok az egyes oszcillátorokat.

A 3.7. ábrán $\Omega_i(t)$ idősorokat látunk. Az ábrákat összevetve egyértelművé válik, hogy a szimmetrikus esetek gyorsabb szinkronizációt mutatnak, illetve a 3.7b. ábrával alátámasztjuk a sajátértékek analízise szolgáltatja eredményt, miszerint a nagyobb K_1, K_3 paraméterelosztás gyorsabb szinkronizációt eredményez.

4. fejezet

Tehetetlenségi (másodrendű) Kuramoto oszcillátor-sokaság

A Kuramoto modellnek számos változata létezik. Ezek közül a klasszikus változatot és vizsgálatát bemutattuk a 3. fejezetben. A következtetésünk az volt, hogy nem jelenik meg az optimális szinkronizációs dinamikára vonatkozóan szimmetria a rendszerben K_1, K_3 -ra nézve. Mindezen vizsgálatok során az inhomogenitásokat K_i csatolások tartalmazták és csillapítás nélküli egyszerű rotátorokkal dolgoztunk. Ez a megkötés leszűkítette a lehetséges paraméterek számát és látszólag a keresett effektus nem jelentkezett.

Következő lépésként egy komplexebb rendszert tekintettünk, amely ugyancsak körbecsatolt oszcillátorok topológiájával rendelkezik, de lényeges változást tartalmaz a dinamikát vezérlő egyenletekben. Az a modell, ahol a csillapítások is részei lesznek az egyenletrendszernek, implikálják másodrendű idő szerinti deriváltak megjelenését. Az ilyen modellt nevezzük *másodrendű vagy tehetetlenségi Kuramoto oszcillátor sokaságnak*. A tehetetlenségi modellt széles körben alkalmazzák nemcsak a szűk értelemben vett fizikában, de interdiszciplináris területeken is, mint például elektromos hálózatok [2], Josephson-effektus [5, 20] elemzésére és más, biológiai, szociális, hálózatelméleti rendszerek leírására is [5, 21].

A következőkben tehát egy olyan rendszert fogunk tanulmányozni, melynek egyenletei:

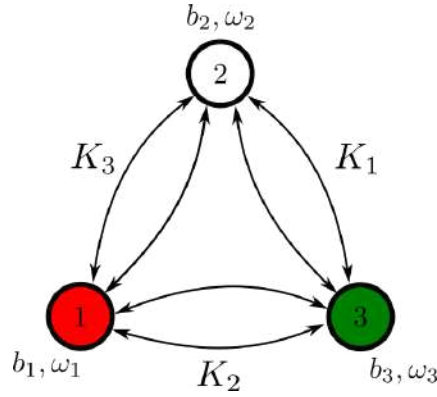
$$m_i \frac{d^2\theta_i}{dt^2} = -b_i \frac{d\theta_i}{dt} - \omega_i + \sum_{j=1}^n (K_{ii+j} \cdot \sin(\theta_{i+j} - \theta_i) + K_{ii-j} \cdot \sin(\theta_{i-j} - \theta_i)). \quad (4.1)$$

Az oszcillátorokat identikusnak tekintve, $m_i = m$, a $b_i, \omega_i, K_{ii\pm j}$ paraméterek egyszerűen átskálázhatók: $\frac{b_i}{m}, \frac{\omega_i}{m}, \frac{K_{ii\pm j}}{m} \rightarrow b_i, \omega_i, K_{ii\pm j}$. Ekkor a (4.1) egyenlet egyszerűbb alakra hozható:

$$\frac{d^2\theta_i}{dt^2} = -b_i \frac{d\theta_i}{dt} - \omega_i + \sum_{j=1}^n (K_{ii+j} \cdot \sin(\theta_{i+j} - \theta_i) + K_{ii-j} \cdot \sin(\theta_{i-j} - \theta_i)). \quad (4.2)$$

A továbbiakban ismét élünk néhány feltételezéssel, melyek hasonlóak a 3. fejezetben megfogalmazottakkal:

- $N = 3$ oszcillátor esetét vizsgáljuk;
- az oszcillátorok K_{ii+j} csatolására az 3. fejezetben megfogalmazottak szerinti jelölést alkalmazzuk: a θ_i és θ_{i-1} fázisszögekkel jellemzett oszcillátorokat a K_{i+1} -es csatolási állandó köti össze (lásd a 4.1. ábrát);
- az ω_i sajátfrekvenciákat egyforma ω -nak tekintjük, amit általában 0-ra rögzítünk;



4.1. ábra. Másodrendű, ún. tehetetlenségi Kuramoto modell sematikusan $N = 3$ oszcillátor esetén.

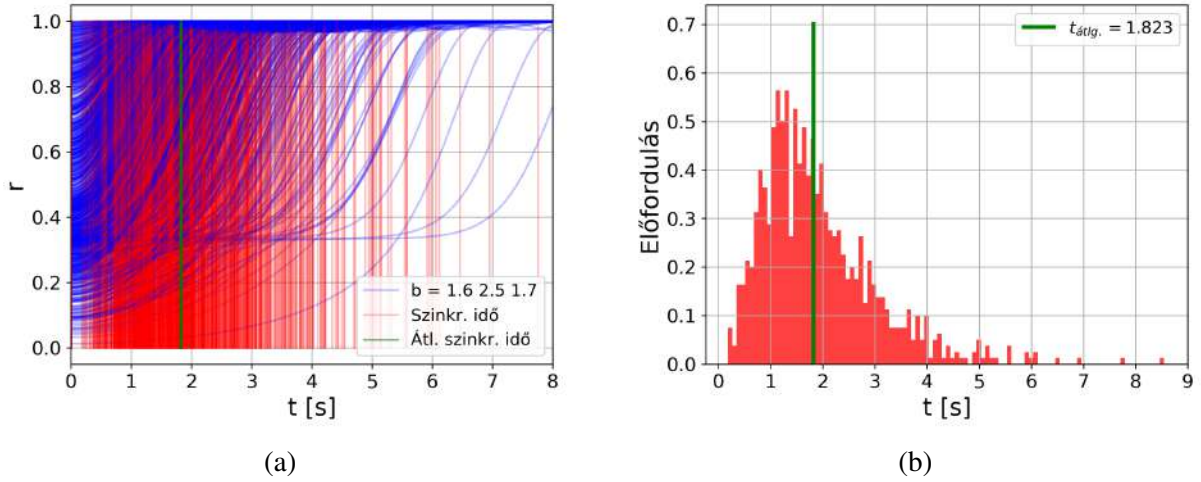
- az oszcillátorok mindkét irányban első szomszéd csatolással rendelkeznek ($n = 1$);
- általánosan rögzítjük $\forall i : K_i = K = konst.$ értékre.

4.1. Átlagidő vizsgálatok

Az átlagidő vizsgálatok módszere nem tér el sokban a 3. fejezetben bemutatottaktól. A módszer itt is az, hogy egy előre meghatározott paramétersíkot bejárunk rögzített b_2 esetén. A szinkron meglétét ekkor is a (3.3) egyenlettel megadott rendparaméter r_{lim} küszöbértékének megadásával vizsgáljuk. A kezdeti $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ fázisszögek egyenletes eloszlású véletlenszám generátorral előállítottak, míg az elsőrendű deriváltak 0-k: $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3) = (0, 0, 0)$.

Kiválasztva egy adott esetet, $r_{lim} = 0.95$, megvizsgáltuk a szinkronizációs idők eloszlását. A kutatásunknak ez egy nagyon friss iránya, így még nem foglalmaztunk meg mélyre menő következtetést ezen eredménnyel kapcsolatosan. Kiderült azonban, hogy nem egy egyenletes ám szabályos eloszlásról van szó. Egyelőre csak mint megerősítést használjuk fel.

A 4.2. ábrán szemléltetjük az $r_{lim} = 0.95$ küszöbérték eléréséhez szükséges idők eloszlását. Ez az idő széles tartományban változhat. Az egyes $r(t)$ idősorokat követve ugyanakkor az is megállapítható, hogy a legtöbb esetben a szinkronizációhoz szükséges idő a kezdőállapothoz tartozó $r(0)$ rendparaméter értékével monoton módon csökken, a nagyobb rendezettség kisebb szinkronizációs időt eredményezve. Azonban egyes kezdőállapotok esetén meglepően hosszú idő telik el a szinkronállapot eléréséig. Ennek magyarázata további vizsgálatokat igényel még. Mivel a szinkronizációs idők eloszlása egyetlen maximummal rendelkező függvény, az átlagos érték releváns információt hordoz a teljes fázistérre vonatkozóan. Az ábrán ezt a zöld függőlegessel tüntetjük fel.



4.2. ábra. $r_{lim} = 0.95$ -ös küszöbértékre kapott optimális paraméterelosztás esetén 1000 véletlen kezdő fázisra számolt szinkronizációs idők eloszlása.

A 4.2a. ábrán számos kezdőfeltételhez tartozó $r(t)$ idősor látható, melyeket feljebb magyaráztunk. A 4.2b. ábra az ehhez tartozó normált eloszlást mutatja, ugyancsak a zöld függőlegessel feltüntetve az átlagos szinkronizációhoz szükséges időt. Itt még jobban látszik, hogy a szinkronizációs idők széles tartományból vehetnek fel értéket, de a legjellemzőbb idők tartománya a $[0.5, 2.5]$ tartomány. Az átlag idő is innen vesz fel értéket.

4.2. Sajátérték vizsgálatok

A sajátérték analízisek a már bemutatott módszerekkel történnek [8, 16]. Kiszámítjuk a rendszer (3.5) egyenlettel megadott Jakobi mátrixát, és kiértékeljük fixpont körül. A rendszernek stabil fixpontja a 3.1. meghatározás szerint $\Delta\theta = \theta_i - \theta_j = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ esetben van.

A rendszer (4.2) egyenleteit elsőrendű differenciál egyenletrendszerre írva a $\mathbf{J}$ mátrix egy 6×6 -os négyzetes mátrix a következő alakkal:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{P} & -\mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Ez a mátrix hasonlít az (2.5) egyenlettel megadotthoz: $\mathbf{I}$, $\mathbf{O}$ és $\mathbf{B}$ itt is a 3×3 null és egység mátrix, illetve egy olyan négyzetes 3×3 mátrix, melynek a főátlóján a b_i értékei vannak és a többi elem 0. Viszont a $\mathbf{P}$ mátrix eltér a csatolás miatt. $\mathbf{P}$ elemei rögzített $\omega_i = 0$ esetben:

$$\begin{cases} J_{ii} = -K_{i+1} \cos(\theta_{i-1}^* - \theta_i^*) - K_{i-1} \cos(\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) = -\sum_{k' \neq i} P_{ik'} \\ J_{ii+1} = K_{i-1} \cos(\theta_{i+1}^* - \theta_i^*) \\ J_{ii-1} = K_{i+1} \cos(\theta_{i-1}^* - \theta_i^*). \end{cases} \quad (4.4)$$

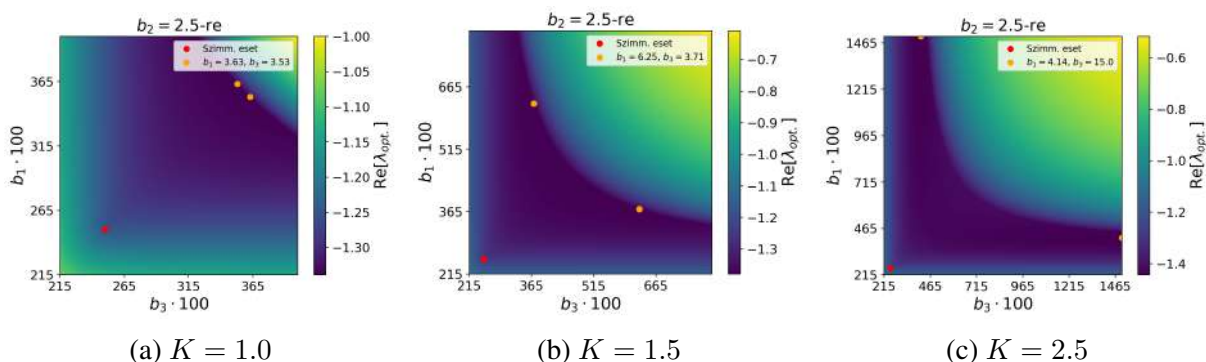
Ez az egyenlet két fontos dologban különbözik a rugó-tömb modell esetétől. Elsősorban a körcsatolás miatt itt 3 darab K_i csatolási állandó van. A másik észrevétel az, hogy eltávolodva a fixponttól, a nem lineáris csatolás miatt a fenti elsőrendű linearizálás nem lesz elegendő. A módszer tehát valóban csak a fixponthoz közeli stabilitást és konvergencia sebességet jellemzi. Fixpontban a koszinuszos tagoktól való függés megszűnik, és csak a csatolási állandóktól fog P függeni.

A sajátértékegyenlet a megszokott

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

alakban írható, ami általános esetben nem kezelhető analitikusan. Az elvégzett vizsgálatok nagyrészt azon alapszanak, hogy lerögzítjük K csatolási állandó értékét (ne felejtjük el, hogy $\forall i : K_i = K$) és b_2 értékét, majd bejárjuk a (b_1, b_3) paraméterteret egy numerikus szimuláció segítségével és kiszámítjuk az adott paraméterekre a (4.3) egyenlettel megadott mátrix sajátértékeit.

Az eddigi eredmények alapján, mind a paraméterter nagysága, mind a K és b_2 megválasztása befolyásolja az eredményt az optimális megoldások paraméterterbeli megjelenése szempontjából. Nem megfelelő nagyságú (b_1, b_3) paraméter határok között vizsgálva a megoldásokat lehetséges, hogy elkerüljük a teljesen aszimmetrikus megoldásokat, és csak főátlón elhelyezkedő, b_1, b_3 -ban szimmetrikus, b_2 -ben aszimmetrikus megoldásokat kapunk.



4.3. ábra. Optimális (b_1, b_3) paraméterelosztások változó K és rögzített b_2 esetén. A K paraméter megválasztása befolyásolja a megoldást jelentő pontok elhelyezkedését a paraméterterben, illetve a szükséges paraméterter nagyságát is, ahhoz, hogy megjelenjenek az aszimmetrikus megoldások.

A 4.3. ábrán a sajátértékek valós részeit ábrázoltuk a paraméterterben. A fixpont körüli vizsgálat azt eredményezi tehát, hogy a rugó-tömbhöz hasonlóan megjelennek a paraméterterben főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő optimumok, melyek általánosan

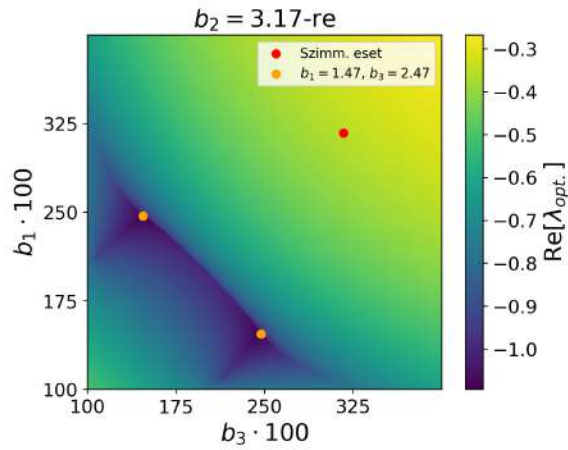
heterogén paraméterkiosztást jelentenek. A K értékének növekedésével a paramétertér határait is növelnünk kell egyidejűleg ahhoz, hogy mindkét aszimmetrikus megoldás megjelenjen

4.2.1. Párhuzam a rugó-tömb modellel

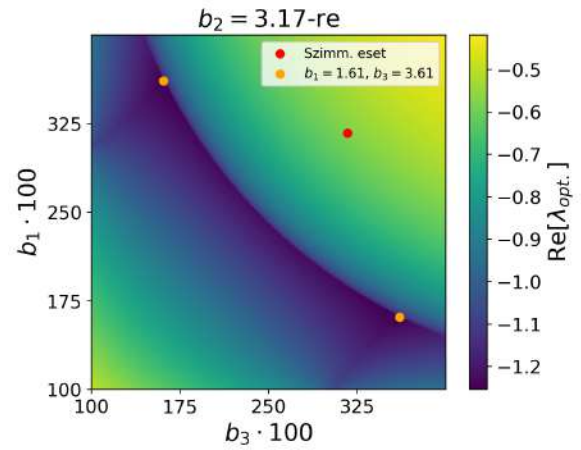
A tekintett rendszer esetén a körbecsatolás megszüntethető, ha valamelyik K_i paramétert zérónak tekintjük. Ekkor határesetben elváránk, hogy visszakapjuk megfelelő paraméter beállításokra a rugó-tömb modellt. Ilyen tekintetben is vizsgáltunk sajátérték tanulmányozás módszerével. Ezzel kapcsolatos eredményeket mutatunk be a 4.3. ábrán.

A feltevés igaznak látszik, ha összevetjük a két rendszer Jakobi mátrixát fixpont körül ((2.5) és (4.3) egyenletek). Mindezt szimulációval is ellenőrizhetjük. Motter és társai is elemezték a rugó tömb modell optimális megoldásait [2], és eredményül a $(b_1, b_2, b_3) = (1.47, 3.17, 247)$ kiosztást találták $\forall i, K_i = 1$ esetén. Vizsgálataink során ugyanarra az eredményre jutottunk (4.5. ábra).

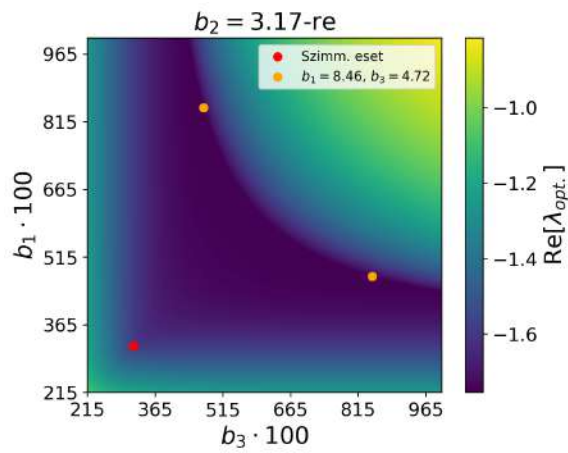
A konzisztens eredmények (lásd 4.5. ábrát) alátámasztják gondolatmenetünk helyességét, visszakapjuk a rugó-tömb modell esetében számított b_1, b_3 értékeinket adott, $b_2 = 3.17$ esetén, amely meg is egyezik *Motter et al.* által kapott eredményekkel [2].



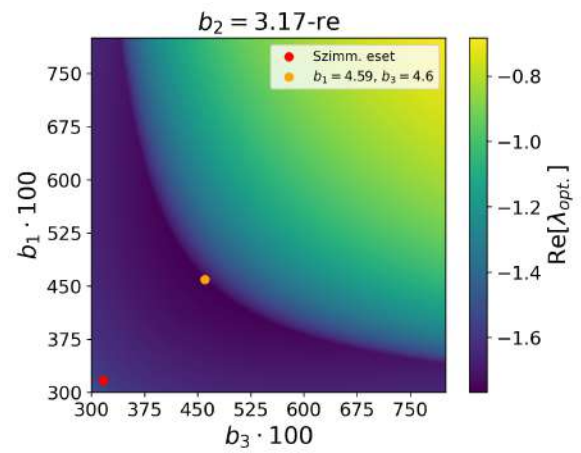
(a) $K = 1.0$



(b) $K = 1.5$

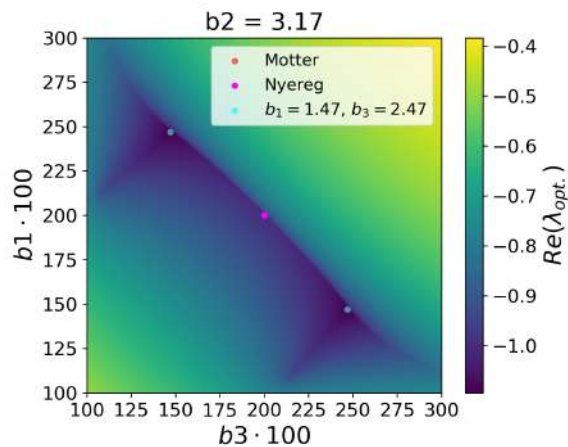


(c) $K = 2.5$

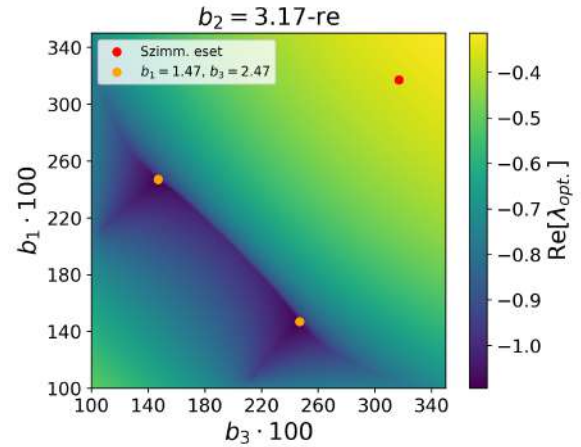


(d) $K = 5.0$

4.4. ábra. Optimális (b_1, b_3) paraméterelosztások változó b_2 és $(K_1, K_2, K_3) = (K, 0, K)$ esetén. A K_2 0-nak való rögzítésével gyakorlatilag szétkapcsoltuk a Kuramoto rendszert, és fixpont körüli határesetben egy rugó-tömb modellt vizsgálunk.



(a) Rugó tömb modell esetén kapott optimális megoldás $b_2 = 3.17$, $K_1 = K_2 = 1.0$ paraméterekre.



(b) Tehetetlenségi Kuramoto modell esetén kapott optimális megoldás $b_2 = 3.17$, $(K_1, K_2, K_3) = (1.0, 0, 1.0)$ paraméterekre.

4.5. ábra

A fenti eredmények tükrében a következők mondhatók el. Az átlagos időket vizsgálva nem egyértelmű az aszimmetria megjelenése, mivel ezek a megoldások a főátlóhoz közeliak (lásd Függelék ?? fejezetét). Ennek alapján átlagos trajektóriák esetén nem biztos, hogy a szimmetriatörés releváns. Viszont azt találjuk, hogy fixpont közelben a sajátértékek vizsgálata egyértelmű szimmetriatörést jelez a rendszerben, amely javítja a stabilitást is.

Következtetések és továbbfejlesztési lehetőségek

Következtetések

Vizsgálataink során több különböző topológiájú komplex rendszert vizsgáltunk: rugó-tömb, klasszikus és tehetetlenségi (másodrendű) Kuramoto oszcillátor sokaságot. A rugó-tömb rendszert elemezve egy optimalizációs problémára nézve egy érdekes szimmetriatörést kaptunk az optimumra egy szimmetrikus, azonos oszcillátorokból álló rendszerben.

A mi vizsgálataink újdonsága és saját eredményei, hogy egyrészt részletekbe menőbbek, mint *Motter et al.* munkái, mivel rögzített k_1, k_2 esetén nem csak adott b_2 -re végeztünk analízist. Ennek hála lettünk figyelmesek a rugó-tömb rendszer esetén a $b_2 \in [0, 2.5]$ tartományon megjelenő megoldások kollapszusának jelenségére, melyet egyéb munkánk nem tanulmányoznak. Másrészt ugyancsak mi adtuk meg annak az optimális paraméterkiosztásnak azon alternatíváját, ami a csatolási állandók variációján alapszik.

Második lépésként az elsőrendű Kuramoto rendszert analizáltuk. Az itt nyert eredmények ugyancsak sajátok, nem reprodukciók. A módszerek ugyancsak a rendszer Jakobi mátrixának sajátérték vizsgálata és az újnak mondható átlagidő módszer. Az átlagidő módszer fontossága az, hogy a teljes folyamatot jellemzi. A lényegi változás az oszcillátor sokaság topológiája és a csatolás nem-linearitása. Ebben az esetben legfennebb csak részlegesnek mondható szimmetriatörést figyeltünk meg, a paraméterek optimális kiosztása a paramétertér főátlóján helyezkedik el.

Ezen rendszer esetén tehát a munkánk során felfedeztük és bizonyosságot nyert, hogy nincsen szimmetriatörés sem átlag időket vizsgálva a teljes folyamatra, sem a sajátértékeket a fixpont körül. A rendszer optimális csillapítását és ezáltal szinkronizációját a szimmetrikus, legalábbis K_1, K_3 -ban, paraméterkiosztás szolgáltatja.

Végül másodrendű, ú.n. tehetetlenségi Kuramoto sokaság vizsgálatába kezdtünk. Az itt kapott eredményeink sajátok, nem más csoportok konklúzióinak reprodukciói.

Az átlag idő vizsgálatok látszólag ugyancsak szimmetriatörés megjelenését indokolják, de az eddigi eredmények alapján ez nem jelentős a teljes folyamatra nézve.

Fixpont körül megvizsgálva a sajátértékeket, egyértelműen megjelenik az ugyancsak nem-triviális szimmetriabontás és mind a stabilitás és a konvergencia sebesség javul aszimmetrikus paraméterkiosztás esetén. Egyelőre viszont úgy tűnik, hogy ezen szimmetriabontás csak fixpont körüli perturbációk esetén kap jelentőséget. Végül, de nem utolsó sorban, vizsgáltuk a szétcsatolt tehetetlenségi Kuramoto rendszert. Ekkor eredményeink határesetben visszaadják a rugó tömb esetén kapott megoldásokat, melyek konzisztensek más csoportok munkájával [2].

Alkalmazások

A jelenség vizsgálata nem csupán elméleti síkon fontos. Tudva levő, hogy teljesen egyforma elemek egy rendszerben csak absztrakciós szinten léteznek. Az eredmények, amennyiben általánosak, új utat jelenthetnek különböző rendszerek (energiahálózatok [2], szociális, kémiai és biológiai rendszerek [21], metronómokkal modellezett hálózatok [22]) szinkronizációjának optimalizációjára.

Továbbfejlesztési lehetőségek

A kutatás számos továbbfejlesztési lehetőséggel bír minden tanulmányozott rendszer esetén. Rugó-tömb modellt tekintve szeretnénk megvizsgálni más topológiák és nagyobb oszcillátor sokaságok eseteit. Úgyszintén fényt derítenénk a $b_2 \in [0, 2.55]$ tartományon megjelenő megoldások számának oszcillációjára.

Kuramoto rendszerek esetén főként a másodrendű rendszert vizsgálnánk tovább. Itt számos lehetőség van. Elsődlegesen a meglévő módszereinken finomítanánk, hogy tisztázni tudjuk, az átlagidők módszere mennyiben ad főátlóra eső pontoktól különbözőt. Ennek érdekében a paraméterek mintavételezését módosítjuk majd, illetve megpróbáljuk a módszert hatékonyabbá és átfogóbbá tenni.

Egy másik potenciális út a csatolások kiosztásában rejlik, azaz egy olyan rendszer elemzésében, ahol $K_{ij} \neq K_{ji}$, vagy esetleg nem elsőrendű szomszéd kapcsolással csatoltak az oszcillátorok, hanem valamely más szabály szerint. A $K_{ij} \neq K_{ji}$ szerinti csatolás egy valós és érdekes probléma, ami például elektromos hálózatok ún. *swing-egyenlettel* történő leírása esetén jelentkezik [2].

A sokaság méretének növelése és a folytonos határesetben történő folyamatok vizsgálata ilyen szempontból újszerű ezen a területen, azaz ez is egy lehetséges irány.

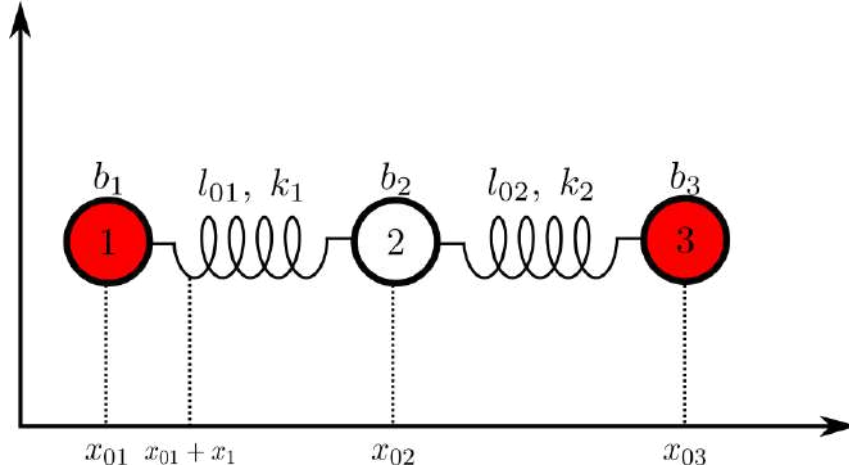
Mindezek mellet a sajátértékek fixpont körüli részletes analitikus vizsgálata is kötelező. Főként tehetetlenségi Kuramoto modell esetén vagyunk érdekeltek a probléma részletes elemzésében. Azt reméljük, hogy legalább speciális esetekben kapunk majd analitikus megoldásokat.

Függelék

A. fejezet

A rugó-tömb modell egyenletei abszolút és relatív koordináta-rendszerekben

A rendszer egy külső, abszolút koordináta-rendszerben a következőképpen nézne ki:



A.1. ábra

A jelöléseink a következők: x_{0i} jelöli az i -ik oszcillátor kezdeti koordinátáját, x_i az i -ik oszcillátor kitérését az x_{0i} -hez képest, l_{0i} az i -ik rugó kezdeti hosszát, k_i az i -ik rugó rugóállandóját elosztva az m tömeggel, b_i az i -ik oszcillátor csillapítási tényezőjét elosztva az m tömeggel. Ekkor a sokaság egyenletrendszere:

$$\begin{cases} \frac{d^2(x_{01}+x_1)}{dt^2} = -b_1 \frac{d(x_{01}+x_1)}{dt} - k_1(x_{01} + x_1 - x_{02} - x_2 + l_{01}) \\ \frac{d^2(x_{02}+x_2)}{dt^2} = -b_2 \frac{d(x_{02}+x_2)}{dt} - k_2(x_{02} + x_2 - x_{03} - x_3 + l_{02}) - k_1(x_{02} + x_2 - x_{01} - x_1 - l_{01}) \\ \frac{d^2(x_{03}+x_3)}{dt^2} = -b_3 \frac{d(x_{03}+x_3)}{dt} - k_2(x_{03} + x_3 - x_{02} - x_2 - l_{02}) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Viszont tudjuk azt, hogy x_{0i} koordináták állandók, mivel az abszolút rendszerben csak a kezdeti helyzetet jelölték. Továbbá, a kezdeti rugóhosszakat értelmezhetjük úgyis, mint ezen koordináták közti különbség, azaz $l_{0i} = x_{0i+1} - x_{0i}$. Ekkor ez egyenletek:

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} = -b_1 \frac{dx_1}{dt} - k_1(x_{01} + x_1 - x_{02} - x_2 + (x_{02} - x_{01})) \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} = -b_2 \frac{dx_2}{dt} - k_2(x_{02} + x_2 - x_{03} - x_3 + (x_{03} - x_{02})) - k_1(x_{02} + x_2 - x_{01} - x_1 - (x_{02} - x_{01})) \\ \frac{d^2x_3}{dt^2} = -b_3 \frac{dx_3}{dt} - k_2(x_{03} + x_3 - x_{02} - x_2 - (x_{03} - x_{02})) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -b_1 \frac{dx_1}{dt} - k_1(x_1 - x_2) \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -b_2 \frac{dx_2}{dt} - k_2(x_2 - x_3) - k_1(x_2 - x_1) \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= -b_3 \frac{dx_3}{dt} - k_2(x_3 - x_2) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Összevetve (1.4) és (A.2) egyenleteket, láthatjuk, hogy ugyanazok, és függetlenek l_{0i} kezdeti hosszaktól.

B. fejezet

A λ sajátérték optimális kiválasztásának matematikai érvelése

A (1.4) egyenletrendszert visszaírva elsőrendűvé, a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 & u_4 &= \dot{x}_1 \\ u_2 &= x_2 & u_5 &= \dot{x}_2 \\ u_3 &= x_3 & u_6 &= \dot{x}_3 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_4 \\ \dot{u}_2 = u_5 \\ \dot{u}_3 = u_6 \\ \dot{u}_4 = -b_1 u_4 - k_1(u_1 - u_2) \\ \dot{u}_5 = -b_2 u_5 - k_1(u_2 - u_1) - k_2(u_2 - u_3) \\ \dot{u}_6 = -b_3 u_6 - k_2(u_3 - u_2) \end{cases} \Rightarrow \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -b_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_1 - k_2 & k_2 & 0 & -b_2 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 & 0 & -b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{P} & -\mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Azaz a rendszer $\mathbf{M}$ mátrixa egy blokk mátrix, amely $\mathbf{O}$ harmadrendű nullmátrixból, $\mathbf{I}$ harmadrendű egység mátrixból, $\mathbf{B}$ 3×3 -as négyzetes diagonális mátrixból, melynek átlóján a csillapítási együtthatók szerepelnek és $\mathbf{P}$ 3×3 -as négyzetes mátrixból, amelynek elemei a rugóállandók, áll.

Az általánosan (B.3) egyenlettel jellemezhető rendszer esetén az optimális λ sajátértéket úgy adjuk meg, hogy megoldjuk a rendszerhez tartozó mátrix sajátértékegyenletét és a megoldásokból kiválasztjuk a maximális, nem-nulla valós résszel rendelkezőt. Ez a sajátértékegyenlet általánosan, analitikusan nem megoldható. Egy hatod fokú polinomot eredményez, emiatt numerikusan kezeljük a problémát.

A mátrix szimmetria-tulajdonságaiból kifolyólag a λ_i sajátértékek megoldáshalmaza egy identikusan 0 megoldást, egy, csak valós megoldást, illetve négy darab komplex, páronként

komplex konjugált megoldást tartalmaz. Az optimális megoldás kiválasztására az **1. fejezetben** megadott (1.2) definíciót használjuk. Hogy ezen meghatározást belássuk, tekintsük a következő esetet: legyen egyetlen oszcillátor, amit az alábbi egyenlet vezérel:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x = 0 \quad (\text{B.4})$$

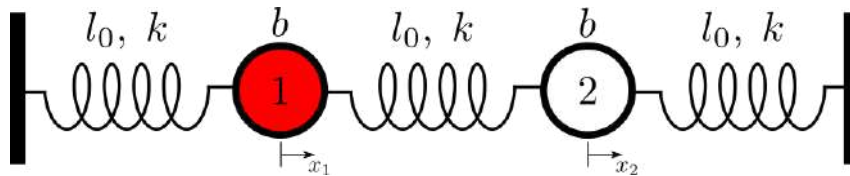
Ezen egyenlet megoldása $x(t) = e^{rt}$ alakú. A r értéke *karakterisztikus egyenlet* segítségével adható meg. Átskálázva a paramétereket az **1. fejezetben** látottak szerint $b = \frac{\beta}{m}$, $k = \frac{\gamma}{m}$, a karakterisztikus egyenlet:

$$r^2 + br + k = 0, \quad (\text{B.5})$$

aminek a megoldása:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2} \quad (\text{B.6})$$

Az szinkronizáció azt jelenti, hogy x_i , $i = \overline{1,3}$ kitérés állandó, tehát a rezgés lecseng. Ez akkor történik meg, ha r a lehető legnegatívabb értéket veszi fel. Így megérthető a (1.2) definíció. Az (1.1) definíció még magyarázatra szorul, mivel eddig nem láttuk miért esik egybe az r éppen a λ_i sajátértékekkel. Ennek megértéséhez ismét egy példát tekintünk [23]. Legyen két oszcillátor két fal között az alábbi ábra szerint elhelyezve:



B.1. ábra

A rendszer egyenletrendszere, azonos tömegeket feltételezve és az ábrán látható paramétereket használva:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\beta\dot{x}_1 - 2\gamma x_1 + \gamma x_2 \\ m\ddot{x}_2 &= -\beta\dot{x}_2 - 2\gamma x_2 + \gamma x_1 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

A két egyenletet végigosztva m -el és bevezetve a már ismert jelöléseket, illetve összeadva, majd kivonva egymásból őket:

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = -b \frac{d(x_1 + x_2)}{dt} - k(x_1 + x_2) \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = -b \frac{d(x_2 - x_1)}{dt} - 3k(x_2 - x_1) \quad (\text{B.9})$$

Bevezetve két új változót:

$$s_1 = x_1 + x_2 \quad (B.10)$$

$$s_2 = x_2 - x_1$$

a két karakterisztikus egyenlet könnyen megoldható és a (B.5) egyenletben bevezetett r megadható egyszerűen, mint:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4k}}{2} \quad (B.11)$$

$$r_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 12k}}{2} \quad (B.12)$$

A továbbiakban írjuk át a (B.7) rendszert elsőrendűvé:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 & u_3 &= \dot{x}_1 \\ u_2 &= x_2 & u_4 &= \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (B.13)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_3 \\ \dot{u}_2 = u_4 \\ \dot{u}_3 = -b_1 u_3 - k(2u_1 - u_2) \\ \dot{u}_4 = -b_3 u_4 - k(2u_2 - u_1) \end{cases} \Rightarrow \quad (B.14)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2k & k & -b & 0 \\ k & -2k & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (B.15)$$

A mátrix sajátértékegyenlete:

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (B.16)$$

A determinánst kiszámolva:

$$b^2 \lambda^2 + 2b \lambda^3 + 4bk \lambda + \lambda^4 + 3k^2 + 4k \lambda^2 = 0 \quad (B.17)$$

egyenlethez jutunk. Ezt szorzat alakra hozva

$$(k + b\lambda + \lambda^2)(3k + b\lambda + \lambda^2) = 0 \quad (B.18)$$

a megoldások:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2} \left(-b - \sqrt{b^2 - 12k} \right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left(-b + \sqrt{b^2 - 12k} \right) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left(-b - \sqrt{b^2 - 4k} \right) \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2} \left(-b + \sqrt{b^2 - 4k} \right)\end{aligned}\tag{B.19}$$

Azaz a λ_i , $i = \overline{1,4}$ megegyezik az r_i , $i = \overline{1,4}$ -vel. Tehát az egyenletek megoldásai a rendszer mátrixának sajátértékei. Az eredmény tetszőleges rendszerre általánosítható.

C. fejezet

A rugó tömb modell sajátértékeinek kiszámítása analitikusan, speciális esetben

Használva a B. fejezetben bevezetett jelöléseket az egyenletrendszer és a hozzátartozó mátrix abban a speciális esetben, amikor a k_i -k a változtatható paraméterek és $b - i = b$:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 & u_4 &= \dot{x}_1 \\ u_2 &= x_2 & u_5 &= \dot{x}_2 \\ u_3 &= x_3 & u_6 &= \dot{x}_3 \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_4 \\ \dot{u}_2 = u_5 \\ \dot{u}_3 = u_6 \\ \dot{u}_4 = -bu_4 - k_1(u_1 - u_2) \\ \dot{u}_5 = -bu_5 - k_1(u_2 - u_1) - k_2(u_2 - u_3) \\ \dot{u}_6 = -bu_6 - k_2(u_3 - u_2) \end{cases} \Rightarrow \tag{C.2}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -b & 0 & 0 \\ k_1 & -k_1 - k_2 & k_2 & 0 & -b & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

A sajátértékegyenlet:

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -b - \lambda & 0 & 0 \\ k_1 & -k_1 - k_2 & k_2 & 0 & -b - \lambda & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 & 0 & -b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{C.4}$$

Ezt kibontva:

$$\begin{aligned} &\lambda^6 + 3b\lambda^5 + 3b^2\lambda^4 + 2k_1\lambda^4 + 2k_2\lambda^4 + b^3\lambda^3 + 4bk_1\lambda^3 + \\ &+ 4bk_2\lambda^3 + 2b^2k_1\lambda^2 + 2b^2k_2\lambda^2 + 3k_1k_2\lambda^2 + 3bk_1k_2\lambda = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Rendezve és csoportosítva:

$$\lambda(\lambda + b) (3k_1k_2 + 2bk_1\lambda + 2bk_2\lambda + b^2\lambda^2 + 2k_1\lambda^2 + 2k_2\lambda^2 + 2b\lambda^3 + \lambda^4) = 0 \quad (\text{C.6})$$

Az egyenlet három esetben lesz zérus:

$$\lambda_1 = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$\lambda_2 + b = 0 \quad (\text{C.8})$$

$$(3k_1k_2 + 2bk_1\lambda + 2bk_2\lambda + b^2\lambda^2 + 2k_1\lambda^2 + 2k_2\lambda^2 + 2b\lambda^3 + \lambda^4 = 0 \quad (\text{C.9})$$

(C.9) egyenlet mindkét oldalából kivonva $3k_1k_2 - (k_2 + k_1)^2$ -t:

$$(k_2 + k_1)^2 + \lambda(2bk_1 + 2bk_2) + \lambda^2(b^2 + 2k_1 + 2k_2) + 2b\lambda^3 + \lambda^4 = (k_2 + k_1)^2 - 3k_1k_2 \quad (\text{C.10})$$

Teljes négyzeteket kialakítva:

$$(k_1 + k_2 + b\lambda + \lambda^2)^2 = (k_2 + k_1)^2 - 3k_1k_2 \Rightarrow \quad (\text{C.11})$$

$$k_1 + k_2 + b\lambda + \lambda^2 = \pm \sqrt{(k_2 + k_1)^2 - 3k_1k_2} \quad (\text{C.12})$$

Az (C.12) egyenlet mindkét feléhez hozzáadunk $\frac{b^2}{4}$ -t, illetve kivonunk $k_1 + k_2$ -t, majd teljes négyzetet alakítunk ki:

$$\lambda^2 + b\lambda + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - k_1 - k_2 \pm \sqrt{(k_2 + k_1)^2 - 3k_1k_2} \quad (\text{C.13})$$

$$\left(\lambda + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - k_1 - k_2 \pm \sqrt{(k_2 + k_1)^2 - 3k_1k_2} \Rightarrow \quad (\text{C.14})$$

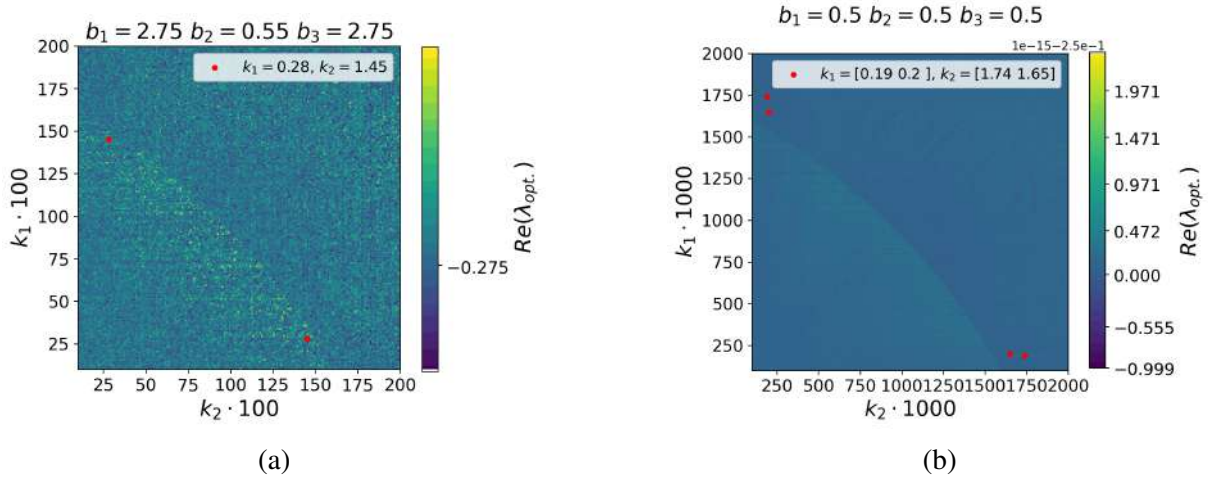
$$\lambda + \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - k_1 - k_2 \pm \sqrt{(k_2 + k_1)^2 - 3k_1k_2}} \quad (\text{C.15})$$

Mindkét oldalból kivonva $\frac{b}{2}$ -t a λ_{3-6} gyökök:

$$\lambda_{3-6} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - k_1 - k_2 \pm \sqrt{(k_2 + k_1)^2 - 3k_1k_2}} \quad (\text{C.16})$$

Megvizsgálva az eredményt, komplex részt csak a $\sqrt{\frac{b^2}{4} - k_1 - k_2 + \sqrt{(k_2 + k_1)^2 - 3k_1k_2}}$

tag adhat, azaz ebben az esetben a sajátértékek négyszeresen elfajultak valós részt tekintve. Mivel a paraméterterképeken csak ezek szerepelnek, ezzel és a numerikus hibahatárral magyarázhatók azok a furcsa paraméter-portrék, amiket megegyező b_i -k esetén kapunk, mint például ez:



C.1. ábra

C.1. Megjegyzés. Az ábra skáláján a -0.275 -ös érték az egyes pontok közötti eltérést mutatja. A teljes ábra a numerikus pontosságunk határán 10^{-15} nagyságrend környékén van.

D. fejezet

A sajátértékek kiszámítása elsőrendű Kuramoto modell esetén

Már láttuk, hogy egy rendszer sajátértékei nem minden esetben adhatók meg analitikusan. A klasszikus Kuramoto rendszer esetében, azonban ezek egzaktul kiszámíthatók. Az alábbiakban megadjuk ezen számítás részleteit.

A stabilitás vizsgálathoz szükséges Jakobi-mátrix:

$$\begin{cases} J_{ii} = -K_{i+1} - K_{i-1} \\ J_{ii+1} = K_{i-1} \\ J_{ii-1} = K_{i+1} \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Ennek sajátértékegyenlete:

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (\text{D.2})$$

Azaz:

$$\left| \begin{pmatrix} -K_2 - K_3 & K_3 & K_2 \\ K_3 & -K_1 - K_3 & K_1 \\ K_2 & K_1 & -K_1 - K_2 \end{pmatrix} - \lambda \mathbf{I} \right| = 0 \quad (\text{D.3})$$

Kifejtve:

$$-\lambda^3 - 2\lambda^2 K_1 - 2\lambda^2 K_2 - 3\lambda K_1 K_2 - 2\lambda^2 K_3 - 3\lambda K_1 K_3 - 3\lambda K_2 K_3 = 0 \quad (\text{D.4})$$

Csoportosítjuk az egyenletet λ szerint, és beszorozva -1 -el:

$$\begin{aligned} -\lambda^3 + \lambda^2(-2K_1 - 2K_2 - 2K_3) + \lambda(-3K_1 K_2 - 3K_1 K_3 - 3K_2 K_3) &= 0 \\ \lambda(\lambda^2 + 2\lambda K_1 + 2\lambda K_2 + 3K_1 K_2 + 2\lambda K_3 + 3K_1 K_3 + 3K_2 K_3) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Innen megkapjuk az egyik megoldást:

$$\lambda_1 = 0 \quad (\text{D.6})$$

A maradék megtalálásához csoportosítjuk a szorzat második tagját λ szerint:

$$\lambda^2 + 3K_1 K_2 + 3K_1 K_3 + 3K_2 K_3 + \lambda(2K_1 + 2K_2 + 2K_3) \quad (\text{D.7})$$

$$\lambda^2 + \lambda(2K_1 + 2K_2 + 2K_3) = -3K_1 K_2 - 3K_1 K_3 - 3K_2 K_3 \quad (\text{D.8})$$

Az egyenlet mindkét feléhez $\frac{1}{4} (2K_1 + 2K_2 + 2K_3)^2$ -t adva:

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 + \lambda (2K_1 + 2K_2 + 2K_3) + \frac{1}{4} (2K_1 + 2K_2 + 2K_3)^2 = \\
& = -3K_1K_2 - 3K_1K_3 - 3K_2K_3 + \frac{1}{4} (2K_1 + 2K_2 + 2K_3)^2 \\
& \quad \left(\lambda + \frac{1}{2} (2K_1 + 2K_2 + 2K_3) \right)^2 = \\
& = -3K_1K_2 - 3K_1K_3 - 3K_2K_3 + \frac{1}{4} (2K_1 + 2K_2 + 2K_3)^2 \\
& \lambda + \frac{1}{2} (2K_1 + 2K_2 + 2K_3) = \pm \sqrt{-3K_1K_2 - 3K_1K_3 - 3K_2K_3 + \frac{1}{4} (2K_1 + 2K_2 + 2K_3)^2}
\end{aligned}$$

Az egyenlet mindkét oldalát csökkentjük $\frac{1}{2} (2K_1 + 2K_2 + 2K_3)$ -vel, és rendezve megkapjuk a maradék két sajátértéket:

$$\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{(K_1)^2 - K_1K_2 + (K_2)^2 - K_1K_3 - K_2K_3 + (K_3)^2} - (K_1 + K_2 + K_3) \quad (\text{D.9})$$

Hivatkozások

- [1] Attila Gergely és tsai. „Flickering candle flames and their collective behavior”. *Scientific Reports* (2020). DOI: 10.1038/s41598-020-78229-x. URL: <https://doi.org/10.1038/s41598-020-78229-x>.
- [2] Ferenc Molnar, Takashi Nishikawa és Adilson E. Motter. „Asymmetry underlies stability in power grids”. *Nature Communications* 12.1 (2021). DOI: 10.1038/s41467-021-21290-5. URL: <https://doi.org/10.1038/s41467-021-21290-5>.
- [3] Yuanzhao Zhang, Vito Latora és Adilson E. Motter. „Unified treatment of synchronization patterns in generalized networks with higher-order, multilayer, and temporal interactions”. *Communications Physics* 4.1 (2021). DOI: 10.1038/s42005-021-00695-0. URL: <https://doi.org/10.1038/s42005-021-00695-0>.
- [4] Ferenc Molnar, Takashi Nishikawa és Adilson E. Motter. „Network experiment demonstrates converse symmetry breaking”. *Nature Physics* 16.3 (2020), 351–356. old. DOI: 10.1038/s41567-019-0742-y. URL: <https://doi.org/10.1038/s41567-019-0742-y>.
- [5] Steven Strogatz. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Hyperion Press, 2003. ISBN: 0786868449.
- [6] Z. Néda és tsai. „Physics of the rhythmic applause”. *Physical Review E* 61.6 (2000), 6987–6992. old. DOI: 10.1103/physreve.61.6987. URL: <https://doi.org/10.1103/physreve.61.6987>.
- [7] Juan Acebron és tsai. „The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena”. *Reviews of Modern Physics* 77 (2005. jan.), 137. old.
- [8] Károly Dénes, Bulcsú Sándor és Zoltán Néda. „Pattern selection in a ring of Kuramoto oscillators”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 78 (2019), 104868. old. DOI: 10.1016/j.cnsns.2019.104868. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104868>.
- [9] Ji Peng. „Synchronization in the second-order Kuramoto model”. Dissz. 2015. nov.
- [10] Steven H Simon. *The Oxford solid state basics*. Oxford, UK: Oxford Univ. Press, 2013. URL: <https://cds.cern.ch/record/1581455>.
- [11] Ferenc Jari-Szabo és Zoltan Neda. *Earthquake Model Confirms Traffic Jams Caused by Tiredness*. 2011. DOI: 10.48550/ARXIV.1111.1803. URL: <https://arxiv.org/abs/1111.1803>.
- [12] Ferenc Jari-Szabó, Bulcsú Sándor és Zoltán Néda. „Spring-block model for a single-lane highway traffic”. *Open Physics* 9.4 (2011). DOI: 10.2478/s11534-011-0007-6. URL: <https://doi.org/10.2478/s11534-011-0007-6>.

- [13] Stephen Brown, C. Scholz és John Rundle. „A simplified spring-block model of earthquakes”. *Geophysical Research Letters - GEOPHYS RES LETT* 18 (1991. febr.), 215–218. old. DOI: 10 . 1029/91GL00210.
- [14] R. Burridge és L. Knopoff. „Model and theoretical seismicity”. *Bulletin of the Seismological Society of America* 57.3 (1967. jún.), 341–371. old. ISSN: 0037-1106. DOI: 10 . 1785 / BSSA0570030341. eprint: <https://pubs.geoscienceworld.org/ssa/bssa/article-pdf/57/3/341/5349555/bssa0570030341.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1785/BSSA0570030341>.
- [15] C. F. Richter B. Gutenberg. „Magnitude and energy of earthquakes”. *Ann. Geophys* 9 (1956. nov.).
- [16] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Westview Press, 2000.
- [17] Takashi Nishikawa és Adilson E. Motter. „Symmetric States Requiring System Asymmetry”. *Physical Review Letters* 117.11 (2016). DOI: 10 . 1103 / physrevlett . 117 . 114101. URL: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevlett.117.114101>.
- [18] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Dover Books on Chemistry Series. Dover Publications, 2003. ISBN: 9780486428819. URL: <http://books.google.de/books?id=4ADt7sm05Q8C>.
- [19] Yoshiki Kuramoto. „Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators”. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*. Szerk. Huzihiro Araki. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1975, 420–422. old. ISBN: 978-3-540-37509-8.
- [20] B.D. Josephson. „Possible new effects in superconductive tunnelling”. *Physics Letters* 1.7 (1962), 251–253. old. ISSN: 0031-9163. DOI: [https://doi.org/10.1016/0031-9163\(62\)91369-0](https://doi.org/10.1016/0031-9163(62)91369-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031916362913690>.
- [21] Alex Arenas és tsai. „Synchronization in complex networks”. *Physics Reports* 469.3 (2008), 93–153. old. DOI: 10 . 1016 / j . physrep . 2008 . 09 . 002. URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.physrep.2008.09.002>.
- [22] Boda, Sz., Davidova, L. és Néda, Z. „Order and disorder in coupled metronome systems”. *Eur. Phys. J. Special Topics* 223.4 (2014), 649–663. old. DOI: 10 . 1140 / epjst / e2014 - 02131 - 1. URL: <https://doi.org/10.1140/epjst/e2014-02131-1>.
- [23] Michael Richmond. „Damping and coupled oscillators”. (2019). URL: http://spiff.rit.edu/classes/phys283/lectures/coupled_rev/coupled_rev.html.