



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék

Sodrott huzalból készült tekercsek örvényáram-veszteségének szimulációja

TDK dolgozat

szerző: Bakondi Tamás

Konzulensek:
Dr. Gyimóthy Szabolcs
Dr. Bilicz Sándor

2022. november

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	4
2. Elméleti háttér	6
2.1. Alapfeltevések	6
2.2. Az $A - V, A$ módszer röviden	7
2.3. Ideális síkprobléma	9
2.3.1. Modelltartomány	9
2.3.2. Peremérték-feladat	9
2.3.3. Folytonosság	10
2.3.4. Hálózati kényszerek	11
2.3.5. Veszteség, ellenállás	12
2.3.6. Összefoglalás	12
2.4. Sodrás-fonás figyelembevétele a kétdimenziós modellben	12
2.5. Forgásszimmetrikus jellegű elrendezés	14
2.5.1. Modelltartomány	15
2.5.2. Peremérték-feladat	15
2.5.3. Ekvivalencia, hálózati kényszerek	16
2.5.4. Összefoglalás	17
3. Implementáció	18
3.1. A végeelem szoftver (PDE-Toolbox) beállításai	18
3.2. Utófeldolgozás	20
4. Teszteredmények	22
4.1. A vizsgált konstrukciók	22
4.2. A hosszegységre eső ellenállás a frekvencia függvényében	23
4.3. Elemi száláramok a frekvencia függvényében	24
4.4. Árameloszlás vizsgálata rögzített frekvencián	27
5. Összefoglalás	29

Kivonat

Szigetelt szálakból álló, sodrott áramvezető huzalt (ún. litze-huzalt) alkalmaznak több olyan területen, ahol a huzalbeli örvényáram-veszteség csökkentendő, így például az indukciós hevítésnél, az indukcióval csatolt, rezonancián alapuló, vezeték nélküli energiaátvitelben, illetve bizonyos rádiófrekvenciás eszközökben. Egyes litze-huzalok akár több ezer vezetőszálból állnak, amelyeket több lépcsőben sodornak össze, hierarchikus kötegstruktúrát hozva létre. A kötegstruktúrát igyekeznek úgy kialakítani, hogy az alkalmazott frekvenciaintervallumban a huzal örvényáram-vesztesége a lehető legkisebb legyen. Az optimalizálást manapság számítógépes (többnyire végeselemes) szimuláció segíti. Azonban a huzal – és különösen a belőle csévelt tekercs – részletes háromdimenziós modelljének számítása rendkívül erőforrás-igényes, ezért különböző egyszerűsítésekhez folyamodnak, mint például a homogenizálás vagy a dimenziócsökkentés. Munkámban a sodrott huzalból készült tekercsek örvényáram-veszteségének szimulációjára hatékony kétdimenziós végeselemes modellt alkottam, amelyet Matlab környezetben implementáltam. A modell kulcseleme a kötegstruktúra és a tekercsmenetek (általánosan fogalmazva: a 3D konfigurációs feltételek) figyelembevétele a keresztmetszeti modelltartományon. A kétdimenziós modell helyességét háromdimenziós végeselemes szimulációval ellenőriztem.

* * *

A Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék többek között elektromágneses eszközök számítógépes modellezésével foglalkozik, például kábel- és tekercstervezéssel. A villamosmérnöki mesterképzésem során a tanszék ilyen témájú választható tárgyait meghallgattam, és több éve bekapcsolódtam a tanszéken folyó kutatómunkába, fejlesztésekbe.

1. fejezet

Bevezető

A litze-huzalok – amely elnevezés a német Litzendrahte, azaz „sodrott vezetékek” kifejezésből származik – olyan speciális vezetékek, amelyek több egymástól elszigetelt, végeiken azonban fémesen érintkező, vékony elemi vezetőszálból állnak. A szálakat összesodorják, majd az így kapott kötegeket további, nagyobb kötegekké sodorják vagy fonják, több szintű, összetett vezetékstruktúrát képezve ezzel.

Olyan nagyfrekvenciás eszközökben, amelyek az üzemi frekvenciája 500 kHz alatt marad, elterjedten alkalmaznak litze-huzalt, illetve ezekből készült tekercset, mivel az örvényáram-vesztesége lényegesen kisebb, mint a tömör vezetéből készült vezetéké, így az elmúlt időszakban többen is vizsgálták viselkedésüket [1], illetve az optimális megvalósítási konstrukciót [2]. Ilyen huzalból készítik például az indukciós fűtőtekercseket (pl. indukciós főzőlapok tekercseit), mert az energiaátvitel hatékonysága növelhető a használatával [3]. Továbbá kapcsolóüzemű tápegységben is megtalálhatóak, mivel a hatékonyság növelésével az eszköz mérete és zavarkibocsátása csökkenthető. Használják továbbá a csatolt rezonátorokon alapuló vezeték nélküli energiaátviteli rendszerekben, ahol kritikus fontosságú a veszteségek minél alacsonyabb szinten tartása.

Az örvényáram-veszteségnek több összetevője van, amelyek erősen függenek a vezeték struktúrájától, azaz a szálak összefogásának és sodrásának-fonásának módjától. A veszteségi mechanizmus szimulációja segíti a vezetékkonstrukció optimalizálását. A litze-huzalok sokféleképpen modellezhetők, így végeelem alapú, integrálegyenlet alapú módszerekkel [4], vagy PEEC (Partial Element Equivalent Circuit) módszerrel [5], illetve különféle homogenizációs technikák is léteznek [6]. Ebben a dolgozatban a végeelem-módszer kerül bemutatásra. Ugyan a mezőszimuláció végeelem-módszerrel végezhető három dimenzióban, azonban a kellő pontosságú háromdimenziós modellezés nem hatékony, rendkívül erőforrásigényes. Egyrészt a nagyon bonyolult, akár több ezer elemi vezetőszálból álló vezetékkonstrukciók miatt, másrészt azért, mert ugyan a kábel teljes hosszúságát nem kell modellezni, de a sodrott kábelek még egyetlen hossz menti periódusa is csak igen nagy elemszámú hálóval fedhető le. Kézenfekvő tehát kétdimenziós, keresztmetszeti modellt készíteni, a huzal egy kisebb részét modellezni, majd az eredményeket kiterjeszteni a teljes tartományra, vagy felhasználni azokat magasabb rendű struktúrák számításához.

Az örvényáramproblémák kétdimenziós modellezése hosszú múltra tekint vissza [7], [8]. Az 1980-as években, a mainál kisebb jóval kisebb teljesítményű számítógépek ugyanis csak kétdimenziós szimulációkat tudtak futtatni. A kétdimenziós modellezés azonban mára sem veszített jelentőségéből. Összetett struktúrák optimalizálásához ugyanis számos alkalommal el kell végezni a szimulációt, így nagy előnyt jelent, hogy a háromdimenziós modellek több órás futási ideje pár tíz másodpercre csökkenthető. A jelenségek egy része azonban a kábel

hossza mentén zajlik, ezek hatását figyelembe kell venni a keresztmetszetben. Ez a háromdimenziós kényszerek megfelelő felírásával tehető meg, ami sokvezetős örvényáram problémák esetén igen összetetté tud válni. A kétdimenziós modellezés sarokköve – és egyben dolgozatom legfőbb célja – ezen háromdimenziós kényszerek megfelelő implementálása. Munkám közvetlen előzménye a [9] számú irodalom. Munkám célja pedig többek között az itt bemutatott eljárások megvalósítása volt.

A kétdimenziós végeselemes modellezéshez a MATLAB PDE-Toolboxát használtam, mivel az egyetem hallgatói számára ingyenesen elérhető, jól konfigurálható, flexibilis. Illetve az előkészítés, és az utófeldolgozás során használható a MATLAB összes funkciója. A kétdimenziós számításokat a háromdimenziós számításokkal ellenőriztem. Ez azért indokolt, mert munkám célja éppen a háromdimenziós számítások kétdimenziós redukciója volt.

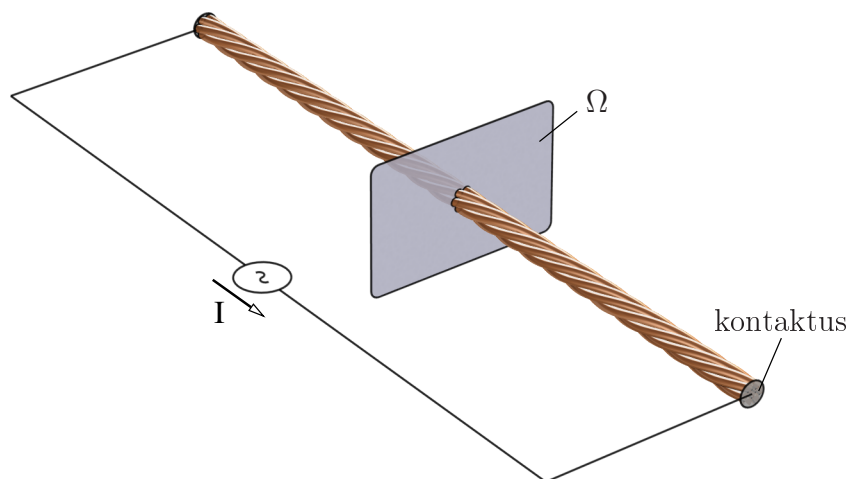
Dolgozatom második fejezetében bemutatom a jelenség elméleti hátterét, az MQS közelítéstől, a sík- és forgásszimmetrikus problémákon keresztül a sodrás, és a hálózati kényszerek figyelembevételéig. A harmadik fejezet az implementációról szól. A negyedik fejezetben kiértékelem a teszteredményeket, végül az ötödik fejezetben összefoglalom az eredményekből levonható következtetéseket.

2. fejezet

Elméleti háttér

2.1. Alapfeltevések

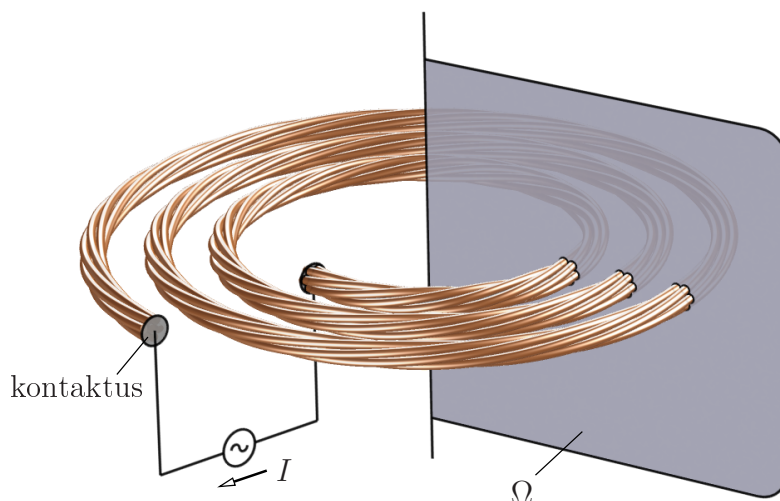
Tömör, egyenes vezetők esetében a számítások egyszerűsítésének legkézenfekvőbb módja, ha az eltolási szimmetriát kihasználva csak egy adott keresztmetszetet modellezünk, azaz a modellt kétdimenziósra redukáljuk. Ehhez hasonlóan járhatunk el forgásszimmetrikus elrendezés (pl. egy vezető gyűrű) esetén is. Sodrott, illetve fonott vezetők esetében ezek a szimmetriák szigorúan véve nem állnak fenn. Mégis, ha a szálak áthelyeződése a hossz mentén haladva viszonylag lassú (pl. a sodrott vezeték menetemelkedése jóval nagyobb, mint az átmérője), akkor gyakorlati megközelítésben beszélhetünk „állandó” keresztmetszetről, illetve az ebből következő kvázi-kétdimenziós modellekről. A közelítés elvileg kiterjeszthető bármilyen vezetékkonstrukcióra, amely kvázi-eltolási vagy kvázi-forgásszimmetriával rendelkezik: például kábelkötegekre, és tekercsekre.



2.1. ábra. Egyenes elrendezés, amely kvázi-eltolási szimmetriával rendelkezik

Ennek szemléltetésére tekintsük először a 2.1. ábrát, amelyen egy egyenes litze-huzal látható a két végére csatlakozó generátorral. A továbbiakban – az általánosságot nem csorbítva – a generátor áramát adottnak tekintjük, azaz *áramkényszerrel* dolgozunk. A bevezetőben is említettük, hogy a huzal egymástól elszigetelt szálakból áll, amelyek a huzal végein fémesen érintkeznek egymással. Így az elrendezésre a következő feltételek teljesülnek:

- a) A huzal hosszirányú periódusa (sodrott huzalnál a menetemelkedés) sokkal nagyobb,



2.2. ábra. Tekercselt elrendezés, amely kvázi-forgásszimmetriával rendelkezik

mint a huzalátmérő.

- b) A huzal hossza az előbb említett periódus sokszorososa.
- c) A generátor hozzávezetései úgy helyezkednek el, hogy a mágneses térük hatása a huzal árameloszlására elhanyagolható.

Ekkor azzal a hipotézissel élünk, hogy a huzal vesztesége jó közelítéssel kiszámítható egyetlen *reprezentatív* keresztmetszeti árameloszlás ismeretében. E keresztmetszetet a végektől kellő távolságban vesszük fel, ahol a hozzávezetés nem okoz torzulást az áramképben. Az árameloszlás az Ω tartományon felírt kétdimenziós peremérték-feladatból határozható meg.

Hasonló a helyzet a 2.2. ábrán látható, litze-huzalból készült tekercssel, azonban itt a forgásszimmetrikus közelítés érdekében az előbbieken túl még két feltételt kell szabnunk:

- d) Az egyes menetek hossza jóval nagyobb, mint a huzal periódushossza.
- e) A tekercs menetemelkedése jóval kisebb, mint a tekercs jellemző lineáris mérete (pl. spiráltekercsnél a belső, illetve a külső átmérő; szolenoidnál az átmérő, illetve a hossz).

A fenti feltételek mellett az Ω szeletben felírható olyan peremérték-feladat, amelynek megoldásával a tekercsvesztesség jól közelíthető.

Mint a bevezetőben is említettem, a kábel hossza mentén lezajló háromdimenziós jelenségek (pl. sodrás, és fonás, áramköri kényszerek) figyelembevétele a háromdimenziós kényszerekkel tehető meg. Tehát olyan kétdimenziós peremérték-feladatokat kell felírunk, amelyek konzisztens módon veszik figyelembe mind a sodrás-fonás, mind az áramköri környezet által diktált kényszereket, továbbá alkalmasak a huzalvesztesség számítására.

2.2. Az $A - V, A$ módszer röviden

Az alábbi levezetések alapjai a [10] és [11] számú irodalomban részletesen is megtalálhatóak. A huzalkonstrukciók elektromágneses terének meghatározására – ismert gyakorlati megfontolásokból – a Maxwell-egyenletek magneto-kvázi-stacionárius (MQS) közelítését használjuk, amelyben elhanyagoljuk az eltolási áramok hatását. Az egyenleteket a frekvenciatartományban fogalmazzuk meg, amit egyfelől indokol a szinuszos gerjesztés, másfelől lehetővé

tesz a közegek lineáris karakterisztikája (lásd alább):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

ahol $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ és $\mathbf{J}$ az elektromos térerősség, a mágneses indukció, a mágneses térerősség, és az áramsűrűség vektorának komplex amplitúdója, ω a körfrekvencia és j a képzetes egység. A konstitúciós egyenletek:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.5)$$

ahol μ és σ a közeg permeabilitása és fajlagos vezetőképessége. Célszerű bevezetni az $\mathbf{A}$ mágneses vektorpotenciált és a V elektromos skalárpotenciált implicit módon, az alábbiak szerint:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla V. \quad (2.6)$$

Ezzel ugyanis a (2.2)-(2.3) egyenletek automatikusan teljesülnek. A (2.1) gerjesztési törvény (2.5) figyelembevételével a

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} + j\omega \sigma \mathbf{A} = -\sigma \nabla V \quad (2.7)$$

alakot ölti, amelyben $\nu = 1/\mu$ az ún. reluktivitás. Szabadon megválasztható $\mathbf{A}$ divergenciája, amelyet ezen a szakterületen az ún. Coulomb-mértékkel szokás megkötni:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (2.8)$$

Ezt legegyszerűbben a következő módon vehetjük figyelembe. A gyakorlatból kiindulva feltételezzük, hogy mind a vezetők, mind a szigetelők homogén anyagú résztartományokat alkotnak, továbbá ezek belsejében tértöltés nincs (a tartományok határain ugyanakkor előfordulhat). A $\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = 0$ Gauss-törvényből (ϵ a permittivitás), illetve a töltésmegmaradás $\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = 0$ egyenletéből, $\mathbf{E}$ (2.6)-beli kifejezésével adódik, hogy

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = -j\omega \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \cdot \nabla V, \quad (2.9)$$

amely (2.8) figyelembevételével a

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.10)$$

Laplace-egyenletre egyszerűsödik. Szigetelő közegben (2.7) a

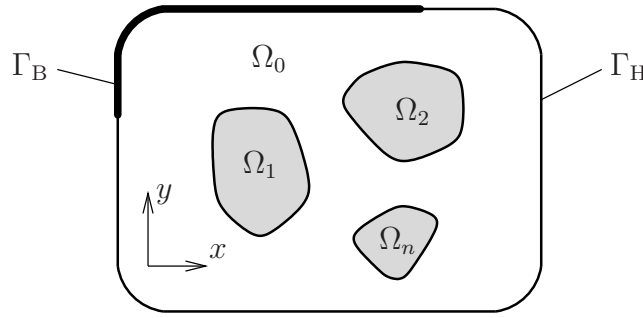
$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

alakra redukálódik, ezért – amennyiben ott nem érdekes az elektromos tér ismerete – elegendő a vektorpotenciál használata, és a (2.10) egyenletre sincs szükség.¹

A (2.7), (2.10), illetve (2.11) parciális differenciálegyenletek kiegészítendőek a közeghatárokra érvényes, ismert folytonossági feltételekkel:

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}] = 0, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

¹A $\mathbf{A} = -\nabla V$, $\mathbf{A}$ módszer címben szereplő elnevezése éppen onnan ered, hogy a vezetőben vektor- és skalár-, míg a szigetelőben csak vektorpotenciált használunk.



2.3. ábra. Síkprobléma modelltartományának vázlata

ahol $\mathbf{n}$ a felületi normális, $[\cdot]$ pedig a bezárt mennyiség közeghatáron elszenvedett ugrását jelöli. Továbbá speciálisan a vezető-szigetelő határán

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.13)$$

teljesül. Zárt modelltartomány esetén a fentiekhez járulnak még a szükséges peremfeltételek. A határ- és peremfeltételek speciális eseteit, valamint a potenciálokkal történő megfogalmazásukat azonban már a kétdimenziós peremérték-feladatoknál fogjuk tárgyalni.

2.3. Ideális síkprobléma

2.3.1. Modelltartomány

Egyelőre tekintsünk el a vezetősálak sodrásától-fonásától, és tegyük fel, hogy az elrendezés a szó szigorú értelmében z irányú eltolási szimmetriával rendelkezik. Hosszát jelölje l . A transzverzális x - y síkban felvett kétdimenziós modelltartomány Ω , amelynek pereme Γ (2.3. ábra). A modelltartomány felbontható a diszjunkt Ω_i , $i = 1 \dots n$ vezető és az azokat körülölelő Ω_0 nem vezető (pl. levegő) tartományra. A Γ_B peremszakaszon $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$, míg a Γ_H peremszakaszon $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ értéke adott.

2.3.2. Peremérték-feladat

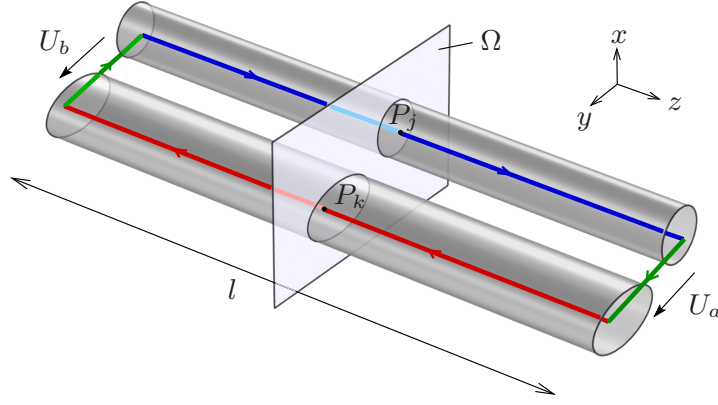
Feltesszük, hogy a vezetőkben tisztán z irányú áram folyik.² A szemlélet alapján a mágneses indukció vektora – a végektől eltekintve – tisztán transzverzális. A vektorpotenciál (2.6) szerinti kifejezése és a (2.8) Coulomb-mérték alapján belátható, hogy ekkor $\mathbf{A}$ is tisztán z irányú, és – akárcsak $\mathbf{J}$, ill. $\mathbf{B}$ – független a hosszkoordinátától, más szóval z -invariáns; képlettel kifejezve:

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}_z J_z(x, y) \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{e}_x B_x(x, y) + \mathbf{e}_y B_y(x, y) \rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{e}_z A_z(x, y). \quad (2.14)$$

Ezzel szemben a V skalárpotenciál, amelyet csak a vezetőkben értelmezünk, nem z -invariáns, ami könnyen belátható $\mathbf{J}$ imént említett tulajdonsága, a (2.5) differenciális Ohm-törvény, valamint $\mathbf{E}$ (2.6)-beli kifejezése egybevetésével. Ezekből viszont az is következik, hogy V gradiense z -irányú és vezető tartományonként állandó:

$$\nabla V = \mathbf{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{\Omega_i} = e_i = \text{konst.} \quad i = 1 \dots n. \quad (2.15)$$

²Ez nem szükségszerű: létezik olyan síkprobléma, amelyben transzverzális áramok folynak. Ezért ezt modellfeltevésnek tekintjük.



2.4. ábra. Irányított hurok az indukciótörvény felírásához

Behelyettesítve ezeket a (2.7), illetve (2.11) egyenletekbe és kiegészítve a peremfeltételekkel a következő kétdimenziós, skalár peremérték-feladatra jutunk:

$$\Omega_0: \quad \nabla_{\top} \cdot \nu \nabla_{\top} A_z = 0 \quad (2.16)$$

$$\Omega_i \ (i = 1 \dots n): \quad \nabla_{\top} \cdot \nu \nabla_{\top} A_z + j\omega\sigma A_z = -\sigma e_i \quad (2.17)$$

$$\Gamma_B: \quad A_z = A_0 \quad (2.18)$$

$$\Gamma_H: \quad \mathbf{n} \cdot \nu \nabla_{\top} A_z = H_0 \quad (2.19)$$

ahol $\nabla_{\top} = (\partial_x, \partial_y)$ a „transzverzális nabla” operátor. Az $A_z(x, y)$ megoldásból a fizikai mezők kifejezhetők:

$$\Omega: \quad \mathbf{B} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{e}_y \quad (2.20)$$

$$\Omega_i \ (i = 1 \dots n): \quad \mathbf{E} = -j\omega A_z - \mathbf{e}_i \quad (2.21)$$

2.3.3. Folytonosság

A térkomponensek (2.12) folytonossága az alábbi feltételeknek feleltethető meg:

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}] = 0 \quad \Leftarrow \quad [A_z] = 0 \quad (2.22)$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = \mathbf{0} \quad \Leftarrow \quad [\mathbf{n} \cdot \nu \nabla_{\top} A_z] = 0 \quad (2.23)$$

A két jobb oldali feltétel (egzakt vagy aszimptotikus) teljesülését rendszerint automatikusan biztosítja az alkalmazott numerikus módszer (pl. végeselem). Az elektromos tér tangenciális komponensének folytonosságát a vezető-szigetelő határfelületen értelemszerűen nem vizsgáljuk, két vezető határán azonban igen: ha az Ω_i és Ω_j vezetők érintkeznek (például ha a vezetősálakon ferromágneses bevonat van), akkor a közös Γ_{ij} határra vonatkozó feltétel (2.6) és (2.15) alapján

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \mathbf{0} \quad \Leftarrow \quad [A_z] = 0 \quad \text{és} \quad e_i = e_j. \quad (2.24)$$

Végül a (2.13) feltétel teljesülése (2.14) következtében triviális.

2.3.4. Hálózati kényszerek

A (2.16)-(2.19) peremérték-feladat megoldása nem egyértelmű, ugyanis tartalmaz n számú ismeretlen, térerősség-dimenziójú e_i paramétert, amelyek csak a teljes háromdimenziós „hálózati” környezet ismeretében adhatók meg. Másfelől az e_i paraméterekre, mint gerjesztésre nézve kiszámítható n bázismegoldás [12], amelyek lineárkombinációjaként utóbb elvileg bármely az adott keresztmetszeten létező térelosztás előállítható.³

A paraméterek meghatározására tekintsük az Ω_j és Ω_k vezető tartományokat, és azokon belül vegyünk fel két tetszőleges $P_j(x_j, y_j)$, illetve $P_k(x_k, y_k)$ pontot. Képezzünk egy téglalap alakú hurkot a pontokon átmenő z irányú, az elrendezés teljes l hosszára kiterjedő egyenes szakaszokból, amelyeket a megfelelő végeiken összekötünk (2.4. ábra). Írjuk fel erre a hurokra a Faraday-féle indukciótörvényt:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.25)$$

amelyben Ψ a hurok mágneses fluxusa. Az integrálokat szakaszonként képezve és a térerősség (2.21) kifejezését felhasználva az alábbi egyenlet írható fel:

$$l[-j\omega A_z(x_j, y_j) - e_j] + U_a - l[-j\omega A_z(x_k, y_k) - e_k] - U_b = -j\omega[A_z(x_j, y_j)l - A_z(x_k, y_k)l] \quad (2.26)$$

ha U_a és U_b az elrendezés két végén a vezetők közé kapcsolt feszültséget jelöli; mivel a litze-huzalok két végén a szálak fémesen érintkeznek, ezért ezeket 0-nak tekintjük. A vektorpotenciál integrálja az egyenlet két oldalán éppen kompenzálja egymást, amiből a következő eredményt kapjuk:

$$e_j l = e_k l. \quad (2.27)$$

Az l hosszal szándékosan nem egyszerűsítünk (ld. később), mivel a sodrott szálak hossza eltérhet egymástól. A feszültség dimenziójú $e l$ mennyiség neve a szakirodalomban „feszültségesés” (*voltage drop*).⁴ Az n vezetőre összesen $n - 1$ független egyenlet írható fel ilyen módon, de célszerűbb az n egyenletből álló

$$e_i l = U \quad i = 1 \dots n \quad (2.28)$$

alak. Mivel újabb ismeretlent (U) vezettünk be, ezért szükség van még egy egyenletre. Ez az áramkényszer. Az áramsűrűség kifejezése a k -ik vezetőben

$$\Omega_k: \quad J_z = \sigma_k(-j\omega A_z - e_k), \quad (2.29)$$

amiből felírható ezen vezető áramának komplex amplitúdója

$$I_k = \int_{\Omega_k} J_z d\Omega. \quad (2.30)$$

A huzal vezetőszálaiban az áramok összegének értelemszerűen meg kell egyeznie a gerjesztőárammal:

$$I = \sum_{k=1}^n I_k. \quad (2.31)$$

³Ezen bázismegoldások ugyancsak felhasználhatók egyfajta impedanciamátrix számítására.

⁴Amely jól láthatóan nem azonos a térerősségnek a vezeték mentén vett vonalintegráljával (elektromotoros erő). Kapocsfeszültségként is legfeljebb „koncentrált paraméterű” kontextusban értelmezhető, amikor is a csatlakozó hálózat külső induktivitását elhanyagoljuk. Egy másik, ugyancsak elterjedt neve „beiktatott feszültség”, amelyet indokol, hogy e_i a (2.21) kifejezésben kézenfekvő módon értelmezhető beiktatott térerősséggé.

2.3.5. Veszteség, ellenállás

A vezetőkben disszipált összteljesítmény

$$P = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n l \int_{\Omega_k} \frac{|J_z|^2}{\sigma_k} d\Omega, \quad (2.32)$$

és az ebből kiszámítható ún. nagyfrekvenciás ellenállás

$$R = \frac{2P}{|I|^2}. \quad (2.33)$$

2.3.6. Összefoglalás

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\left. \begin{array}{ll} \nabla_{\mathbf{T}} \cdot \nu \nabla_{\mathbf{T}} A_z = 0 & \Omega_0\text{-ra} \\ \nabla_{\mathbf{T}} \cdot \nu \nabla_{\mathbf{T}} A_z + j\omega\sigma A_z + \sigma e_i = 0 & \Omega_i\text{-re } (i \neq 0) \\ A_z = A_0 & \Gamma_B\text{-re} \\ \mathbf{n} \cdot \nu \nabla_{\mathbf{T}} A_z = H_0 & \Gamma_H\text{-ra} \end{array} \right\} \text{peremérték-feladat} \quad (2.34)$$

$$\left. \begin{array}{ll} e_i l - U = 0 & i = 1 \dots n \\ \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \sigma_k (-j\omega A_z - e_k) d\Omega = I & \end{array} \right\} \text{hálózati kényszerek} \quad (2.35)$$

Ebből I , A_0 és H_0 (utóbbi kettő gyakran 0) ismeretében meghatározható $A_z(x, y)$, e_i ($i = 1 \dots n$) valamint U . Mindebből pedig a huzal ellenállása:

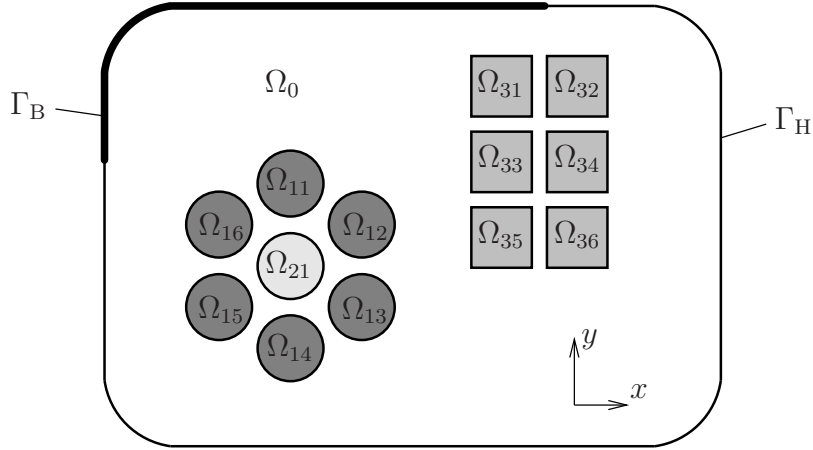
$$R = \frac{l}{|I|^2} \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \sigma | -j\omega A_z - e_k |^2 d\Omega. \quad (2.36)$$

2.4. Sodrás-fonás figyelembevétele a kétdimenziós modellben

A litze-huzalban a szigetelt vezetősálak sodrásának vagy fonásának célja, hogy azok a huzalvégekre nézve elektromágneses szempontból *ekvivalensek* legyenek, biztosítva ezzel az áram egyenletes megoszlását a sálak között.⁵ Így nemcsak a huzalkeresztmetszet kihasználtsága optimális, de a veszteség is minimális. A kétdimenziós modellben ezt az ekvivalenciát kell megfelelő módon figyelembe venni.

Tekintsük a 2.5. ábrán bemutatott sematikus kétdimenziós modelltartományt, amelyen az ekvivalensnek tekintett sálak (*strand*) tartományait csoportokba (*group*) soroljuk, és ket-tős indexszel látjuk el: Ω_{gs} a g -ik csoport ($g = 1 \dots m$) s -ik sálja ($s = 1 \dots n_g$). Így egy csoport n_g sálból áll. Az ábra bal oldalán például egy hét sálból álló sodrott huzalt látunk, amelyben a hat periferikus sál ekvivalensnek tekinthető, azonban a középső nem, mivel az a sodrással is egy helyben marad. A jobb oldalon egy hat, négyszög keresztmetszetű sálból fonott huzal látható, amelyben minden sál ekvivalens.

⁵Szokás úgy fogalmazni, hogy a sálak a végpontokra nézve „azonos impedanciájúak”, ehhez azonban a szóban forgó impedanciát pontosan kell definiálni.



2.5. ábra. Kétdimenziós modelltartomány sodrott, ill. fonott huzalokhoz

Az ekvivalencia egyik nyilvánvaló feltétele, hogy egy csoporton belül minden szál azonos áramot vezet:

$$\int_{\Omega_{gs}} J_z d\Omega = I_g, \quad s = 1 \dots n_g \quad (2.37)$$

ahol I_g a „csoportáram”. A másik feltétel a feszültségesésre vonatkozik, kifejezve, hogy a szálak a huzal végein érintkeznek. Ehhez a fentiekhez hasonlóan a (2.25) indukciótörvényt használjuk fel, ám a megfogalmazása bizonyos közelítést igényel, amelyet az alábbiakban egy hét szálból álló, sodrott litze-huzal példáján mutatunk be (2.6. ábra).

Haladjon az indukciótörvény felírására használt zárt hurok (vö. 2.4. ábra) az egyik irányban egy periferikus szál középvezetékében (piros vonal), és térjen vissza a középső szál tengelyében (kék vonal), amint a hivatkozott ábra bal oldalán látható. Ezt az útvonalat kell leképezni egy olyan síkproblémára, amely eltolási szimmetriát, azaz lényegében párhuzamos vezetőszalakat feltételez. A középső szálnál ez nyilvánvalóan nem jelent gondot. A csavart szálnál kézenfekvő megoldás, hogy a hélixet z irányú egyenes szakaszokkal közelítjük, azaz szisztematikusan váltunk a periferikus vezetőszalak között.⁶ Három dimenzióban ez a 2.6. ábra jobb oldalán látható lépcsőzetes görbe alakjában képzelhető el, azonban fontos leszögezni, hogy a váltásoknak megfelelő szakaszok (fekete szaggatott vonalak) nem képezik az integrálási útvonal részét.

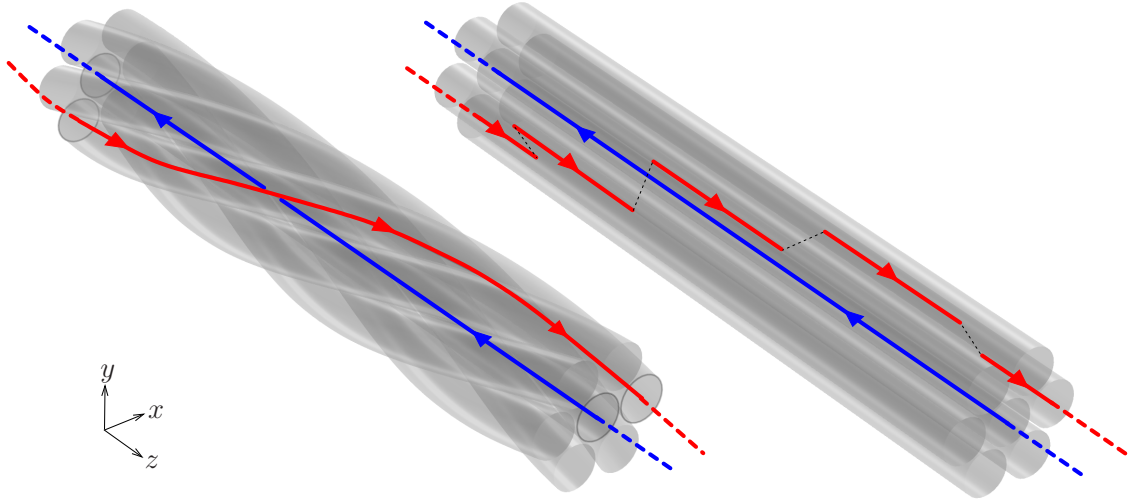
Általánosítva úgy fogalmazhatunk, hogy a síkproblémára leképezett integrálási útvonal statisztikailag azonos hosszúságban áthalad a csoporthoz tartozó összes vezető tartományon. A elektromos térerősség integrálja egy ilyen útvonalra

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \approx \sum_{s=1}^{n_g} \frac{\alpha_g l}{n_g} (-j\omega A_z - e_{gs}), \quad (2.38)$$

amelyben α_g az ún. hosszmodosító faktor (a sodrott vezetők hossza sodrás miatt általában nagyobb, mint a vezetékhozz), e_{gs} pedig a (2.15) állandó kétindexű megfelelője. Célszerű bevezetni a csoportra vonatkozó *átlagolt feszültségesést (group voltage drop)*:

$$U_g = \frac{\alpha_g l}{n_g} \sum_{s=1}^{n_g} e_{gs}, \quad g = 1 \dots m. \quad (2.39)$$

⁶Példánkban a hélix pályából ciklikus permutáció adódik, azonban belátható, hogy a végeredmény szempontjából a szálak bejárásai sorrendje tetszőleges. Ebből következik, hogy a szálak véletlenszerű permutációjára is hasonló modell használható [9].



2.6. ábra. Az indukciótörvényhez használt integrálási útvonal közelítése a kétdimenziós modellben

Amennyiben a csoportok a huzal végén érintkeznek, akkor ezek a feszültségesések a fentiekhez hasonlóan kiegyenlítődnék. A (2.34)-(2.35) egyenletrendszer a következőképpen módosítandó:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\top} \cdot \nu \nabla_{\top} A_z &= 0 & \Omega_0 \\ \nabla_{\top} \cdot \nu \nabla_{\top} A_z + j\omega\sigma A_z &= -\sigma e_{gs} & \forall \Omega_{gs} \\ A_z &= A_0 & \Gamma_B \\ \mathbf{n} \cdot \nu \nabla_{\top} A_z &= H_0 & \Gamma_H \end{aligned} \right\} \text{peremérték-feladat} \quad (2.40)$$

$$\left. \begin{aligned} U_g &= \frac{\alpha_g l}{n_g} \sum_{s=1}^{n_g} e_{gs} & \forall g \\ \int_{\Omega_{gs}} J_z d\Omega &= I_g & \forall s, g \end{aligned} \right\} \text{sodrás (ekvivalencia)} \quad (2.41)$$

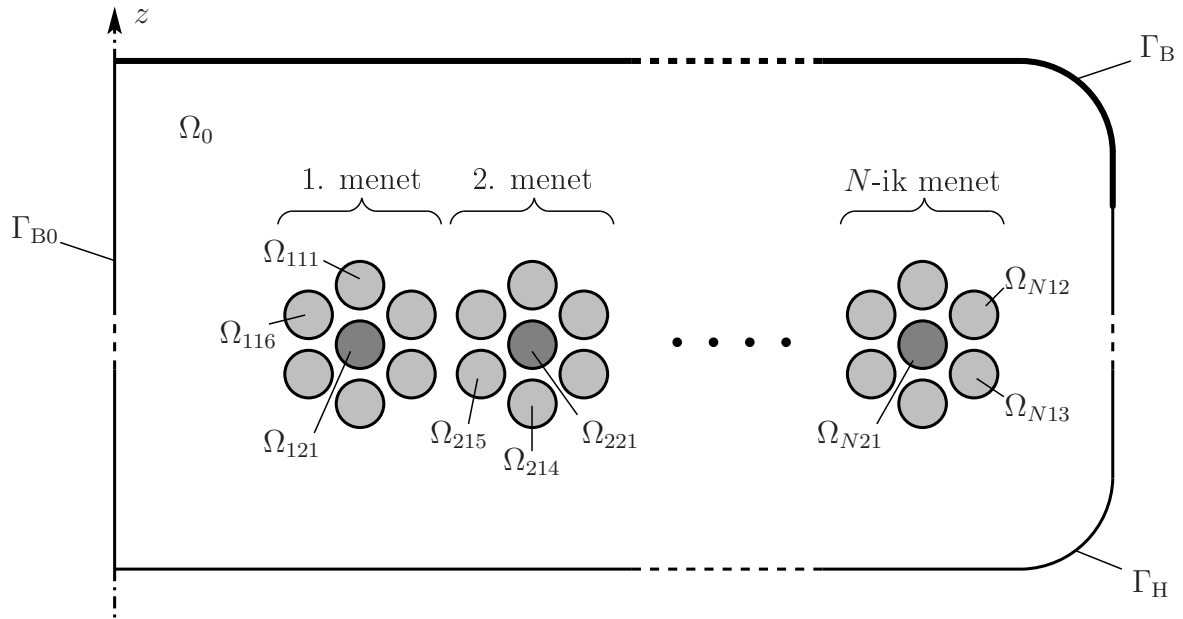
$$\left. \begin{aligned} U_g &= U & \forall g \\ \sum_{g=1}^m n_g I_g &= I \end{aligned} \right\} \text{hálózati kényszerek} \quad (2.42)$$

Ennek megoldásával kiszámíthatjuk $A_z(x, y)$, e_{gs} , U_g , I_g , valamint U mennyiségeket. A huzal ellenállása:

$$R = \frac{1}{|I|^2} l \sum_{g=1}^m \alpha_g \sum_{s=1}^{n_g} \int_{\Omega_{gs}} \sigma | -j\omega A_z - e_{gs} |^2 d\Omega. \quad (2.43)$$

2.5. Forgásszimmetrikus jellegű elrendezés

A forgásszimmetrikus esetet a síkproblémához hasonló lépésekben, de tömörebben tárgyaljuk.



2.7. ábra. Forgásszimmetrikus probléma modelltartományának vázlata

2.5.1. Modelltartomány

Olyan r - φ - z hengerkoordináta-rendszert illesztünk az elrendezéshez, amelyben annak geometriája megközelítőleg φ -invariáns. A modelltartományt a koordináta-rendszer egy $\varphi = \text{konst.}$ síkjában vesszük fel (vö. 2.2. ábra). További vizsgálatainkat tekercselrendezésekre korlátozzuk, amelyekben a huzal meneteket (*turn*) képez. A huzalon belül az azonos módon sodrott vagy fonott (úgymond ekvivalens) szálak csoportokat alkotnak. Az Ω modelltartományon (2.7. ábra) a vezetők Ω_{tgs} résztartományait hármassal látjuk el:

$$t = 1 \dots N \quad (\text{menet}) \quad (2.44)$$

$$g = 1 \dots m \quad (\text{csoport}) \quad (2.45)$$

$$s = 1 \dots n_g \quad (\text{szál}) \quad (2.46)$$

A szigetelő (levegő) tartományát továbbra is Ω_0 jelöli. A Γ_B peremszakaszon $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$, míg a Γ_H peremszakaszon $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ értéke adott; speciálisan a forgástengelynek megfelelő Γ_{B0} peremen $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$.

2.5.2. Peremérték-feladat

Közelítésünk értelmében a vezetőkben csak a vizsgált síkra merőleges, azaz φ irányú áram folyik, a mágneses indukció vektora pedig az r - z síkban fekszik. A vektorpotenciál (2.6) szerinti kifejezése és a (2.8) Coulomb-mérték alapján belátható, hogy ekkor $\mathbf{A}$ tisztán φ irányú, és a $\mathbf{J}$, $\mathbf{B}$ mezőkhöz hasonlóan nem függ φ -szögtől; képlettel kifejezve:

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}_\varphi J_\varphi(r, z) \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{e}_r B_r(r, z) + \mathbf{e}_z B_z(r, z) \rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi A_\varphi(r, z). \quad (2.47)$$

Ebből és a (2.5) közegegyenletből belátható, hogy a vezető tartományokon értelmezett V skalárpotenciál legfeljebb φ irányban változhat, továbbá⁷

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right|_{\Omega_{tgs}} = u_{tgs} = \text{konst.} \quad \forall t, g, s. \quad (2.48)$$

A skalár- és a vektorpotenciál kifejezését a (2.7) egyenletbe helyettesítve adódik az Ω_{tgs} vezető tartományokon érvényes kétdimenziós PDE:

$$\nabla_{\mathbf{T}} \cdot \frac{\mathbf{v}}{r} \nabla_{\mathbf{T}}(r A_{\varphi}) + j\omega \frac{\sigma}{r}(r A_{\varphi}) = -\frac{\sigma}{r} u_{tgs} \quad (2.49)$$

ahol $\nabla_{\mathbf{T}} = (\partial_r, \partial_z)$. Amint látható, az egyenletet célszerű az $r A_{\varphi}$ skalármezőre megfogalmazni. Az utóbbi ismeretében számíthatók a fizikai mezők:

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_{\varphi})}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_{\varphi})}{\partial r} \mathbf{e}_z \quad (\text{a teljes } \Omega\text{-ra}) \quad (2.50)$$

$$\mathbf{E} = -j\omega \frac{1}{r}(r A_{\varphi}) - \frac{1}{r} u_{tgs} \quad (\text{a vezetőkben}) \quad (2.51)$$

A peremfeltételeket ugyancsak az $r A_{\varphi}$ mezőre fogalmazzuk meg, habár az egyszerűség kedvéért a homogén esetre korlátozódunk (lásd alább az összefoglalásnál). A folytonossági feltételek teljesülése a síkproblémához hasonlóan (2.3.3) általában biztosított, így külön előírást nem igényel.

2.5.3. Ekvivalencia, hálózati kényszerek

Az egyszerűség kedvéért egyetlen tekercset modellezünk, tehát a kétdimenziós modellben megjelenő huzalkeresztmetszetek ugyanahhoz a tekercshez tartoznak.⁸ Ebből következik, hogy minden huzalkeresztmetszetben ugyanazok a szálcsoportok fordulnak elő, amelyek a csoportra jellemző I_g száláramokat vezetnek (ez a jelölésben is kifejeződik: a csoport-száláramot t szerint nem indexeljük). Ezt a feltételt minden menetben az összes szála meg kell fogalmazni:

$$\int_{\Omega_{tgs}} J_z d\Omega = I_g, \quad \forall t, g, s. \quad (2.52)$$

A gerjesztést jelentő áramkényszer kifejezése:

$$\sum_{g=1}^m n_g I_g = I. \quad (2.53)$$

Ha most két csoportból egy-egy szálat választva felírjuk az indukciótörvényt, akkor a (2.26) egyenlethez hasonlóan a vektorpotenciál vonalintegrálja kiesik, és csak az ul típusú feszültségesések maradnak benne. Képezzük az U_{tg} csoport-feszültségesést menetenként – a síkproblémához hasonlóan – átlagolással:

$$U_{tg} = \frac{2\pi\alpha_{tg}}{n_g} \sum_{s=1}^{n_g} u_{tgs}, \quad \forall t, g. \quad (2.54)$$

⁷Ez nem a gradiensre vonatkozik, mivel hengerkoordináta-rendszerben $\mathbf{e}_{\varphi} \cdot \nabla V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$. Ebből következik, hogy a (2.48) egyenletben kiszámított $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ mennyiség dimenzióban eltér a (2.15)-ben kiszámított mennyiségtől; feszültség dimenziójú, így u -val jelöljük.

⁸A módszer könnyűszerrel általánosítható több tekercsre, azonban a jelölést bonyolítaná.

Mivel a szálak a tekercs két végén érintkeznek, ezért a csoportok menetekre összegzett feszültségesésének ki kell egyenlődnie:

$$\sum_{t=1}^N U_{tg} = U, \quad \forall g \quad (2.55)$$

ahol U a tekercs feszültségesése, avagy – koncentrált paraméterű modellben – a kapocsfeszültsége.

2.5.4. Összefoglalás

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\top} \cdot \frac{\nu}{r} \nabla_{\top} (r A_{\varphi}) &= 0 & \Omega_0 \\ \nabla_{\top} \cdot \frac{\nu}{r} \nabla_{\top} (r A_{\varphi}) + j\omega \frac{\sigma}{r} (r A_{\varphi}) &= -\frac{\sigma}{r} u_{tgs} & \forall \Omega_{tgs} \\ r A_{\varphi} &= 0 & \Gamma_B, \Gamma_{B0} \\ \mathbf{n} \cdot \frac{\nu}{r} \nabla_{\top} (r A_{\varphi}) &= 0 & \Gamma_H \end{aligned} \right\} \text{peremérték-feladat} \quad (2.56)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{tg} &= \frac{2\pi\alpha_{tg}}{n_g} \sum_{s=1}^{n_g} u_{tgs} & \forall t, g \\ \int_{\Omega_{tgs}} J_z d\Omega &= I_g & \forall t, g, s \end{aligned} \right\} \text{sodrás (ekvivalencia)} \quad (2.57)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{t=1}^N U_{tg} &= U & \forall g \\ \sum_{g=1}^m n_g I_g &= I \end{aligned} \right\} \text{hálózati kényszerek} \quad (2.58)$$

Ennek megoldásával kiszámíthatjuk $r A_{\varphi}(r, z)$, u_{tgs} , U_{tg} , I_g , valamint U mennyiségeket. A huzal ellenállása:

$$R = \frac{2\pi}{|I|^2} \sum_{t=1}^N \sum_{g=1}^m \alpha_{tg} \sum_{s=1}^{n_g} \int_{\Omega_{tgs}} \frac{\sigma}{r} |-j\omega(r A_{\varphi}) - u_{tgs}|^2 d\Omega. \quad (2.59)$$

3. fejezet

Implementáció

Az implementáció során célunk, hogy bemutassuk, hogy a 2 fejezetben ismertetett peremértékfeladatot hogyan lehet általánosan végeselem szoftverekkel, illetve speciálisan a MATLAB PDE-Toolbox segítségével megoldani, illetve bemutatani egy keretrendszert, amellyel az összetett struktúrájú kábelek, és a belőlük készült tekercsek modellezhetőek.

3.1. A végeselem szoftver (PDE-Toolbox) beállításai

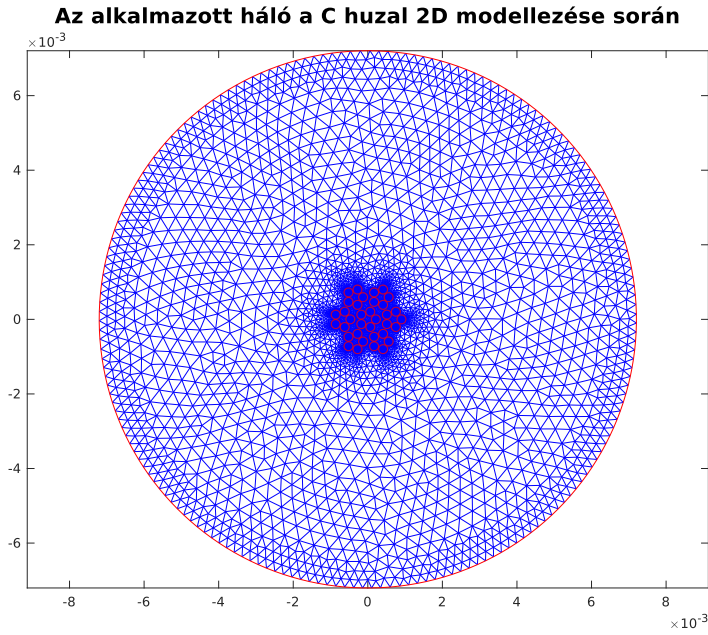
A modelltartományt lezáró távoli perem kör alakú, középpontját helyezzük a modellezett konstrukció középpontjába. Sugara legyen akkora, hogy a középponttól legtávolabb eső vezetőtől is kellő távolságban legyen (ld. alább), de a modell hálójának elemszáma még alacsony kellően alacsony legyen ahhoz, hogy a futási idő rövid maradjon. Ebből kiindulva a középponttól legtávolabbi vezetőtől a távoli perem az elemi vezetősál sugarának 7-szeresére legyen. A 3.1. ábrán a 4. szekcióban tárgyalt C típusú huzal modellezése során alkalmazott hálót mutatom be. A háló $n = 7705$ csomóponttal rendelkezik, amely legalább egy nagyságrenddel kisebb érték az azonos kábel háromdimenziós modelljének elemszámánál. Továbbá a háromdimenziós modellezés során a szomszédos a csomóponttal elemek száma is nagyobb, így jelentősen több erőforrás a háromdimenziós modellezés. Futási idő tekintetében néhány tíz másodperc jellemzi a kétdimenziós modellezési eljárást, ugyanez háromdimenziós esetben akár 10 óra is lehet.

A modelltartomány mérete csökkenthető bizonyos szimmetriafeltételek kihasználásával. Egyenes, nem tekercselt kábelek esetén általában csak az általánosság csorbításával lehetne ilyen szimmetriafeltételeket megadni. Sokszor előfordul, hogy a belső, és a külső kötegek szimmetriatengelye nem esik egybe, illetve az is, hogy a szimmetriafeltételek megfogalmazása a kábel konkrét konstrukciójától függ, ezért az egyenes huzalok teljes keresztmetszetét modellezzük, lásd a 2.1. ábrát, ha a kábelben egynél több kötegcsoportható található (formálisan $G > 1$), lásd a 4.1. táblázatot.

A kábelekből készült tekercsek keresztmetszeti modellezésénél azonban konstrukciótól függetlenül szimmetriatengelyként adódik a légrés középvonala menti egyenes ld. a 2.2. ábra.

A modellezési feladatot a 2.3.4 fejezetben ismertetett bázismegoldások módszerével oldjuk meg. Ekkor minden vezetőképes tartományhoz (elemi vezetősálhoz) létrehozunk egy-egy, összesen n bázismegoldást, a következő módszerrel: a (2.17) egyenletben szereplő e_i , a k -ik vezetősálhoz tartozó bázismegoldásban legyen:

$$\Omega_i \ (i = 1 \dots n; i \neq k) : e_i = 0, \tag{3.1}$$



3.1. ábra. A C kábel 2 dimenziós modellezése során alkalmazott háló

$$\Omega_k : e_k = 1. \quad (3.2)$$

A nem vezető Ω_0 tartományon érvényes parciális differenciálegyenlet a (2.16) egyenlet. Megjegyzendő, a nem vezető tartományba mind a huzalok közti levegő, mind huzalok szigetelőrétege beletartozik, mivel a vizsgált elektromágneses jelenségekre nézve azonos módon viselkednek. A differenciálegyenletek implementálásához a PDE-Toolbox elliptikus sablonját használtuk. A sablon alakja:

$$\text{div}(c (\text{grad}(u))) + au = f. \quad (3.3)$$

3.1. táblázat. A parciális differenciálegyenletek együtthatóinak beállítása az egyenes huzalokra

	c	a	f	u
Ω_0 nem vezető tartományra	ν	0	0	A_{zk}
Ω_i $i \neq k$ vezetőképes tartományokra	ν	$j\omega\sigma$	0	A_{zk}
Ω_k vezetőképes tartományokra	ν	$j\omega\sigma$	$-\sigma$	A_{zk}

A k -dik bázismegoldásra a sablon beállításai a 3.1. táblázatban adjuk meg. Itt A_{zk} a k -dik bázismegoldáshoz tartozó vektorpotenciál. Forgásszimmetrikus problémák megoldása során az elliptikus sablon beállításai egészen hasonlóak, ezeket a 3.2. táblázatban mutatjuk be.

A peremérték-feladatot a modelltartományon érvényes parciális differenciálegyenletek felírása, és a tartomány peremére előírt peremfeltételek együttesen határozzák meg. A peremfeltételek olyan peremen előírt egyenletek, amelyek figyelembe veszik a tartományon kívül eső hatásokat. A huzaltól kellő távolságra a kialakuló elektromágneses tér már olyan, mintha azt egy egyetlen vezetőszálból álló, vonalszerű vezető hozta volna létre. Ha a távoli

3.2. táblázat. A parciális differenciálegyenletek együtthatóinak beállítása több vezetőszálból álló szolenoidtekercsekre

	c	a	f	u
Ω_0 nem vezető tartományra	ν	0	0	$r A_{\varphi k}$
Ω_i $i \neq k$ vezetőképes tartományokra	$\frac{\nu}{r}$	$j\omega \frac{\sigma}{r}$	0	$r A_{\varphi k}$
Ω_k vezetőképes tartományokra	$\frac{\nu}{r}$	$j\omega \frac{\sigma}{r}$	$-\frac{\sigma}{r}$	$r A_{\varphi k}$

perem körvonala ebbe a tartományba esik, akkor a távoli peremet kellően távolinak tekintjük. Ezt homogén Γ_B peremfeltétellel tudjuk figyelembe venni, melynek értéke konstans, és 0 értékre választható.

Ezt PDE-Toolbox elliptikus sablonjában Dirichlet-peremmel képezhetjük le. A peremfeltételek felírása minden bázismegoldásra azonos módon történik. A következetesség kedvéért a k -dik bázismegoldásra felírt peremfeltételt mutatjuk be. A beállítások a 3.3. táblázatban láthatók. A PDE-Toolbox vonatkozó sablonja:

$$hu = r. \quad (3.4)$$

3.3. táblázat. A Dirichlet-peremfeltétel beállítása az elliptikus sablonban

	h	r	u
Γ_B perem a távoli lezárásra	1	0	A_{zk}

A távoli peremre felírt Dirichlet-peremfeltétel beállításait tekercselt elrendezésekre is a fentiekkel azonos módon kell végezni, azonban ekkor a differenciálegyenlet u -val jelölt változója $r A_{\varphi k}$ lesz. Forgásszimmetrikus elrendezések esetén tudjuk továbbá azt, hogy a szolenoidtekercs szimmetriatulajdonságai miatt mágneses indukció nem lépheti át a légrés középvonalát. A légrés középvonalán elhelyezkedő szimmetriatengelyen lévő peremre is Dirichlet-peremfeltételt kell megadnunk, szintén a 3.3. táblázatban megadott beállításokkal.

3.2. Utófeldolgozás

Az utófeldolgozás során a bázismegoldásokhoz tartozó n db vektorpotenciálból a (2.29) egyenletből meghatározható n db J_{zk} áramsűrűség, és ezen mennyiség adott vezetőképes tartomány felületére vett integráljából a (2.30) egyenletnek megfelelően, sodrástól, vagy tekercseléstől függően a (2.37) vagy a (2.52) egyenletből egy bázismegoldásból a szál, vagy csoport áramok. A megkapott mennyiségekre már érvényesíthetők az áramkényszerek, és a feszültségkényszerek. Ezekből k súlyozótényezők állnak elő, amelyek segítségével előállítható a teljes megoldás:

$$A_z = \sum_{i=1}^n k_i A_{zi}. \quad (3.5)$$

Fontos megjegyezni, hogy a feladat megoldható n db bázismegoldás előállítása nélkül is: elegendő az e_i tényezőket ismeretlennek tekinteni, és sodrástól, vagy tekercseléstől függően a (2.34)-(2.35), a (2.40)-(2.42), vagy a (2.56)-(2.58) egyenletrendszer az ismertett áram-

és feszültségkényszerekkel kiegészíteni. A bázismegoldások elvi jelentőségét az adja, hogy ezek a különbözőképpen sodrott (vagy egyenes), de azonos keresztmetszetű kábelekre meg-
egyeznek. Gyakorlati jelentőségük pedig egyrészt az, hogy közvetlenül előállíthatók a FEM
programmal, és így alkalmazásuk nem igényel hozzáférést a szoftver által előállított egyenlet-
rendszerhez [13]. A Matlab PDE-Toolboxban ez éppen lehetséges, de nem minden szoftver-
ben az. Másrészt szisztematikus előállításuk konstrukciótól függetlenül megtehető, ideértve
a tekercseket is, amennyiben a differenciálegyenletek helyfüggését megvalósító pointereket
külön hívjuk meg.

Az utófeldolgozás utolsó lépéseként a (2.36), a (2.43), vagy a (2.59) képletek segítségével
meghatározzuk a vezetékkonstrukció hosszegységre eső ellenállását.

4. fejezet

Teszteredmények

A bevezető szakaszban már említésre került, hogy a kétdimenziós modellezés célja a háromdimenziós számítások gyorsítása. Az előző fejezetben azt láthattuk, hogy ezt milyen kétdimenziós végeselem-módszeren alapuló modellel lehet megtenni. A most következő fejezetnek két célja van: egyrészt validálni szeretnénk a kétdimenziós modellezés eredményeit a háromdimenziós számításokkal, másrészt a modellezett kábelek eltérő viselkedésének magyarázatát keressük.

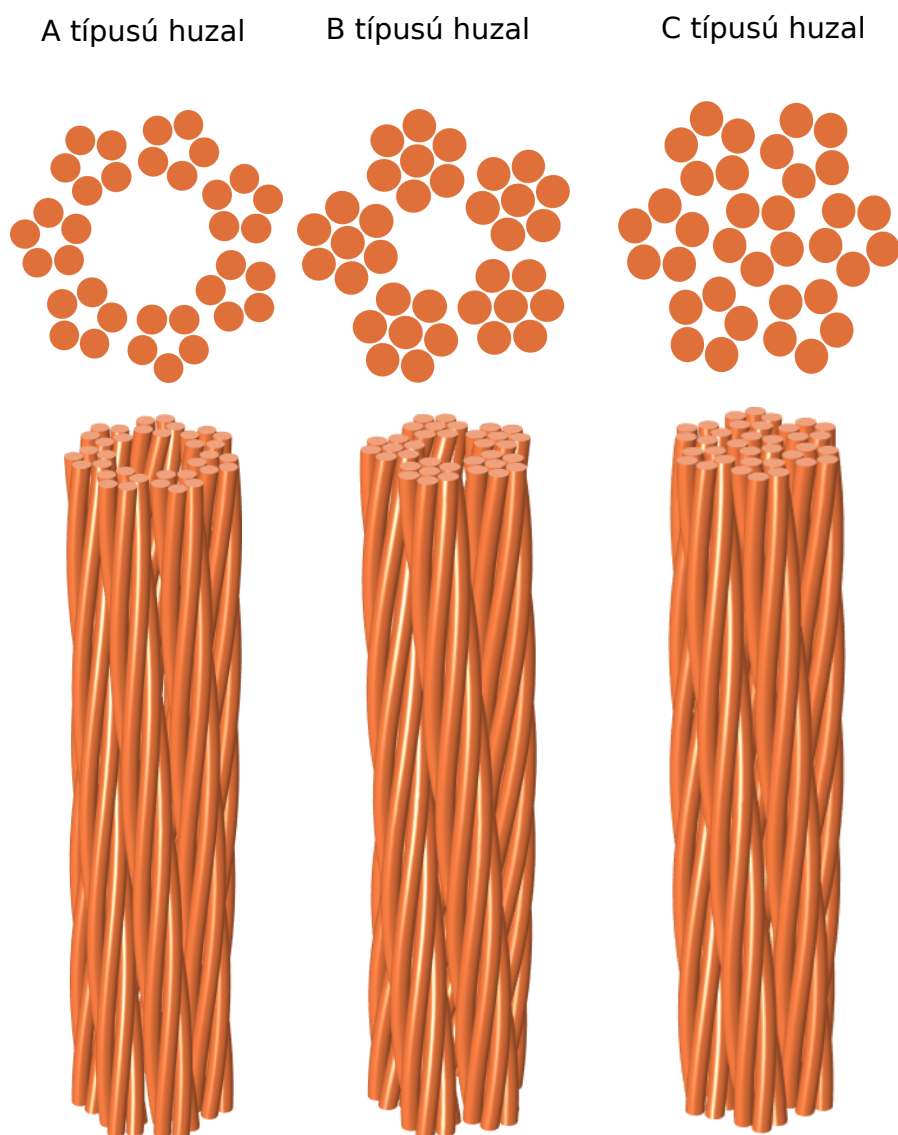
4.1. A vizsgált konstrukciók

Munkámban a 4.1. ábrán látható három huzalra végeztem el a tesztszámításokat, amelyek elnevezése A , B , illetve C típusú huzal. Ezek mindegyike 35 db elemi vezetőszálból áll, a szálmérő minden kábel esetén 0,24 mm, a szigetelőréteg vastagsága pedig minden konstrukción $7\ \mu\text{m}$. A huzalokban az elemi szálak kötegekbe szervezettek, majd a kötegek szervezett struktúrája alakítja ki a huzal keresztmetszetét. Struktúrájukban ugyan eltérnek a kábelek, de mindegyik modellezett kábel $n = 35$ db elemi vezetőszálból áll, így rézkeresztmetszetük azonos. A modellezett vezetők kiválasztásánál szempont volt, hogy azonos rézkeresztmetszetűek legyenek. Továbbá bemutatni kívánt jelenségeket – amelyekből a tekercsek vesztesége azok üzemi frekvenciáján származik – a nem tekercselt kábeleken könnyebben be lehet mutatni. Tekercselés céljára is az a huzalkonstrukció lesz a legjobb, amely egyenes kábelként a legjobban viselkedik.

A 2.4 fejezetben bemutatott jelölési metódust kiterjesztjük a köteg szintű struktúrákról a kábel szintű struktúrákra. Jelölje s az elemi szálak számát, g pedig a kötegben lévő csoportok számát. A magasabb rendű, kábel szintű struktúrában legyen S az elemi kötegek száma, és G a kábelben lévő csoportok száma. Formálisan a 4.1. táblázat írja le a kábelek struktúráját.

4.1. táblázat. A huzalok keresztmetszeti struktúrájának áttekintése

Kábelfajta	g	s	G	S
A	1	5	1	7
B	2	1 + 6	1	5
C	1	5	2	1 + 6



4.1. ábra. A huzalok keresztmetszeti struktúrájának áttekintése [13]

4.2. A hosszegységre eső ellenállás a frekvencia függvényében

A kábelek hosszegységre eső ellenállásának növekedését a frekvencia növelésével a 4.2. ábrán láthatjuk. A vizsgált frekvenciatartomány 50 Hz – 300 kHz. Megállapítható, hogy a két-dimenziós modell nagyon pontosan visszaadja a háromdimenziós modellezés eredményét. Szembetűnő, hogy habár azonos rézkeresztmetszet jellemzi a vizsgált konstrukciókat, mégis egészen más az frekvencia-ellenállás karakterisztikájuk. Vizsgáljuk meg, mi okozza az eltérést! Az ábrákon látszik, hogy alacsony frekvencián a modellezett kábelek mindegyikének hosszegységre eső ellenállása megegyezik azok egyenáramon mérhető ellenállásával:

$$r = \frac{1}{\sigma A_{sum}} \alpha = 10,6629 \frac{\text{m}\Omega}{\text{m}}, \quad (4.1)$$

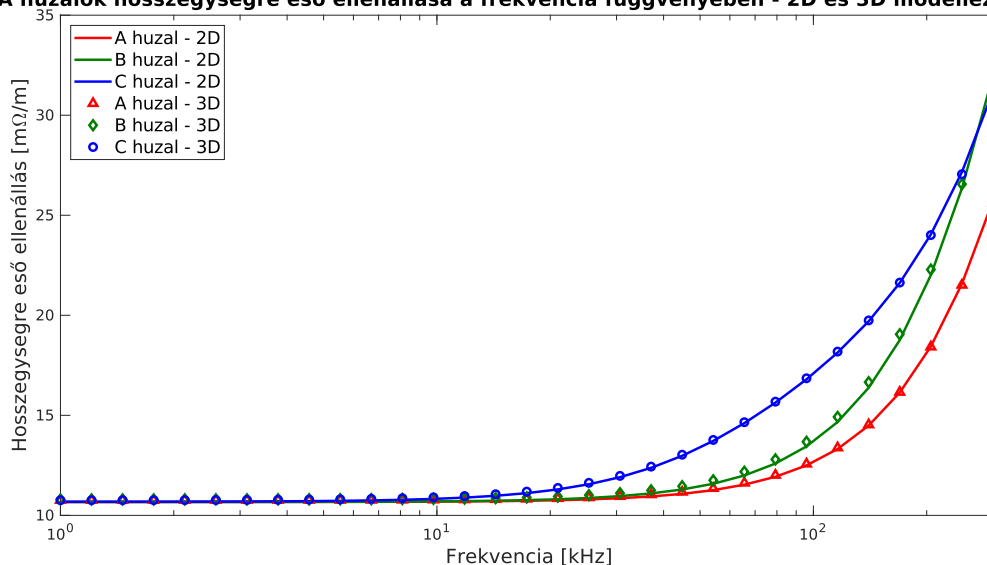
ahol α a teljes kábel sodrásából származó rézvezeték-hossznövekedést leíró faktor. Tehát a karakterisztika eltérését okozó jelenség magasabb frekvencián jelentkezik. Az áramkiszorí-

tásból származó behatolási mélység értéke még a legmagasabb, 300 kHz frekvencián is,

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi f \sigma \mu}} = 0,1187 \text{ mm}, \quad (4.2)$$

azaz az elemi vezetősálak sugaránál alig kisebb. A behatolási mélység, és az elemi vezetősál sugarának ilyen viszonya esetén a felületen a J árameloszlás jó közelítéssel egyenletes. Így hatása igazán nem jelentős, még a legmagasabb vizsgált frekvencián sem, ráadásul a vezeték-konstrukciók közötti különbséget nem is indokolná. Felmerülhet még a közelségi hatás jelensége is, azonban ekkora eltérést a karakterisztikákban az sem okozna, mert a szomszédos sálak távolsága között nincs számottevő eltérés az egyes konstrukciókban.

A huzalok hosszegységre eső ellenállása a frekvencia függvényében - 2D és 3D modellezésben



4.2. ábra. A huzalok hosszegységre eső ellenállása a frekvencia függvényében

Vizsgáljuk meg az elemi száláramokat is!

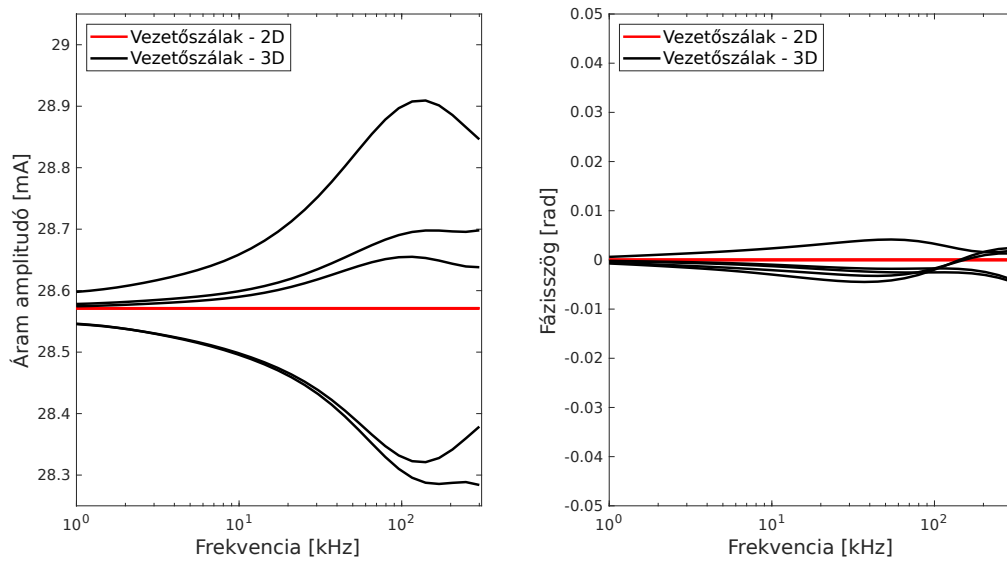
4.3. Elemi száláramok a frekvencia függvényében

A 4.3 ábrán az A típusú kábel száláramai láthatóak. Látható, hogy az elemi vezetősálak áramai megegyeznek. Az alkalmazott áramkényszer determinálja a teljes huzal összes áramát, a sodrás miatt pedig az összes huzal elektromágneses szempontból ekvivalens (ld. 2.4), tehát a sálak azonos áramot vezetnek. A kétdimenziós és háromdimenziós modell értékei között apróbb eltérés mutatkozik. Ez származhat a háromdimenziós modell finom aszimmetriájából, rosszabb felbontásából. A kétdimenziós kábelben mért áramok mérésekor a „tankönyvi” mennyiségeket láthatjuk.

A 4.4. ábrán a B típusú kábel egy kötegének centrális, és egyik periferiális vezetősálának áramának amplitudóját és fázisszögét láthatjuk a frekvencia függvényében.

A centrális vezetősál árama alacsony frekvenciákon picit nagyobb, mint a többi vezetősálé, holott a kábelek egyenáramú ellenállása a fentebb alkalmazott a (4.1) egyenlet szerint megegyezik. Ennek oka az, hogy a centrális vezetősál a kötegek sodrásában nem vesz részt,

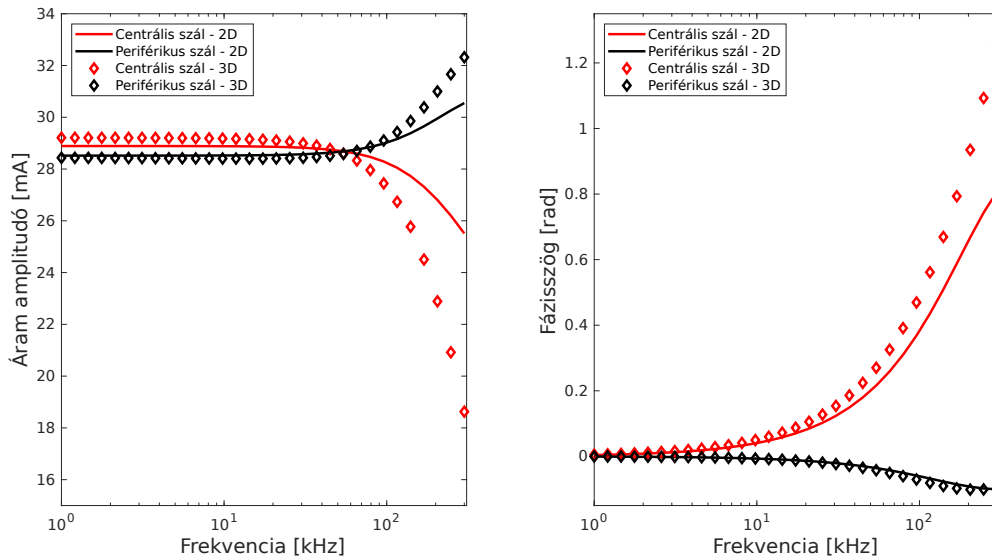
Az A típusú huzal egy kötegében található vezetősálak áram amplitúdói- és fázisai a frekvencia függvényében - 2D és 3D modellezésben



4.3. ábra. Az A kábel szálarámainak amplitúdója és fázisszöge a frekvencia függvényében

így a kötegek sodrásából fakadó minimális hosszúságnövekedés azt a vezetősálat nem érinti. A korábban (2.4 fejezetben) bemutatott csoportra értelmezett hosszúságnövelést kompenzáló faktor a kétdimenziós modellben ezt a jelenséget képezi le.

A B típusú huzal egy kötegében található centrális, és egy periférikus vezetősál áram amplitúdója és fázisa - 2D és 3D modellezésben

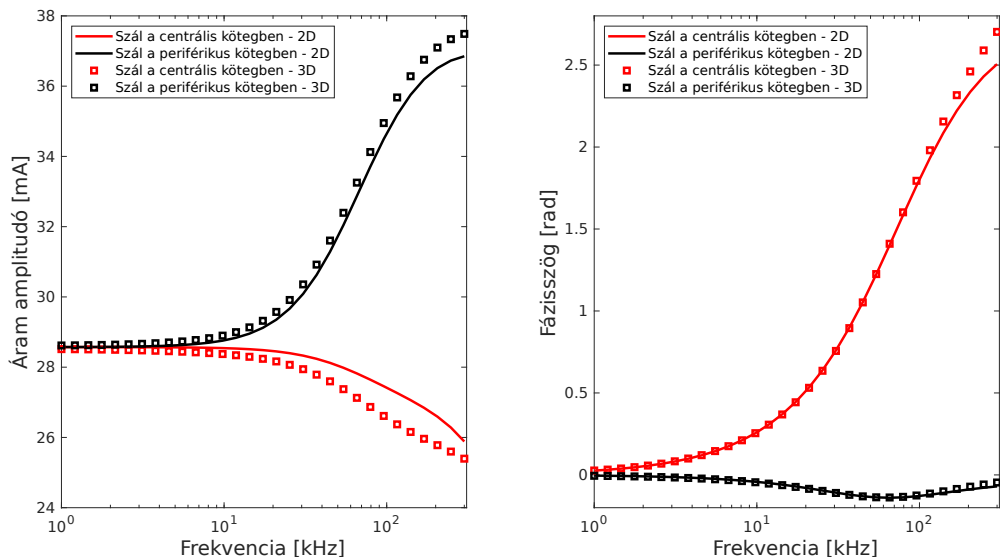


4.4. ábra. A B kábel egy vezetőkötegében található centrális, és perifériális vezetősál áramának amplitúdója a frekvencia függvényében

Megfigyelhető, hogy míg a centrális vezetősál áramának amplitúdója nem csökken jelentősen, ám fázisszöge meredeken emelkedni kezd. A kábel összes árama most is előírt, így a perifériális vezetősálak áramának amplitúdója csökken jelentősen, és fázisuk csak kis mértékben növekszik meg. Az eltérés itt némileg nagyobb a kétdimenziós és a háromdimen-

ziós modell között. Ennek magyarázata hasonló az A kábeléhez. Figyelembe véve, hogy az áramsűrűség megjelenítésekor nagyon kis eltérést tapasztalunk még a nagyobb frekvenciákon is, ahol az eltérés magasabb, feltételezhető, hogy a háromdimenziós modell túl ritka hálófelbontása vezet eltéréshez.

A C típusú huzal egy centrális- és egy perifériális kötegében egy-egy vezetősál áram amplitúdója és fázisa - 2D és 3D modellezésben



4.5. ábra. A C kábel egy centrális, és egy perifériális vezetőkötegében található vezetősál áramának amplitúdója a frekvencia függvényében

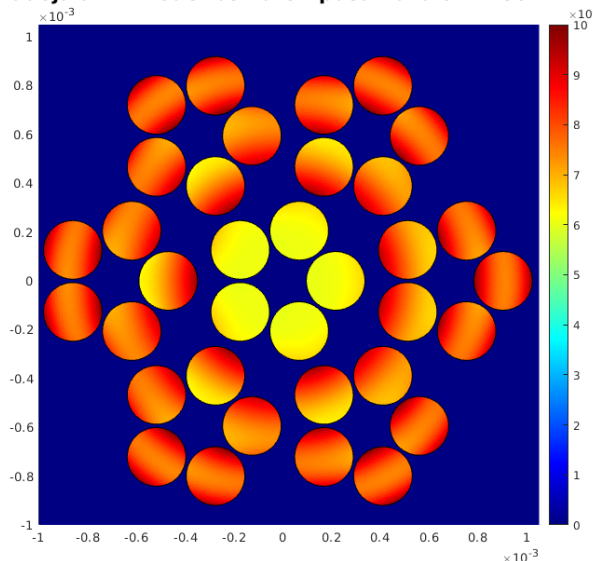
A 4.5. ábrán a C típusú kábel centrális kötegének, illetve egyik perifériális kötegének egy-egy vezetősáljának áramát látjuk. A kábel bizonyos értelemben a B kábel duálisának tekinthető, lásd a 4.1. táblázatot. A centrális vezetőkötegben található szál árama hasonló viselkedést mutat a B kábelben található kötegben belüli centrális szál áramához, csak markánssabban: még meredekebben változik a centrális vezetőkötegben található szál árama, fázisa pedig magasabb frekvenciákon gyakorlatilag ellentétessé válik.

Ezekre a jelenségekre az ún. kötegek közötti áramkiszorítás jelensége ad magyarázatot [14].

Az A jelű kábel szálai elektromágneses szempontból egyenrangúnak tekinthetők, így annál nem lép fel a fenti jelenség, hosszegységre eső ellenállása a frekvencia növekedésével látványosan alacsonyabb marad, mint a másik két kábelé. A B kábel esetén centrális vezetősálak találhatók a kötegekben, így $f = 30$ kHz frekvencián hirtelen növekedni kezd a hosszegységre eső ellenállása. A C kábelben, ahol a középső köteg átmérője a kábel méretéhez képest jelentősen nagyobb, mint ugyanez a B kábel szálai esetén, így a C kábelben már nagyon alacsony frekvencián fellép ez a hatás. A kötegek közötti áramkiszorítás hatását a (4.6). ábrán láthatjuk. Látványos, hogy igen már alacsonyabb, $f = 80$ kHz frekvencián is jelentősen kevesebb áramot szállít a középső vezetőköteg.

Mind a hosszegységre eső ellenállás, mind a száláramok tekintetében a vizsgált keresztmetszetek között, a hossz menti periódus több pontján található keresztmetszeten is elvégeztem a szimulációkat a kétdimenziós modellen. Azonban azt tapasztaltam, hogy a kimeneti értékek gyakorlatilag változatlanok maradnak a kötegek elfordulásának hatására. Ez egybevág az előzetesen várt fizikai képpel, hiszen az eredmények a z koordinátatengelyre invariánsak.

Áramsűrűség amplitúdója a 2D modellben a C típusú huzalon $f=80$ kHz frekvencián [A/m^2]

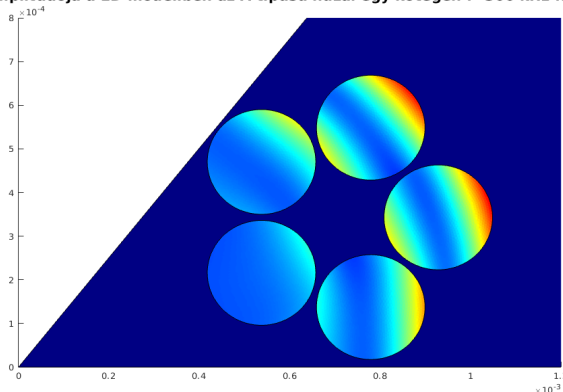


4.6. ábra. A C kábel keresztmetszeti árameloszlása $f = 80$ kHz frekvencián

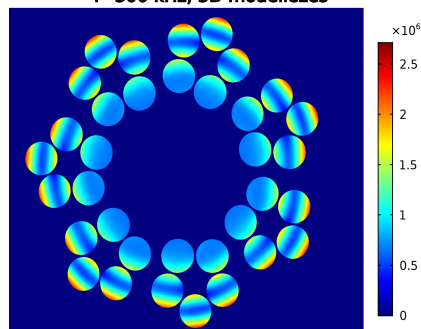
4.4. Árameloszlás vizsgálata rögzített frekvencián

A kábelben fellépő jelenségeket jól meg tudtuk vizsgálni az előző két alfejezetben, a keresztmetszeti árameloszlás vizsgálatával a modell validálását részletesebben is elvégezhetjük.

Áramsűrűség amplitúdója a 2D modellben az A típusú huzal egy kötegén $f=300$ kHz frekvencián [A/m^2]



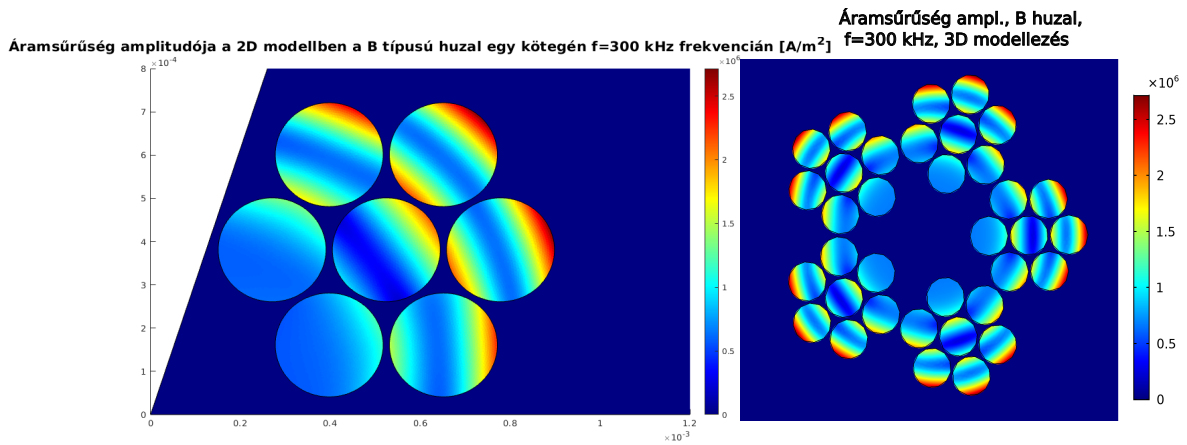
Áramsűrűség ampl., A huzal, $f=300$ kHz, 3D modellezés



4.7. ábra. Az A kábel keresztmetszeti árameloszlása $f = 300$ kHz frekvencián

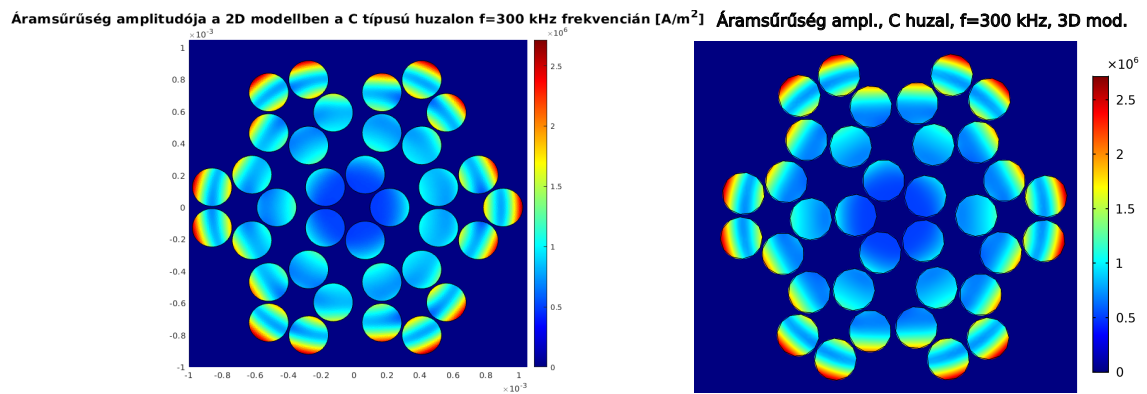
Mivel az ábrák megjelenítésekor azok színskáláját kábelfajtánként rögzítettük, kijelenthető, hogy a felületen mért áramsűrűségek nagyon hasonló képet mutatnak a kétfajta modellezési módszerben.

Érdemes megfigyelni, hogy miután a kétdimenziós modell elemi száláramai magasabb frekvencián nem minden konstrukciónál követték a háromdimenziós szimuláció eredményeit, az áramsűrűség amplitúdójának ábrázolása során jó közelítéssel egyezik a kétfajta modell eredménye. Habár nagyon kis – szemmel a színskálán nem is biztosan látható – eltérések is képesek a száláramok amplitúdójának a 4.4 is látható eltérését is okozni, mégis kije-



4.8. ábra. A B kábel keresztmetszeti árameloszlása $f = 300$ kHz frekvencián [13]

lenthető, hogy minőségileg helyes képet kapunk a kétdimenziós modellezés során is. Így kijelenthető, hogy a kétdimenziós modellezés számos optimalizációs folyamat során képes helyettesíteni a háromdimenziós szimulációkat.



4.9. ábra. A C kábel keresztmetszeti árameloszlása $f = 300$ kHz frekvencián [13]

5. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban a több vezetőből álló sodronyok, és az ezekből készült tekercsek modellezésével kapcsolatos elméleti levezetések után bemutattam, milyen módszerrel lehet az egyenleteket implementálni végeselem alapú szoftverekkel. Speciálisan a MATLAB PDE-Toolboxának beállításait is bemutattam. Ezt követően három kábelkonstrukción mutattam be, milyen hatásokból származnak a sodrott vezetők, és ezáltal a belőlük készített tekercsek veszteségei, továbbá a kétdimenziós modell számításait háromdimenziós modellszámításokkal validáltam. Az alábbi következtetésre jutottam:

- A kidolgozott kétdimenziós, keresztmetszeti modellek könnyen megalkothatók és adaptálhatók a különféle huzalszerkezetekhez. Konzisztens egyenletrendszerhez vezetnek, amely bizonyos FEM szoftverekkel (amelyek engednek hozzáférést az egyenletrendszerhez) akár egy lépésben is megoldható, így a futási idő jelentősen csökken a háromdimenziós modellezéshez képest. De a futási idő még a dolgozatban bemutatott bázismegoldások módszerének alkalmazásával is jelentősen csökkenthető.
- Jó egyezést figyelhetünk meg a kétfajta modellezési metódus eredményei között, nemcsak a váltakozó áramú ellenállás frekvenciafüggvényében, hanem a részletesebb eredményekben is, mint például a magasabb frekvencián látható keresztmetszeti árameloszlás tekintetében.
- A kétdimenziós modellek robusztusak: a reprezentáló keresztmetszet kiválasztása gyakorlatilag nincs hatással a egyik számított mennyiségre sem. Igazoltam, hogy az a fajta átlagolás, melyet a sodrás figyelembevételére használunk, még a nagyon kevés szálát tartalmazó kötegeknél is működik.

A módszert a közelmúltban az IGTE nemzetközi konferencián is bemutattuk [15]. A további kutatási irányok a következők. A módszert többszintű elrendezésekre is kiterjeszthetjük. További érdekes kitekintés, hogy a huzalveszteségek további csökkentésére alkalmaznak mágneses anyaggal bevont elemi vezetősálakból álló litze-huzalt, amely az elemi szálak közti közelségi hatás „árnyékolása” révén kisebb veszteségeket eredményez. A bemutatott módszer ilyen huzalokra is kiterjeszthető.

Irodalom

- [1] T. Guillod és tsai., „Litz wire losses: Effects of twisting imperfections”, *2017 IEEE 18th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL)*, 2017, 1–8. old.
- [2] C. R. Sullivan, „Optimal choice for number of strands in a litz-wire transformer winding”, *IEEE Transactions on Power Electronics*, 14. évf., 2. sz., 283–291. old., 1999. márc., ISSN: 0885-8993.
- [3] J. Panchal, A. Lehtikoinen és P. Rasilo, „Efficient finite element modelling of litz wires in toroidal inductors”, *IET Power Electronics*, 14. évf., 16. sz., 2610–2619. old., 2021.
- [4] S. Hiruma, Y. Otomo és H. Igarashi, „Eddy current analysis of litz wire using homogenization-based FEM in conjunction with integral equation”, *IEEE Transactions on Magnetics*, 54. évf., 3. sz., 1–4. old., 2018. márc., ISSN: 0018-9464.
- [5] A. Roßkopf és tsai., „Influence of varying bundle structures on power electronic systems simulated by a coupled approach of FEM and PEEC”, *IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, Miami, FL, USA, 2016. 13-16 Nov, 1–1. old.
- [6] J. Gyselinck és P. Dular, „Frequency-domain homogenization of bundles of wires in 2-D magnetodynamic FE calculations”, *IEEE Transactions on Magnetics*, 41. évf., 5. sz., 1416–1419. old., 2005.
- [7] A. Konrad, M. Chari és Z. Csendes, „New finite element techniques for skin effect problems”, *IEEE Transactions on Magnetics*, 18. évf., 2. sz., 450–455. old., 1982.
- [8] K. Preis, „A contribution to eddy current calculations in plane and axisymmetric multiconductor systems”, *IEEE Transactions on Magnetics*, 19. évf., 6. sz., 2397–2400. old., 1983.
- [9] L. Fejérvári és tsai., „Electromagnetic modeling of coils made of twisted litz wire by combining finite element simulation and circuit laws”, *Int. J. Appl. Electromagn.*, 70. évf., 21–31. old., 1 2022.
- [10] K. Simonyi és L. Zombory, *Elméleti villamosságtan*. Műszaki Könyvkiadó, 2000.
- [11] O. Biro és K. Richter, „CAD in Electromagnetism”, *Advances in Electronics and Electron Physics* sor., P. W. Hawkes, szerk., 82. köt., Academic Press, 1991, 1–96. old.
- [12] A. Bossavit, „Eddy currents in dimension 2: Voltage drops”, *Proceedings ISTET'99*, Magdeburg, Germany, 1999, 103–107. old.
- [13] T. Bakondi, „Sodrott és kötegelt vezetők örvényáram-veszteségének számítása és mérése”, dipl., Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2022.
- [14] S. Gyimóthy és tsai., „Loss Computation Method for Litz Cables With Emphasis on Bundle-Level Skin Effect”, *IEEE Transactions on Magnetics*, 55. évf., 6. sz., 1–4. old., 2019.

- [15] T. Bakondi és tsai., „2D FEM simulation of AC losses in recursively twisted and wound conductors”, *20th IGTE Symposium, Graz, Austria*, 40. old., 2022.