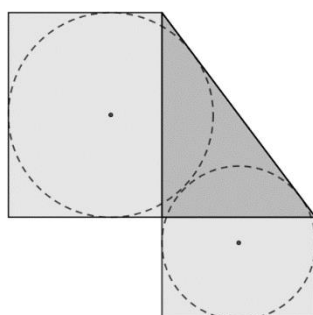


36. Országos Tudományos Diákköri Konferencia

Fizika, Földtudományok és Matematika Szekció

EGY RÉGI KÖZÉP SZÁMELMÉLETI VONATKOZÁSAI



Pályázó:

HARGITAI SÁRA

2. évf.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi
Egyetem

Felkészítő tanár:

UNYI TAMÁS

Gödöllői Református Líceum Gimnázium

*Pályamunkámmal szeretnék megemlékezni
a közelmúltban sajnálatosan fiatalon elhunyt
Besenyei Ádámról,
akitől – felkészítő tanárom közvetítésével –
sok ösztönzést kaptam.*

Bevezetés

Számtani közép, mértani közép, harmonikus közép... Ismerősen csengenek ezek a fogalmak azoknak a fülében, akik behatóbban foglalkoznak a matematikával. Sokan találkoznak ezekkel a középértékekkel, némelyek nem is tudják, hogy ezek állnak bizonyos jelenségek, alkalmazások háttérében. Ezeket a közepeket – az ókori görög matematika arányelméletének keretein belül, arányokkal kifejezve – már *Püthagorasz* is ismerte, sőt a történeti források szerint babilóniai tanulmányútja során tett szert erre a tudásra. Matematikai vonatkozású régészeti leletek is arra utalnak, hogy ezeket a közepeket már a babilóniai tudósok is használták, Krisztus előtt csaknem kétezer évvel [7]. *Püthagorasz* egyik későbbi követője, *Arkhütasz* olyan megfogalmazást adott ezekre a közepekre, amelyből kiindulva további középértékekhez vezető eljárást dolgoztak ki a püthagoreusok. Az így kapott közepeket ezért „görög” vagy pitagorasz-i közepeknek nevezzük [2], [3], [7], [17]. Ezek közé tartozik a pályamunkám címében *régi középnek* nevezett kontraharmonikus közép is, amely azonban – egyszerűsége ellenére – mára sajnos méltatlanul elfeledetté és mellőzötté vált. Ezért vágtam bele öt évvel ezelőtt ennek a középnek a tanulmányozásába. Figyelmem az utóbbi időben ezen közép számelméleti vonatkozásaira irányult. A kutatás során kiderült, hogy a kontraharmonikus közép a pitagorasz-i számhármassokhoz is kötődik. Ezzel összefüggésben meglepő kapcsolat figyelhető meg ezen közép és a Fibonacci-számok között. A számelméleti vonatkozás példájának tekinthető az ún. kontraharmonikus számok témája is. Pályamunkámban az imént említett területeken végzett kutatásaim eredményét mutatom be tételek és sejtések formájában, néhány saját eredménnyel is gazdagítva a témát.

A saját eredményekre utaló rövidebb szövegrészeket a dolgozatban sötétített háttérrel, a hosszabbakat oldalt függőleges vonalpárral emeltem ki.

I. Előzmények

A legismertebb matematikai közepek

Középértéknek nevezünk egy, a pozitív valós számpárok halmazán értelmezett kétváltozós, folytonos függvényt, melynek bármely helyettesítési értéke az adott számpár tagjai közé esik (megengedve a valamelyik taggal való esetleges egyenlőséget is). A középérték fogalma sok esetben könnyen kiterjeszthető több számra is, továbbá súlyozásra is van lehetőség. A legismertebb közepeket az alábbi táblázatban tüntettem fel:

<i>Közép neve</i>	<i>Képlet</i>	<i>Jelölés</i>
számtani (aritmetikai)	$\frac{a+b}{2}$	A
mértani (geometriai)	$\sqrt{a \cdot b}$	G
harmonikus	$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$	H
négyzetes (kvadratikus) ¹	$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$	Q

Ezen közepeknek számtalan – matematikán belüli és kívüli – vonatkozása van, én a legismertebb előfordulások közül szeretnék megemlíteni néhányat.

A számtani közepet senkinek sem kell bemutatni, aki átlagolt már számadatokat. Érdekes azonban ügyelni arra, hogy az átlag meghatározása erősen függ attól, hogy mit tartunk szem előtt az adathalmaz és az azt „képviselő” átlagérték viszonyában. A számtani közepet akkor kapjuk átlagul, ha arra törekszünk, hogy az adatoknak az átlagtól való négyzetes eltérése összességében a lehető legkisebb legyen. A súlyozott számtani közepet használjuk pl. nem egyforma „súlyú” számadatok átlagolásakor, az átlagsebesség, ill. átlagsűrűség meghatározásához, ütközések leírásánál, hőcserével, ill. oldatokkal kapcsolatos keverési feladatokban.

A mértani középpel találkozunk például az éppen az erről a középéről elnevezett mértani sorozatban, a magasság- és befogótételben, a körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tételében, illetve az aranymetszessel kapcsolatban is.

Talán a harmonikus közép felbukkanása a különböző jelenségekben a legmeglepőbb. Egy kocka csúcsainak száma (8) egyenlő a lapok számának (6) és az élek számának (12) a harmonikus közepével. Két, párhuzamosan kapcsolt ohmos ellenállás eredője megegyezik az egyes ellenállások harmonikus közepének a felével. A vékony lencsék leképezési törvénye szerint a

¹ A négyzetes közép valójában nem tartozik a pitagoraszai közepek családjába, csak az ismertsége miatt szerepel a táblázatban.

lencse fókusztávolsága egyenlő a tárgytávolság és a képtávolság harmonikus közepének a felével. Ha egy téglalap alakú sportpályát perspektivikusan ábrázolunk, akkor trapéznek látjuk (ez történik pl. a képernyőn); a pálya felezővonalának látszólagos hossza az alapvonalak látszólagos hosszának a harmonikus közepével egyezik meg [8].

A négyzetes közepet (mégpedig az adatok átlagtól való eltérésének négyzetes közepét) használjuk a statisztikában a szórás kiszámítására.

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}} = Q(\underline{x} - \bar{x})$$

A kontraharmonikus közép

Két pozitív valós szám (a és b) kontraharmonikus közepét az alábbi képlettel értelmezzük:

$$C(a, b) = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$$

Ez valójában egy a -val, ill. b -vel súlyozott számtani közép („önsúlyozott” közép) [11], de úgy is tekinthetjük, hogy a^2 és b^2 számtani közepének, ill. a és b számtani közepének a hányadosa. A definícióból könnyen levezethető, hogy a kontraharmonikus közép is rendelkezik a legismeretebb közepekre jellemző tulajdonságokkal, tehát szimmetrikus, diagonális és homogén [2], [17]. Ezek mellett azonban létezik egy, a többi fent említett középére nem jellemző tulajdonsága, nevezetesen az izotónia hiánya. A kontraharmonikus közép nem izoton volta azt jelenti, hogy amennyiben egy számpár nagyobbik tagját rögzítjük, a kisebbik szám két különböző értéke esetén is kaphatjuk ugyanazt az eredményt a kontraharmonikus középére.

Például: $C(2, 6) = C(3, 6) = 5$

Az izotónia kérdése általában analitikai eszközökkel tárgyalható [1], de segítségül hívható az illető középhez rendelt ún. karakterisztikus függvény is [10]. Dolgozatom későbbi részében egy geometriai módszert mutatok be.

Jól ismert összefüggés a nevezetes középértékek között fennálló egyenlőtlenség-láncolat, melybe a kontraharmonikus közép is beilleszthető, méghozzá az eddig tárgyalt közepek között legnagyobbként:

$$H \leq G \leq A \leq Q \leq C$$

Az eddig említett középértékek között fennálló kapcsolatot vizsgálva négy, könnyen ellenőrizhető összefüggés írható fel:

$$G(A(a, b), C(a, b)) = Q(a, b)$$

$$Q(G(a, b), Q(a, b)) = A(a, b)$$

$$G(H(a, b), A(a, b)) = G(a, b)$$

$$A(H(a, b), C(a, b)) = A(a, b)$$

A kontraharmonikus közép általánosításával kapható a k paraméterű Lehmer-közepek családja [12]:

$$L_k(a, b) = \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{a^k + b^k}$$

Ezen középcsalád tagjai közt megjelenik a számtani, mértani és harmonikus közép is, sorra $k = 0, -1/2$ és -1 paraméterrel.

A Lehmer-közepek képlete több számra is könnyen kiterjeszthető:

$$L_k(\underline{a}) = \frac{a_1^{k+1} + a_2^{k+1} + \dots + a_n^{k+1}}{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}$$

Jó néhány példát találtam a kontraharmonikus közép előfordulására a matematikán belül a geometriában, valamint a függvénytanban is. A szorosabban a matematikához köthető előfordulásait ebben a dolgozatban nem részletezem, ezeket illetően lásd [6]. Az alábbiakban azonban megemlítem néhány gyakorlatibb jellegű alkalmazását.

Amennyiben az átlag fogalmát a számtani közép kapcsán tárgyalttól eltérően értelmezzük, úgy a statisztikában is nagy jelentőséghez jut a szóban forgó közép. Ha a célunk nem az, hogy az adatoknak az átlagtól való négyzetes eltérése összességében a lehető legkisebb legyen, hanem arra törekszünk, hogy az adatoknak az átlagtól való *relatív* (tehát az átlaghoz viszonyított) négyzetes eltérése legyen összességében minimális, akkor a kontraharmonikus közép adódik átlagnak [1].

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \min. \Leftrightarrow \bar{x} = A(\underline{x})$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\bar{x}} \right)^2 = \min. \Leftrightarrow \bar{x} = C(\underline{x})$$

A kontraharmonikus közép a műszaki gyakorlatban is alkalmazható: a képminőség digitális úton történő javításában, ezen belül a képzaj csökkentésében jut szerephez a Lehmer-közepek családjának több másik képviselőjével együtt [16]. A következőkben a könnyebb tárgyalhatóság érdekében csak a legegyszerűbb képzajokkal foglalkozom. S-típusú zajnak nevezzük azt a hibát, amikor egy képelem sokkal világosabb a környezeténél (salt – só). P-típusú zajjal van dolgunk, ha egy képelem sokkal sötétebb a környezetében lévőknél (pepper – bors).

Vegyük körbe a világos képelemet (S-típusú zaj) egy 3×3-as négyzettel (maszkkal)! Mindegyik képelemhez hozzárendelhetünk egy-egy, a világosságára jellemző pozitív valós számot, amely annál nagyobb, minél világosabb a képelem. Számítsuk ki ezeknek a világosságra jellemző értékeknek valamelyik közepét, és helyettesítsük az eredeti képelemet a középértéknek megfelelő világosságúval! Az új képelem világossága (mint középérték) kisebb az eredetiénél, ezért kevésbé tűnik ki a környezetéből, vagyis valóban sikerült csökkenteni a képzajt.

S-típusú zaj	k	2	1	0	-1	-2
P-típusú zaj	L_k	L_2	C	A	H	L_{-2}

--	--	--	--	--	--

A fenti táblázatból kiderül, hogy különböző középértékek alkalmazásával más és más lesz a zajcsökkentés eredménye. Látható, hogy a Lehmer-közép paraméterének csökkentésével egyre hatékonyabbá válik az S-típusú zaj kiszűrése. Ennek magyarázatához szorítkozzunk egyelőre két szám Lehmer-közepére! Ezeknek egyik tulajdonsága, hogy növekvő paraméterrel a közép egyre közelebb kerül a nagyobbik számhoz, csökkenő paraméterrel pedig a kisebbik számhoz. Több szám esetén, ha az egyik szám kirívóan nagyobb a többinél, az alacsony paraméterű Lehmer-közép alkalmazásával még jobban érvényesül a többségben lévő kis számok hatása, így a világos képelem a középértékkel való helyettesítést követően valósággal „besimítható” a környezetébe.

A P-típusú zaj csökkentése teljesen hasonlóan történik, ekkor viszont a paraméter növelésével érhetünk el egyre jobb eredményt. Ahhoz pedig, hogy az egész képen kiszűrjessük a zajokat, a maszkkal végig kell pásztázni a képet. Az alkalmazott matematikai apparátust a szakirodalomban kontraharmonikus szűrőnek hívják, pedig helytállóbb lenne a Lehmer-szűrő elnevezés.

Érdekes, hogy a Lehmer-közepék családja még a zenében is felbukkan. Két hang magasságbeli különbségét a hangközzel jellemezzük, ez pedig a két hang frekvenciájának aránya. Ha az alaphang frekvenciáját egységnyiinek vesszük, akkor az oktáv frekvenciája 2 egység. További hangközöket tüntet fel az alábbi táblázat, amelyből kiderül, hogy a megfelelő frekvenciák éppen az 1 és a 2 valamelyik Lehmer-közepével egyenlők, legalábbis az ún. természetes (vagy diatonikus) skálán.

Hangköz	prím (alaphang)	kis terc	kvart	kvint	nagy szext	kis szeptim	oktáv
Frekvencia	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	2
Közép	(a)	L_{-2}	H	A	C	L_2	(b)

Egy szám osztóinak a közepe

Izgalmas kutatási terület egy szám osztóinak imént említett matematikai középértékeit vizsgálni.

Amennyiben n egy pozitív egész szám, melynek osztóit d_i -vel jelöljük, az osztók különböző közepeit a következőképpen állíthatjuk elő (felhasználva a közepek képleteinek több számra való kiterjesztését):

$$A(n) = \frac{\sum d_i}{n}$$

$$G(n) = \sqrt[n]{\prod d_i}$$

$$H(n) = \frac{n}{\sum \frac{1}{d_i}}$$

$$Q(n) = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n}}$$

$$C(n) = \frac{\sum d_i^2}{\sum d_i}$$

Ezen értékekkel, valamint a közöttük fennálló összefüggések tanulmányozásával – különös tekintettel a harmonikus közésre – Ore norvég matematikus foglalkozott behatóan. Azokat a számokat, melyek osztóinak harmonikus közepe egész szám, harmonikus vagy Ore-számoknak nevezzük. [14]

II. A kontraharmonikus közép kapcsolata a pitagoraszai számhármassal

A következőkben bemutatom a kontraharmonikus közép pitagoraszai számhármassal való kapcsolatát. Mindezt egy tétel kimondásának és bizonyításának keretén belül teszem meg.

1. Tétel:

I. Ha a és b különböző pozitív egész számok, és $C(a, b)$ (vagyis a kontraharmonikus közepük) is egész, akkor $C(a, b)$ előáll egy pitagoraszai számhármass legnagyobb tagjaként.

II. Ha (x, y, z) pitagoraszai számhármass, akkor létezik két különböző pozitív egész szám, melyeknek kontraharmonikus közepe éppen a számhármass legnagyobb tagja (azaz z , amely szintén egész).

A tételt *Pahikkala* finn matematikus mondta ki, és bizonyította be tisztán algebrai úton [15].

Az én bizonyításom geometriai háttérű. Emellett az általam alkalmazott eljárással a kontraharmonikus közép nem izoton jellege geometriailag igazolható, továbbá más közepekkel való kapcsolata is szemléltethető.

Bizonyítás:

Tekintsünk egy derékszögű érintőtrapézt, melynek alapjai a , ill. b hosszúak (legyen $a < b$)!

Hogy a és b ismeretében kifejezhessük a szárak hosszát (c -t és d -t), írjuk fel az érintőnégyzetek tételét és a Pitagorasz-tételt!

$$\left. \begin{aligned} c + d &= a + b \\ d^2 + (b - a)^2 &= c^2 \end{aligned} \right\}$$

Az egyenletrendszer megoldásával az alábbi eredményre jutunk:

$$c = \frac{a^2 + b^2}{a + b}, \quad d = \frac{2ab}{a + b}$$

A merőleges szár hosszára tehát az alapok hosszának a harmonikus közepét, a másik szár hosszára pedig a kontraharmonikus közepét kapjuk.

Ezen a ponton tegyünk egy kis kitérőt! Azonnal láthatjuk, hogy két különböző számnak a kontraharmonikus közepe nagyobb, mint a harmonikus közepe, amit algebrai úton is igazolhatunk.

Emellett egy másik érdekességet is megfigyelhetünk. Írjuk fel újra az érintőnégyzetek tételét, most már a kapott eredményekkel!

$$H + C = a + b$$

2-vel való osztás után, a számtani közép definíciója alapján a már korábban említett összefüggések egyikét kapjuk:

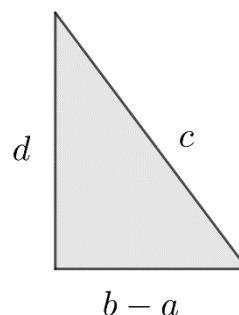
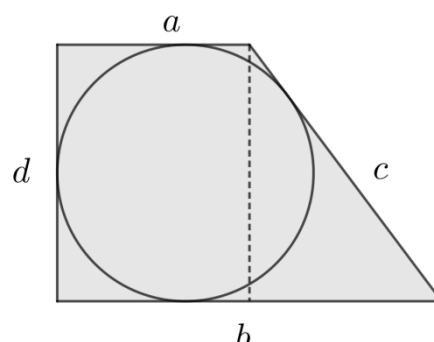
$$A(H, C) = A(a, b)$$

Vagyis mindegy, hogy két szám harmonikus és kontraharmonikus közepének vesszük a számtani közepét, vagy magának az eredeti két számnak a számtani közepét. Erre azt mondjuk, hogy a számtani közép invariáns a harmonikus és a kontraharmonikus középére nézve. Szokás úgy is fogalmazni, hogy a harmonikus és a kontraharmonikus közép egymásnak a komplementere a számtani közép vonatkozásán [17]. Az ábra tehát magában rejt egy közepek közötti, invariancia jellegű összefüggést, amely magyarázatot ad a *kontraharmonikus* elnevezésre is.

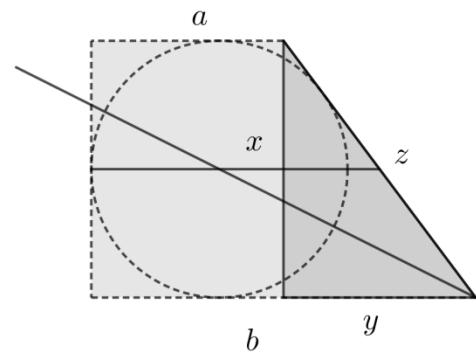
Térjünk vissza a tétel bizonyítására! Tegyük fel, hogy a és b egész számok, és a kontraharmonikus közepük is egész! Válaszszunk le a derékszögű érintőtrapézból egy derékszögű háromszöget!

Ennek oldalhosszai: $b - a$, d , c . Ezek azonban a feltételek miatt mind egész számok (hiszen $c = C(a, b)$, ill. $d = a + b - c$ az érintőnégyzetek tételéből).

Tehát kaptunk egy pitagorasz-i számhármast, melynek legnagyobb tagja éppen $C(a, b)$. Ezzel bebizonyítottam a tétel I. részét.



Induljunk ki most egy (x, y, z) pitagoraszai számhármásból, azaz három olyan pozitív egész számból, melyek egy derékszögű háromszög oldalhosszai! Egészítsük ki ezt a háromszöget derékszögű érintőtrapézzá, melynek alapjai legyenek a , ill. b hosszúak ($a < b$)! (A szerkesztés nem bonyolult: az egyik hegyesszögű csúcsból kiinduló szögfelezőnek, ill. a csúccsal szemközti befogó és az átfogó felezőpontját összekötő középvonalnak a metszéspontjaként kapjuk a szerkesztendő trapézba írható kör középpontját; a kör megrajzolása után pedig már könnyű megszerkeszteni a trapézt.)



Az ábra alapján írjunk fel két összefüggést a és b között!

$$\left. \begin{aligned} a + b &= x + z \\ b - a &= y \end{aligned} \right\}$$

Ebből kapjuk:

$$a = \frac{x - y + z}{2}, \quad b = \frac{x + y + z}{2}$$

A kapott derékszögű érintőtrapéz hosszabbik száráról tudjuk, hogy annak hossza egyrészt az alapok hosszának (a -nak és b -nek) a kontraharmonikus közepe, másrészt egész szám, hiszen a pitagoraszai számhármás legnagyobb tagja (a derékszögű háromszög átfogójának a hossza). Már csak azt kell belátni, hogy az alapok hossza is egész szám.

i) Foglalkozzunk először egy ún. primitív pitagoraszai számhármással, amelyben a tagoknak nincs 1-nél nagyobb közös osztója! Ismeretes, hogy ebben az esetben a tagok a következő módon fejezhetők ki az m és n pozitív egész számokkal [13]:

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

($m > n$, továbbá m és n relatív prímek és különböző paritásúak; y jelöli a számhármás egyetlen páros tagját.) Behelyettesítés és rendezés után adódik:

$$a = m \cdot (m - n), \quad b = m \cdot (m + n)$$

Tehát az alapok hossza valóban egész szám.

ii) Ha a pitagoraszai számhármás nem primitív, akkor a tagok legnagyobb közös osztója nagyobb 1-nél. Jelöljük ezt az egész számot k -val! Ha mindhárom tagot k -val osztjuk, akkor primitív pitagoraszai számhármáshoz jutunk, így az előzőek szerint egész számokat kapunk az alapok hosszára. Ezeket k -val megszorozva adódnak az eredeti számhármáshoz tartozó alaphosszúságok, amelyek természetesen szintén egész számok. Ez teszi teljessé a tétel II. részének a bizonyítását. ■

Megjegyzés:

A szerkesztésből kitűnik, hogy a derékszögű háromszöget a másik befogójának az irányában is kiegészíthetjük derékszögű érintőtrapézzá. Ez annak felel meg, hogy az alapok hosszának a képletében x és y szerepe felcserélődik:

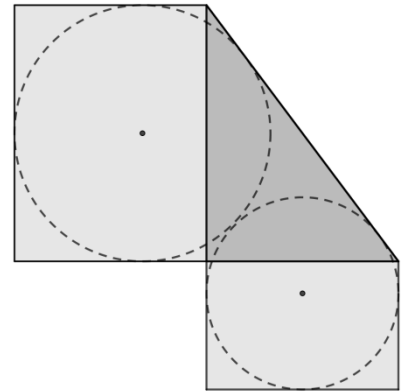
$$a' = \frac{y - x + z}{2}, \quad b' = \frac{x + y + z}{2}$$

Mint látható, a hosszabbik alap hosszára ugyanazt az értéket kapjuk, a rövidebbik alapéra azonban nem:

$$a' = z - a, \quad b' = b$$

Eközben a trapéz hosszabbik szára – azaz a kiindulási derékszögű háromszög átfogója – nem változik. Mindez összhangban van a kontraharmonikus közép nem izoton voltával, azaz azzal a korábban megállapított ténnyel, hogy ha rögzítjük egy számpár nagyobbik tagját, akkor a kisebbik tag két különböző értéke esetén is ugyanaz a kontraharmonikus közép adódik [15]:

$$C(a, b) = C(a', b), \quad a + a' = C$$



III. A kontraharmonikus közép kapcsolata a Fibonacci-sorozattal

Meglepő lehet, de a kontraharmonikus közép még a Fibonacci-sorozathoz is kapcsolódik.

2. Tétel:

Az ötödiktől kezdve minden páratlan sorszámú Fibonacci-sorozattag felírható két különböző egész szám kontraharmonikus közepeként.

Bizonyítás:

A Fibonacci-sorozat első néhány tagja:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

A sorozat n -edik tagját f_n -nel jelölve, a sorozat rekurzív képzési szabálya:

$$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n \quad (n \geq 2)$$

Tekintsünk egy páratlan sorszámú (5-nél nem kisebb sorszámú) Fibonacci-sorozattagot, f_{2n+1} -et, ahol $n \geq 2$. Teljes indukcióval igazolható, hogy [5]:

$$f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$$

Ez azt jelenti, hogy f_{2n+1} -et fel tudjuk írni két kisebb, szomszédos sorozattag négyzetének összegeként. Ekkor azonban ezzel a két kisebb sorozattaggal egy teljes pitagoraszai számhármast is elő tudunk állítani [9]:

$$x = f_{n+1}^2 - f_n^2, \quad y = 2 \cdot f_{n+1} \cdot f_n, \quad z = f_{n+1}^2 + f_n^2 = f_{2n+1}$$

f_{2n+1} tehát a pitagoraszai számhármast legnagyobb tagja, így az előző tétel értelmében létezik két különböző pozitív egész szám, melyeknek kontraharmonikus közepe éppen f_{2n+1} . ■

Még érdekesebbé teszi ezt a felismerést az a tény, hogy a szóban forgó két egész szám kifejezhető a Fibonacci-sorozat bizonyos tagjaival. Az előző tétel bizonyításában felhasznált képletek alapján:

$$a = \frac{x - y + z}{2} = \frac{f_{n+1}^2 - f_n^2 - 2 \cdot f_{n+1} \cdot f_n + f_{n+1}^2 + f_n^2}{2} = f_{n+1} \cdot f_{n-1}$$

$$a' = \frac{y - x + z}{2} = \frac{2 \cdot f_{n+1} \cdot f_n - f_{n+1}^2 + f_n^2 + f_{n+1}^2 + f_n^2}{2} = f_{n+2} \cdot f_n$$

$$b = \frac{x + y + z}{2} = \frac{f_{n+1}^2 - f_n^2 + 2 \cdot f_{n+1} \cdot f_n + f_{n+1}^2 + f_n^2}{2} = f_{n+2} \cdot f_{n+1}$$

Eredményeinket összefoglalva:

$$f_{2n+1} = C(f_{n+1} \cdot f_{n-1}, f_{n+2} \cdot f_{n+1}) = C(f_{n+2} \cdot f_n, f_{n+2} \cdot f_{n+1})$$

Például:

$$f_7 = C(f_4 \cdot f_2, f_5 \cdot f_4) = C(3 \cdot 1, 5 \cdot 3) = C(3, 15) = 13$$

$$f_7 = C(f_5 \cdot f_3, f_5 \cdot f_4) = C(5 \cdot 2, 5 \cdot 3) = C(10, 15) = 13$$

Megjegyzések:

- i) Mindez egyúttal azt is jelenti, hogy bármely négy egymást követő Fibonacci-sorozattagból származtatható derékszögű érintőtrapéz, melynek oldalhosszai egész számok, sőt kifejezhetők a Fibonacci-négyes tagjaival.
- ii) Amennyiben egy Fibonacci-típusú sorozatból indulunk ki, akkor a pitagoraszai számhármás legnagyobb tagjára nem feltétlenül adódik a sorozat valamely eleme. Azonban kis módosítással itt is megfigyelhető összefüggés pl. a Lucas-sorozat esetén: a kapott átfogó hossza két sorozattag összegeként vagy két másik sorozattag különbségeként írható fel.
- iii) A 2. Tételhez hasonló állítás érvényes a négyzetes közép és a Fibonacci-sorozat kapcsolata: az ötödiktől kezdve minden páratlan sorszámú Fibonacci-szám felírható két különböző egész szám négyzetes közepeként. Ezen túlmenően más közepekre is megfogalmazhatók hasonló jellegű állítások. Ez azonban már egy másik tanulmány témája lehetne.

IV. Kontraharmonikus számok

Osztók kontraharmonikus közepe

Az n pozitív egész szám pozitív osztóinak kontraharmonikus közepét úgy kapjuk, hogy az osztók négyzetének összegét elosztjuk az osztók összegével:

$$C(n) = \frac{\sum_{d_i|n} d_i^2}{\sum_{d_i|n} d_i} = \frac{\sigma_2(n)}{\sigma(n)}$$

Például:

$$C(10) = \frac{1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2}{1 + 2 + 5 + 10} = \frac{130}{18} = \frac{65}{9}$$

Felmerülhet az igény, hogy – a szokásos számelméleti függvényekhez hasonlóan – $C(n)$ -et is kifejezzük n prímtényező felbontásának ismeretében. Ennek az igénynek tesz eleget az alábbi tétel [18].

3. Tétel:

Ha n prímtényező felbontása:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

akkor:

$$C(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} + 1}{p_1 + 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} + 1}{p_2 + 1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1} + 1}{p_r + 1}$$

Bizonyítás:

A $\sigma(n)$ és a $\sigma_2(n)$ számelméleti függvények multiplikatívak, azaz ha a és b relatív prímek, akkor $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$, ill. $\sigma_2(a \cdot b) = \sigma_2(a) \cdot \sigma_2(b)$. Ezért $C(n)$ is multiplikatív, hiszen:

$$C(a \cdot b) = \frac{\sigma_2(a \cdot b)}{\sigma(a \cdot b)} = \frac{\sigma_2(a) \cdot \sigma_2(b)}{\sigma(a) \cdot \sigma(b)} = \frac{\sigma_2(a)}{\sigma(a)} \cdot \frac{\sigma_2(b)}{\sigma(b)} = C(a) \cdot C(b)$$

ha $(a, b) = 1$. Így elég meghatározni az n prímtényező felbontásában szereplő prímszámok osztoinak kontraharmonikus közepét.

Egyrészt:

$$\sigma(p_i^{\alpha_i}) = 1 + p_i + p_i^2 + p_i^3 + \cdots + p_i^{\alpha_i} = \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

Másrészt:

$$\begin{aligned} \sigma_2(p_i^{\alpha_i}) &= 1 + p_i^2 + (p_i^2)^2 + (p_i^2)^3 + \cdots + (p_i^2)^{\alpha_i} = \\ &= 1 + p_i^2 + (p_i^2)^2 + (p_i^2)^3 + \cdots + (p_i^2)^{\alpha_i} = \\ &= \frac{(p_i^2)^{\alpha_i+1} - 1}{p_i^2 - 1} = \frac{(p_i^{\alpha_i+1})^2 - 1}{p_i^2 - 1} = \frac{(p_i^{\alpha_i+1} - 1) \cdot (p_i^{\alpha_i+1} + 1)}{(p_i - 1) \cdot (p_i + 1)} \end{aligned}$$

Ezért:

$$C(p_i^{\alpha_i}) = \frac{\sigma_2(p_i^{\alpha_i})}{\sigma(p_i^{\alpha_i})} = \frac{p_i^{\alpha_i+1} + 1}{p_i + 1}$$

Tehát:

$$C(n) = C(p_1^{\alpha_1}) \cdot C(p_2^{\alpha_2}) \cdots C(p_r^{\alpha_r}) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} + 1}{p_1 + 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} + 1}{p_2 + 1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r+1} + 1}{p_r + 1}$$

■

Megjegyzés:

Látható, hogy a $\sigma(n)$ osztóösszeg-függvényéhez hasonló képletet jutottunk n osztóinak kontraharmonikus közepét illetően.

Kontraharmonikus számokra vonatkozó tételek

Vannak olyan számok, amelyek osztóinak kontraharmonikus közepe egész szám, pl. $C(9) = 7$, $C(16) = 11$, $C(20) = 13$, $C(50) = 35$. Nevezzük ezeket kontraharmonikus számoknak [18] (az ún. harmonikus vagy Ore-számok mintájára, amelyek osztóinak a harmonikus közepe egész szám [14])! Kérdés lehet, hogy melyek a kontraharmonikus számok. Az alábbiakban egy elégséges feltételt fogalmazok meg erre vonatkozóan.

4. Tétel:

- I. Minden négyzetszám egyben kontraharmonikus szám is [18].
- II. Egy négyzetszám osztóinak kontraharmonikus közepe páratlan szám.

Bizonyítás:

- I. Ha n négyzetszám, akkor a prímtényezős felbontásában szereplő minden α_i kitevő páros, így minden $\alpha_i + 1$ páratlan, ezért minden i -re

$$p_i + 1 \mid p_i^{\alpha_i+1} + 1$$

ami azt jelenti, hogy a $C(n)$ -ben szereplő összes tényező, és így $C(n)$ is egész szám.

- II. Alakítsuk át ezeket a tényezőket!

$$\frac{p_i^{\alpha_i+1} + 1}{p_i + 1} = p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1} + \dots - p_i + 1$$

Az 1-et megelőző (azonos paritású) tagok darabszáma páros, ezek összevonásával is páros számot kapunk, 1 hozzáadásával pedig páratlant. Tehát $C(n)$ összes tényezője páratlan, ezért $C(n)$ is az. ■

Megjegyzés:

A tétel első állítása fordítva nem igaz, ugyanis vannak olyan kontraharmonikus számok, amelyek nem négyzetszámok (pl. 20, 50 vagy 117), sőt ennél több is mondható.

5. Tétel:

Végtelen sok olyan kontraharmonikus szám van, amelyik nem négyzetszám.

Bizonyítás:

$C(n)$ multiplikatív tulajdonsága lehetőséget teremt arra, hogy korlátlan mennyiségben gyártunk kontraharmonikus számokat, akár olyanokat is, amelyek nem négyzetszámok. Vegyünk ugyanis egy kontraharmonikus számot, amely nem négyzetszám (x), és bontsuk prímtényezőkre! Ezután vegyünk egy tetszőleges négyzetszámot (y), melynek egyik prímtényezője sem egyezik meg az előző bontásban szereplőkkel! Ilyen négyzetszámból végtelen sok van, hiszen a prímek száma is végtelen. Szorozzuk össze x -et és y -t, a szorzatot jelöljük z -vel! A szorzat biztosan nem négyzetszám. x és y relatív prímek, ezért a multiplikativitás miatt:

$$C(z) = C(x \cdot y) = C(x) \cdot C(y)$$

Mivel x és y egyaránt kontraharmonikus számok, $C(x)$, $C(y)$ és így $C(z)$ is egész, azaz z is kontraharmonikus szám. ■

Például:

$$20 = 2^2 \cdot 5, \quad 9 = 3^2$$
$$C(180) = C(20 \cdot 9) = C(20) \cdot C(9) = 13 \cdot 7 = 91$$

Megjegyzés:

Érdekes párhuzam figyelhető meg az *Ore* által vizsgált harmonikus számok és az általam tanulmányozott kontraharmonikus számok között. *Ore* ugyanis megállapította, hogy minden tökéletes szám egyben harmonikus is, de vannak olyan harmonikus számok, amelyek nem tökéletesek (pl. 140 vagy 270) [14].

6. Tétel:

Ha n kontraharmonikus szám, továbbá n és k relatív prímek, akkor $n \cdot k^2$ is kontraharmonikus szám [18].

Bizonyítás:

A multiplikatívitás miatt:

$$C(n \cdot k^2) = C(n) \cdot C(k^2)$$

A feltétel szerint $C(n)$ egész, a 4. Tétel alapján pedig $C(k^2)$ is egész, így $C(n \cdot k^2)$ is az. ■

Megjegyzés:

Az így kapott szám lehet négyzetszám, de lehet az 5. Tétel bizonyításában szereplő szám is.

A következő két tételben elégséges feltételeket fogalmazok meg a kontraharmonikus számokat illetően.

7. Tétel:

Ha p prímszám, és $q = 2p(p - 1) + 1$ is prím, akkor $p^2 \cdot q^{2k-1}$ kontraharmonikus szám ($k \in \mathbb{N}^+$).

Bizonyítás:

Egyrészt:

$$C(p^2) = \frac{p^3 + 1}{p + 1} = p^2 - p + 1 = p(p - 1) + 1$$

Másrészt (mivel q is prím):

$$C(q^{2k-1}) = \frac{q^{2k} + 1}{q + 1} = \frac{(q^k)^2 + 1}{2p(p - 1) + 2}$$

q páratlan, q^k is az, így $(q^k)^2$ mint egy páratlan szám négyzete 4-gyel osztva 1-et ad maradékul.

$$C(q^{2k-1}) = \frac{4l + 2}{2p(p - 1) + 2} = \frac{2l + 1}{p(p - 1) + 1}$$

ahol $l \in \mathbb{N}^+$. p^2 és q^{2k-1} relatív prímek, hiszen p^2 egyetlen prímosztója p , $q = 2p(p - 1) + 1$ viszont nem osztható p -vel, és így q^{2k-1} sem. Ezért a multiplikatívitás miatt:

$$C(p^2 \cdot q^{2k-1}) = C(p^2) \cdot C(q^{2k-1}) = [p(p - 1) + 1] \cdot \frac{2l + 1}{p(p - 1) + 1} = 2l + 1$$

ami egy egész szám. ■

Például:

$$p = 2, \quad q = 5$$

$$C(500) = C(2^2 \cdot 5^3) = 3 \cdot \frac{313}{3} = 313$$

Megjegyzés:

A bizonyítás lépései változatlanul érvényesek q -nak a páros kitevői esetén is, ekkor azonban $p^2 \cdot q^{2k}$ négyzetszám, amelyekkel viszont az előbbieken már foglalkoztam.

8. Tétel:

Ha p 6-tal osztva -1 -es maradékot adó prím, akkor

a) $2^{2k-1} \cdot p^2$ kontraharmonikus szám ($k \in \mathbb{N}^+$);

b) $5^{2k-1} \cdot p^2$ kontraharmonikus szám ($k \in \mathbb{N}^+$, $p \neq 5$).

Bizonyítás:

Legyen $p = 6l - 1$, ahol $l \in \mathbb{N}^+$. Ekkor:

$$C(p^2) = \frac{p^3 + 1}{p + 1} = p^2 - p + 1 = (6l - 1)^2 - (6l - 1) + 1 = 3 \cdot (12l^2 - 6l + 1)$$

a)

$$C(2^{2k-1}) = \frac{2^{2k} + 1}{3}$$

2^{2k-1} és p^2 relatív prímek, ezért a multiplikatívitás miatt:

$$\begin{aligned} C(2^{2k-1} \cdot p^2) &= C(2^{2k-1}) \cdot C(p^2) = \frac{2^{2k} + 1}{3} \cdot 3 \cdot (12l^2 - 6l + 1) = \\ &= (2^{2k} + 1) \cdot (12l^2 - 6l + 1) \end{aligned}$$

Eredményül tehát egész számot kaptunk.

b)

$$C(5^{2k-1}) = \frac{5^{2k} + 1}{6}$$

5 1-et ad maradékkal 4-gyel osztva, így 5^{2k} is, ezért (az $m \in \mathbb{N}^+$ jelöléssel):

$$C(5^{2k-1}) = \frac{4m + 2}{6} = \frac{2m + 1}{3}$$

5^{2k-1} és p^2 is relatív prímek (ha $p \neq 5$), ezért a multiplikatívitás miatt:

$$\begin{aligned} C(5^{2k-1} \cdot p^2) &= C(5^{2k-1}) \cdot C(p^2) = \frac{2m + 1}{3} \cdot 3 \cdot (12l^2 - 6l + 1) = \\ &= (2m + 1) \cdot (12l^2 - 6l + 1) \end{aligned}$$

Eredményül ismét egész szám adódott. ■

Például:

$$C(200) = C(2^3 \cdot 5^2) = \frac{17}{3} \cdot 21 = 119$$

$$C(605) = C(5 \cdot 11^2) = \frac{13}{3} \cdot 111 = 481$$

A következő két tételben szükséges feltételeket fogalmazok meg arra vonatkozóan, hogy mikor lesz egy szám kontraharmonikus.

9. Tétel:

Páratlan kitevőjű prímszám nem lehet kontraharmonikus szám.

Bizonyítás:

$$C(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1} + 1}{p + 1}$$

Itt α páratlan számot jelöl, ezért $\alpha + 1$ páros. p maradéka $p + 1$ -gyel osztva természetesen -1 , így $p^{\alpha+1}$ osztási maradéka 1 lesz, tehát $p^{\alpha+1} + 1$ osztási maradéka 2 -vel lesz egyenlő. Vagyis $p + 1$ nem lehet osztója a $p^{\alpha+1} + 1$ összegnek, $C(p^\alpha)$ nem lehet egész szám. ■

Megjegyzés:

Hasonló állítást bizonyított be Ore: prímszám hatványa nem lehet harmonikus szám [14].

10. Tétel:

Bármely kontraharmonikus szám prímtényezős felbontásában a 4-gyel osztva 3-as maradékot adó prímekek csakis páros kitevőn szerepelhetnek.

Bizonyítás:

Írjuk fel n prímtényezős felbontását úgy, hogy a prímekeket a 4-gyel való osztási maradékuk szerint különítjük el! Ezen belül csoportosítsuk a 4-gyel osztva 3-as maradékot adó prímekeket a kitevőjük paritása szerint!

$$n = 2^\alpha \cdot p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r} \cdot q_1^{\gamma_1} \cdot q_2^{\gamma_2} \cdots q_s^{\gamma_s} \cdot q_1'^{\gamma_1'} \cdot q_2'^{\gamma_2'} \cdots q_t'^{\gamma_t'}$$

$$p_i = 4k_i + 1, \quad k_i \in \mathbb{N}^+$$

$$q_i = 4l_i + 3, \quad l_i \in \mathbb{N}$$

$$q_i' = 4l_i' + 3, \quad l_i' \in \mathbb{N}$$

(γ_i -k a páros kitevőket, γ_i' -k a páratlan kitevőket jelölik, $q_i \neq q_j'$.)

Írjuk fel az egyes tényezők kontraharmonikus közepét!

a)

$$C(2^\alpha) = \frac{2^{\alpha+1} + 1}{3}$$

Ezt a törtet – melynek számlálója és nevezője is páratlan –, jelöljük a -val!

b) Mivel p_i 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, $p_i + 1$ maradéka 2-vel egyenlő, így $p_i + 1$ felírható $4u_i + 2$ alakban, ahol $u_i \in \mathbb{N}^+$. $p_i^{\beta_i+1}$ is 1-et ad maradékul 4-gyel osztva, ezért $p_i^{\beta_i+1} + 1$ is az előzőhöz hasonló, $4v_i + 2$ alakban írható fel, ahol $v_i \in \mathbb{N}^+$. Ezért:

$$C(p_i^{\beta_i}) = \frac{p_i^{\beta_i+1} + 1}{p_i + 1} = \frac{4v_i + 2}{4u_i + 2} = \frac{2v_i + 1}{2u_i + 1}$$

Ezt a törtet – melynek számlálója és nevezője szintén páratlan –, jelöljük b_i -vel!

c) Ha a páros kitevőjű q_i prímből indulunk ki, akkor $q_i^{\gamma_i}$ valójában négyzetszám, melynek kontraharmonikus közepe a 4. Tétel értelmében egész, és azt is láttuk, hogy ezen belül páratlan szám. Jelöljük ezt a számot c_i -vel!

d) Foglalkozzunk végül a páratlan kitevőjű q'_i prímmel! Mivel q'_i 4-gyel osztva 3-at (ill. -1-et) ad maradékul, $q'_i + 1$ osztható 4-gyel, így $q'_i + 1$ felírható $4w_i$ alakban, ahol $w_i \in \mathbb{N}^+$. γ'_i páratlan, ezért $q_i'^{\gamma'_i+1}$ vagyis q'_i páros kitevőjű hatványa 1-et ad maradékul 4-gyel osztva, így $q_i'^{\gamma'_i+1} + 1$ felírható $4z_i + 2$ alakban, ahol $z_i \in \mathbb{N}^+$. Ezért:

$$C(q_i'^{\gamma'_i}) = \frac{q_i'^{\gamma'_i+1} + 1}{q'_i + 1} = \frac{4z_i + 2}{4w_i} = \frac{2z_i + 1}{2w_i}$$

Most tehát egy páratlan számlálójú, páros nevezőjű törtet kaptunk, jelöljük ezt c'_i -vel!

„Rakjuk össze” $C(n)$ -et!

$$C(n) = a \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots b_r \cdot c_1 \cdot c_2 \cdots c_s \cdot c'_1 \cdot c'_2 \cdots c'_t$$

Az előzőek szerint az a és a b_i törtek számlálója és nevezője egyaránt páratlan, a c_i számok mindegyike páratlan egész, a c'_i törtek pedig páratlan számlálóval, de páros nevezővel rendelkeznek. Így a fenti szorzás eredménye egy páratlan számlálójú, de páros nevezőjű tört, amely nem lehet egész szám. Ezért n nem lehet kontraharmonikus. Ezt a d)-ben tárgyalt c'_i -ben szereplő páros nevező okozta, vagyis az, hogy a 4-gyel osztva 3-as maradékot adó prímelek között volt páratlan kitevőjű. Tehát annak szükséges feltétele, hogy egy szám kontraharmonikus lehessen, valóban az, hogy prímtényezős felbontásában a 4-gyel osztva 3-as maradékot adó prímelek páros kitevővel szerepeljenek. (Fontos látni, hogy ez csak szükséges, de nem elégséges feltétel.) ■

11. tétel:

Egy kontraharmonikus szám osztóinak kontraharmonikus közepe páratlan.

Bizonyítás:

Az előző tétel szerint n prímtényezős felbontásában a 4-gyel osztva 3-as maradékot adó prímelek kitevője páros. Így az előbbi szorzat mindegyik tényezője olyan törtként írható fel, amelynek számlálója és nevezője is páratlan, így a szorzat is ilyen tört. Mivel n kontraharmonikus szám, ez a tört egyszerűsíthető. A kapott eredmény nem lehet páros. ■

12. tétel:

Minden kontraharmonikus szám felírható két négyzetszám összegeként.

Bizonyítás:

Ha egy szám kontraharmonikus, akkor a 8. Tétel szerint a 4-gyel osztva 3-as maradékot adó prímek csakis páros kitevőn szerepelhetnek a prímtényezős felbontásában. Az ún. „két-négyzetszám-tétel” értelmében viszont egy természetes szám pontosan akkor áll elő két négyzetszám összegeként, ha az ilyen típusú prímek páros kitevőn fordulnak elő a prímtényezős felbontásban [4], [13]. Ez bizonyítja állításunkat. ■

Például (összeadandóként a 0 négyzetét is megengedjük):

$$9 = 0^2 + 3^2 \quad 20 = 2^2 + 4^2 \quad 50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2 \quad 117 = 6^2 + 9^2$$

Végezetül – konkrét példák és az említett speciális alakú kontraharmonikus számok alapján – egy sejtést fogalmazok meg, melyeknek bizonyítása folyamatban van.

Sejtés:

Ha egy pozitív egész szám különböző prímek szorzata (vagyis négyzetmentes), akkor nem lehet kontraharmonikus szám.

Bizonyítás első lépése:

A 10. tétel alapján a szorzatban szereplő prímek között nem lehetnek olyanok, amelyek 4-gyel osztva 3-as maradékot adnak.

Megjegyzés:

Hasonló állítás érvényes a harmonikus számokra vonatkozóan is ($n = 6$ kivételével), amelyet Ore bebizonyított [14].

Összegzés

Dolgozatomban a kontraharmonikus közép és a számelmélet néhány kapcsolódási pontját mutattam be. Geometriai úton bizonyítottam *Pahikkala* tételét (amely a kontraharmonikus közép és a pitagoraszai számhármak kapcsolatáról szól), rámutattam a kontraharmonikus közép és a Fibonacci-sorozat közötti összefüggésre, és tanulmányoztam az ún. kontraharmonikus számokat. Szükséges, ill. elégséges feltételeket fogalmaztam meg arra vonatkozóan, hogy milyen alakúak lehetnek ezek a számok. Rávilágítottam a harmonikus és a kontraharmonikus számok közötti párhuzamra. A dolgozatban szereplő tételek egy része saját eredménynek tekinthető, ezek a szakirodalomban – tudomásom szerint – nem lelhetők fel. Szándékomban áll folytatni a téma kutatását: egyrészt vannak még bizonyításra váró sejtések, másrészt felbukkanhatnak eddig még fel nem tárt tulajdonságok, összefüggések.

Felhasznált szakirodalom

- [1] Beckenbach, E. F.: A class of mean value functions. *The American Mathematical Monthly*, **57**. No. 1. (1950), 1-6.
- [2] Borwein, J. M. & Borwein, P. B.: Pi and the AGM. A study in analytic number theory and computational complexity. John Wiley, New York, 1987
- [3] Bullen, P. S.: Handbook of means and their inequalities. Springer Science + Business Media, Dordrecht, 2003
- [4] Fried Ervin: Mely természetes számok állíthatók elő négyzetszámok összegeként? I. rész. *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, **40**. No. 2. (1990), 61-64.
- [5] Gerőcs László: Ami a középiskolai matematika tananyagból kimaradt. Bölcsélet Egyesület, Budapest, 2009
- [6] Hargitai Sára & Unyi Tamás: Az elfeledett közép. *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, **70**. No. 7. (2020), 386-394.
- [7] Hischer, H.: Viertausend Jahre Mittelwertbildung. *mathematica didactica*, **25**. No. 2. (2002), 3-51.
- [8] Jaggi, B.: Plädoyer für das harmonische Mittel. *Bulletin der Schweizerischen Mathematik- und Physiklehrkräfte*, No. 121. (2013), 13-22.
- [9] Kalman, D. & Mena, R.: The Fibonacci numbers – exposed. *Mathematics Magazine*, **76**. No. 3. (2003), 167-181.
- [10] Lambert, A. & Herget, W.: Mächtig viel Mittelmaß in Mittelwert-Familien. *Der Mathematikunterricht*, **50**. No. 5. (2004), 55-66.
- [11] Lann, A. & Falk, R.: Ein etwas vernachlässigter Mittelwert. *Stochastik in der Schule*, **27**. No. 1. (2007), 2-4.
- [12] Lehmer, D. H.: On the compounding of certain means. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **36**. (1971), 183-200.
- [13] Ore, O.: Bevezetés a számelmélet világába. Gondolat, Budapest, 1977
- [14] Ore, O.: On the averages of the divisors of a number. *The American Mathematical Monthly*, **55**. No. 10. (1948), 615-619.
- [15] Pahikkala, J.: On contraharmonic mean and Pythagorean triples. *Elemente der Mathematik*, **65**. No. 2. (2010), 62-67.
- [16] Pathak, M. & Singh, S.: Comparative analysis of image denoising techniques. *International Journal of Computer Science and Engineering Technology*, **5**. No. 2. (2014), 160-167.
- [17] Toader, Gh. & Toader, S.: Greek means and the arithmetic-geometric mean. RGMIA Monographs, Victoria University, 2005
- [18] The On-line Encyclopedia of Integer Sequences. <https://oeis.org> (Letöltés ideje: 2020. január 17.)

Köszönetnyilvánítás

Köszönet illeti mindenekelőtt Unyi Tamás tanár urat, felkészítő tanáromat, aki öt évvel ezelőtt bevezetett a kutatás világába, és azóta is mindig számíthatok útmutató támogatására. Kitartó munkája és újszerű ötletei inspirálóak, biztatása engem is folyamatos fejlődésre ösztönöz.

Köszönettel tartozom Dr. Freud Róbert docens úrnak (ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék) a kontraharmonikus számokkal kapcsolatban nyújtott segítségéért és a kutatások folytatására irányuló bátorító ösztönzéséért.

Köszönöm Pertis Szabolcs tanár úrnak (GRL) a hasznos észrevételeket, ötleteket, javaslatokat.

Köszönetemet fejezem ki korábbi diáktársamnak, Szrogh Nórának (GRL), hogy megfigyelésével a kontraharmonikus számok és a 4-gyel osztva 3-as maradékot adó prímek közötti kapcsolatra irányította a figyelmemet.

Végezetül megköszönöm másik korábbi diáktársam, Reményi Márton (GRL) programozási tevékenységét, amellyel hozzásegített az állítások megsejtéséhez és bizonyításához.