

XXV. Reál– és Humántudományi
Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia
2022. május 19–22.



Poincaré sorok gráfokon

Szerző:

Nagy Anita–Enikő

Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Matematika és Informatika Kar,
Matematika szak, III. év

Témavezető:

dr. László Tamás

Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Matematika és Informatika Kar

Kolozsvár
2022. április 26.

Kivonat

Kutatási témánk az algebrai gráfelmélet, a kombinatorika és az algebrai geometria matematikai tudomány területek határán helyezkedik el, ezek friss kutatásaiból és eredményeiből merítkezik

A dolgozat a Poincaré sorok gráfelméleti aspektusait vizsgálja. A Poincaré sort gráfokra M. Manjunath értelmezte 2020-ban megjelent kéziratában a R. Bacher, P. de La Harpe, T. Nagnibeda által kidolgozott gráfelméleti divizorelmélet segítségével. A dolgozat célja ezen Poincaré sorok megértése és különböző gráfokon való kiszámolása.

A dolgozat elején a gráfokon értelmezett divizorelmélet alapjait mutatjuk be és tárgyaljuk példákon keresztül. Ezt követően a gráfok Jacobi csoportját fogjuk vizsgálni, amely egy véges Abel csoport és számossága megadja a gráf komplexitását, vagyis feszítőfáinak számát. A dolgozat harmadik részében a gráfok divizorjain értelmezett Poincaré sorokat vizsgáljuk. Manjunath igazolja, hogy ezek a Poincaré sorok racionálisak, vagyis polinomok hányadosaként állíthatóak elő, ez lehetőséget ad arra, racionális függvényekre alkalmazott módszerekkel és algoritmusokkal tudjuk vizsgálni őket.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	4
2. Gráfokon értelmezett divizorok	7
2.1. Gráfok divizorjai	7
2.1.1. Racionális függvények és principális divizorok	10
2.1.2. Divizorok rangja	13
2.1.3. A kanonikus divizor és a Riemann–Roch tétel	15
2.2. A Jacobi csoport	15
3. Gráfokon értelmezett Poincaré sorok	22
3.1. Poincaré sorok	22
3.2. Racionális poliéderek generátorfüggvénye és a Brion tétel	23
3.3. Poincaré sorok racionalitása	28
3.4. A nulladfokú divizorok esete	34
3.4.1. A $D_i = v_i - v_k$ eset letárgyalása	35
3.5. A $D_i = v_i$ divizorokhoz rendelt teljes Poincaré sor	41
3.6. Poincaré sorok súlyozott gráfokon	46
3.6.1. Hurokélet tartalmazó gráfok	46
3.6.2. Súlyozott gráfok	47

1. fejezet

Bevezető

A matematikában gráfnak nevezzük az olyan matematikai struktúrát, amely csúcsokból és élekből épül fel úgy, hogy minden élre legalább egy, de legtöbb két csúcs helyezkedik. A gráfelmélet ezen struktúrák megértésével és tanulmányozásával foglalkozik.

A gráfelmélet első írásos története 1736–ig nyúlik vissza, amikor L. Euler publikálta a Königsbergi hidak problémáját. Kezdetben nem történtek kifejezetten komoly kutatások a gráfelméletben, több, mint egy évszázad kellett elteljen Euler publikációja után, hogy J.B. Lising bevezesse a topológia fogalmát, és A. Cayley [7] elkezdje tanulmányozni a gráfok egy sajátos osztályát, a fákat. Cayley tanulmánya hozzájárult az elméleti kémia fejlődéséhez, így egyre többen foglalkoztak gráfelméleti kutatásokkal. Az évek során nagyon sok kérdésre adott választ a gráfelmélet, ma már a reál- és társadalomtudományok területein is fontos szerepet játszik.

A gráfok algebrai módszerekkel történő vizsgálatával az algebrai gráfelmélet foglalkozik, amely kapcsolatot teremt a gráfok tulajdonságai és például a mátrixok, polinomok, rácsok, csoportok *stb.* tulajdonságai között. Például tekintve egy összefüggő gráfot, bevezethetjük a gráfhoz rendelt Jacobi csoportot, amely véges és számossága megadja a gráf feszítőfáinak számát. Továbbá geometriai megfontolások alapján, gráfokon is értelmezhetünk divizorokat, amelyek egy a csúcsok által generált szabad Abel csoportot alkotnak, valamint egyik fő elemét képezik a jelen dolgozatnak.

Dolgozatunk 2. fejezetében az előbbieken említett divizorcsoportot tanulmányozzuk. Egy gráfon értelmezett divizorhoz különböző fogalmakat vezetünk be, amelyeket majd példák segítségével is illusztrálunk. Például bevezetve egy divizor fokát, értelmezhető a nulladfokú divizorok részcsoportja, vagy bevezetve a divizoron értelmezett racionális függvényeket, értelmezhető a principális csoport, amely egy lineáris ekvivalenciát értelmez a divizorok között, így megteremt a lehetőséget a geometriából ismert Riemann–Roch tétel gráfelméleti adaptálására ([1],[4]). A 2. fejezet második részében a gráfhoz rendelt Jacobi csoporttal és tulajdonságaival foglalkozunk és elhelyezzük a divizorelmélet kontextusában.

Dolgozatunk fő témája a gráfokhoz rendelt Poincaré sorok vizsgálata.

A Poincaré sorokat először H. Poincaré használta geometriai kutatásai során, amely majd a homotópia és homológia absztrakt topológiai értelmezéséhez vezetett. Napjainkban a Poin-

1. FEJEZET: BEVEZETŐ

caré (vagy generátor) sorok már a matematika különböző területeinek fontos szereplői. Olyan sorokról van szó, amelyek együtthatói valamilyen diszkrét információt kódolnak a vizsgálandó matematikai objektumról. Az a cél, hogy az objektum új tulajdonságairól kapjunk információt, dekódolva ezeket az objektumhoz rendelt Poincaré sorból. A geometria különböző területein értelmezett Poincaré sorokkal több matematikus is foglalkozott intenzívebben. A teljesség igénye nélkül, mint a dolgozat egyik motivációs tényezője, megemlítenénk A. Némethi [12] 2008-as munkáját, majd T. László és A. Némethi [10] 2014-es munkáját, amelyben vizsgálják a szerzők, hogy komplex felületszingularitásokhoz rendelt Poincaré sorok hogyan dekódolják az adott szingularitás egyik legfontosabb invariánsát, a geometriai génuszát, és a szingularitás topológiáját meghatározó 3-sokaság Seiberg-Witten invariánsát.

A gráfok esetében M. Manjunath [11] 2020-as cikkében értelmezi a gráf divizorjainak egy véges halmazához rendelt Poincaré sort, majd igazolja az így bevezetett Poincaré sorok racionalitását. Ez azt jelenti, hogy a Poincaré sor polinomok hányadosaként állítható elő azokban a pontokban, ahol abszolút konvergens. A Poincaré sor racionalitása lehetőséget ad arra, hogy a gráfot a Poincaré sorral „megegyező” racionális függvényre alkalmazott módszerekkel és algoritmusokkal tudjuk vizsgálni.

Dolgozatunk 3. fejezete ezen Poincaré sorok megértésére és tanulmányozására épül. A fejezet három nagyobb egységre bomlik. Az első egységben a Poincaré sorok értelmezését követően racionális poliéderek generátorfüggvényeit és azok tulajdonságát vizsgáljuk. Tárgyalunk néhány fontos eredményt, amelyek szükségesek a dolgozat további részében.

A fejezet második egységében kijelentjük és bizonyítjuk a Poincaré sorok racionalitására vonatkozó tételt. Ezt követően két különböző esetben, a $D_i = v_i - v_k$ és $D_i = v_i$ divizorcsaládokhoz rendelt Poincaré sorok alakjairól foglalkozunk meg az észrevételeinket.

Végül, a fejezet utolsó egységében, mint kutatásunk folytatásának motivációjaként, csúcspontú gráfokkal foglalkozunk. Amini és Caporaso [1] munkájá által bevezetett divizorelmélet segítségével kiterjesszük a Poincaré sor értelmezését erre az esetre is.

Összefoglalva, a dolgozat gráfokon értelmezett divizorok egy véges halmazához rendelt Poincaré sorral és ennek racionalitásával foglalkozik. A racionalitás bizonyításának teljességéhez és megértéséhez a matematika néhány, a gráfelmélettől különböző részének vizsgálatára van szükség, ezért tárgyaljuk részletesen a dolgozat elején a divizorelméletet, majd a racionális poliéderek generátorfüggvényeit.

A divizorelmélet tanulmányozása során egy olyan tételt (2.15. tétel) igazolunk, amely egy tetszőleges nulladfokú divizorról eldönti, hogy principális-e. Mitöbb, abban az esetben, ha principális megadja azt a függvénycsaládot is, amelyhez hozzárendelt divizor megegyezik a vizsgált divizorral.

Továbbá a Poincaré sorok racionalitásának bizonyításához sikerült egy módszert, gondolatmenetet felépítenünk (3.21 bekezdés), amellyel a Manjunath által adott bizonyításban meg-

1. FEJEZET: BEVEZETŐ

jelenő plusz tagok kiküszöbölhetőek. Ugyanakkor meghatározzuk egy tetszőleges fán értelmezett $D_i = v_i - v_k$ (3.30. tétel) és $D_i = v_i$ (3.34. tétel) divizorcsaládokhoz rendelt Poincaré sorok racionális alakját, majd több példán keresztül tanulmányozzuk az általános alakot.

Észrevesszük, hogy a 3.30. tételben megjelenő racionális alak számlálójában mindig 1 szerepel, amely a fa komplexitására utal. Felmerül a kérdés, hogy nullánál nagyobb génuszú gráfok esetén a Poincaré sor hogyan kódolja a gráf komplexitását. További céljainkhoz tartozik az előbbiekben megfogalmazott kérdés megértése, megválaszolása és, ahogy már korábban említettük, csúcsain súlyozott gráfokon értelmezett Poincaré sorok racionális alakjának megértése és geometriai szemlélete is.

Végül szeretném köszönetemet kifejezeni témavezetőmnek, dr. László Tamásnak, hogy felkeltette az érdeklődésemet a téma iránt és, hogy az elmúlt hónapok során segített elmélyülni a témában.

2. fejezet

Gráfokon értelmezett divizorok

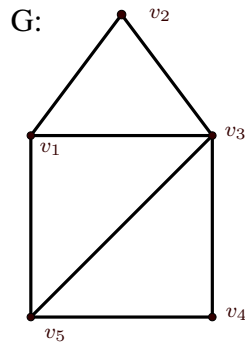
2.1. Gráfok divizorjai

Legyen G véges, összefüggő, hurokmentes megengedett gráf. Jelöljük $E(G)$ -vel a gráf éleinek, valamint $V(G)$ -vel a gráf csúcsainak a halmazát.

2.1. Értelmezés. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a csúcsok halmazának egy rögzített rendezése. Ekkor

$$\text{Div}(G) := \left\{ \sum_{i=1}^n d_i v_i, \quad d_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

halmazt a G gráfon értelmezett divizorok halmazának nevezzük.



2.1. ábra

2.2. Példa. A 2.1. ábra esetén legyen $d_i = i$ minden $i = 1, \dots, 5$ -re. Ekkor $D = v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 + 5v_5$ divizor egy eleme a $\text{Div}(G)$ halmaznak.

A következőkben értelmezzük a divizorok halmazán az összeadást: $+: \text{Div}(G) \times \text{Div}(G) \rightarrow \text{Div}(G)$, $\sum_{i=1}^n d_i v_i + \sum_{i=1}^n d'_i v_i = \sum_{i=1}^n (d_i + d'_i) v_i$.

2.3. Értelmezés. A $\text{Div}(G)$ halmaz a bevezetett összeadással szabad Abel-csoportot alkot, amelyet a $D_i = v_i$ divizorok generálnak. Ezt nevezzük a G gráfon értelmezett divizorok csoportjának.

2. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT DIVIZOROK

Észreveesszük, hogy $\text{Div}(G) \cong \mathbb{Z}^n$, így a dolgozat további részében bármely gráfon értelmezett divizort reprezentálhatunk egész számok rendezett sorozataként, a $\mathbb{Z}^n$ vektoraként. Jelölésük a következőkben: $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Azt mondjuk, hogy $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ divizor effektív, ha $D \geq 0$, vagyis ha $d_i \geq 0$ minden $i = 1, \dots, n$, és $\text{Div}_+(G)$ -vel jelöljük az effektív divizorok halmazát, amely monoid a bevezetett összeadással. Továbbá $\deg D = \sum_{i=1}^n d_i$ a D divizor fokát, $\text{Div}^d(G)$ a d -ed fokú divizorok halmazát, $\text{Div}_+^d(G)$ a d -ed fokú effektív divizorok halmazát jelöli. A nulladfokú divizorok halmaza a bevezetett összeadással csoportot alkot, és részcsoportha a $(\text{Div}(G), +)$ csoportnak. Bevezetünk egy szimmetrikus, bilineáris alakot, amelyet metszési szorzatnak nevezünk:

$$(\cdot, \cdot): V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{Z},$$

ahol (v_i, v_j) megadja a v_i -t v_j csúccsal összekötő élek számát, ha $v_i \neq v_j$ és $(v_i, v_i) = -\sum_{w \neq v_i} (v_i, w)$.

2.4. Példa. A 2.2. példában bevezetett $D = (1, 2, 3, 4, 5)$ divizor effektív és $\deg D = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Továbbá $(v_1, v_2) = 1$, $(v_1, v_4) = 0$ és $(v_3, v_3) = -4$.

2.5. Értelmezés. A G gráf szomszédsági mátrixának azt az $A(G) = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, $n \times n$ -es négyzetes mátrixot nevezzük, amelyre teljesül, hogy

$$a_{ij} = \begin{cases} (v_i, v_j), & \text{ha } v_i, v_j \text{ csúcsokat él köti össze} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Továbbá azt mondjuk, hogy v_i és v_j ($i \neq j$) csúcsok szomszédosak és $v_i \sim v_j$ -vel jelöljük, ha létezik közöttük él.

2.6. Értelmezés. A G gráf $Q(G)$ Laplace mátrixa egy $n \times n$ -es mátrix, amely

$$Q(G) = D(G) - A(G)$$

kifejezéssel értelmezett, ahol $D(G) = [d_{ij}]_{i,j=1}^n$ egy diagonális mátrix úgy, hogy d_{ii} elem megadja a v_i -ből kiinduló élek számát, valamint $A(G)$ a 2.5. értelmezésben szereplő szomszédsági mátrix.

2.7. Megjegyzés. A Laplace mátrix a kivonás elvégzésével

$$Q(G) = [-(v_i, v_j)]_{i,j=1}^n$$

alakba írható. Mivel a metszési szorzat szimmetrikus, bilineáris alak, ezért $Q(G)$ Laplace mátrix

2. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT DIVIZOROK

szimmetrikus. A metszési szorzat értelmezéséből adódóan a Laplace mátrix mindig degenerált, vagyis determinánsa 0 lesz.

2.8. Példa. A 2.1. ábrán szereplő gráf Laplace mátrixa a következő:

$$Q(G) = D(G) - A(G) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.9. Értelmezés. A G gráf feszítőfája egy olyan irányítatlan fa, amely tartalmazza a G gráf összes csúcsát.

2.10. Példa. Tetszőleges G gráf esetén a feszítőfa nem egyértelmű. A 2.2. ábrán a 2.1. ábrán megjelenő gráfot látjuk egy feszítőfájával.



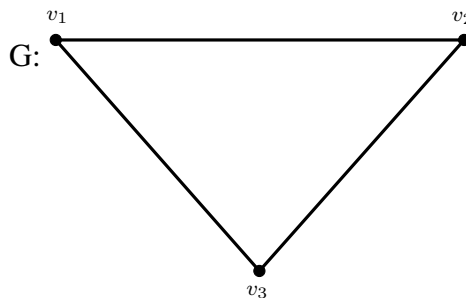
2.2. ábra. A G gráf és egy feszítőfája

A következőkben kijelentünk egy tételt, amely tetszőleges G gráf esetén megadja a gráf „komplexitását”, vagyis feszítőfáinak számát. A bizonyítás megtalálható C. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić [9, Thm. 7.2.2] munkájában.

2.11. Tétel (Kirchoff tétel [9]). G gráf esetén a feszítőfák száma megegyezik az $Q(G)_i$ determinánsával tetszőleges i esetén, ahol $Q(G)_i$ a $Q(G)$ Laplace mátrixból, az i -edik csúcshoz tartozó sor és oszlop elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrixot jelöli.

2.12. Példa. Tekintjük a 2.3. ábrán megjelenő gráfot. Ekkor

$$Q(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ és } Q(G)_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ így } \det(Q(G)_1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$



2.3. ábra

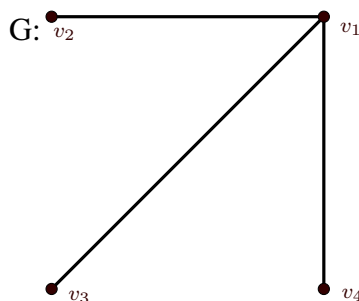
Tehát a 2.3. ábrán megjelenő G gráfnak 3 feszítőfája van, amelyeket úgy kapunk, hogy a G gráfból rendre eltávolítjuk az éleket.

2.1.1. Racionális függvények és principális divizorok

A G gráfon értelmezett f racionális függvényen az $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ leképezést értjük és egy divizort rendelünk hozzá a következő módon:

$$\text{div}(f) := \sum_{v \in V(G)} \text{ord}_v(f) v,$$

ahol $\text{ord}_v(f) := \sum_{w \neq v} (f(v) - f(w)) \cdot (v, w)$ és az f racionális függvény v csúcsban számolt rendjének nevezzük. Az előbbieken bevezetett rend értelmezését geometriai megfontolás vezérelte. Ellenőrizhető egyszerű számolással, hogy $\text{ord}_v(-f) = -\text{ord}_v(f)$ és, hogy $\text{ord}_v(f) + \text{ord}_v(g) = \text{ord}_v(f + g)$, bármilyen $f, g: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ racionális függvények esetén.



2.4. ábra

2. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT DIVIZOROK

2.13. Példa. Tekintjük a 2.4. ábrán lévő G gráfot és $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ racionális függvényt, amelyre teljesül, hogy $f(v_1) = 2, f(v_2) = f(v_3) = f(v_4) = 1$. Ekkor

$$\begin{aligned}\text{ord}_{v_1}(f) &= (f(v_1) - f(v_2)) \cdot 1 + (f(v_1) - f(v_3)) \cdot 1 + (f(v_1) - f(v_4)) \cdot 1 \\ &= 3f(v_1) - f(v_2) - f(v_3) - f(v_4) = 6 - 3 = 3,\end{aligned}$$

$\text{ord}_{v_2}(f) = (f(v_2) - f(v_1)) \cdot 1 = 1 - 2 = -1$ és hasonlóan $\text{ord}_{v_3}(f) = \text{ord}_{v_4}(f) = -1$. Tehát a G gráfon értelmezett f racionális függvényhez rendelt divizor

$$\text{div}(f) = 3v_1 - v_2 - v_3 - v_4.$$

Látható, hogy az f -hez hozzárendelt divizor foka $\deg(\text{div}(f)) = 3 - 1 - 1 - 1 = 0$.

2.14. Értelmezés. A racionális függvények divizorjai a gráf divizorjain értelmezett összeadás-sal csoportot alkotnak, amelyet principális csoportnak nevezünk. Jelölése:

$$\text{Prin}(G) = \{\text{div}(f) \mid f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}\}.$$

Mivel $\deg(\text{div}(f)) = \sum_{v \in V(G)} \text{ord}_v(f) = \sum_{v \in V(G)} \sum_{w \neq v} (f(v) - f(w)) (v, w) = \sum_{\substack{v \neq w \\ v, w \in V(G)}} (f(v) - f(w) + f(w) - f(v)) (v, w) = 0$, következik, hogy $\text{Prin}(G) \leq \text{Div}^0(G) \leq \text{Div}(G)$.

A következő tételben egy módszert adunk arra vonatkozóan, hogy egy tetszőleges $D \in \text{Div}^0(G)$ esetén hogyan ellenőrizhető, hogy principális divizor-e:

2.15. Tétel. Tekintünk egy G gráfot. Ekkor a $D = (d_1, \dots, d_n) \in \text{Div}^0(G)$ divizor pontosan akkor principális, ha $Q(G) \cdot X^T = (d_1, \dots, d_n)^T$ egyenletnek van megoldása $\mathbb{Z}^n$ -ben, ahol M^T az M mátrix transzponáltját jelöli.

Az egyszerűség kedvéért a tételt hurokmentes gráfokra fogjuk bizonyítani.

Bizonyítás. Ha $D = (d_1, \dots, d_n) \in \text{Div}^0(G)$ divizor principális, akkor létezik egy $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ racionális függvény úgy, hogy $\text{div}(f) = D$, amely azt jelenti, hogy $d_1 = \text{ord}_{v_1}(f), d_2 = \text{ord}_{v_2}(f), \dots, d_n = \text{ord}_{v_n}(f)$. Az értelmezés szerint $i \neq j$ esetén (v_i, v_j) megadja a v_i -t v_j csúccsal összekötő élek számát, ha v_i, v_j csúcsok szomszédosak, valamint $(v_i, v_j) = 0$, ha nem

2. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT DIVIZOROK

szomszédosak. Így írhatjuk, hogy

$$\begin{cases} d_1 = \sum_{w \neq v_1} (f(v_1) - f(w)) \cdot (v_1, w) = (v_1, v_1)f(v_1) - \sum_{\substack{w \in V(G) \\ w \sim v_1}} f(w) \cdot (v_1, w) \\ d_2 = \sum_{w \neq v_2} (f(v_2) - f(w)) \cdot (v_2, w) = (v_2, v_2)f(v_2) - \sum_{\substack{w \in V(G) \\ w \sim v_2}} f(w) \cdot (v_2, w) \\ \dots \\ d_n = \sum_{w \neq v_n} (f(v_n) - f(w)) \cdot (v_n, w) = (v_n, v_n)f(v_n) - \sum_{\substack{w \in V(G) \\ w \sim v_n}} f(w) \cdot (v_n, w) \end{cases}.$$

Ha a fenti rendszert mátrixok segítségével írjuk fel és bevezetjük az $X = (f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$ jelölést, kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} = Q(G) \cdot \begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ \dots \\ f(v_n) \end{pmatrix} = Q(G) \cdot X^T. \quad (2.1)$$

Ha a (2.1) egyenletnek létezik $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ egész megoldása, akkor létezik $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$, $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ racionális függvény úgy, hogy $\text{div}(f) = D$. ■

2.16. Példa. Láttuk a 2.13. példában, hogy $(3, -1, -1, -1)$ egy principális divizorja a 2.4. ábrán szereplő G gráfnak. Valóban a $Q(G) \cdot X^T = (3, -1, -1, -1)^T$ egyenletnek az $X = (2, 1, 1, 1) \in \mathbb{Z}^4$ megoldása.

2.17. Megjegyzés. Látható, hogy a 2.15. tételben megadott módszer nem csak azt dönti el, hogy egy adott D divizor principális-e, hanem abban az esetben, amikor principális a (2.1). egyenlet megoldása megad egy $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ racionális függvény családot, amelyre teljesül, hogy $\text{div}(f) = D$.

Azt mondjuk, hogy $D, D' \in \text{Div}(G)$ divizorok lineárisan ekvivalensek, jelölve $D \sim D'$, ha $D - D' \in \text{Prin}(G)$. A divizorcsoport és a principális divizorcsoport hányadosaként megkapjuk az ún. *Picard csoportot*,

$$\text{Pic}(G) = \text{Div}(G) / \text{Prin}(G).$$

Ekkor, ha $D \in \text{Div}(G)$, akkor D egy reprezentánsa a $[D] = \{D + \text{div}(f) \mid f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}\}$ ekvivalencia osztálynak. Mivel $\text{Div}^0(G)$ egy csoport, ezért értelmezzük a nulladfokú Picard csoportot, mint a $\text{Pic}^0(G) = \text{Div}^0(G) / \text{Prin}(G)$ hányadoscsoport.

2.18. Megjegyzés. 1. Mivel tudjuk, hogy $\deg(\text{div}(f)) = 0$, így következik, hogy ha $D_1, D_2 \in [D]$, akkor $\deg D_1 = \deg D_2$.

2. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT DIVIZOROK

2. Legyen $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ effektív divizor. Ekkor mivel $d_i \geq 0$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén, következik, hogy $\deg D = \sum_{i=1}^n d_i \geq 0$. Tehát bármely $D' \in [D]$, ahol D effektív, $\deg(D') \geq 0$.

A következőkben bevezetjük a divizorok kombinatorikai rangját:

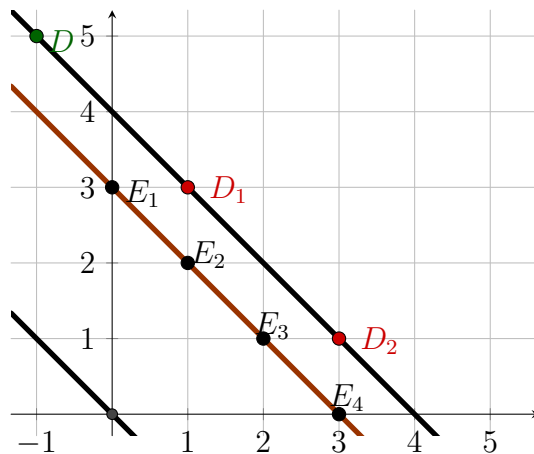
2.1.2. Divizorok rangja

2.19. Értelmezés. A G hurokélmentes gráf esetén a $D \in \text{Div}(G)$ divizor kombinatorikai rangja

$$r_G(D) := \max\{k \geq 0 \mid \forall E \in \text{Div}_+^k(G) \exists D' \geq E \text{ úgy, hogy } D' \in [D]\}.$$

Ha az értelmezésben szereplő halmaz üres akkor $r_G(D) := -1$.

A divizor kombinatorikai rangja megadja, hogy egy lineáris ekvivalencia osztály elemei mennyire szóródnak szét a nemnegatív ortánsban (lásd 3.7. értelmezés), ezáltal azt is méri, hogy a prinipális divizorok hol helyezkednek el.



2.5. ábra

Például tekintve a 2.5. ábrát az a felmerülő kérdés, hogy a $D = (-1, 5)$ divizort principális divizorok által mennyire tudjuk betolni az első negyedbe. Tegyük fel, hogy létezik egy principális divizor, amely által a D divizor lineárisan ekvivalens az ábrán látható D_1, D_2 divizorokkal, akkor azt mondhatjuk, hogy a D divizor rangja 3, mivel $D_1 \geq E_1, E_2$ és $D_2 \geq E_3, E_4$, ahol E_1, E_2, E_3, E_4 harmadfokú effektív divizorok.

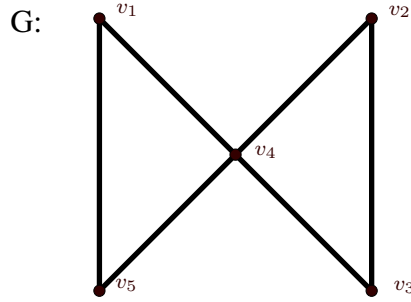
2.20. Megjegyzés. 1. $\deg D \geq r_G(D)$, bármilyen $D \in \text{Div}(G)$.

2. Az értelmezésből adódóan, ha $D_1 \sim D_2$, akkor $r_G(D_1) = r_G(D_2)$.

3. Ha $\deg D < 0$, akkor $r_G(D) = -1$ a 2.18. megjegyzés alapján.

2. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT DIVIZOROK

4. Ha $\deg D = 0$ és $D \in \text{Prin}(G)$, akkor $r_G(D) = 0$ mivel $D \sim 0 = (0, \dots, 0)$.
5. Ha $\deg D = 0$ és $D \notin \text{Prin}(G)$, akkor $r_G(D) = -1$ mivel $0 = (0, \dots, 0)$ az egyetlen olyan effektív divizor, amelynek 0 a foka de nem lineárisan ekvivalens D -vel.



2.6. ábra

2.21. Példa. Tekintjük a 2.6. ábrán megjelenő G gráfot és $D = (0, 0, 1, 0, 0) \in \text{Div}(G)$ divizort. A 2.20. megjegyzés alapján $r_G(D) \leq \deg D = 1$, így az a felvetődő kérdés, hogy D lineárisan ekvivalens-e minden elsőfokú, effektív divizorral. A válasz nemleges mivel ellenőrizhető a 2.15. tétel segítségével, hogy $D - (0, 1, 0, 0, 0) \notin \text{Prin}(G)$, így a rangja nem lehet 1. Továbbá a 2.19. értelmezés szerint $E = (0, 0, 0, 0, 0) \leq D$ és $D \sim D$, így $0 = \max\{k \geq 0 \mid \forall E \in \text{Div}_+^k(G) \exists D' \geq E \text{ úgy, hogy } D' \in [D]\}$, tehát $r_G(D) = 0$.

A következőkben M. Baker, S. Norine [4] munkája nyomán bevezetjük a gráf génuszát. Megjegyezzük, hogy a G gráf génuszát a gráfelméletben hagyományosan úgy értelmezik, mint a legkisebb i szám, amelyre teljesül, hogy G gráf beágyazható az i lyukú tóruszba önmetszés nélkül. A mi esetünkben egy gráf génusza, a Riemann felületek elméletéből ismert génusz alapján, a következőképpen értelmezhető:

2.22. Értelmezés. Legyen G egy gráf, ekkor $g = |E(G)| - |V(G)| + |C(G)|$ a G gráf génusza, ahol $|C(G)|$ jelöli az összefüggő komponensek számát. Az így értelmezett génusz megegyezik a gráf első Betti számával.

A dolgozat további részében összefüggő gráfokkal foglalkozunk, így $g = |E(G)| - |V(G)| + 1$. A 2.6. ábrán megjelenő gráf esetén $g = 6 - 5 + 1 = 2$, amely láthatóan azonosítható az élek által körbehatárolt „lyukak” számával, vagyis a gráf első Betti számával.

2.1.3. A kanonikus divizor és a Riemann–Roch tétel

2.23. Értelmezés. A

$$K_G := \sum_{v \in V(G)} (\text{val}(v) - 2) \cdot v$$

divizort a G gráf *kanonikus divizorjának* nevezzük, ahol $\text{val}(v)$ jelöli a v csúcsra illeszkedő élek számát.

2.24. Példa. A 2.6. ábrán megjelenő G gráf esetén a kanonikus divizor nem más mint $K_G = \sum_{i=1}^5 (\text{val}(v_i) - 2)v_i = 2v_4$.

2.25. Megjegyzés. Észrevevessük, hogy a 2.24. példa esetén $\deg(K_G) = 2 = 2g - 2$. Felvetődik a kérdés, hogy általában teljesül-e, hogy $\deg K_G = 2g - 2$? Mivel minden élre pontosan két csúcs illeszkedik, ezért $\sum_{v \in V(G)} \text{val}(v) = 2|E(G)|$. Ezt felhasználva $\deg(K_G) = \sum_{v \in V(G)} (\text{val}(v) - 2) = \sum_{v \in V(G)} \text{val}(v) - 2 \sum_{v \in V(G)} 1 = 2|E(G)| - 2|V(G)| = 2|E(G)| - 2|V(G)| + 2 - 2 = 2g - 2$. Tehát teljesül, hogy $\deg(K_G) = 2g - 2$ minden G gráfra.

Abban az esetben, ha egy G gráfhoz rendelt divizor foka alacsony, kiszámolható a rangja az értelmzés segítségével. A fok növekedésével a lehetséges effektív divizorok száma is megnő és így az értelmzéssel való rang számolás nehezen követhetővé válik. A továbbiakban kijelentünk egy tételt [4, Thm. 1.12.], amely kapcsolatot teremt a divizor rangja, foka és a gráf génusza között.

2.26. Tétel (Riemann–Roch tétel gráfokra [4]). *Legyen G gráf és D egy G gráfon értelmezett divizor. Ekkor $r_G(D) - r_G(K_G - D) = \deg(D) - g + 1$.*

2.27. Példa. Tekintjük a 2.6. ábrán megjelenő G gráfot és a $D = (0, 0, 2, 0, 0) \in \text{Div}(G)$ divizort. Ekkor a 2.24. példát felhasználva kapjuk, hogy $K_G - D = (0, 0, 0, 0, 0)$, tehát $K_G - D \in \text{Prin}(G)$, így a 2.20. megjegyzés alapján $r_G(K_G - D) = 0$. Tehát a Riemann–Roch tétel alapján

$$r_G(D) = \deg D - g + 1 + r_G(K_G - D) = 2 - 2 + 1 + 0 = 1.$$

2.2. A Jacobi csoport

Legyen G egy véges, hurokélet, többszörösélet megengedő gráf. Bevezetjük az $\mathbb{E}(G)$ irányított élek halmazát, és azt mondjuk, hogy ha $e \in \mathbb{E}(G)$, akkor e inverze, $\bar{e}$ is benne van az irányított élek halmazában. Így tehát $|\mathbb{E}(G)| = 2 \cdot |E(G)|$. Bevezetjük a 0-láncok terét, mint a csúcsokon értelmezett valós függvények vektortere

$$C^0(G, \mathbb{R}) = \{f: V(G) \rightarrow \mathbb{R} \mid f(v) \in \mathbb{R}\} \simeq \left\{ \sum_{v \in V(G)} f(v) \cdot v \right\},$$

2. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT DIVIZOROK

valamint az 1-láncok tere legyen

$$C^1(G, \mathbb{R}) = \{g: \mathbb{E}(G) \rightarrow \mathbb{R} \mid g(\bar{e}) = -g(e)\}.$$

Ekkor $C^0(G, \mathbb{R})$ és $C^1(G, \mathbb{R})$ euklidészi terek is az alábbi skaláris szorzatokkal:

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \sum_{v \in V(G)} f_1(v) \cdot f_2(v), \quad \forall f_1, f_2 \in C^0(G, \mathbb{R}) \\ \langle g_1, g_2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{E}(G)} g_1(e) \cdot g_2(e), \quad \forall g_1, g_2 \in C^1(G, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

2.28. Értelmezés. Bevezetünk egy

$$d: C^0(G, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(G, \mathbb{R}), \quad (df)(e) = f(e_+) - f(e_-)$$

difference operátort, amely megadja $f \in C^0(G, \mathbb{R})$ függvény e élmenti meredekségét, ahol e_- jelöli a $e \in \mathbb{E}(G)$ kezdőpontját, e_+ pedig a végpontját. Továbbá értelmezzük a

$$d^*: C^1(G, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(G, \mathbb{R}), \quad (d^*g)(v) = \sum_{\substack{e \in \mathbb{E}(G) \\ e_+ = v}} g(e)$$

duális operátort.

A következőkben kijelentünk egy lemmát, amely az operátorok segítségével kapcsolatot teremt a bevezetett skaláris szorzatok között.

2.29. Lemma (Projekciós formula). *Legyenek $g \in C^1(G, \mathbb{R})$ és $f \in C^0(G, \mathbb{R})$. Továbbá jelöljük $\langle \cdot, \cdot \rangle_{C^0}$ -val a $C^0(G, \mathbb{R})$ téren, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{C^1}$ -gyel a $C^1(G, \mathbb{R})$ téren értelmezett skaláris szorzatot. Ekkor teljesül, hogy*

$$\langle d^*g, f \rangle_{C^0} = \langle g, df \rangle_{C^1}.$$

Bizonyítás. Mivel $d^*g, f \in C^0(G, \mathbb{R})$, következik az értelmezések alapján, hogy

$$\langle d^*g, f \rangle_{C^0} = \sum_{v \in V(G)} (d^*g)(v) \cdot f(v) = \sum_{v \in V(G)} \sum_{\substack{e \in \mathbb{E}(G) \\ e_+ = v}} f(v) \cdot g(e). \quad (2.2)$$

Továbbá mivel $g, df \in C^1(G, \mathbb{R})$, ezért itt is alkalmazva az értelmezést, írhatjuk, hogy

$$\langle g, df \rangle_{C^1} = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{E}(G)} g(e) \cdot df(e) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{E}(G)} g(e) \cdot (f(e_+) - f(e_-)). \quad (2.3)$$

2. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT DIVIZOROK

Ha $e_- = v$ akkor következik, hogy a fordított irányítású él végpontja $\bar{e}_+ = v$. Teljesen hasonlóan, ha $e_+ = v$, akkor $\bar{e}_- = v$. Folytatva a (2.3) egyenletet, és az összeget átírva csúcsok szerinti összegre, kapjuk, hogy

$$\langle g, df \rangle_{C^1} = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} f(v) \left(\sum_{\substack{e \in \mathbb{E}(G) \\ e_+ = v}} g(e) - \sum_{\substack{e \in \mathbb{E}(G) \\ e_+ = v}} g(\bar{e}) - \sum_{\substack{e' \in \mathbb{E}(G) \\ e'_- = v}} g(e') + \sum_{\substack{e' \in \mathbb{E}(G) \\ e'_- = v}} g(\bar{e}') \right).$$

Mivel tudjuk az értelmezés szerint, hogy $g(\bar{e}) = -g(e)$, bármilyen $e \in \mathbb{E}$ esetén és $\{e \in \mathbb{E} \mid e_+ = v\} = \{e' \cup \bar{e}' \mid e'_+ = v \text{ és } e'_- = v\}$, ezért

$$\langle g, df \rangle_{C^1} = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} f(v) \left(2 \cdot \sum_{e_+ = v} g(e) + 2 \cdot \sum_{\bar{e}'_- = v} g(\bar{e}') \right) = \sum_{v \in V(G)} \sum_{\substack{e \in \mathbb{E}(G) \\ e_+ = v}} f(v) \cdot g(e),$$

amely megegyezik a (2.2) egyenlet jobb oldalával. ■

Ezek után értelmezzük a következő Laplace operátorokat:

$$\Delta_0 = d^* \circ d: C^0(G, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(G, \mathbb{R}),$$

$$\Delta_1 = d \circ d^*: C^1(G, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(G, \mathbb{R}),$$

ahol

$$(\Delta_0 f)(v) = \text{val}(v) f(v) - \sum_{\substack{w \in V(G) \\ w \sim v}} f(w) = \text{val}(v) f(v) - \sum_{\substack{e \in \mathbb{E}(G) \\ e_+ = v}} f(e_-),$$

$$(\Delta_1 g)(e) = 2 \cdot g(e) - \sum_{\substack{e' \in \mathbb{E}(G) \\ e'_- = e_-}} g(e') - \sum_{\substack{e'' \in \mathbb{E}(G) \\ e''_+ = e_+}} g(e'').$$

Észrevehető, hogy $(\Delta_0 f)(v_1) = \text{val}(v_1) \cdot f(v_1) - (v_1, v_2) \cdot f(v_2) + \dots - (v_1, v_k) \cdot f(v_k)$, és általánosan

$$(\Delta_0 f)(v_i) = -(v_i, v_1) \cdot f(v_1) - \dots + \text{val}(v_i) \cdot f(v_i) - \dots - (v_i, v_k) \cdot f(v_k),$$

minden $i = 1, \dots, k$ esetén. Így felírva a Δ_0 mátrixát a $C^0(G, \mathbb{R})$ kanonikus bázisában kapjuk,

2. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT DIVIZOROK

hogy

$$[\Delta_0] = \begin{pmatrix} \text{val}(v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_i) & \dots & (v_1, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_i, v_1) & (v_i, v_2) & \dots & \text{val}(v_i) & \dots & (v_i, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \dots & (v_k, v_i) & \dots & \text{val}(v_k) \end{pmatrix}.$$

Tehát $[\Delta_0]$ mátrix megegyezik a G gráf Laplace mátrixával.

Legyen $f \in \text{Ker}(\Delta_0)$, vagyis $\Delta_0 f = 0$. Felhasználva a projekciós formulát írhatjuk, hogy $0 = \langle \Delta_0 f, f \rangle_{C^0} = \langle d^*(df), f \rangle_{C^0} = \langle df, df \rangle_{C^1}$, ami egyenértékű a $df = 0$ egyenlőséggel, így azzal is, hogy $\text{Ker}(\Delta_0) = \text{Ker}(d)$. Mitöbb, ha $f \in \text{Ker}(d)$ és $g \in C^1(G, \mathbb{R})$, akkor $\langle d^*g, f \rangle_{C^0} = \langle g, df \rangle_{C^1} = 0$, így d^*g merőleges f -re. Mivel f, g megválasztása tetszőleges a megfelelő terekben, ezért $\text{Ker}(d) \perp \text{Im}d^*$, vagyis megkaptuk a $C^0(G, \mathbb{R})$ egy ortogonális felbontását:

$$C^0(G, \mathbb{R}) = \text{Ker}(\Delta_0) \oplus \text{Im}d^*.$$

Teljesen hasonló gondolatmenet alapján igazolható, hogy

$$C^1(G, \mathbb{R}) = \text{Ker}(\Delta_1) \oplus \text{Im}d.$$

Az irányított élek halmazán értelmezett egész értékű függvények,

$$C^1(G, \mathbb{Z}) \subset C^1(G, \mathbb{R})$$

a $\mathbb{Z}^m$ ráccsal izomorf rácsot alkotnak, ahol $m = |E| = \frac{1}{2}|\mathbb{E}|$. Továbbá legyen

$$\Lambda^1(G) := C^1(G, \mathbb{Z}) \cap \text{Ker}(\Delta_1) \subset \text{Ker}(\Delta_1)$$

azon egész értékű függvények halmaza, amelyek benne lesznek a Δ_1 operátor magjában. Látható, hogy $\Lambda^1(G)$ egy *egész rács*, mivel $g_1, g_2 \in \Lambda^1(G)$ esetén $\langle g_1, g_2 \rangle_{C^1} = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{E}(G)} (g_1(e) \cdot g_2(e) + g_1(\bar{e}) \cdot g_2(\bar{e})) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{R}} (g_1(e) \cdot g_2(e) + (-g_1(e)) \cdot (-g_2(e))) = \sum_{e \in \mathbb{E}} g_1(e) \cdot g_2(e) \in \mathbb{Z}$. Értelmezzük a $\Lambda^1(G)$ duális rácsát $\text{Ker}(\Delta_1)$ -ben a következőképpen:

$$\Lambda^1(G)^* = \{g \in \text{Ker}(\Delta_1) \mid \langle g, g' \rangle \in \mathbb{Z}, \forall g' \in \Lambda^1(G)\}.$$

Az előbbieket alapján $\Lambda^1(G)^*$ rangja ugyanaz, mint $\Lambda^1(G)$ rangja, valamint $\Lambda^1(G) \subset \Lambda^1(G)^*$. Így hányadosuk, $\Lambda^1(G)^* / \Lambda^1(G)$ egy véges csoport, amelynek rendje $\det(\Lambda^1(G))$ lesz, ahol $\det(\Lambda^1(G))$ megadja a $\Lambda^1(G)$ rács által meghatározott fundamentális kocka térfogatát $\text{Ker}(\Delta_1)$ -ben (lásd 2.32. példa).

2. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT DIVIZOROK

2.30. Értelmezés. A G gráf Jacobi csoportján a

$$\text{Jac}(G) := \Lambda^1(G)^* / \Lambda^1(G)$$

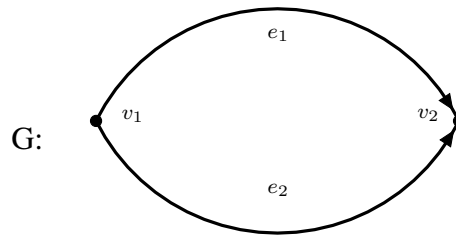
véges hányadoscsoportot értjük

Bacher, de la Harpe, Nagnibeda [2] igazolja, hogy az előbb bevezett Jacobi csoport izomorf nulladfokú Picard csoporttal.

2.31. Tétel ([2]). Legyen G egy gráf.

$$\text{Jac}(G) \simeq \text{Pic}^0(G) = \text{Div}^0(G) / \text{Prin}(G).$$

Az előbbieken bevezetett Jacobi csoport általánosítása megtalálható Baker, Faber [3] munkájában.



2.7. ábra

2.32. Példa. Tekintjük a 2.7. ábrán megjelenő G gráfot, továbbá tekintünk egy irányítást az éleken: legyen $(e_1)_- = (e_2)_- = v_1$ és $(e_1)_+ = (e_2)_+ = v_2$. Így $\mathbb{E}(G) = \{e_1, e_2, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Ekkor $C^1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\langle e_1 \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle e_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$.

A továbbiakban meghatározzuk $\Lambda^1(G)$ -t, ezért először kiszámoljuk a Δ_1 magját. Tegyük fel, hogy $g \in \text{Ker}(\Delta_1)$. Ekkor $\Delta_1(g) = d(d^*g) = 0$, így

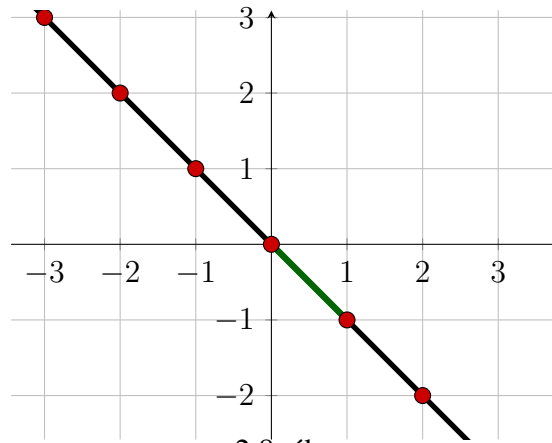
$$\begin{aligned} d(d^*g)(e_1) &= (d^*g)((e_1)_+) - (d^*g)((e_1)_-) = \sum_{\substack{e \in \mathbb{E}(G) \\ e_+ = v_2}} g(e) - \sum_{\substack{e \in \mathbb{E}(G) \\ e_+ = v_1}} g(e) = \\ &= g(e_1) + g(e_2) - g(\bar{e}_1) - g(\bar{e}_2) = 2 \cdot (g(e_1) + g(e_2)) = 0 \iff g(e_1) = -g(e_2). \end{aligned}$$

Teljesen hasonló gondolatmenet alapján, ha felhasználjuk, hogy $d(d^*g)(e_2) = 0$, kapjuk a $g(e_2) = -g(e_1)$ egyenletet. Az előzőeket felhasználva, ha $g \in \Lambda^1(G) = C^1(G, \mathbb{Z}) \cap \text{Ker}(\Delta_1)$,

2. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT DIVIZOROK

akkor teljesül, hogy $(g(e_1), g(e_2)) = (n, -n)$, ahol n egész szám. Így tehát

$$\Lambda^1(G) = \{(n, -n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \text{Ker}(\Delta_1).$$



2.8. ábra

A 2.8. ábrán megjelenő egyenes a $\text{Ker}(\Delta_1)$ -t, a pirossal jelölt rácspontok a $\Lambda^1(G)$ rácsot és a zölddel jelölt szakasz a fundamentális kockát jelöli. Azonnal látható, hogy ekkor $\det(\Lambda^1(G)) = \sqrt{1+1}^2 = 2$, ami a fundamentális kocka térfogata, valamint a Jacobi csoport rendje lesz. A $\Lambda^1(G)$ duális rácsa

$$\Lambda^1(G)^* = \{g \in \text{Ker}(\Delta_1) \mid \langle g, g' \rangle_{C^1} \in \mathbb{Z}, \forall g' \in \Lambda^1(G)\}.$$

Mivel $g' \in \Lambda^1(G)$ ezért tudjuk, hogy $g'(e_1) = n, g'(e_2) = -n$, így minden $g \in \Lambda^1(G)^*$ -ra

$$\begin{aligned} \langle g, g' \rangle_{C^1} &= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbb{E}} g(e) \cdot g'(e) = \frac{1}{2} (g(e_1) \cdot n + g(\overline{e_1}) \cdot (-n) + g(e_2) \cdot n + g(\overline{e_2}) \cdot (-n)) = \\ &= n \cdot (g(e_1) - g(e_2)) \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Továbbá mivel $\Lambda^1(G)^* \subset \text{Ker}(\Delta_1)$, ezért $g(e_2) = -g(e_1)$ is teljesül. Így a (2.4). egyenletbe $n = 1$ -t helyettesítve kapjuk, hogy $2 \cdot g(e_1) \in \mathbb{Z}$, amiből következik, hogy $g(e_1) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. És ha $g(e_1) \in \Lambda^1(G)$, akkor $g(e_1) \in \mathbb{Z}$. Összegezve, azt kaptuk, hogy

$$\text{Jac}(G) = \Lambda^1(G)^* / \Lambda^1(G) = \frac{1}{2}\mathbb{Z} / \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Vannak esetek, amikor a Jacobi csoport meghatározása egyszerűbb a 2.31. tétel segítségével,

2. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT DIVIZOROK

a következő példában egy ilyen esetet tárgyalunk.

2.33. Példa. Tekintjük a 2.3. ábrán megjelenő G gráfot. Legyen $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ egy racionális függvény úgy, hogy $f(v_1) = b_1$, $f(v_2) = b_2$ és $f(v_3) = b_3$, ahol b_1, b_2, b_3 egész számok. Így az f racionális függvényhez rendelt divizor

$$\operatorname{div}(f) = (2b_1 - b_2 - b_3)v_1 + (2b_2 - b_1 - b_3)v_2 + (2b_3 - b_1 - b_2)v_3.$$

Az írás egyszerűsége miatt bevezetjük az $a_1 = 2b_1 - b_2 - b_3$, $a_2 = 2b_2 - b_1 - b_3$ és $a_3 = 2b_3 - b_1 - b_2$ jelöléseket. Észrevesszük, hogy $a_1 - a_2 = 3(b_1 - b_2)$, vagyis 3 osztja az $a_1 - a_2$ különbséget. Hasonlóan 3 osztja az $a_1 - a_3$, $a_2 - a_3$ különbségeket is. Tehát az $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(v_i) = a_i$ minden $i = 1, 2, 3$ függvény racionális, ha teljesül, hogy

$$\begin{cases} 3 \mid (a_1 - a_2) \\ 3 \mid (a_1 - a_3) \\ 3 \mid (a_2 - a_3) \end{cases}.$$

A továbbiakban meg szeretnénk határozni egy tetszőleges nulladfokú $D = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = a_1v_1 + a_2v_2 - (a_1 + a_2)v_3$ divizor osztályát. Legyen $D' = a'_1v_1 + a'_2v_2 - (a'_1 + a'_2)v_3$ egy tetszőleges D -vel lineárisan ekvivalens divizor, ekkor $D' = D + \operatorname{div}(f)$, valamilyen f racionális függvényre. Tehát $D' = (a_1 + (2b_1 - b_2 - b_3))v_1 + (a_2 + (2b_2 - b_1 - b_3))v_2 - ((a_1 + a_2) + (2b_3 - b_1 - b_2))v_3$.

Észrevehető, hogy $a'_1 - a'_2 = (a_1 - a_2) + 3(b_1 + b_2)$, vagyis $a'_1 - a'_2 \equiv a_1 - a_2 \pmod{3}$. Így írható, hogy tetszőleges $D = a_1v_1 + a_2v_2 - (a_1 + a_2)v_3$ divizor osztálya:

$$[D] = \{D' = a'_1v_1 + a'_2v_2 - (a'_1 + a'_2)v_3 \mid a'_1 - a'_2 \equiv a_1 - a_2 \pmod{3}\},$$

és a Jacobi csoport

$$\operatorname{Jac}(G) = \operatorname{Div}^0(G)/\operatorname{Prin}(G) \cong \mathbb{Z}_3.$$

Tehát a Jacobi csoport rendje valóban 3, ahogy a 2.12. példában is láttuk.

3. fejezet

Gráfokon értelmezett Poincaré sorok

A matematikában a Poincaré sorok valamilyen numerikus tulajdonság generáló sorai. Motivációként mutatunk egy egyszerű példát, amely egy numerikus félcsoporthoz rendelt Poincaré sort mutat be, és azt, hogyan „olvashatjuk ki” a Poincaré sorból a numerikus félcsoport lyukainak a számát. Ezt követően értelmezzük Manjunath [11] munkája során a gráfokon értelmezett Poincaré sorokat és megvizsgáljuk ezen Poincaré sorok tulajdonságait.

3.1. Példa. Tudjuk, hogy a természetes számok halmaza az összeadással monoidot alkot és azt mondjuk, hogy $S \subseteq \mathbb{N}$ *numerikus félcsoport* az összeadással, ha $\mathbb{N} \setminus S$ egy véges halmaz. Az $\mathbb{N} \setminus S$ halmaz elemeit lyukaknak nevezzük. Ekkor az S numerikus félcsoporthoz rendelt Poincaré sor a következő alakú

$$P_S(t) = \sum_{k \geq 0} c(k) \cdot t^k, \text{ ahol } c(k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \in S \\ 0, & \text{ha } k \in \mathbb{N} \setminus S \end{cases},$$

amely a

$$P_S(t) = \frac{1}{1-t} - \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus S} t^k$$

alakba írható. A $\frac{1}{1-t}$ törtet a Poincaré sor reguláris részének nevezzük és ha bevezetjük a $\text{Pol}_S(t) = \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus S} t^k$ jelölést, akkor a bevezetett polinom információkat tartalmaz az S lyukairól, például kiszámolva a $\text{Pol}_S(t)$ polinom behelyettesítési értékét az 1-ben, megkapjuk a lyukak számát, vagyis az $\mathbb{N} \setminus S$ halmaz számosságát.

3.1. Poincaré sorok

3.2. Értelmezés. Legyen G egy véges, összefüggő gráf és $D_1, D_2, \dots, D_k$ a divizorok egy véges halmaza. Ekkor az alábbi formális összeget a G gráfon értelmezett $D_1, D_2, \dots, D_k$ divi-

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

zorokhoz rendelt *Poincaré sornak* nevezzük

$$P_{G,D_1,D_2,\dots,D_k}(t_1,t_2,\dots,t_k) =$$

$$= \sum_{(n_1,\dots,n_k) \in \mathbb{N}^k} (r_G(n_1D_1 + n_2D_2 + \dots + n_kD_k) + 1) t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_k^{n_k},$$

ahol $r_G(D)$ a D divizor rangja (lásd a 2.19. értelmezés).

Manjunath [11, Thm. 1.1.] igazolta, hogy az így értelmezett Poincaré sor racionális. A következőkben ezt az eredményt fogjuk ismertetni és tárgyalni, de mielőtt bemutatjuk a tételt és annak bizonyítását, röviden bevezetjük az Ehrhart elmélet alapvető fogalmait és kijelentünk néhány fontos eredményt, amelyek szükségesek lesznek a továbbiakban.

3.2. Racionális poliéderek generátorfüggvénye és a Brion tétel

Barvinok és Pommersheim [5] munkáját követve bevezetjük a következő fogalmakat.

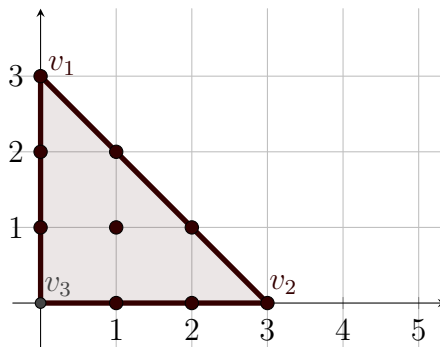
Az $\mathbb{R}^n$ n dimenziós euklidészi térben legyenek $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorok. Ekkor x és y skaláris szorzatán $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ összeget értjük.

3.3. Értelmezés. Egy P racionális poliéderen egy véges sok, racionális együtthatójú lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldásait értjük, vagyis

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle c_i, x \rangle \leq \beta_i \ \forall i = 1, \dots, m, \ c_i \in \mathbb{Q}^n, \ \beta_i \in \mathbb{Q}\},$$

és $V(P)$ -vel jelöljük a poliéder csúcsainak a halmazát.

Egy korlátos poliédert politópnak nevezünk. Ha egy poliéder csúcsai egész koordinátájú pontokban helyezkednek el, akkor egész poliéderről beszélünk.



3.1. ábra

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

3.4. Példa. A 3.1. ábrán a $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 3\} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \langle (-1, 0), x \rangle \leq 0, \langle (0, -1), x \rangle \leq 0, \langle (1, 1), x \rangle \leq 3\}$ politóp jelenik meg.

3.5. Értelmezés. Legyen $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle c_i, x \rangle \leq \beta_i \ \forall i = 1, \dots, m, \ c_i \in \mathbb{Q}^n, \ \beta_i \in \mathbb{Q}\}$ egy poliéder és $v \in V(P)$ a poliéder egy csúcsa, legyen továbbá $I_v = \{i \mid \langle c_i, v \rangle = \beta_i\}$. Ekkor a v csúcs *érintőkúpja*

$$\text{cone}(P, v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle c_i, x \rangle \leq \beta_i, \ i \in I_v \text{ esetén}\}.$$

3.6. Példa. Tekintjük a 3.4. példában szereplő P poliédert és a $v_3 = (0, 0)$ csúcsot. Ekkor $I_{v_3} = \{i \mid \langle c_i, (0, 0) \rangle = \beta_i\} = \{1, 2\}$, így

$$\begin{aligned} \text{cone}(P, v_3) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (-1, 0), (x_1, x_2) \rangle \leq 0, \ \langle (0, -1), (x_1, x_2) \rangle \leq 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Vagyis a P poliédernek a v_3 csúcshoz szerkesztett érintőkúpja az első negyed.

3.7. Értelmezés. Az $\mathbb{R}_+^k = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i \geq 0, \ \forall i = 1, \dots, k\}$ halmazt nemnegatív ortánsnak nevezzük. Például az $\mathbb{R}^2$ térben az első negyed a nemnegatív ortáns.

3.8. Értelmezés. Ha $P \subset \mathbb{R}^n$ egy racionális poliéder, akkor P egész pontjainak halmazához hozzárendelünk egy függvényt a következő módon:

$$f(P \cap \mathbb{Z}^n; t) = \sum_{k \in P \cap \mathbb{Z}^n} t^k, \text{ ahol } k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \text{ és } t^k = t_1^{k_1} \cdot t_2^{k_2} \cdot \dots \cdot t_n^{k_n}.$$

Ekkor az f függvényt *generátorfüggvénynek* nevezzük.

Az egyszerűség kedvéért dolgozat további részében az P egész pontjait számoló generátorfüggvényt $f(P; t)$ -vel fogjuk jelölni.

3.9. Példa. A 3.1. ábrán megjelenő P politópot elmetsszük a $\mathbb{Z}^2$ ráccsal, $P \cap \mathbb{Z}^2 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 0)\}$, így ha $t = (t_1, t_2)$, akkor

$$f(P; t) = \sum_{k \in P \cap \mathbb{Z}^2} t^k = 1 + t_1 + t_1^2 + t_1^3 + t_2 + t_1 t_2 + t_1^2 t_2 + t_2^2 + t_1 t_2^2 + t_2^3.$$

3.10. Példa. Ha $P = [0, +\infty)$, akkor $f(P; t) = \sum_{k \in [0, +\infty) \cap \mathbb{Z}} t^k = \sum_{k \geq 0} t^k = \frac{1}{1-t}$

3.11. Értelmezés. Az $\mathbb{R}^n$ euklidészi térben a $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = b\}$ halmazt hipersíknak nevezzük, ahol $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$.

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

Például a síkban az egyenes és a térben a sík hipersík. Ha $\mathbb{R}^n$ térben H egy hipersík, akkor H két féltérre osztja a teret: a $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \geq b\}$ és $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq b\}$ terekre.

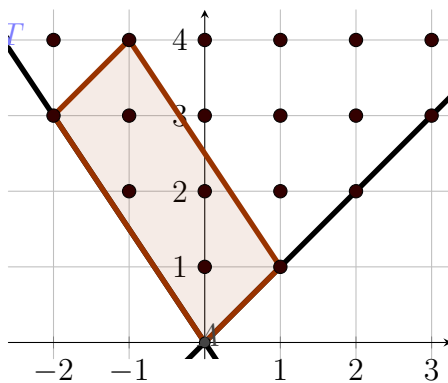
Egy poliédert többféleképpen is reprezentálhatunk. A 3.3. értelmezésben a hipersík prezentáció jelenik meg. Ugyanakkor tekinthetjük a csúcs-reprezentációt is, amelyben egy P poliéder és $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ csúcsainak halmaza esetén a $P = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k\}$ kifejezés értendő. Ha politópot szeretnénk megadni csúcs reprezentálással, akkor szükséges, hogy a halmazban vett $v_1, v_1, \dots, v_k$ vektoroknak a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ skalárokkal vett lineáris kombinációja affin kombináció legyen, vagyis $P = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k \text{ és } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}$.

3.12. Példa. A 3.4. példában megjelenő politóp csúcs-reprezentációja $P = \{\lambda_1 \cdot (3, 0) + \lambda_2 \cdot (0, 3) \mid \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ és } \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$ alakba írható.

Legyen P egy racionális poliéder és $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ a csúcsainak a halmaza. Ha P poliéder csúcs-reprezentációja $P = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k\}$, akkor

$$\Pi = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid 0 \leq \lambda_i < 1, \forall i = 1, \dots, k\}$$

a P fundamentális paralelepipedonja. Ekkor Stanley [13, Lemma 4.6.7] munkája alapján bármilyen $m \in P \cap \mathbb{Z}^n$ felírható egyértelműen $m = m_\Pi + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$ alakban, ahol $m_\Pi \in \Pi \cap \mathbb{Z}^n$ és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ nemnegatív egész számok.



3.2. ábra

3.13. Példa. Legyen P egy racionális poliéder és $P = \{\lambda_1 \cdot (1, 1) + \lambda_2 \cdot (-2, 3) \mid \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ a csúcs reprezentációja. Ekkor a poliéder fundamentális paralelepipedonja, (síkban fundamentális paralelogramma megnevezés is használatos),

$$\Pi = \{\lambda_1 \cdot (1, 1) + \lambda_2 \cdot (-2, 3) \mid 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1\}$$

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

és

$$\Pi \cap \mathbb{Z}^2 = \{\lambda_1(1, 1) + \lambda_2(-2, 3) \mid 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1\} \cap \mathbb{Z}^2 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (-1, 2), (-1, 3)\},$$

a 3.2. ábrán barnával jelölt paralelogramma. Minden $m \in P \cap \mathbb{Z}^2$ egész koordinátájú pont esetén léteznek egyértelműen $m_\Pi \in \Pi \cap \mathbb{Z}^2$ és a $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ számok úgy, hogy $m = m_\Pi + \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(-2, 3)$. Így a generátorfüggvény kiterjeszthető a következő alakban:

$$\begin{aligned} f(P, \mathbf{t}) &= \sum_{m \in P \cap \mathbb{Z}^2} \mathbf{t}^m = \sum_{\substack{m_\Pi \in \Pi \cap \mathbb{Z}^2 \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \mathbf{t}^{m_\Pi + \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(-2, 3)} = \sum_{\substack{m_\Pi \in \Pi \cap \mathbb{Z}^2 \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} (\mathbf{t}^{m_\Pi} \cdot \mathbf{t}^{\lambda_1(1, 1)} \cdot \mathbf{t}^{\lambda_2(-2, 3)}) = \\ &= \left(\sum_{m_\Pi \in \Pi \cap \mathbb{Z}^2} \mathbf{t}^{m_\Pi} \right) \left(\sum_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbf{t}^{\lambda_1(1, 1)} \cdot \mathbf{t}^{\lambda_2(-2, 3)} \right) = \frac{1 + t_2 + t_2^2 + t_1^{-1}t_2^2 + t_1^{-1}t_2^3}{(1 - t_1t_2)(1 - t_1^{-2}t_2^3)} \end{aligned}$$

A továbbiakban szükségünk lesz általános poliéderek generátorfüggvényeinek meghatározására, így kijelentjük az alábbi tételt, amelyet M. Brion [5, Thm. 3. 5.] bizonyított.

3.14. Tétel ([5], Brion tétel). *Legyen P egy racionális poliéder és jelöljük $V(P)$ -vel a csúcsok halmazát. Legyen továbbá $\text{cone}(P, v)$ a v csúcs érintőkúpja. Ekkor az P poliéder generátorfüggvénye a következő alakban írható:*

$$f(P; \mathbf{t}) = f(P; t_1, t_2, \dots, t_k) = \sum_{v \in V(P)} f(\text{cone}(P, v); t_1, t_2, \dots, t_k),$$

ahol $f(\text{cone}(P, v); t_1, t_2, \dots, t_k)$ a $\text{cone}(P, v)$ érintőkúp generátorfüggvénye.

A tétel illusztrálásaként a következő példában meghatározzuk a 3.1. ábrán megjelenő politóp generátorfüggvényét.

3.15. Példa. A 3.6. és a 3.13. példák alapján tudjuk, hogy $\text{cone}(P, v_3) = \{\lambda_1 \cdot (1, 0) + \lambda_2 \cdot (0, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$, így

$$f(\text{cone}(P, v_3); t_1, t_2) = \frac{1}{(1 - t_1)(1 - t_2)}.$$

Hasonlóan meghatározzuk a v_1, v_2 csúcsok érintőkúpját és felírjuk a generátorfüggvényeiket: a v_1 csúcs esetén az érintőkúp $\text{cone}(P, v_1) = \{(0, 3) + \lambda_1 \cdot (0, -1) + \lambda_2 \cdot (-1, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, így a generátorfüggvény

$$f(\text{cone}(P, v_1); \mathbf{t}) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbf{t}^{(0, 3) + \lambda_1(0, -1) + \lambda_2(-1, 1)} = \frac{t_2^3}{(1 - t_2^{-1})(1 - t_1^{-1}t_2)}.$$

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

A v_2 csúcs esetén

$$f(\text{cone}(P, v_2); \mathbf{t}) = \frac{t_1^3}{(1 - t_1^{-1})(1 - t_1^{-1}t_2)}.$$

Ekkor a Brion tétel használva a 3.1. ábrán megjelenő P politóp generátorfüggvénye

$$f(P; \mathbf{t}) = \frac{1}{(1 - t_1)(1 - t_2)} + \frac{t_2^3}{(1 - t_2^{-1})(1 - t_1^{-1} \cdot t_2)} + \frac{t_1^3}{(1 - t_1^{-1})(1 - t_1^{-1} \cdot t_2)}.$$

Felmerül a kérdés, hogy az érintőkúpok generátorfüggvénye racionális függvény-e, mert ha a kérdésre igenlő választ kapnánk, akkor a 3.14 Brion tételt és a poliéder csúcsainak végességét felhasználva következne a poliéder generátorfüggvényének racionalitása. A felmerült kérdésre a választ M. Beck, S. Robins [6, Corollary 3.7] munkájában találjuk. A tétel kijelentése előtt megjegyezzük, hogy általában a

$$K = \{v_0 + \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_k \cdot v_k \mid v_i \in \mathbb{R}^k, \forall i = 0, \dots, k \text{ és } \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k\} \subset \mathbb{R}^k$$

halmazt *kúp*nak nevezzük. Ellenőrizhető, hogy a 3.5. értelmezésben szereplő érintőkúp a csúcs-reprezentációja alapján valóban egy kúp. Továbbá látható, hogy a 3.13. példában megjelenő poliéder egy kúp és az ott megjelenő megoldás módszert ad kúpok esetén a generátorfüggvény meghatározására. Ezt a módszert foglaljuk össze a következő tételben.

3.16. Tétel ([6],[11]). *Legyen $K = \{v_0 + \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_k \cdot v_k \mid \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k\}$ egy kúp, ahol $v_0 \in \mathbb{R}^d$, $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{Z}^d$. Ekkor $f(K; \mathbf{t})$ generátorfüggvény egy racionális függvény a $\mathbf{t}$ változóban. Mitöbb, ha $\Pi = \{v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \mid 0 \leq \lambda_k < 1, \forall i = 1, \dots, k\}$ a kúp fundamentális paralelepipedonja és $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_q$ a fundamentális paralelepipedonban lévő egész koordinátájú pontok, akkor*

$$f(K; \mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n} \in K \cap \mathbb{Z}^2} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} = \frac{\sum_{i=1}^q \mathbf{t}^{\mathbf{r}_i}}{\prod_{i=1}^k (1 - \mathbf{t}^{v_i})}.$$

3.17. Példa. A 3.10. példában megjelenő intervallum egy kúp mivel $P = \{0 + \lambda_1 \cdot 1 \mid \lambda_1 \geq 0\}$ és láttuk, hogy a generátorfüggvénye $f(P; t) = \frac{1}{1-t}$, ami egy racionális függvény. Valóban, ha felírjuk a P poliéder fundamentális paralelepipedonját, ami esetünkben a $\Pi = \{\lambda_1 \mid 0 \leq \lambda_1 < 1\}$ intervallum lesz, akkor $\Pi \cap \mathbb{Z} = \{0\}$. Vagyis alkalmazva a 3.16. tételt, valóban megkapjuk a 3.10. példában kiszámolt generátorfüggvényt.

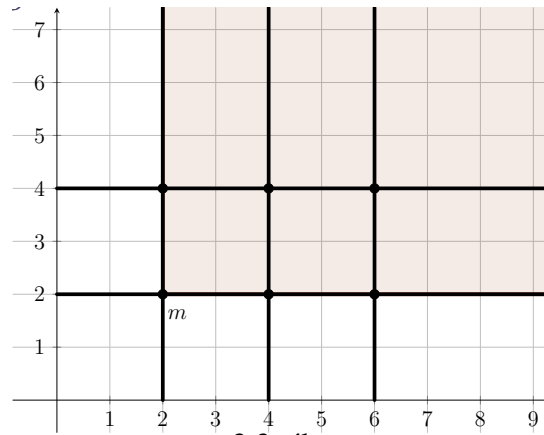
A következő tétel általánosabb generátorfüggvények racionalitását mondja ki. A tétel S.D. Cutkosky, J. Herzog és A. Reguera [8, Thm.7.5] munkájában található meg.

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

3.18. Tétel ([8]). Legyen $P \subset \mathbb{Q}_{\geq 0}^k$ egy racionális poliéder, valamint legyen $M \leq \mathbb{Z}^k$ egy részcsoport és $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^k$ egy vektor. Ekkor létezik a $p(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_k]$ polinom, az $s \in \mathbb{N}$ természetes szám és léteznek az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s \in \mathbb{N}^k$ vektorok úgy, hogy

$$\sum_{\mathbf{n} \in P \cap (\mathbf{m} + M)} t^{\mathbf{n}} = \frac{p(t_1, \dots, t_k)}{\prod_{i=1}^s (1 - t^{\mathbf{a}_i})}.$$

Vagyis $f(P \cap (\mathbf{m} + M); \mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n} \in P \cap (\mathbf{m} + M)} t^{\mathbf{n}}$ generátorfüggvény racionális.



3.3. ábra

3.19. Példa. Legyen $P = \mathbb{Q}_{\geq 0}^2$ és $M = (2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}) \leq \mathbb{Z}^2$, valamint $\mathbf{m} = (2, 2)$, ahogy a 3.3. ábrán láthatjuk. Két módon fogunk megbizonyosodni a generátorfüggvény racionalitásáról. Az első módszer egyszerű számoláson alapszik: legyen $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in P \cap (\mathbf{m} + M)$, vagyis $\mathbf{n} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^2 \cap ((2, 2) + 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z})$, ekkor léteznek $\lambda_1 = 2l_1, \lambda_2 = 2l_2 \in 2\mathbb{Z}$ úgy, hogy $\mathbf{n} = (2, 2) + \lambda_1 \cdot (1, 0) + \lambda_2 \cdot (0, 1)$, így

$$\sum_{\mathbf{n} \in P \cap (\mathbf{m} + M)} t^{\mathbf{n}} = \sum_{l_1, l_2 \geq 0} t_1^2 \cdot t_1^{2l_1} \cdot t_2^2 \cdot t_2^{2l_2} = \frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - t_1^2)(1 - t_2^2)}.$$

tehát racionális függvény. Most ha a 3.18. tételt alkalmazzuk következik, hogy létezik egy $p(t_1, t_2) = t_1^2 t_2^2 \in \mathbb{Z}[t_1, t_2]$ polinom, $s = 2 \in \mathbb{N}$ természetes szám és $\mathbf{a}_1 = (2, 0), \mathbf{a}_2 = (0, 2)$ vektorok úgy, hogy $\sum_{\mathbf{n} \in P \cap (\mathbf{m} + M)} t^{\mathbf{n}} = \frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - t_1^2)(1 - t_2^2)}$.

3.3. Poincaré sorok racionalitása

3.20. Tétel ([11]). Minden összefüggő, véges G gráf a gráfon értelmezett $D_1, D_2, \dots, D_k$ divizorok esetén a $P_{G, D_1, D_2, \dots, D_k}(t_1, t_2, \dots, t_k)$ sor racionális.

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

Bizonyítás. Jelölje $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ és $d_i = \deg(D_i)$ minden $i = 1, 2, \dots, k$ esetén. A $P_{G, D_1, D_2, \dots, D_k}(\mathbf{t})$ Poincaré sort felbontjuk az $n_1 D_1 + n_2 D_2 + \dots + n_k D_k$ divizor foka szerint. Legyen

$$Q_{G, D_1, D_2, \dots, D_k}^{(l)} = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^k n_i \cdot \deg(D_i) = \sum_{i=1}^k n_i d_i = l\}$$

és értelmezzük a

$$P_{G, D_1, D_2, \dots, D_k}^{(l)}(\mathbf{t}) = \begin{cases} \sum_{\mathbf{n} \in Q_{G, D_1, D_2, \dots, D_k}^{(l)}} \left(r_G \left(\sum_{i=1}^k n_i D_i \right) + 1 \right) \mathbf{t}^{\mathbf{n}}, & \text{ha } Q_{G, D_1, D_2, \dots, D_k}^{(l)} \neq \emptyset \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

sort, ahol $\mathbf{t}^{\mathbf{n}} = t_1^{n_1} \cdot t_2^{n_2} \cdot \dots \cdot t_k^{n_k}$.

Ha $l < 0$, akkor a 2.20. megjegyzés alapján $r_G(\sum_{i=1}^k n_i D_i) = -1$, így $P_{G, D_1, D_2, \dots, D_k}^{(l)}(\mathbf{t}) = 0$.

Ha $l > 2g - 2$, ahol g a G gráf génuszát jelöli, akkor felhasználva a 2.25. megjegyzést, kapjuk, hogy $\deg(K_G - \sum_{i=1}^k n_i D_i) = \deg(K_G) - \deg(\sum_{i=1}^k n_i D_i) < 2g - 2 - (2g - 2) = 0$. Így a 2.20. megjegyzés alapján $r_G(K_G - \sum_{i=1}^k n_i D_i) = -1$. Ekkor a 2.26 Riemann–Roch tétel szerint

$$r_G \left(\sum_{i=1}^k n_i D_i \right) = \deg \left(\sum_{i=1}^k n_i D_i \right) - g + 1 - 1 = \sum_{i=1}^k n_i d_i - g.$$

Így írhatjuk, hogy

$$\sum_{l > 2g-2} P_{G, D_1, D_2, \dots, D_k}^{(l)}(\mathbf{t}) = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in Q_{G, D_1, D_2, \dots, D_k}^{(l)} \\ l > 2g-2}} (l - g + 1) \mathbf{t}^{\mathbf{n}}. \quad (3.1)$$

Tekintjük a $\mathfrak{P}$ racionális poliédert, mint a nemnegatív ortáns metszetét a $\sum_{i=1}^k n_i d_i > 2g - 2$ egyenlőtlenség által definiált féltérrel, vagyis $\mathfrak{P} = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}_+^k \mid l = \sum_{i=1}^k n_i d_i > 2g - 2\}$, valamint legyen $f(\mathfrak{P}; \mathbf{t})$ a $\mathfrak{P}$ racionális poliéder generátorfüggvénye. A továbbiakban szeretnénk a (3.1) egyenlet jobb oldalán lévő sort $f(\mathfrak{P}; \mathbf{t})$ segítségével kiszámolni.

Manjunath [11] munkájában a $\left(\sum_{i=1}^k d_i \partial_{t_i} - g + 1 \right)$ operátorral hat az $f(\mathfrak{P}; \mathbf{t})$ generátorfüggvényre, ahol ∂_{t_i} a t_i változó szerinti parciális deriváltat jelenti. A módszer megértése során rájöttünk, hogy a létrejövő sorban a parciális deriválás által plusz tagok jelennek meg a (3.1) egyenlet jobb oldalán jelen lévő sorhoz képest. A következőkben általánosan tárgyaljuk le, hogy mely tagokat számolja pluszba a [11] cikk, és bemutatunk egy javítást, amellyel a plusz tagok kiküszöbölhetőek. A bizonyítást majd egy példán keresztül is illusztráljuk.

Olyan módosítását keressük a $\left(\sum_{i=1}^k d_i \partial_{t_i} - g + 1 \right)$ operátornak, amely ha hat $f(\mathfrak{P}; \mathbf{t})$

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

generátorfüggvényre, akkor a $\mathbf{t}^n$ együtthatója $\sum_{i=1}^k n_i d_i - g + 1$ lesz, ahol $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$. A következőkben az $\mathbf{t}^n$ együtthatóját $\text{coeff}(\mathbf{t}^n)$ -nel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy $\partial_{t_i} (t_1^{n_1} \dots t_i^{n_i+1} \dots t_k^{n_k}) = (n_i + 1) (t_1^{n_1} \dots t_i^{n_i} \dots t_k^{n_k}) = (n_i + 1) \mathbf{t}^n$ bármilyen $i = 1, \dots, k$ esetén. Így a $\sum_{i=1}^k d_i \partial_{t_i} f(\mathfrak{P}; \mathbf{t})$ sorban a $\mathbf{t}^n$ együtthatója

$$\text{coeff}(\mathbf{t}^n) = \sum_{i=1}^k d_i (n_i + 1).$$

Összegezve, ha azt szeretnénk, hogy $\text{coeff}(\mathbf{t}^n) = \sum_{i=1}^k n_i d_i - g + 1$ legyen, akkor $f(\mathfrak{P}, \mathbf{t})$ generátorfüggvényre a $\sum_{i=1}^k d_i \partial_{t_i} - \sum_{i=1}^k d_i - g + 1$ operátorral hatunk.

3.21. Továbbá felmerül a kérdés, hogy mi történik abban az esetben, ha $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k) \in \mathfrak{P}$ kielégíti a $\sum_{i=1}^k n_i d_i = 2g - 1$ egyenletet, mert ekkor $\mathbf{t}^n$ tag valamely változó szerinti parciális deriválása után olyan tagot kapunk, ami már nem tagja a $\mathfrak{P}$ poliéder generátorfüggvényének. És vajon csak azon $\mathbf{n}$ esetén történik meg, amikor az $\mathbf{n}$ rajta van a $\sum_{i=1}^k n_i d_i = 2g - 1$ hipersíkon? A válasz nemleges.

A válasz megértése érdekében tekintjük az $\mathbb{N}^k$ rácsot és minden $\mathbf{t}^n$ tagot az együttható nélkül azonosítunk az $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$ rádsponttal. Ekkor a t_i változó szerinti parciális deriválás az $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$ rádspontot eltolja az i . koordináta tengellyel párhuzamosan negatív irányban, vagyis az $(n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_k)$ rádspontba. Minden $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ részhalmaz esetén tekintjük a

$$H_I = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{i=1}^k x_i d_i = 2g - 1 - \sum_{i \in I} d_i\}$$

hipersíkokat. Mivel a hipersíkok egyenletei egy állandóban térnek el, ezért párhuzamosak egymással. Tetszőleges I részhalmaz esetén megnézzük, hogy a H_I hipersíkon lévő rádspontok megjelenhetnek-e a poliéderben lévő rádspontokhoz rendelt monomok parciális deriváltjaként, és ebben az esetben milyen együtthatót kapnak.

Legyen $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k) \in H_I \cap \mathbb{N}^k$, vagyis $\sum_{i=1}^k n_i d_i = 2g - 1 - \sum_{i \in I} d_i$. Ha létezik olyan $j \in \{1, \dots, k\}$ úgy, hogy

$$d_j \geq \sum_{i \in I} d_i, \tag{3.2}$$

akkor $\sum_{i=1, i \neq j}^k n_i d_i + (n_j + 1) d_j = 2g - 1 + d_j - \sum_{i \in I} d_i \geq 2g - 1$, vagyis $(n_1, \dots, n_j + 1, \dots, n_k) \in \mathfrak{P}$. Tehát az $(n_1, \dots, n_k)$ rádspontot megkapjuk az $(n_1, \dots, n_j + 1, \dots, n_k)$ poliéderben lévő pont eltolásából, így $t_1^{n_1} \dots t_j^{n_j} \dots t_k^{n_k}$ monom megjelenik és együtthatója a t_j változó szerinti parciális deriválás után $(n_j + 1)$ -et kap. Ezért, ha bevezetjük a

$$J_I^< = \{j \in \{1, \dots, k\} \mid \sum_{i \in I} d_i \leq d_j\}$$

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

indexhalmazt, akkor a t^n tag a j -edik koordinátatengely irányából kap együtthatót, ahol $j \in J_I^\leq$ és a kapott együttható $(n_j + 1)$ lesz. Tehát összegezve a t^n monom együtthatója

$$\text{coeff}(t^n) = \sum_{j \in J_I^\leq} (n_j + 1).$$

Ha nem létezik $j \in \{1, \dots, k\}$, amely kielégíti a 3.2. egyenlőtlenséget, vagyis $J_I^\leq = \emptyset$, akkor a H_I hipersík egyetlen rácspontjához tartozó monom sem jelenik meg a parciális deriválások elvégzése után. Az előbbieket alapján látható, hogy a (3.1) egyenlet jobb oldalán lévő sort a következő módon kapjuk meg:

$$\sum_{\substack{n \in Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{(l)} \\ l > 2g-2}} t^n = \left(\sum_{i=1}^k d_i \partial_{t_i} - \sum_{i=1}^k d_i - g + 1 \right) f(\mathfrak{P}; t) - \sum_{I \subseteq \{1,\dots,k\}} \sum_{n \in H_I \cap \mathbb{N}^k} \left(\sum_{j \in J_I^\leq} (n_j + 1) d_j \right) t^n.$$

Mivel a 3.14. tétel alapján $f(\mathfrak{P}; t) = \sum_{v \in V(\mathfrak{P})} f(\text{cone}(\mathfrak{P}, v); t)$, valamint a 3.16. tétel alapján $f(\text{cone}(\mathfrak{P}, v); t)$ racionális függvény és $\mathfrak{P}$ poliédernek véges sok csúcsa van, így következik, hogy $f(\mathfrak{P}; t)$ generátorfüggvény racionális. Továbbá ha $f(\mathfrak{P}; t)$ racionális generátorfüggvényre hatunk a $\left(\sum_{i=1}^k d_i \partial_{t_i} - \sum_{i=1}^k d_i - g + 1 \right)$ operátorral, akkor a létrejövő függvény is racionális lesz, amelyből ha kivonunk egy polinomot az eredmény racionális marad. Tehát $\sum_{l > 2g-2} P_{G,D_1,\dots,D_k}^{(l)}(t) = \sum_{\substack{n \in Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{(l)} \\ l > 2g-2}} (l - g + 1) t^n$ racionális.

3.22. Ha $0 \leq l = \sum_{i=1}^k n_i d_i \leq 2g - 2$, akkor a $P_{G,D_1,\dots,D_k}(t)$ Poincaré sor ezen esetben tartozó tagjait divizorosztályok szerint fogjuk felbontani. Legyen $[D] \in \text{Div}(G)/\text{Prin}(G)$ esetén $Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]} = \{n \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^k n_i D_i \in [D], 0 \leq \sum_{i=1}^k n_i d_i \leq 2g - 1\}$ és tekintjük a

$$P_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]}(t) = \sum_{n \in Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]}} \left(r_G \left(\sum_{i=1}^k n_i D_i \right) + 1 \right) t^n$$

sort. Mivel $\sum_{i=1}^k n_i D_i \in [D]$, ezért a 2.20. megjegyzés alapján $r_G(\sum_{i=1}^k n_i D_i) = r_G(D)$. Így kapjuk, hogy

$$P_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]}(t) = \begin{cases} (r_G(D) + 1) \sum_{n \in \mathbb{N}^k, \sum_{i=1}^k n_i D_i \in [D]} t^n, & \text{ha } Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]} \neq \emptyset \\ 0, & \text{különben} \end{cases}. \quad (3.3)$$

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

Ugyanakkor minden $0 \leq l \leq 2g - 2$ -re írhatjuk, hogy

$$P_{G,D_1,\dots,D_k}^{(l)} = \sum_{[D] \in \text{Pic}^{(l)}(G)} P_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]}, \quad (3.4)$$

ahol $\text{Pic}^l(G)$ az l -ed fokú divizorokat tartalmazó $[D]$ osztályok halmaza. Továbbá, az általános Jacobi azonosítás miatt (lásd 2.2 fejezet és [2], [3]) $\text{Pic}^l(G)$ véges halmaz és számossága megegyezik a G feszítőfáinak a számával. Ezért a (3.4) egyenlet jobb oldala egy véges összeg.

Legyen $f(Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]}; \mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n} \in Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]}} \mathbf{t}^{\mathbf{n}}$ a $Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]}$ halmaz generátorfüggvénye. Így, ha $Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]}$ nem üres halmaz, akkor a (3.3) alapján $P_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]}(\mathbf{t}) = (r_G(D) + 1) f(Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]}; \mathbf{t})$. Mivel $P_{G,D_1,\dots,D_k}$ racionalitását szeretnénk vizsgálni, elégséges, hogy részletesen megvizsgáljuk a $Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]}$ halmazt és annak generátorfüggvényét.

Vezessük be a

$$\phi_{G,D_1,\dots,D_k}: \mathbb{Z}^k \rightarrow \text{Div}(G)/\text{Prin}(G) = \text{Pic}(G), \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k) \mapsto \left[\sum_{i=1}^k n_i D_i \right]$$

csoporthomomorfizmust. Ekkor tekintjük a $[D]$ divizorosztály $\phi_{G,D_1,\dots,D_k}$ szerinti fibrumát, $Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]} = \phi_{G,D_1,\dots,D_k}^{-1}([D])$, és legyen $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_k}) = \phi_{G,D_1,\dots,D_k}^{-1}([0])$ a csoporthomomorfizmus magja. Így a $Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]}$ halmaz elemei olyan $[D]$ fibrumában lévő elemek, amelyek a nemnegatív ortánsban találhatóak. Ha $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \in \phi_{G,D_1,\dots,D_k}^{-1}([D])$, ekkor következik, hogy $\phi_{G,D_1,\dots,D_k}(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) = \phi_{G,D_1,\dots,D_k}(\mathbf{n}_1) - \phi_{G,D_1,\dots,D_k}(\mathbf{n}_2) = 0$, tehát $\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 \in \text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_k})$. Tehát bármilyen $\mathbf{n} \in \phi_{G,D_1,\dots,D_k}^{-1}([D])$ felírható $\mathbf{n}_1$ és egy $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_k})$ -beli elem összegeként. Így

$$\phi_{G,D_1,\dots,D_k}^{-1}([D]) = \mathbf{a} + \text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_k}),$$

ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^k$ és mivel $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_k}) \leq \mathbb{Z}^k$ egy részrácsa a $\mathbb{Z}^k$ rácsnak következik, hogy $\phi_{G,D_1,\dots,D_k}^{-1}([D])$ egy affin rács. Ekkor alkalmazva a 3.18. tételt kapjuk, hogy $f(Q_{G,D_1,\dots,D_k}^{[D]}; \mathbf{t})$ racionális, és ebből következik, hogy $P_{G,D_1,\dots,D_k}^{(l)}$ is racionális.

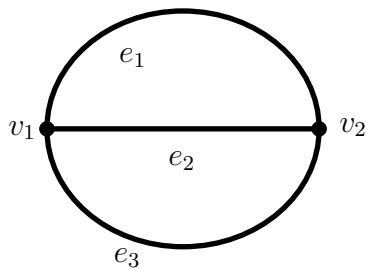
Összegezve a bizonyítás lépéseit a $P_{G,D_1,\dots,D_k}(\mathbf{t}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} P_{G,D_1,\dots,D_k}^{(l)}(\mathbf{t})$ Poincaré sort három esetre bontottuk és mindhárom esetben beláttuk a racionalitást. ■

A $k = 1$ sajátos esetben egyszerűen ellenőrizhető a Poincaré sor racionalitása.

Valóban, ha $\deg(D_1) < 0$, akkor a 2.20. megjegyzés alapján $r_G(D_1) = -1$, tehát a Poincaré sor $P_{G,D_1}(t_1) = 0$. Ha $\deg(D_1) > 0$ és $n_1 \gg 0$ akkor a 2.26. (Riemann-Roch) tétel alapján $r_G(n_1 D_1) = n_1 \deg(D_1) - g$, így a Poincaré sor regularizálódik, vagyis létezik az $n_1 \deg(D_1) - g$ Hilbert polinomja, így racionális lesz. Ha $\deg(D_1) = 0$, akkor $P_{G,D_1}(t_1) =$

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

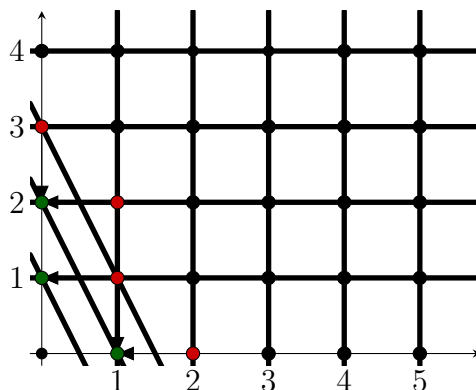
$\sum_{n_1 \in \text{Ker}(\phi_{G,D_1}) \cap \mathbb{N}} t_1^{n_1} = \frac{1}{1-t_1^c}$, valamilyen pozitív egész c számra, $\text{Ker}(\phi_{G,D_1})$ egy részcsoportja $\mathbb{Z}$ csoportnak.



3.4. ábra

A következőkben a 3.21. bekezdésben leírt gondolatmenetet illusztráljuk.

3.23. Példa. Legyen G a 3.4. ábrán megjelenő gráf. Ekkor $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$, $V(G) = \{v_1, v_2\}$, így génusza $g = 3 - 2 + 1 = 2$. Tekintjük továbbá $D_1 = v_1 + v_2$ és a $D_2 = v_3$ divizorokat, vagyis $\deg D_1 = d_1 = 2$ és $\deg D_2 = d_2 = 1$. A következőkben a Poincaré sor azon részével foglalkozunk, amelyet a 3.21. bekezdésben tárgyaltunk. A későbbiekben viszont adunk olyan példákat is, amely esetén a Poincaré sort teljes egészében kiszámoljuk. Legyen $\mathfrak{P} = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Q}_+^2 \mid n_1 d_1 + n_2 d_2 \geq 2g - 1\} = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 2d_1 + d_2 \geq 3\}$. Mivel kevés olyan pont van a $\mathfrak{P}$ poliéderben, amelyek eltolása után az eltoló pont nem található a $\mathfrak{P}$ poliéderben, így megvizsgáljuk őket, majd a hipersíkok segítségével is kiszámoljuk a Poincaré sor $\mathfrak{P}$ poliéderen lévő részét. A Poincaré sor ezen részét $(d_1 \partial_{t_1} + d_2 \partial_{t_2} - d_1 - d_2 - g + 1) f(\mathfrak{P}; \mathbf{t}) = (2\partial_{t_1} + \partial_{t_2} - 4) f(\mathfrak{P}; \mathbf{t})$ formula segítségével kapjuk. A 3.5. ábrán látható, hogy a pirossal jelölt, $(0, 3), (1, 2), (1, 1), (2, 0)$ pontok elto-



3.5. ábra

lásából olyan pontokat kapunk, amelyek már nincsenek benne a $\mathfrak{P}$ poliéderben. Így ezekhez a pontokhoz rendelt tagokat parciális deriválás során pluszba jelennek meg, amit majd le kell

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

vonjunk. A $(0, 2)$ pontot megkapjuk, mint a $(0, 3)$ pont eltolását második koordinátatengely szerint és mint a $(2, 1)$ pont eltolását az első koordinátatengely szerint negatív irányban. Így a $(0, 2)$ -hoz rendelt tag együttthatója,

$$\text{coeff}(\mathbf{t}^{(0,2)}) = 3d_2 + 2d_1 = 3 + 2 = 5.$$

Hasonlóan $(0, 1)$ pontot megkapjuk, mint az $(1, 1)$ pont eltoltását, ahogy a 3.5. ábrán a nyíl iránya is mutatja, így $\text{coeff}(\mathbf{t}^{(0,1)}) = d_1 = 2$. Végül a $(0, 1)$ pontot is két a $\mathfrak{P}$ poliéderben lévő pont $(1, 1)$ és $(2, 0)$ eltolásából kapjuk meg, tehát $\text{coeff}(\mathbf{t}^{(0,1)}) = 2d_1 + 1d_2 = 4 + 1 = 5$. Így írhatjuk, hogy

$$\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2 \\ n_1 \cdot 2 + n_2 \geq 3}} (n_1 \cdot 2 + n_2 - 1) \mathbf{t}^{\mathbf{n}} = (2\partial_{t_1} + \partial_{t_2} - 4) f(P; \mathbf{t}) - 5\mathbf{t}^{(1,0)} - 5\mathbf{t}^{(0,2)} - 2\mathbf{t}^{(0,1)} \quad (3.5)$$

Most tárgyaljuk a bizonyításban adott általános módszerrel. Tekintjük a $H_{\{1\}} = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2 \mid 2n_1 + n_2 = 3 - d_1 = 1\}$, $H_{\{2\}} = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2 \mid 2n_1 + n_2 = 3 - d_2 = 2\}$ és $H_{\{1,2\}} = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2 \mid 2n_1 + n_2 = 3 - d_1 - d_2 = 0\}$ hipersíkokat, amelyek egyenesek. Ekkor $H_{\{1\}} \cap \mathbb{N}^2 = \{(0, 1)\}$ és $J_{\{1\}}^{\leq} = \{1\}$. Hasonlóan $H_{\{2\}} \cap \mathbb{N}^2 = \{(1, 0), (0, 2)\}$ és $J_{\{2\}}^{\leq} = \{1, 2\}$, valamint $H_{\{1,2\}} \cap \mathbb{N}^2 = \{(0, 0)\}$ és $J_{\{1,2\}} = \emptyset$. Így

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, k\}} \sum_{\mathbf{n} \in H_I \cap \mathbb{N}^k} \left(\sum_{j \in J_I^{\leq}} (n_j + 1) d_j \right) \mathbf{t}^{\mathbf{n}} = 5\mathbf{t}^{(1,0)} + 5\mathbf{t}^{(0,2)} + 2\mathbf{t}^{(0,1)}$$

3.4. A nulladfokú divizorok esete

Legyen G egy gráf és tekintjük a $D_1, \dots, D_k$ nulladfokú divizorok halmazát. Vagyis $d_i = \deg(D_i) = 0$ minden $i \in \{1, \dots, k\}$ -re és ekkor $\sum_{i=1}^k n_i d_i = 0$ minden $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ vektor esetén. Tehát, bármilyen G gráf és $D_1, \dots, D_k$ divizorok esetén, amelyekre teljesül, hogy $\deg D_i = d_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, k$ fennáll a $0 \leq \sum_{i=1}^k n_i d_i \leq 2g - 1$ egyenlőtlenség. Vagyis a $P_{G, D_1, \dots, D_k}(\mathbf{t})$ Poincaré sort divizorosztályok szerint fogjuk felbontani, így tehát

$$\begin{aligned} P_{G, D_1, \dots, D_k}(\mathbf{t}) &= \sum_{[D] \in \text{Jac}(G)} P_{G, D_1, \dots, D_k}^{[D]}(\mathbf{t}) = \\ &= \sum_{[D] \in \text{Jac}(G)} \left((r_G(D) + 1) \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^k, \\ \sum_{i=1}^k n_i D_i \in [D]}} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

Felhasználjuk a 2.20. megjegyzést, miszerint, ha $\deg D = 0$ és D nem principális divizor, akkor $r_G(D) = -1$. Ilyen D divizor esetén $(r_G(D) + 1) \sum_{\sum_{i=1}^k n_i D_i \in [D]} \mathbf{n} \in \mathbb{N}^k} t^n$ összeg 0-t eredményez. Ugyancsak a 2.20. megjegyzés alapján, ha $\sum_{i=1}^k n_i D_i$ divizor principális, akkor $r_G\left(\sum_{i=1}^k n_i D_i\right) = 0$. Ezt összegezve és visszahelyettesítve a (3.6). egyenletbe kapjuk, hogy

$$P_{G,D_1,\dots,D_k}^{(0)}(\mathbf{t}) = (0 + 1) \cdot \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^k \\ \sum_{i=1}^k n_i D_i \in \text{Prin}(G)}} t^n = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^k \\ \sum_{i=1}^k n_i D_i \in \text{Prin}(G)}} t^n = P_{G,D_1,\dots,D_k}^{[0]}(\mathbf{t}), \quad (3.7)$$

ahol $[0]$ a $(0, \dots, 0)$ -val lineárisan ekvivalens divizorok osztályát jelöli, vagyis a principális divizorokat.

A következőkben néhány sajátos esetet fogunk vizsgálni. Elsőként Manjunath [11] munkájában megjelenő esetet tárgyaljuk, amikor $D_i = v_i - v_k$ minden $i = 1, \dots, k-1$ esetén.

3.4.1. A $D_i = v_i - v_k$ eset letárgyalása

Ebben az esetben kapcsolatot lehet teremteni a G gráf Laplace mátrixa és a $\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}: \mathbb{Z}^{k-1} \rightarrow \text{Pic}(G)$ csoporthomomorfizmus magja között. Ezt a kapcsolatot Manjunath [11, Prop.2.4] fogalmazta meg. Mielőtt kiejelentenénk az állítást, amely megfogalmazza a fent említett kapcsolatot, egy tételt [14, Thm.1.17.] fogunk ismertetni, amelyre szükségünk lesz a bizonyítás során.

3.24. Tétel ([14]). *Legyen G egy r rangú szabad Abel csoport és H egy részcsoportha G -nek. Ekkor G/H pontosan akkor véges, ha G és H csoportok rangjai megegyeznek. Mitöbb, ebben az esetben, ha $x_1, x_2, \dots, x_r$ a G és $y_1, y_2, \dots, y_r$ a H csoport egy egész bázisa és $y_i = \sum_j a_{ij} x_j$ minden $i = 1, \dots, r$ esetén, akkor*

$$|G/H| = |\det(a_{ij})|.$$

3.25. Tétel ([11]). *Egy G gráf és a gráfon értelmezett $D_1, \dots, D_{k-1}$ divizorok esetén a $\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}: \mathbb{Z}^{k-1} \rightarrow \text{Pic}(G)$ csoporthomomorfizmus magja, $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}})$ olyan rész-rácsa a $\mathbb{Z}^{k-1}$ rácsnak, amelyet a $b_1|_{k-1}, \dots, b_{k-1}|_{k-1}$ vektorok generálnak, ahol $b_i|_{k-1}$ a Laplace mátrix i -edik sorának leszűkítését jelenti az első $(k-1)$ koordinátára. Továbbá a $[\mathbb{Z}^{k-1}: \text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}})]$ index megadja a gráf feszítőfáinak a számát.*

Bizonyítás. Tekintjük az $A_{k-1} := (1, \dots, 1)^\perp \cap \mathbb{Z}^k = \{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^{k-1} \mid \sum_{i=1}^{k-1} a_i = 0\}$ rácsot és a L_G Laplace rácsot, amelyet a $Q(G)$ Laplace mátrix sorai feszítenek ki.

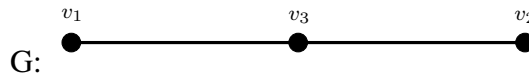
3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

A 2.15. tételből tudjuk, hogy $D = (d_1, \dots, d_{k-1}) \in \text{Div}^0(G)$ divizor principális, ha $Q(G) \cdot X^T = (d_1, \dots, d_{k-1})^T$ egyenletnek van egész megoldása, vagyis a $\text{Prin}(G)$ principális divizorok csoportját azonosíthatjuk az L_G Laplace ráccsal. Mivel $D_1 = (1, 0, \dots, 0, -1)$, $D_2 = (0, 1, \dots, 0, -1), \dots, D_{k-1} = (0, 0, \dots, 1, -1)$ elemei az A_{k-1} rácsnak, így bármilyen egész skalárokkal vett lineáris kombinációjuk esetén teljesül, hogy $n_1 D_1 + \dots + n_{k-1} D_{k-1} \in A_{k-1}$. Továbbá mivel $D_1, \dots, D_{k-1}$ lineárisan függetlenek és A_{k-1} dimenziója megegyezik a divizorok számával, ezért a lineáris algebrából ismert alternatíva tétel alapján $\{D_1, \dots, D_{k-1}\}$ egy bázisa A_{k-1} -nek. Továbbá, mivel A_{k-1} tartalmazza az összes nulladfokú divizort és L_G csak a principális divizorokat, ezért $L_G \subseteq A_{k-1}$, így bármilyen Laplace rácsban lévő elem felírható egyértelműen $D_1, \dots, D_{k-1}$ vektorok egészekkel vett lineáris kombinációjaként és így a Laplace mátrix első $(k-1)$ sora is. Ha b_i jelöli a Laplace mátrix i -edik sorát, akkor $b_i = \sum_{j=1}^{k-1} (b_i|_{k-1})_j \cdot D_j$, ahol $(b_i|_{k-1})_j$ jelöli a $b_i|_{k-1}$ vektor j -edik koordinátáját. Mivel $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}) = \text{Prin}(G) = \phi_{G,D_1,\dots,D_k}^{-1}([0])$, így bizonyítottuk a tétel első állítását.

A második állítás bizonyításánál az előbbieket fogjuk felhasználni. Mivel $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}})$ egy $(k-1)$ -ed rendű részcsoportha $\mathbb{Z}^{k-1}$ szabad Abel csoportnak és $b_1|_{k-1}, \dots, b_{k-1}|_{k-1}$ egy egész bázisa a 3.24. tételt alkalmazva következik, hogy

$$|\mathbb{Z}^{k-1} / \text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}})| = \left| \det \left(b_1|_{k-1}, b_2|_{k-1}, \dots, b_{k-1}|_{k-1} \right)^T \right|. \quad (3.8)$$

Észrevesszük, hogy a $Q(G)_{k-1}$ mátrix megegyezik a (3.8). egyenlet jobb oldalával, így alkalmazva a 2.11. Kirchhoff tételt, következik, hogy $|\mathbb{Z}^{k-1} : \text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}})|$ megadja a gráf feszítőfáinak számát. ■



3.6. ábra

3.26. Példa. Tekintjük a 3.6. ábrán látható G gráfot és $D_1 = v_1 - v_3 = (1, 0, -1)$, $D_2 = v_2 - v_3 = (0, 1, -1)$ divizorokat. A G gráf Laplace mátrixa

$$L_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

valamint tekintjük a $\phi_{G,D_1,D_2}: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Pic}(G)$ homomorfizmust. Ekkor $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,D_2})$ egy részrácsa a $\mathbb{Z}^2$ -nek, amelyet a $(1, 0) = b_1|_2$, $(0, 1) = b_2|_2$ vektorok generálnak, vagyis

$$\text{Ker}(\phi_{G,D_1,D_2}) = \text{span}((1, 0), (0, 1)) = \{\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}^2,$$

$[\mathbb{Z}^2: \text{Ker}(\phi_{G,D_1,D_2})] = 1$, és ez valóban a feszítőfák száma, mivel a 3.6. ábrán megjelenő gráf egy fa.

Továbbmenve szeretnénk a $D_i = v_i - v_k$, $i = 1, \dots, k-1$ divizorokhoz rendelt Poincaré sorról is többet megtudni.

Láttuk a 3.20. tétel bizonyításában, hogy $P_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}^{[0]}(\mathbf{t})$ a $Q_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}^{[0]}$ poliéder generátorfüggvénye, ahol $Q_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}^{[0]} = \text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}) \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^{k-1}$. A $\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}$ homomorfizmus magja, $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}})$ olyan $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_{k-1})$ egész vektorokból áll, amelyekre teljesül, hogy $\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}(\mathbf{n}) = \left[\sum_{i=1}^{k-1} n_i D_i \right] = [0] \in \text{Jac}(G)$. Mivel a Jacobi csoport, $\text{Jac}(G) = \text{Div}^0(G)/\text{Prin}(G)$ véges és $[D_i] \in \text{Jac}(G)$, minden $i = 1, \dots, k-1$ esetén, ezért bármely i -re $\mu_i = \text{ord}(D_i)$ véges szám, ahol $\text{ord}(D_i)$ a $[D_i]$ elem rendjét jelöli a Jacobi csoportban. Így tehát

$$[0] = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i [D_i] = \sum_{i=1}^{k-1} [\mu_i D_i] = \left[\sum_{i=1}^{k-1} \mu_i D_i \right],$$

vagyis $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{k-1})$ benne van a $\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}$ homomorfizmus magjában. Ha tekintjük a $g_i = \mu_i e_i$ vektorokat minden $i = 1, \dots, k-1$ -re, ahol e_i jelöli a $\mathbb{Z}^{k-1}$ i -edik standard bázisvektorát, akkor teljesül az alábbi állítás.

$$\text{span}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{k-1}) \leq \text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}) \leq \mathbb{Z}^{k-1}.$$

Ugyanakkor a $\text{span}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{k-1})$ részrácsa $\mathbb{Z}^{k-1}$ -nak és

$$|\mathbb{Z}^{k-1} / \text{span}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_k)| = \prod_{i=1}^{k-1} \mu_i.$$

Hasonlóan, mivel $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_k}) \leq \mathbb{Z}^{k-1}$, felhasználva a 3.25. tételt tudjuk, hogy

$$|\mathbb{Z}^{k-1} / \text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_k})| = N_G,$$

ahol N_G jelöli a G gráf feszítőfáinak a számát. Felhasználva a 3. izomorfizmus tételt következik, hogy

$$|\text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_k}) / \text{span}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{k-1})| = \frac{\prod_{i=1}^{k-1} \mu_i}{N_G}.$$

Az előbbieket és a 3.16. tételt felhasználva kijelenthetjük az alábbi tételt, amely kifejezi a $D_i =$

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

$v_i - v_k$, $i = 1, \dots, k - 1$ divizorokhoz rendelt Poincaré sort.

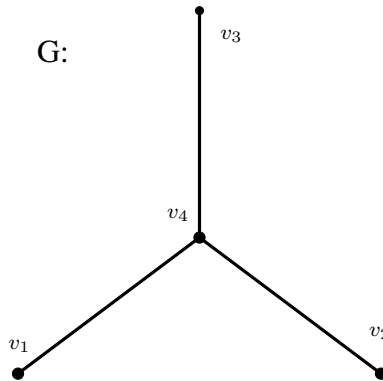
3.27. Tétel ([11]). Adott a G gráf, amely csúcsainak halmaza $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. A G gráfon értelmezzük a $D_i = v_i - v_k$, $i = 1, \dots, k - 1$ divizorokat. Ekkor

$$P_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}(\mathbf{t}) = \frac{\sum_{\mathbf{r} \in B} t^n}{\prod_{i=1}^{k-1} (1 - t_i^{\mu_i})},$$

ahol $B = \{\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{k-1}) \in \text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}) \mid 0 \leq r_i < \mu_i, \forall i = 1, \dots, k - 1\}$ és $\mu_i = \text{ord}([D_i])$.

3.28. Példa. Tekintjük a 3.6. ábrán megjelenő bambuszgráfot és $D_1 = v_1 - v_3$, $D_2 = v_2 - v_3$ divizorokat. Láttuk a 3.26. példában a gráf $Q(G)$ Laplace mátrixát. Így a 3.25. tétel értelmében a ϕ_{G,D_1,D_2} homomorfizmus magját, $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,D_2})$ -t az $(1, 0) = b_1|_2$ és $(0, 1) = b_2|_2$ vektorok generálják, ahol $b_i|_2$ jelöli a $Q(G)$ Laplace mátrix i -edik sorának első két komponensét. Vagyis $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,D_2}) \cap \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^2$, így $\mathbf{g}_1 = 1 \cdot e_1 = \mu_1 e_1$ és $\mathbf{g}_2 = 1 \cdot e_2 = \mu_2 e_2$. Tehát $B = \{\mathbf{r} = (r_1, r_2) \in \text{Ker}(\phi_{G,D_1,D_2}) \mid 0 \leq r_i < \mu_i = 1, \forall i = 1, 2\} = \{(0, 0)\}$, így a 3.27. tétel alapján

$$P_{G,D_1,D_2}(\mathbf{t}) = P_{G,D_1,D_2}(t_1, t_2) = \frac{1}{(1 - t_1)(1 - t_2)}.$$



3.7. ábra

3.29. Példa. Tekintjük a 3.7. ábrán látható csillagszerű gráfot. Vesszük a $D_1 = v_1 - v_4$, $D_2 = v_2 - v_4$ és $D_3 = v_3 - v_4$ divizorokat és meghatározzuk a értelmezett D_1 , D_2 , D_3 divizorokhoz rendelt Poincaré sort. Hasonlóan fogunk eljárni, mint a 3.28. példa esetén. A G gráf Laplace

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

mátrixa:

$$Q(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Így tehát $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,D_2,D_3}) = \text{span}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, vagyis hasonlóan a 3.28. példához $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ és $B = \{(0, 0, 0)\}$. Tehát

$$P_{G,D_1,D_2,D_3}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)}.$$

A 3.28 és a 3.29. példák Poincaré sorait látva felmerül a kérdés, hogyha vesszünk egy teljesen általános fát, akkor hasonló módon leírható-e a fán értelmezett $D_i = v_i - v_k$ divizorokhoz rendelt Poincaré sor. A következőkben ezt az eredményt fogjuk ismertetni és a példához hasonlóan igazolni.

3.30. Tétel. *Legyen G egy fa és legyen $V(G) = \{v_1, \dots, v_k\}$ a gráf csúcsainak a halmaza. Értelmezzük minden $i = 1, \dots, k-1$ esetén a $D_i = v_i - v_k$ divizorokat. Ekkor a $D_1, \dots, D_{k-1}$ divizorokhoz rendelt Poincaré sor*

$$P_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}(\mathbf{t}) = P_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}(t_1, \dots, t_{k-1}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1}(1-t_i)}$$

alakú.

Bizonyítás. Mivel G egy fa, így egyetlen feszítőfája van. Felhasználva, hogy a Jacobi csoport számossága megegyezik a feszítőfák számával következik, hogy a $|\text{Jac}(G)| = 1$ vagyis a Jacobi csoport csak a triviális, $[0] = [(0, \dots, 0)]$ elemet tartalmazza. Így a $[D_i]$ elem rendje a Jacobi csoportban 1 minden $i = 1, \dots, k-1$ esetén. Felírva a $B = \{\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{k-1}) \in \text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_{k-1}}) \mid 0 \leq r_i < \mu_i \ \forall i = 1, \dots, k-1\} = \{(0, 0, \dots, 0)\}$ halmazt és alkalmazva a 3.25. tételt, azt kapjuk, hogy

$$P_{G,D_1,\dots,D_k}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1}(1-t_i)}.$$

■

A továbbiakban néhány példa erejéig még a $D_i = v_i - v_k$ esetről maradunk.

3.31. Példa. Tekintjük a 2.3. ábrán megjelenő G gráfot és a gráfon értelmezett $D_1 = v_1 - v_3$ és $D_2 = v_2 - v_3$ divizorokat. Tudjuk a 2.12. példából, hogy $\text{Jac}(G) \cong \mathbb{Z}_3$, így mivel ellenőrizhető

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

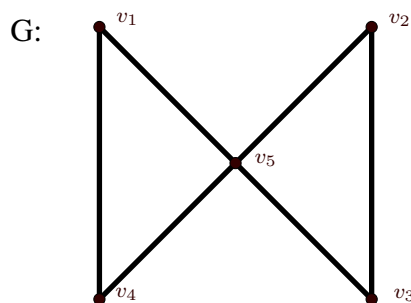
a 2.15. tétellel, hogy $D_1 \not\sim 0$, így $\text{ord}(D_1) = \mu_1 = 3$. Hasonlóan $\text{ord}(D_2) = \mu_2 = 3$. Így kapjuk, hogy $B = \{r = (r_1, r_2) \in \text{Ker}(\phi_{G,D_1,D_2}) \mid 0 \leq r_i < 3, \forall i = 1, 2\}$. Tudjuk továbbá a 3.25. tétel alapján, hogy $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,D_2}) = \text{span}((2, -1), (-1, 2))$ tehát $B = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$. Ebben az esetben a Poincaré sor a 3.27. tétel alapján

$$P_{G,D_1,D_2}(t) = \frac{1 + t_1 t_2 + t_1^2 t_2^2}{(1 - t_1^3)(1 - t_2^3)}$$

A következő példában a (3.7). egyenlet

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^k \\ \sum_{i=1}^k n_i D_i \in \text{Prin}(G)}} t^n = \sum_{n \in \text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_k}) \cap \mathbb{N}^k} t^n \quad (3.9)$$

alakját fogjuk használni.



3.8. ábra

3.32. Példa. Tekintjük a 3.8. ábrán megjelenő G gráfot és a gráfon értelmezett $D_i = v_i - v_5$ divizorokat, minden $i = 1, \dots, 4$ -re. Ekkor a 3.25. tétel szerint a $\phi_{G,D_1,\dots,D_4}$ homomorfizmus magját a Laplace mátrix az első négy koordinátára leszűkített első négy sora generálja, vagyis $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_4}) = \text{span}((2, -1, 0, 0), (-1, 2, 0, 0), (0, 0, 2, -1), (0, 0, -1, 2))$. Észrevesszük, hogy

$$w_1 = (3, 0, 0, 0), w_2 = (0, 3, 0, 0), w_3 = (0, 0, 3, 0), w_4 = (0, 0, 0, 3) \in \text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_4}).$$

Továbbá megkeressük a w_1, w_2, w_3, w_4 által generált 4 dimenziós paralelepipedonban megjelenő rácspontokat, amelyek benne vannak a $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_4}) \cap \mathbb{N}^4$ rácspan is, mert ekkor az összes $\text{Ker}(\phi_{G,D_1,\dots,D_4}) \cap \mathbb{N}^4$ rácson lévő pontot le tudjuk generálni. Vagyis azokat az egész koordiná-

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

tájú pontokat keressük, amelyek a paralelepipedonban találhatók. Ezek a pontok tehát

$$A = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 2, 2), (1, 1, 0, 0), (2, 2, 0, 0),$$

$$(1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 2), (2, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 2)\}.$$

Így a (3.9) egyenlet alapján

$$\sum_{\mathbf{n} \in \text{Ker}(\phi_{G, D_1, \dots, D_4}) \cap \mathbb{N}^4} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} = \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0 \\ \mathbf{n} \in A}} \mathbf{t}^{\mathbf{n} + 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4},$$

amely alapján a Poincaré sor a

$$P_{G, D_1, \dots, D_4} = \frac{1 + t_3 t_4 + t_3^2 t_4^2 + t_1 t_2 + t_1^2 t_2^2 + t_1 t_2 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3^2 t_4^2 + t_1^2 t_2^2 t_3 t_4 + t_1^2 t_2^2 t_3^2 t_4^2}{(1 - t_1^3)(1 - t_2^3)(1 - t_3^3)(1 - t_4^3)}$$

alakba írható.

A következő fejezetben szeretnénk olyan eseteket vizsgálni, amelyekre kiterjeszthetők a 3.25. és a 3.27. tételeket.

3.5. A $D_i = v_i$ divizorokhoz rendelt teljes Poincaré sor

Tekintjük a G gráfot a $V(G) = \{v_1, \dots, v_k\}$ csúcshalmazzal és a gráfon értelmezett $D_i = v_i$ elsőfokú divizorokat, minden $i = 1, \dots, k$ -ra. között. Hasonlóan fogunk eljárni mint az előbbi fejezetben: egyszer megvizsgálunk néhány példát, majd megfogalmazzuk és bizonyítjuk észrevételeinket. A legegyszerűbb esettel kezdjük:

3.33. Példa. Tekintjük a 3.6. ábrán megjelenő G fát és a $D_1 = v_1, D_2 = v_2, D_3 = v_3$ divizorokat. A G gráf Laplace mátrixa:

$$Q(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahogy az eddigiekben is, legyen $\phi_G := \phi_{G, D_1, \dots, D_3}: \mathbb{Z}^3 \rightarrow \text{Div}(G)/\text{Prin}(G) = \text{Pic}(G)$ csoport-homomorfizmus. Tudjuk, hogy a homomorfizmus magja $\text{Ker}(\phi_G) = \phi_G^{-1}(0) = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid n_1 D_1 + n_2 D_2 + n_3 D_3 \sim 0\}$ megegyezik a $\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid (n_1, n_2, n_3) = \text{div } f\}$ halmazzal, ahol f egy racionális függvény G -n. Legyen $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ egy racionális függvény

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

és $f(v_i) = f_i$, ahol f_1, f_2, f_3 egész számok. Ekkor

$$\text{ord}_{v_1}(f) = \sum_{\substack{w \in V(G) \\ w \sim v}} (f(v_1) - f(w)) = f_1 - f_2.$$

Teljesen hasonlóan $\text{ord}_{v_2}(f) = 2f_2 - f_1 - f_3$ és $\text{ord}_{v_3}(f) = f_3 - f_2$. Tehát írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\phi_G) &= \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid (n_1, n_2, n_3) = (f_1 - f_2, 2f_2 - f_1 - f_3, f_3 - f_2); f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid (n_1, n_2, n_3) = Q(G) \cdot (f_1, f_2, f_3)^T; f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Tehát a homomorfizmus magját a $b_1 = (1, -1, 0)$, $b_2 = (-1, 2, -1)$ és $b_3 = (0, -1, 1)$ vektorok generálják, amelyek megegyeznek a Laplace mátrix soraival.

A továbbiakban a $D_i = v_i$ divizorokhoz rendelt „teljes” Poincaré sort is ki fogjuk számolni. A G gráf génusza $g = 0$, így $\sum_{i=1}^3 n_i d_i = \sum_{i=1}^3 n_i > 2g - 2 = -2$, tehát bármilyen $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ esetén az $\sum_{i=1}^3 n_i d_i > 2g - 2$ esetben vagyunk. Ebben az esetben, ahogy a 3.20. tétel bizonyításában is láttuk, ha $l = \sum_{i=1}^3 n_i$ akkor

$$\sum_{l > -2} P_{G, D_1, \dots, D_3}^{(l)}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^3} \left(\sum_{i=1}^3 n_i + 1 \right) t^n.$$

Tehát a $\mathfrak{P} = \{x \in \mathbb{R}_+^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i > -2\} = \mathbb{R}_+^3$, amelynek a generátorfüggvénye

$$f(\mathfrak{P}; t) = \sum_{n \in \mathfrak{P} \cap \mathbb{Z}^3} t^n = \left(\sum_{n_1 \geq 0} t_1^{n_1} \right) \cdot \left(\sum_{n_2 \geq 0} t_2^{n_2} \right) \cdot \left(\sum_{n_3 \geq 0} t_3^{n_3} \right) = \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)}.$$

Hogyha a $(\sum_{i=1}^3 \partial_{t_i} - \sum_{i=1}^3 1 + 1) = (\sum_{i=1}^3 \partial_{t_i} - 2)$ operátorral hatunk az $f(\mathfrak{P}; t)$ generátorfüggvényre, akkor kapjuk, hogy a Poincaré sor

$$\begin{aligned} P_G(t) := P_{G, D_1, D_2, D_3}(t_1, t_2, t_3) &= \frac{1}{(1-t_1)^2(1-t_2)(1-t_3)} + \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)^2(1-t_3)} + \\ &\quad \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)^2} + \frac{-2}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)} \end{aligned}$$

A fenti példán eszközölt számolás általánosan a következőképpen fogalmazható meg.

3.34. Tétel. Legyen G gráf, amelynek génusza $g < 1$. Ekkor $D_i = v_i$ divizorokhoz rendelt

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

Poincaré sor

$$P_G(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(1-t_i)^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (1-t_j)} - \frac{k+g-1}{\prod_{i=1}^k (1-t_i)}$$

Bizonyítás. Mivel a $g < 1$, így a $2g - 2$ mindig negatív szám. Tehát bármilyen $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$ esetén teljesül a $\sum_{i=1}^k n_i > 2g - 2$ egyenlőtlenség. Ekkor a 3.20. tétel bizonyítása alapján

$$\sum_{l \geq 0} P_{G, D_1, \dots, D_k}^{(l)}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^k} \left(\sum_{i=1}^k n_i + 1 \right) \mathbf{t}^{\mathbf{n}}.$$

Így tehát $\mathfrak{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}_+^k \mid \sum_{i=1}^k x_i \geq 0\} = \mathbb{Q}_+^k$ a poliéder, és generátorfüggvénye

$$f(\mathfrak{P}, \mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathfrak{P} \cap \mathbb{Z}^k} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{n_i \geq 0} t_i^{n_i} \right) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (1-t_i)}.$$

Ahogy a 3.20. tételben is láttuk, az $f(\mathfrak{P}; \mathbf{t})$ generátorfüggvényre a $\left(\sum_{i=1}^k \partial_{t_i} - \sum_{i=1}^k 1 - g + 1 \right) = \left(\sum_{i=1}^k \partial_{t_i} - (k + g - 1) \right)$ operátorral hatunk és kapjuk, hogy

$$P_G(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(1-t_i)^2 \prod_{j=1, j \neq i}^k (1-t_j)} - \frac{k+g-1}{\prod_{i=1}^k (1-t_i)}.$$

■

3.35. Példa. Tekintjük a 3.8. ábrán megjelenő G gráfot és a $D_i = v_i$ divizorokkal minden $i = 1, \dots, 5$ -re. Ekkor a gráf génusza $g = 6 - 5 + 1 = 2$ és a gráf Laplace mátrixa:

$$Q(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Első lépésben meghatározzuk a $\phi_G := \phi_{G, D_1, \dots, D_5}: \mathbb{Z}^5 \rightarrow \text{Div}(G)/\text{Prin}(G)$ csoporthomomorfizmus magját. Hasonlóan, mint a 3.33. példa esetében írhatjuk, hogy

$$\text{Ker}(\phi_G) = \{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^5 \mid (n_1, \dots, n_5) = \text{div}(f), \text{ valamilyen } f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}\text{-re}\}$$

Ekkor $\text{Ker}(\phi_G)$ -t a $b_1 = (2, 0, 0, -1, -1)$, $b_2 = (0, 2, -1, 0, -1)$, $b_3 = (0, -1, 2, 0, -1)$, $b_4 = (-1, 0, 0, 2, -1)$, $b_5 = (-1, -1, -1, -1, 4)$ vektorok, a Laplace mátrix sorai generálják.

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

A következőkben a $D_i = v_i$ divizorokhoz rendelt „teljes” Poincaré sort fogjuk meghatározni.

Ha $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_5) \in \mathbb{N}^5$ esetén teljesül, hogy $l = \sum_{i=1}^5 n_i \geq 2g - 1 = 3$, akkor a 3.20. tétel bizonyítása alapján

$$\sum_{l \geq 3} P_{G, D_1, \dots, D_5}^{(l)}(t) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^5} \left(\sum_{i=1}^5 n_i + 1 \right) t^n.$$

Ekkor a $\mathfrak{P} = \{(n_1, \dots, n_5) \in \mathbb{R}_+^5 \mid n_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 5 \text{ és } \sum_{i=1}^5 n_i \geq 3\}$ poliéder generátorfüggvényének meghatározásához alkalmazzuk a 3.14. Brion tételt. A $\mathfrak{P}$ poliédernek 5 csúcsa van, és ezek a következők: $v_1 = (3, 0, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 3, 0, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 3, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 3, 0)$ és $v_5 = (0, 0, 0, 0, 3)$. Ekkor tetszőleges v_i csúcs esetén az érintőkúp

$$\text{cone}(\mathfrak{P}, v_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_j \geq 0, i \neq j \text{ és } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 0\}$$

alakba írható, így, ha $m \in \text{cone}(\mathfrak{P}, v_i)$, akkor léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ pozitív számok úgy, hogy

$$m = -v_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^5 \lambda_j \cdot (e_i + e_j) + \lambda_i \cdot e_i,$$

ahol e_i jelöli a $\mathbb{Z}^5$ i -edik standard bázisvektorát. Tehát tetszőleges v_i esetén a $\text{cone}(\mathfrak{P}, v_i)$ érintőkúp generátorfüggvénye

$$f(\text{cone}(\mathfrak{P}, v_i), t) = \frac{1}{t_i^3(1-t_i)\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^5 (1-t_i t_j)}.$$

Felhasználva az előbbieket és a 3.14. Brion tételt, kapjuk, hogy a $\mathfrak{P}$ poliéder generátorfüggvénye

$$f(\mathfrak{P}; t) = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{t_i^3(1-t_i)\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^5 (1-t_i t_j)},$$

amelyre a $(\sum_{i=1}^5 \partial_{t_i} - \sum_{i=1}^5 1 - g + 1) = (\sum_{i=1}^5 \partial_{t_i} - 6)$ operátorral hatunk. A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^5 \partial_{t_i} - 6 \right) f(\mathfrak{P}; t) = \sum_{i=1}^5 \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 \frac{t_j}{t_i^3(1-t_i)(1-t_i t_j)^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^5 (1-t_i t_k)} \right) +$$

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{t_i^3(1-t_i)^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 (1-t_j t_i)} - \frac{3}{t_i^4(1-t_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 (1-t_i t_j)} \right) + \\
& + \sum_{i=1}^5 \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 \frac{t_i}{(1-t_i t_j)^2 t_i^3 (1-t_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^5 (1-t_i t_k)} \right). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

A következő lépésben meghatározzuk, azokat a monomokat, amelyek a parciális deriválás után megjelentek az összegben. Tekintjük az $I \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ részhalmazt és a $H_I = \{x = (x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \sum_{i=1}^5 x_i = 2g - 1 - \sum_{i \in I} 1\}$ hipersíkokat. Mivel $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5$, ezért $J_{\{i\}}^{\leq} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, minden $i = 1, \dots, 5$ esetén és $J_I^{\leq} = \emptyset$, minden 1-nél nagyobb számosságú részhalmazra, tehát az alábbi tagokat le kell vonjuk a (3.10). egyenlet jobb oldalából.

$$7 \cdot \sum_{i=1}^5 t_i^2 + 7 \cdot \sum_{i=1}^5 \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^5 t_i \cdot t_j. \tag{3.11}$$

Így meghatároztuk a $\sum_{l \geq 3} P_G^{(l)}$ részt.

Ha $\sum_{i=1}^5 n_i < 3$, akkor szükséges meghatározzuk a legfennebb másodfokú divizorok rangját. Az elsőfokú divizorokat vesszük előbb és az értelmezéssel fogunk számolni. Mivel minden $D'_i = v_i$ divizor esetén létezik $D'_j = v_j$ elsőfokú divizor úgy, hogy $D'_i \not\sim D'_j$, így következik, hogy az elsőfokú divizorok rangja 0.

Mivel a $K_G = 2 \cdot v_5$ kanonikus divizor másodfokú, ezért a másodfokú divizorok esetén érdemes a Riemann-Roch tétellel számolni. A $D'_i = 2 \cdot v_i, i = 1, \dots, 4$ divizorok esetén $K_G - D'_i = v_5 - v_i$ nem lesz principális, így a 2.20. megjegyzésből adódóan $r_G(K_G - D'_i) = -1$, és Riemann-Roch tétel szerint $r_G(D'_i) = 0$. Mivel $K_G - 2 \cdot v_5 = 0$ principális ezért $r_G(2v_5) = 1$. Ellenőrizhető, hogy $v_1 + v_4 - 2v_5$ és $v_2 + v_3 - 2v_5$ divizorok principálisak és az összes többi $v_i + v_j - 2v_5$ nem principális, ahol $i \neq j$, így alkalmazva a Riemann-Roch tételt, kapjuk, hogy $r_G(v_1 + v_4) = r_G(v_2 + v_3) = 1$ és $r_G(v_i + v_j - 2v_5) = 0$. Tehát összegezve azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\sum_{i=1}^5 n_i < 3 \\ \sum_{i=1}^5 n_i D_i \in [D]}} P_G^{[D]}(\mathbf{t}) = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + 2t_5^2 + \\
& + t_1 t_2 + t_1 t_3 + 2t_1 t_4 + t_1 t_5 + 2t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_2 t_5 + t_3 t_4 + t_3 t_5 + t_4 t_5.
\end{aligned}$$

Jelöljük a (3.10) egyenlet jobb oldalát $q(\mathbf{t})$ -vel és ekkor a $D_i = v_i$ divizorokhoz rendelt Poin-

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

caré sor

$$P_G(\mathbf{t}) = q(\mathbf{t}) + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 - 6t_1^2 - 6t_2^2 - 6t_3^2 - 6t_4^2 - 5t_5^2 - \\ - 6t_1t_2 - 6t_1t_3 - 5t_1t_4 - 6t_1t_5 - 5t_2t_3 - 6t_2t_4 - 6t_2t_5 - 6t_3t_4 - 6t_3t_5 - 6t_4t_5.$$

3.6. Poincaré sorok súlyozott gráfokon

Ebben a fejezetben az eddigiekben tárgyalt gráfokat általánosítjuk, a csúcsokat egy súllyal fogjuk ellátni. Bevezetünk néhány fogalmat Amini és Caporaso [1] munkája nyomán.

3.6.1. Hurokélet tartalmazó gráfok

Tekintünk egy G gráfot és az $\{e_1, e_2, \dots, e_c\} \subseteq E(G)$ hurokélek halmazát. Ekkor minden hurokél belsejébe beszúrunk egy csúcsot és az létrejövő gráfot $\widehat{G}$ -val jelöljük. Mivel $V(G) \subset V(\widehat{G})$, értelmezzük a kanonikus injektív morfizmust:

$$\sigma^*: \text{Div}(G) \rightarrow \text{Div}(\widehat{G}), \quad \sum_{v \in V(G)} d_i v_i \mapsto \sum_{v \in V(G) \subset V(\widehat{G})} d_i v_i$$

Hurokélet tartalmazó gráfok esetén a rangot a „módosított” $\widehat{G}$ gráf segítségével vezetjük be. Azt mondjuk, hogy a D divizor rangja G -n

$$r_G^\#(D) := r_{\widehat{G}}(\sigma^* D),$$

ahol $\sigma^* D \in \text{Div}(\widehat{G})$ az előbb bevezetett morfizmus alapján. Ugyanakkor az egyszerűség kedvéért a $\widehat{G}$ gráfon értelmezett $\sigma^* D$ divizor rangját $r_{\widehat{G}}$ -vel fogjuk jelölni. Fontos megjegyezni, hogy a hurokélet tartalmazó gráfok esetében a rang értelmezésének módosítására a Riemann–Roch tétel (lásd a 2.26. tétel) teljesülése érdekében van szükség.

Észrevehető, hogy $|V(\widehat{G})| = |V(G)| + c$ és $|E(\widehat{G})| = |E(G)| + c$, ahol c jelöli a G gráfban a hurkok számát. Ekkor $g_{\widehat{G}} = |E(\widehat{G})| - |V(\widehat{G})| + 1 = |E(G)| + c - |V(G)| - c + 1 = |E(G)| - |V(G)| + 1 = g_G$, tehát a közönséges $\widehat{G}$ gráf génusza megegyezik a G hurokélet tartalmazó gráf génuszával.

3.36. Példa. A 3.9. ábra baloldalán egy hurokélet tartalmazó G gráf látható, és mellette a jobb oldalon a $\widehat{G}$ gráf látható. Ellenőrizhető, hogy $g_G = 4 - 2 + 1 = 3 = 7 - 5 + 1 = g_{\widehat{G}}$. Ugyanakkor topológiailag az észrevétel azonnali, tudva, hogy a génusz megegyezik a gráf első Betti számával.

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK



3.9. ábra

Hasonlóan a „közönséges” gráfok esetéhez, itt is bevezethető a kanonikus divizor, és a rang fenti értelmezésével kijelenthető a Riemann–Roch tétel, amelyet Amini és Caporaso [1, Thm. 3.6.] bizonyított.

3.37. Értelmezés. A G hurokélet tartalmazó gráfon értelmezett kanonikus divizor a következő módon adható meg

$$K_G^\# := \sum_{v \in V(G)} (\text{val}(v) - 2) \cdot v \in \text{Div}(G),$$

ahol $\text{val}(v)$ megadja a v csúcsból kiinduló élek számát, valamint hurokél esetén kettővel nő a $\text{val}(v)$ értéke.

3.38. Tétel ([1]). Legyen G egy c darab hurokkal rendelkező gráf és D egy a G gráfon értelmezett divizor. Ekkor teljesülnek a következők:

a). (Riemann–Roch tétel)

$$r_G^\#(D) - r_G^\#(K_G^\# - D) = \deg(D) - g + 1.$$

b). (Riemann tétel) Ha $\deg(D) \geq 2g - 1$, akkor

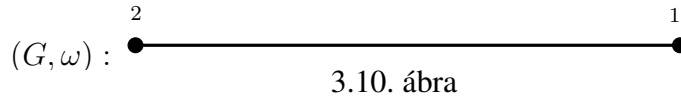
$$r_G^\#(D) = \deg(D) - g.$$

3.6.2. Súlyozott gráfok

3.39. Értelmezés. Azt mondjuk, hogy (G, ω) (csúcsain) súlyozott gráf, ha G egy közönséges gráf és $\omega: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ egy súlyfüggvény a csúcsok halmazán. Ha $\omega \equiv 0$ akkor (G, ω) gráfot súlytalannak nevezzük.

3.40. Értelmezés. A (G, ω) súlyozott gráf génuszát a következőképpen értelmezzük

$$g(G, \omega) := g(G) + \sum_{v \in V(G)} \omega(v).$$



3.41. Példa. Tekintve a 3.10. ábrát legyen $\omega: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ súlyfüggvény úgy, hogy $\omega(v_1) = 2$ és $\omega(v_2) = 1$. Ekkor (G, ω) egy súlyozott gráf és génusza $g_{(G, \omega)} = 0 + \sum_{i=1}^2 \omega(v_i) = 3$.

A (G, ω) súlyozott gráfhoz társítsuk a G^ω súlytalan gráfot úgy, hogy (G, ω) minden v csúcsához $\omega(v)$ számú hurkot szerkesztünk. Ekkor azt mondjuk, hogy G^ω a (G, ω) súlyozott gráf *virtuális gráfja*. Például a 3.9. ábrán megjelenő baloldali gráf a virtuális gráfja a 3.10. ábrán megjelenő súlyozott gráfnak. A súlyozott gráf és a virtuális gráf génusza, valamint csúcsainak halmaza megegyezik.

A (G, ω) súlyozott gráfokon is értelmezhetjük a divizorokat, és a divizorcsoportot

$$\text{Div}(G, \omega) = \text{Div}(G^\omega) = \text{Div}(G).$$

3.42. Értelmezés. Legyen (G, ω) egy súlyozott gráf és $D \in \text{Div}(G, \omega)$. Ekkor a következőképpen értelmezzük a D divizor rangját:

$$r_{(G, \omega)}(D) := r_{G^\omega}^\#(D) = r_{\widehat{G^\omega}}(D).$$

3.43. Értelmezés. A (G, ω) súlyozott gráf kanonikus divizorja megegyezik a 3.37. értelmezésben bevezetett kanonikus divizorral, vagyis

$$K_{(G, \omega)} := K_{G^\omega}^\# = \sum_{v \in V(G^\omega)} (\text{val}_{G^\omega}(v) - 2) \cdot v \in \text{Div}(G, \omega).$$

Mivel tudjuk, hogy a súlyozott gráf génusza megegyezik a hozzárendelt virtuális gráf génuszával és, ha alkalmazzuk a 3.38. tételt, kapjuk, hogy

$$\deg(K_{(G, \omega)}) = 2 \cdot g(G, \omega) - 2.$$

3.44. Példa. A 3.10. ábrán megjelenő súlyozott gráf kanonikus divizorának alakja

$$K_{(G, \omega)} = K_{G^\omega}^\# = (4 + 1 - 2) \cdot v_1 + (2 + 1 - 2) \cdot v_2 = 3 \cdot v_1 + v_2,$$

és foka $\deg(K_{(G, \omega)}) = 3 + 1 = 4 = 2 \cdot g_{(G, \omega)} - 2$.

A fenti értelmezésekkel a Riemann–Roch tétel és a 2.20. megjegyzés 2. állítása általánosítható a súlyozott gráfok esetére is. Ezt fogjuk kijelenteni a következő tételben, amelynek a

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

bizonyítás megtalálható Amini, Caporaso [1, Thm.3.8.] munkájában.

3.45. Tétel ([1]). Legyen (G, ω) egy súlyozott gráf.

a). Bármilyen $D \in \text{Div}(G, \omega)$ esetén teljesül, hogy

$$r_{(G, \omega)}(D) - r_{(G, \omega)}(K_{(G, \omega)} - D) = \deg D - g_{(G, \omega)} + 1.$$

b). Bármilyen $D, D' \in \text{Div}(G, \omega)$ divizorok esetén, amelyekre $D \sim D'$, teljesül, hogy

$$r_{(G, \omega)}(D) = r_{(G, \omega)}(D').$$

3.46. Értelmezés. Legyen (G, ω) egy súlyozott gráf és $D_1, D_2, \dots, D_k$ a divizorok egy véges halmaza. Ekkor a $D_1, \dots, D_k$ divizorokhoz rendelt Poincaré sort a

$$P_{(G, \omega), D_1, \dots, D_k}(t_1, \dots, t_k) = \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k} (r_{(G, \omega)}(n_1 D_1 + \dots + n_k D_k) + 1) \cdot t_1^{n_1} \cdot \dots \cdot t_k^{n_k}$$

kifejezéssel értelmezzük.

Mivel a (G, ω) súlyozott gráfon értelmezett D divizor rangja megegyezik a $\widehat{G}^\omega$ közösleges gráfon értelmezett D divizor rangjával, ezért a Poincaré sor számolása hasonlóan történik mint közösleges gráfok esetében.

3.47. Példa. Tekintjük a 3.10. ábrán megjelenő (G, ω) súlyozott gráfot az $\omega: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\omega(v_1) = 2, \omega(v_2) = 1$ súlyfüggvénnyel. Továbbá tekintjük a (G, ω) gráf virtuális gráfját a G^ω gráfot, amely a 3.9. ábra bal oldalán látható. Legyenek továbbá a $D_1 = v_1$ és $D_2 = v_2 \in \text{Div}(G, \omega)$ divizorok. Ekkor a (G, ω) súlyozott gráfon értelmezett D_1, D_2 divizorokhoz rendelt teljes Poincaré sor alakja

$$P_{(G, \omega), D_1, D_2}(t_1, t_2) = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}} (r_{(G, \omega)}(n_1 \cdot v_1 + n_2 \cdot v_2) + 1) \cdot t_1^{n_1} \cdot t_2^{n_2}.$$

Értelmezés szerint $r_{(G, \omega)}(n_1 \cdot v_1 + n_2 \cdot v_2) = r_{\widehat{G}^\omega}(n_1 \cdot v_1 + n_2 \cdot v_2)$ így a (G, ω) súlyozott gráfon értelmezett D_1, D_2 divizorokhoz rendelt Poincaré sor megegyezik a súlyozott gráfhoz rendelt $\widehat{G}^\omega$ közösleges gráfon értelmezett D_1, D_2 divizorokhoz rendelt Poincaré sorral. Hasonlóan fogunk eljárni, mint az eddigi esetekben.

Mivel $d_1 = \deg(D_1) = d_2 = \deg(D_2) = 1$, ezért $n_1 d_1 + n_2 d_2 = n_1 + n_2$, valamint a (G, ω) súlyozott gráfhoz rendelt $\widehat{G}^\omega$ közösleges gráf (3.9. ábra jobb oldalán látható) génusza $g_{\widehat{G}^\omega} = 7 - 5 + 2 = 3$.

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

Ha $n_1 + n_2 > 2 \cdot g - 2 = 4$, akkor tekintjük a $\mathfrak{P} = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid n_1 + n_2 \geq 5\}$ poliédert. Ezután meghatározzuk a poliéder generátorfüggvényét.

A Brion 3.14. tételt fogjuk alkalmazni. Tudjuk, hogy a v_1 érintőkúpja

$$\begin{aligned} \text{cone}(\mathfrak{P}, v_1) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 5\} = \\ &= \{(5, 0) + \lambda_1 \cdot (1, 0) + \lambda_2 \cdot (-1, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\} \end{aligned}$$

és a v_2 érintőkúpja

$$\begin{aligned} \text{cone}(\mathfrak{P}, v_2) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 5\} = \\ &= \{(5, 0) + \lambda_1 \cdot (0, 1) + \lambda_2 \cdot (1, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy

$$f(\mathfrak{P}; t_1, t_2) = \frac{t_1^5}{(1-t_1)(1-t_1^{-1}t_2)} + \frac{t_2^5}{(1-t_2)(1-t_1t_2^{-1})}$$

Ekkor a kapott generátorfüggvényre hatunk a $(\partial_{t_1} + \partial_{t_2} - 4)$ operátorral. Meghatározva a $H_{\{1\}} = H_{\{2\}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 4\}$ és $H_{\{1,2\}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 3\}$ hipersíkokon a deriválás esetén megjelenő plusz pontokat kapjuk, hogy a Poincaré sor első része a következő alakú

$$\begin{aligned} \sum_{l=n_1+n_2 \geq 5} P_{\widehat{G^\omega}, D_1, D_2}^{(l)}(t_1, t_2) &= \frac{(4t_1^2 + 5t_1t_2 + 5t_1 - 6t_2)t_1^5}{(1-t_1)^2(t_1-t_2)^2} + \frac{(4t_2^2 + 5t_1t_2 + 5t_2 - 6t_1)t_2^5}{(1-t_2)^2(t_2-t_1)^2} - \\ &\quad - 6t_1^4 - 6t_1^3t_2 - 6t_1^2t_2^2 - 6t_1t_2^3 - 6t_2^4. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ha $n_1 + n_2 \leq 4$, akkor a Poincaré sort divizor osztályok szerint fogjuk felbontani.

Elsőfokú divizorok esetén olyan természetes számokból álló számpárokat keresünk, amelyekre $n_1d_1 + n_2d_2 = n_1 + n_2 = 1$. Vagyis $(n_1, n_2) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$, tehát két elsőfokú divizor van, a $D_1 = v_1$ és $D_2 = v_2$.

Először is a 2.20. megjegyzés alapján tudjuk, hogy $r_{\widehat{G^\omega}}(D_i) \leq \deg(D_i) = 1$, $i = 1, 2$. A rang 2.19. értelmezése alapján a $D_1 = v_1$ divizor rangja akkor lehet 1, ha bármely $E \in \text{Div}_+^1(\widehat{G^\omega})$ elsőfokú, effektív divizor esetén létezne $D' \geq E$ úgy, hogy $D' \in [D]$. Ekkor a $E = v_3 \in \text{Div}_+^1(\widehat{G^\omega})$ elsőfokú divizor esetében következne, hogy $v_3 \sim v_1$. Ezen lineáris ekvivalencia

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

ellenőrzésére a 2.15. tételt fogjuk alkalmazni, ezért felírjuk a $\widehat{G}^\omega$ gráf Laplace mátrixát,

$$Q(\widehat{G}^\omega) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mivel a $Q(\widehat{G}^\omega) \cdot X^T = (1, 0, -1, 0, 0)^T$ egyenletnek nincs egész megoldása, következik, hogy $v_3 \not\sim v_1$, így $r_{\widehat{G}^\omega}(v_1)$ nem lehet 1. Ekkor mivel v_1 effektív, az értelmezés alapján következik, hogy $r_{\widehat{G}^\omega} = 0$. Teljesen hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy $r_{\widehat{G}^\omega}(v_2) = 0$.

Továbblépünk a másodfokú divizorok esetére. Három másodfokú divizor, a $2 \cdot v_1$, $v_1 + v_2$ és a $2 \cdot v_2$ divizorok esetén kell meghatározni a rangot. Ezekben az esetekben is még az értelmezéssel fogunk számolni. A $2 \cdot v_1$ divizor rangja 1, mivel minden elsőfokú $E'_i = v_i, i = 1, \dots, 5$ divizor esetén létezik $D'_i = 2 \cdot v_i \geq E'_i$ divizor, úgy, hogy $D'_i \sim 2 \cdot v_1$, de létezik olyan $D'' = v_3 + v_4$ másodfokú divizor, amely nem lineárisan ekvivalens $2 \cdot v_1$ -vel. Ellenőrizhető, hogy $2 \cdot v_1 \sim 2 \cdot v_2$, így $r_{\widehat{G}^\omega}(2v_2) = 1$.

Hasonlóan fogunk eljárni a $v_1 + v_2$ divizor esetén is. Mivel $D'' = v_3 + v_4 \not\sim v_1 + v_2$, ezért $r_{\widehat{G}^\omega}(v_1 + v_2)$ nem lehet 2. Továbbá bármilyen $E'_i = v_i \in \text{Div}_+^1(\widehat{G}^\omega)$ esetén létezik $D'_i = 2 \cdot v_i \geq E'_i$ divizor úgy, hogy $D'_i \sim v_1 + v_2$, ezért az értelmezésből adódóan itt is következik, hogy $r_{\widehat{G}^\omega} = 1$.

A harmadfokú divizorok esetén a Riemann–Roch tétellel fogunk számolni. Ehhez szükséges, hogy meghatározzuk a $\widehat{G}^\omega$ gráf kanonikus divizorját, amely

$$K_{\widehat{G}^\omega} = 3 \cdot v_1 + v_2.$$

Ekkor felírva a 2.26. Riemann–Roch tételt a $3 \cdot v_1$ divizorra, kapjuk, hogy

$$r_{\widehat{G}^\omega}(3 \cdot v_1) - r_{\widehat{G}^\omega}(v_2) = 3 - 3 + 1.$$

Mivel tudjuk, hogy $r_{\widehat{G}^\omega}(v_2) = 0$, így következik, hogy $r_{\widehat{G}^\omega}(3 \cdot v_1) = 1$. A $2 \cdot v_1 + v_2$ divizor esetén $K_{\widehat{G}^\omega} - 2 \cdot v_1 - v_2 = v_1$, így itt is alkalmazva a Riemann-Roch tételt kapjuk, hogy $r_{\widehat{G}^\omega}(2 \cdot v_1 + v_2) = 1$. A $v_1 + 2 \cdot v_2$ divizor esetén a $K_{\widehat{G}^\omega} - v_1 - 2 \cdot v_2 = 2 \cdot v_1 - v_2$, amely egy elsőfokú divizor, és mivel nem létezik olyan elsőfokú, effektív E divizor, amelyre $E \geq 2 \cdot v_1 + v_2$, ezért $r_{\widehat{G}^\omega}(2 \cdot v_1 + v_2) = 0$, így $r_{\widehat{G}^\omega}(v_1 + 2 \cdot v_2) = 1$. Az utolsó harmadfokú divizor, a $3 \cdot v_2$ esetén $K_{\widehat{G}^\omega} - 3 \cdot v_2 = 3 \cdot v_1 - 2 \cdot v_3$. Teljesen hasonlóan az előbbi magyarázathoz, itt is következik, hogy $r_{\widehat{G}^\omega}(3 \cdot v_2 - 2 \cdot v_2) = 0$, és így $r_{\widehat{G}^\omega}(3 \cdot v_2) = 1$.

Legutolsó esetként a negyedfokú divizorokat vizsgáljuk. Mivel tudjuk, hogy $K_{\widehat{G}^\omega}$ negyed-

3. FEJEZET: GRÁFOKON ÉRTELMEZETT POINCARÉ SOROK

fokú, így minden negyedfokú D divizor esetén teljesül, hogy $\deg(K_{\widehat{G^\omega}} - D) = 0$. Így elégséges azt ellenőrizni, hogy $K_{\widehat{G^\omega}} - D$ divizor principális-e. Megvizsgálva az eseteket, és alkalmazva a Riemann-Roch tételt azt kapjuk, hogy az összes negyedfokú divizor rangja 2. Ismerve az összes szükséges divizor rangját, felírhatjuk a Poincaré sort erre a részre is:

$$\sum_{0 \leq l \leq 4} P_{\widehat{G^\omega}, D_1, D_2}^{(l)}(t_1, t_2) = 1 + t_1 + t_2 + 2 \cdot t_1^2 + 2 \cdot t_2^2 + 2 \cdot t_1 \cdot t_2 + 2 \cdot t_1^3 + 2 \cdot t_1^2 \cdot t_2 + 2 \cdot t_1 \cdot t_2^2 + 2 \cdot t_2^3 + 3 \cdot t_1^4 + 3 \cdot t_1^3 \cdot t_2 + 3 \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 + 3 \cdot t_1 \cdot t_2^3 + 3 \cdot t_2^4. \quad (3.13)$$

Végül a (3.12) és a (3.13) egyenletek alapján kapjuk, hogy a Poincaré sor

$$\begin{aligned} P_{\widehat{G^\omega}, D_1, D_2} &= \frac{(4t_1^2 + 5t_1t_2 + 5t_1 - 6t_2)t_1^5}{(1-t_1)^2(t_1-t_2)^2} + \frac{(4t_2^2 + 5t_1t_2 + 5t_2 - 6t_1)t_2^5}{(1-t_2)^2(t_2-t_1)^2} + \\ &+ 1 + t_1 + t_2 + 2t_1^2 + 2t_2^2 + 2t_1t_2 + 2t_1^3 + 2t_1^2t_2 + 2t_1t_2^2 + 2t_2^3 - \\ &- 3 \cdot t_1^4 - 3 \cdot t_1^3 \cdot t_2 - 3 \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 - 3 \cdot t_1 \cdot t_2^3 - 3 \cdot t_2^4. \end{aligned}$$

Irodalomjegyzék

- [1] Amini, O., Caporaso, L.: Riemann-Roch theory for weighted graphs and tropical curves, *Advances in Mathematics*, **240**, 2013.
- [2] Bacher, R., La Harpe, P. de, Nagnibeda, T.: The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **125**, 167–198, 1997.
- [3] Baker, M., Faber, X.: Metric properties of the Tropical Abel-Jacobi map, *J Algebr Comb*, **33**, 349–381, 2011.
- [4] Baker, M., Norine S.: Riemann–Roch and Abel–Jacobi theory on a finite graph, *Advances in Mathematics*, **215**, 766–788, 2007.
- [5] Barvinok, A., Pommersheim J.: An algorithmic theory of lattice points in polyhedra, *New Perspectives in Geometric Combinatorics*, **38**, 1999.
- [6] Beck, M., Robins, S.: Computing the Continuous Discretely: Integer–Point Enumeration in Polyhedra, **Spinger**, 2009.
- [7] Cayley, A.: On the theory of the analytical forms called trees, *Americal Journal of Mathematics Vol.4, No.1*, 266–268, 1881.
- [8] Cutkosky, S.D., Herzog, J., Reguera, A.: Poincaré series of resolutions of surface singularities, *Transaction of the American Mathematical Society* 356, no.5, 1833–1874, 2004.
- [9] Cvetković D., Rowlinson P., Simić S.: An Introduction to the Theory of Graph Spectra, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2010.
- [10] László, T., Némethi, A.: Ehrhart theory of polytopes and Seiberg–Witten invariants of plumbed 3–manifolds, *Geom. & Topol.* **18**, 717–778, 2014.
- [11] Manjunath, M.: Poincaré Series of Divisors on Graphs and Chains of Loops, *ar-Xiv:2011.11910*, 2020.
- [12] Némethi, A.: Poincaré series associated with surface singularities, in Singularities I, 271–297, *Contemp. Math.* **474**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2008.
- [13] Stanley R.P., Enumerative combinatorics, vol.1., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, *Cambridge University Press*, 1997.
- [14] Stewart, I., Tall, D.: Algebraic Number Theory and Fermat’s Last Theorem, Third Edition, *A K Peters/ CRC Press*, New York, 2002.