



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék

Bakondi Tamás

SODROTT ÉS KÖTEGELT VEZETŐK ÖRVÉNYÁRAM-VESZTESÉGÉNEK SZÁMÍTÁSA ÉS MÉRÉSE

KONZULENS

Dr. Gyimóthy Szabolcs

BUDAPEST, 2022

Tartalomjegyzék

Összefoglaló	5
Abstract	6
1 Bevezetés	7
1.1 Motiváció	7
1.2 Célkitűzés.....	8
2 Elméleti alapok.....	9
2.1 Modelltartomány, szimmetriák figyelembevétele	9
2.2 A Maxwell-egyenletek redukált alakja	10
2.2.1 A vezető tartományok.....	10
2.2.2 A nem vezető tartományok.....	11
2.2.3 A tartományokat összekapcsoló határ.....	11
2.3 Az $\mathbf{A} - \Phi, \mathbf{A}$ módszer.....	12
2.3.1 A differenciálegyenletek általános háromdimenziós alakja	12
2.3.2 A differenciálegyenletek kétdimenziós alakja	13
2.4 Peremfeltételek	15
2.4.1 Γ_∞ perem.....	15
2.4.2 Γ_{Ht} perem.....	16
2.4.3 Γ_{H0} perem	16
2.5 A feszültség, illetve áramkényszerek érvényesítése	17
2.5.1 Bázismegoldások létrehozása	17
2.5.2 A teljes megoldás előállítása lineárkombinációval.....	18
2.5.3 Áramkényszerek	19
2.5.4 Feszültségekényszerek.....	19
2.5.5 A teljes megoldás felírása	22
3 Tesztfeladatok	23
3.1 A típusú kábel	25
3.2 B típusú kábel	25
3.3 C típusú kábel	26
4 Kétdimenziós modellek és validálásuk.....	27
4.1 A típusú kábel	28
4.1.1 A sodrás figyelembevétele, a modellt leíró egyenletek	28
4.1.2 Az implementáció	30

4.1.3 Eredmények	31
4.2 B típusú kábel	35
4.2.1 A sodrás figyelembevétele, a modellt leíró egyenletek	35
4.2.2 Az implementáció	39
4.2.3 Eredmények	39
5 Összegzés, kitekintés	50
Irodalomjegyzék.....	51

HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott **Bakondi Tamás**, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a diplomatervet meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy hitelesített felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Kelt: Budapest, 2022. 05. 29.

.....
Bakondi Tamás

Összefoglaló

Kötegelt vezetőkől álló, sodrott kábeleket széleskörben használnak, úgy a közép és nagyfeszültségű technikában, mint a nagyobb frekvenciás alkalmazásokban, például az induktívan csatolt vezeték nélküli energiaátvitelben. Paramétereik pontos ismerete az eszközök működésének, illetve az elektromágneses kompatibilitásának szempontjából igen fontos. A paraméterek pontos meghatározása azonban sokszor nehézségebe ütközik, több alkalmazási területen csupán becsülni, közelíteni szokták azokat.

Az ilyen kábelek akár több ezer elemi vezetőszálból állhatnak, amelyek kötegekbe rendeződnek, majd a kötegek összetett struktúrája adja ki a teljes kábelt. A gyakorlati megvalósításban nem csak az egyes kötegeket, hanem a kábeleket is sodorják. A különböző kábelfajtákon belül mind a szálak kötegen belüli hierarchikus elrendezése, mind a kötegek kábelben belüli, szintén hierarchikus elrendezése, mind a sodrás hatása befolyásolja a kábel viselkedését nagyobb frekvenciákon. A kábelek hosszúsága is általában igen nagy a keresztmetszeti méreteikhez képest. Ezen okokból, a vezetők háromdimenziós modellezése bonyolult, és erőforrásigényes. A számítások egyszerűsítése kézenfekvő lenne kétdimenziós, keresztmetszeti modellezéssel, viszont a lezajló háromdimenziós jelenségeket figyelembe kell venni a keresztmetszeti modellezés során is. Ez a dolgozatom egy újszerű, tanszéki fejlesztésű, kétdimenziós módszer implementálásáról, és validálásáról szól. Többféle kábelkonstrukción bemutatom azok kétdimenziós modellezésének módszerét, majd bizonyos jellemzőinek frekvenciafüggő viselkedését, és összehasonlítom az eredményeket egy háromdimenziós referenciamodellel.

Abstact

Twisted cables consisting of conductor bundles are widely used both in the area of medium and high voltage technologies and in the case of higher frequency applications, as e.g. inductive wireless energy transmission. Knowing their accurate parameters is especially important from the aspect of the operation of the devices and their electromagnetic compatibility. However, it is often difficult to define these parameters exactly, and therefore they only used to approximatively estimate them in several application areas.

These cables may consist of several thousand elementary conducting wires that are arranged into strands, and the complex structure of these strands make up the cable. In the course of practical implementation they twist not only the individual strands, but also the bundles themselves. In the case of the different cable types both the hierarchic arrangement of the strands within the bundles and the hierarchic arrangement of bundles within the cable do influence the behaviour of the cable at higher frequencies. Usually the lengths of the cables are also much longer than their cross-sectional dimensions. Due to these reasons, the three-dimensional modelling of the conductors is a complex and resource demanding task. Simplifying the calculations with the aid of two-dimensional modelling would be practical. However, the three dimensional phenomena taking place have to be also taken into consideration in the course of cross-sectional modelling. This thesis of mine is about implementing and validating a novel two-dimensional system that was developed by our faculty at the university. I introduce in this thesis with the aid of several different types of cable structures the methods of their two-dimensional modelling, and then the frequency dependent behaviour some of their characteristics, and I compare the results with a three-dimensional reference model.

1 Bevezetés

1.1 Motiváció

A diplomatervezés során sodrott és kötegelt vezetők elektromágneses terének számításával foglalkoztam. Sodrott, kötegelt kábelek alkalmazásával különböző veszteségi összetevők csökkenthetők, amelyek a nagyfrekvenciás technológiákon túl már a közép és nagyfeszültségű alkalmazások esetén is szerepet játszanak, alacsonyabb frekvenciatartományokban. A félvezető technika fejlődésével nagy számban jelentek meg a villamosenergia-rendszeren olyan félvezetős hajtások, napelemekhez kapcsolódó inverterek, amelyek nagy teljesítményűek, és kapcsolási frekvenciájuk jóval magasabb, mint a hálózati frekvencia. Ezek magasabb rendszámú felharmonikusokkal szennyezhetik az 50 Hz-es hálózatot, ezzel különböző vezetett zavarokat, esetlegesen elektromágneses kompatibilitási problémákat okozva. Az ilyen vezetett zavarok ipari környezetben – ahol jellemzően sok inverteres fogyasztó és termelő van a hálózaton – a mérőórák pontosságát nagyban befolyásolhatják. A felharmonikusok szűrése egy határon túl már nem megoldható. Ahhoz, hogy az ilyen jellegű zavarokat a tervezés során figyelembe lehessen venni, a zavar forrásának (vagy nyelőjének), és az átviteli út – így az alkalmazott kábelek paramétereinek ismerete kulcsfontosságú. A kábelek vizsgálatára vonatkozó szabványok a 40. felharmonikusig, 2 kHz frekvenciáig támasztanak követelményeket a sodronyokkal, kábelekkel kapcsolatban – illetve a felharmonikusok szűrésével kapcsolatban is. A napelemes termelésben használt inverterek kapcsolási frekvenciája 15-20 kHz között van. Az inverterek jellemzője, hogy a legnagyobb zavart a 3. felharmonikus frekvencián, még érezhető zavart pedig 9. felharmonikus frekvencián juttatják a hálózatba. A 2 kHz és az inverterek felharmonikusaira jellemző – akár 180 kHz – frekvencián a villamosenergia-rendszeren alkalmazott kábelek zavarkibocsátását jelenleg is vizsgálják. Egy-egy erőáramú kábel, sodrony pontos szimulációja tehát megkönnyítheti a zavarokkal való tervezést, és elektromágneses kompatibilitással kapcsolatos számításokat is. Villamos gépek tervezésénél is többnyire kötegelt és sodrott vezetőket alkalmaznak. Aszinkron gépek hornyaiban pl. igen magas frekvenciás összetevők is megjelennek az inverteres táplálás miatt, a vezető paraméterei, és a kialakuló áram pontos ismerete pedig a gép mágneses viszonyai szempontjából igen fontos. Induktívan csatolt vezeték nélküli energiaátviteli rendszerekben a jellemzőek magasabb frekvenciás alkalmazások, pl. 85 kHz-en, így a vezetékparaméterek ismerete ezen alkalmazás szempontjából is fontos.

1.2 Célkitűzés

Elektromágneses jelenségek modellezésére számos, fejlett, háromdimenzióban jól működő végelelem módszert alkalmazó térszámító szoftver létezik. Sodrott, és kötegelt vezetők teljeskörű háromdimenziós modellezése azonban több okból is kevésbé hatékony. Egyrészt az akár több ezer elemi vezetőszálból álló kábelek rendkívül összetettek, és sokszor elég csak a kábel egy kisebb részét modellezni, majd az eredményeket kiterjeszteni a teljes tartományra, vagy felhasználni azokat magasabb rendű struktúrák számításához. Másrészt a kábelek akár méteres hosszúságúak is lehetnek, és így a teljes hosszúságukban modellezni nagyon erőforrásigényes feladat. Ezért a számítások egyszerűsíthetőek, ha a kábelt, vagy annak csak egy részét keresztmetszetben modellezzük. A jelenségek egy része azonban a kábel hossza mentén zajlik, ezek hatását figyelembe kell venni a keresztmetszetben.

A sodrott kábelek mérése is nehézkes: elvileg egy menetemelkedésnyi szakasz viselkedésének ismerete is elegendő lehet, ilyen rövid szakaszon azonban nem teremthetők homogén feltételek. Ez a probléma a hosszabb kábel paramétereinek mérése esetén is fellép. Ezért a fizikai mérések helyett konzulensem segítségével készített, háromdimenziós modellezéssel kiszámított kábelparaméterekkel hasonlítom össze a kétdimenziós modellfájlok által számított eredményeket. Mivel a diplomatervezésben elsősorban azt vizsgálom, hogyan lehet kétdimenzióban olyan háromdimenziós jelenségeket figyelembe venni, mint például a sodrás (csavarás) – ezért is kézenfekvő, hogy konkrétan a háromdimenziós eredményekkel vetem össze a kétdimenziós eredményeket.

A diplomatervezés során az alkalmazott, újszerű, publikálás alatt álló, tanszéki fejlesztésű módszer implementálása és validálása volt a feladatom. A kábelek kétdimenziós – keresztmetszeti – modellezését végző szkripteket a Matlab PDE Toolboxának használatával hoztam létre, míg a validáláshoz használt – kábelek egészét 3D-ben modellező – fájlokat pedig Comsol Multiphysics használatával készítettük.

2 Elméleti alapok

A Maxwell-egyenletek kvázistacionárius közelítéséből kiindulva potenciálok definiálhatóak, amelyekre egy zárt tartományon peremértékfeladat írható fel. A peremértékfeladat felírásához szükséges elméleti alapokat ebben a szakaszban tárgyalom. A felírt peremértékfeladatot végeelem módszerrel oldottam meg.

2.1 Modelltartomány, szimmetriák figyelembevétele

A modellezést az örvényáramú feladatokra jellemző peremérték problémával oldottam meg. Alapfeltevés, hogy a modell összessége kétfajta tartományból áll: Ω_N nem vezető és Ω_C vezető tartományból. Ezeket Γ_{CN} peremek választják el egymástól. A teljes modelltartományon az alábbi egyszerűsítő feltevésekkel élhetünk:

- a) A μ mágneses permeabilitás állandó, tehát mágneses szempontból a feladatok modelltartományai homogén, lineáris és izotróp közegek.
- b) Ezen túlmenően a vezető közegekben a σ fajlagos vezetőképesség szintén állandó.
- c) Továbbá az is megállapítható, hogy a kábelek l hosszúsága - ami akár méteres nagyságrendbe eshet - több nagyságrenddel nagyobb, mint azok átmérője – jellemző méretük pár tíz milliméter.
- d) A sodrásmentes kötegek – amelyek a gyakorlatban nemigen léteznek, referenciaként azonban felhasználhatóak – eltolási szimmetriával rendelkeznek. Sodrott kötegek esetén pedig a kis menetemelkedése kvázi-eltolási szimmetriát hoz létre. A problémák tehát az $x - y$ síkban megoldhatóak. Így kijelenthető, hogy az elrendezések közelítőleg z irányú eltolási szimmetriával rendelkeznek.
- e) A modellezett kábelek szimmetriája miatt bizonyos kábelfajtáknál elegendő csak a kétdimenziós keresztmetszet egy részét – rendszerint egy szektort modellezni.
- f) A rendszerek elektromágneses szempontból lineárisak, ezért a frekvenciatartományban modellezhetőek.
- g) A Maxwell-egyenletek magneto-kvázistacionárius (továbbiakban MQS) közelítése használható, ennek megfontolását alább írom le.
- h) A fentiekből következően az $\vec{J}$ áram csak z irányban folyhat, és csak x -től és y -tól függ. Ebből, és a közeg izotróp jellemzőiből következik, hogy a vezető anyagokban ez

az elektromos térre is érvényes. Továbbá az is, hogy a mágneses térnek csak transzverzális komponense van. Formálisan:

$$\vec{J} = \vec{e}_z J_z(x, y) \rightarrow \vec{E} = \vec{e}_z E_z(x, y) \rightarrow \\ \vec{H} = \vec{e}_x H_x(x, y) + \vec{e}_y H_y(x, y) \rightarrow \vec{B} = \vec{e}_x B_x(x, y) + \vec{e}_y B_y(x, y)$$

2.2 A Maxwell-egyenletek redukált alakja

A 2.1.f pont miatt a modellezést a frekvenciatartományban végzem, ezért a Maxwell-egyenleteket is a frekvenciatartományban veszem fel. A vezető, és a nem vezető tartományokra érvényes egyenleteket külön vezetem le. A következő levezetések az [1] számú irodalomban megtalálhatóak, a teljesség kedvéért itt is megjelenítem.

2.2.1 A vezető tartományok

Az Ω_C vezető tartományokban létrejövő térben az eltolási áram elhanyagolható a vezetési áram mellett, ezért a Maxwell-egyenletek MQS közelítésben írhatóak fel. Ezt az alábbi – I. Maxwell-egyenletből kiinduló - megfontolás alapozza meg:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} = \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E}$$

A σ fajlagos vezetőképesség nagyságrendje az alkalmazott rézben, mint vezető anyagban 10^7 , míg az ϵ elektromos permeabilitásé 10^{-11} . Ebből kifolyólag az alábbi egyenlet számlálója és nevezője között az még MHz (10^6) nagyságrendű frekvenciákon is nagy a nagyságrendbeli különbség:

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \cong \frac{10^7}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 10^{-11}} \sim 10^{12}$$

Ez tehát azt jelenti, hogy a vezetési áram tehát 12 nagyságrenddel nagyobb, mint az eltolási áram, annak hatása így elhanyagolható, ezért minimális hibát okoz utóbbi elhagyása. Vö. 2.1. g pont.

Tehát az Ω_C vezető tartományon használt Maxwell-egyenletek:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Az I. Maxwell-egyenletből következik a folytonossági egyenlet, amit később önállóan használunk:

$$\text{div} \vec{J} = 0$$

És a közegegyenletek:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

2.2.2 A nem vezető tartományok

Az Ω_N tartományokat ezekben a feladatokban levegőnek tekintetem, mert a kábelek vagy légszigetelésűek, vagy az alkalmazott szigetelőanyag dielektomos jellemzőik nem játszanak szerepet, így mágneses szempontból a levegővel azonos viselkedésűnek tekinthetők. Az ilyen tartományokon a stacionárius mágneses tér modellje alkalmazható, és a Maxwell-egyenletek az alábbi formában érvényesek:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Valamint a közegegyenlet:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

2.2.3 A tartományokat összekapcsoló határ

A vezetőből a szigetelőbe áram nem léphet át, tehát a $\vec{J}$ áramsűrűség normális komponense zérus, a $\vec{B}$ indukció normális komponense nem ugrik, továbbá ha nincs felületi áramsűrűség, a $\vec{H}$ mágneses térerősség tangenciális komponense sem. Képlettel kifejezve, ahol $[[\cdot]]$ operátor a vektorkomponens felületen vett ugrását jelöli:

$$[[B_n]] = 0, [[\vec{H}_t]] = 0, J_n = 0$$

Mivel a tartományokat elválasztó határokon a Matlab PDE Toolboxban semmilyen feltételt nem tudunk előírni, ellenben bizonyos folytonossági feltételek a vége-seleemes implementációból következően automatikusan teljesülésnek. Belátható, hogy az

indukcióvektor B_n normális komponense, és a mágneses térerősség H_t tangenciális irányú komponense éppen ilyen. Az utolsó feltétel triviálisan teljesül, mert $\vec{J}$ áramsűrűségnek csak z irányú komponense van.

2.3 Az $\vec{A} - \Phi, \vec{A}$ módszer

2.3.1 A differenciálegyenletek általános háromdimenziós alakja

A peremérték feladatot Maxwell-egyenletek közvetlen alakja helyett célszerű potenciálokra megfogalmazni, többek között azért, mert így a fent említett folytonossági feltételek könnyebben teljesíthetők. Az alábbiakban az örvényáram problémákban gyakran használt $\vec{A} - \Phi$, $\vec{A}$ formalizmust ismertetem, amely megtalálható többek között az [1] irodalomban. A **vezető tartományon** a feladat megoldása az alábbiak szerint történik:

A szükséges egyenletek előállításának alapgondolata, hogy a mágneses indukció divergenciája a III. Maxwell-egyenlet értelmében zérus, ezért előállítható egy vektormező rotációjaként:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \leftrightarrow \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Ezt beírva a II. Maxwell egyenletbe felírható egy rotációmentes vektormező, amelyet egy skalármező gradienseként lehet definiálni:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \operatorname{rot} \vec{A} \leftrightarrow \operatorname{rot}(\vec{E} + j\omega \vec{A}) = 0 \rightarrow \vec{E} + j\omega \vec{A} = -\operatorname{grad} \varphi$$

A cél tehát az, hogy $\vec{A}$ és Φ mezők előállításával létrehozhatóak legyenek $\vec{B}$ és $\vec{E}$ mezők. Azonban az $\vec{A}$ vektorpotenciál rotációja mellett az egyértelmű felbonthatósághoz meg kell adni annak divergenciáját is, míg a Φ mező gradiense egy referencia pontban előírt értékkel tehető egyértelművé. Ezek megadása az ún. mértékválasztás, ennek célszerű mértéke alkalmazási területenként eltér. Az MQS feladatokban a Coulomb-mérték a legcélszerűbb választás:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

$$\varphi(\vec{r}_0) = 0$$

Ezt követően Az I. Maxwell-egyenletből $\vec{B}$ mágneses indukciót kifejezve, és a vektorpotenciál formuláját behelyettesítve, majd a differenciális Ohm-törvényt felhasználva:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \right) &= \vec{j} \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \mu \vec{j} \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} &= -j\omega\mu\sigma\vec{A} - \mu\sigma\operatorname{grad}\varphi \end{aligned}$$

Ezzel előáll a vektoriális Helmholtz-egyenlet:

$$\boxed{\Delta \vec{A} - j\omega\mu\sigma\vec{A} = \mu\sigma\operatorname{grad}\varphi}$$

A töltésmegmaradás miatt az alábbi egyenlet érvényes:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \rightarrow \operatorname{div}(\sigma \vec{E}) = 0 \rightarrow -j\omega \operatorname{div}(\sigma \vec{A}) - \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad}\varphi) = 0$$

Mivel a fajlagos vezetőképesség állandónak tekintendő (ld. 2.1.b pont), az kiemelhető és elhagyható. A Coulomb-mérték miatt $\operatorname{div} \vec{A}$ is kiesik, tehát:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad}\varphi = 0$$

Ami pedig a skaláris Laplace-egyenlet:

$$\boxed{\Delta\varphi = 0}$$

A **szigetelő tartományon** az I. Maxwell-egyenlet:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \right) = \vec{j}$$

Amelyből a Coulomb-mérték használatával következik:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \mu \vec{j}_i \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} &= \mu \vec{j}_i \\ \boxed{\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j}_i} \end{aligned}$$

Ez a vektoriális Poisson-egyenlet.

2.3.2 A differenciálegyenletek kétdimenziós alakja

A 2.1.h pontból kiindulva a $\vec{B}$ indukcióvektor nem függ z koordinátától, így $\vec{A}$ vektorpotenciál sem. Ezt kihasználva a rotáció kifejtése:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = 0 \rightarrow \text{rot} \vec{A}(x, y) = \vec{e}_x \frac{\partial A_z}{\partial y} - \vec{e}_y \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$(B_x; B_y) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} ; -\frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$$

Tehát a $\vec{B}$ indukcióvektor leírásához elegendő az $\vec{A}$ vektorpotenciál z komponense. A vektorpotenciál x és y komponensei lehetnek 0 értékűek:

$$A_x = A_y = 0$$

$$\vec{A} = \hat{z} \vec{A}(x, y)$$

Ebből következik, hogy

$$\text{div} \vec{A} = 0$$

Tehát a Coulomb-mérték automatikusan teljesül. Az áramsűrűség előállítása során egyszerűsítést jelent, hogy $A_x = 0$, $A_y = 0$ és $\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = 0$. Valamint az is, hogy a 2.1.a pont értelmében a μ mágneses permeabilitást konstansnak tekintettük a teljes modelltartományon, és így az kiemelhető.

$$\vec{J} = \text{rot} \frac{1}{\mu} (\text{rot} \vec{A}) = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} & -\frac{\partial A_z}{\partial x} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu} \left(-\vec{e}_z \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) \right)$$

A fenti alak egy kétváltozós skalárfüggvény divergenciájaként értelmezhető:

$$\boxed{J_z = \text{div} \left(\frac{1}{\mu} \text{grad}(A_z) \right)}$$

A 2.1.i feltételezés miatt az $\vec{E}$ elektromos térerősségnek is csak z komponense van:

$$E_z = -j\omega A_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Ezért a skalárpotenciál x és y irányú változása szükségképpen 0.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

Fontos megjegyezni, és a későbbiekben ki is használható, hogy $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ értéke nem zérus a vezetőtartomány egy adott $x - y$ keresztmetszetében, viszont a fentiekből következően konstans. A vektoriális Helmholtz-egyenlet, illetve Poisson-egyenlet kétdimenzióban a következőre egyszerűsödik a **vezető tartományban** – μ -vel osztva:

$$\Omega_c: -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} A_z\right) + j\omega\sigma A_z = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

A **szigetelő tartományban** pedig:

$$\Omega_n: -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} A_z\right) = 0$$

Alább, a számítások során elsősorban a vezetőkben létrejövő áramsűrűséget, és az abból származó mennyiségeket szeretnénk meghatározni. Mivel a φ skalárpotenciál vezetőtartományonként állandó, ezért a $\Delta\varphi = 0$ skaláris Laplace-egyenletet nem használjuk fel, és $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ értékét igyekszünk egyéb feltételekből meghatározni.

2.4 Peremfeltételek

A peremértékfeladatot a modelltartományon érvényes parciális differenciálegyenletek felírása, és a tartomány peremére előírt peremfeltételek együttesen határozzák meg. A peremfeltételek olyan peremen előírt egyenletek, amelyek figyelembe veszik a tartományon kívül eső hatásokat.

A modellezés során háromféle peremfeltétel jöhet szóba.

2.4.1 Γ_∞ perem

A vezetőszáltól kellő távolságban a mágneses tér már olyan, mintha vékony vonalszerű vezető hozná létre. Ha a vezetőtől kellő távolságra, olyan kör alakú lezárást veszünk fel, amelynek középpontja a vezető középpontjával egybeesik, akkor az ott létrejövő teret tekinthetjük olyannak, mintha egy vékony vonalvezető hozta volna létre. Itt a mágneses indukció, melynek kontúrvonalai az $\vec{A}$ mezővel írhatóak le, párhuzamosan fut a távoli peremmel. A távoli perem sugarának értékére a modellezett kábel sugaránál jellemzően 1-2 nagyságrenddel nagyobb. A távoli peremen Dirichlet peremet kell biztosítani, mely értéke konstans, és 0-nak választható.

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow A_z = \text{konst.} = 0$$

2.4.2 Γ_{H_t} perem

Sodrás nélküli, tehát valódi eltolási szimmetriával rendelkező kábelek esetén a távoli peremen a kábel összes árama H_t előírásával is kényszeríthető. Ebben az esetben a [2] irodalomban tárgyalt okok miatt a modelltartományokra felírt parciális differenciálegyenletek jobb oldalán $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ értéket kell előírni. Ha H_t előírását ilyen módon tesszük, Neumann-peremfeltétel írandó elő a távoli peremen:

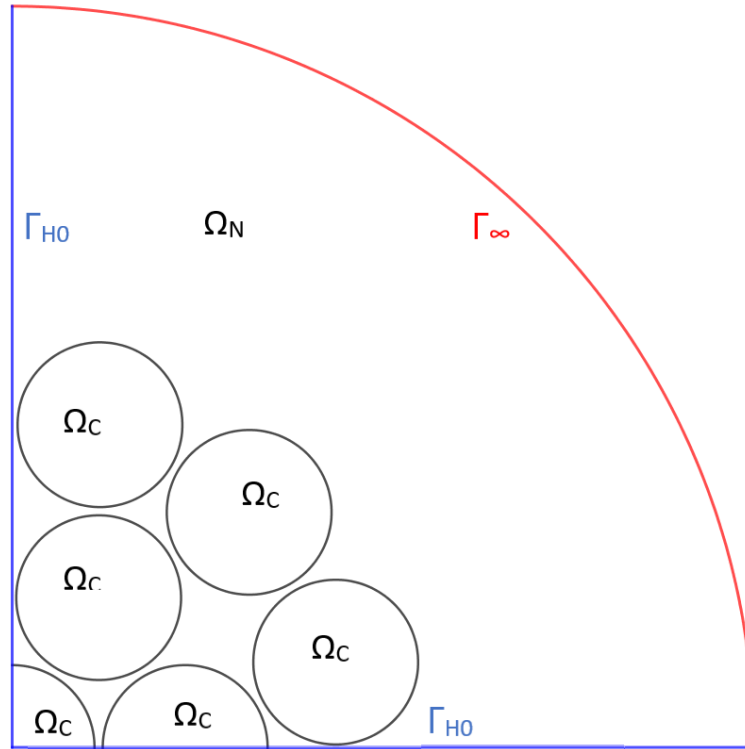
$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial n} = H_t = \frac{I}{2R_\infty \pi}$$

2.4.3 Γ_{H_0} perem

A szimmetria miatt a Γ_{H_0} -al jelölt peremen az indukciójonalaknak merőlegesen lépnek ki. Ezt homogén Neumann-típusú peremfeltétellel biztosíthatjuk, formálisan:

$$\vec{n} \times \vec{H} = \vec{0} \rightarrow \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial n} = 0$$

A modelltartományra felírt parciális differenciálegyenletek, és annak határán előírt peremfeltételek előállítják a peremértékfeladatot. A modelltartomány az 1. ábrán látható.



1. ábra: Példa egy kötegelt vezető esetén alkalmazott kétdimenziós modelltartománya

2.5 A feszültség, illetve áramkényszerek érvényesítése

2.5.1 Bázismegoldások létrehozása

A 2.3.2 pontban levezetett parciális differenciálegyenletek:

$$\begin{aligned}\Omega_c: -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}A_z\right) + j\omega\sigma A_z &= -\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \Omega_n: -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}A_z\right) &= 0\end{aligned}$$

A létrejövő áramsűrűség pedig:

$$\Omega_c: J_z = -j\omega\sigma A_z - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

A 2.3.2 pont értelmében $-\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ értéke egy-egy vezetősálra nézve konstans, és nevezzük el az i -edik vezetősálhoz tartozó ilyen konstans k_i -nek. Ez matematikai értelemben tekinthető a parciális differenciálegyenlet gerjesztésének. Képezzünk bázismegoldásokat úgy a következőképpen:

1. Minden vezetőképés tartományhoz tartozzon egy bázismegoldás.
2. Az m -edik vezetőképés tartományhoz tartozó bázismegoldásban, az i -edik vezetőképés tartományra felírt parciális differenciálegyenlet jobb oldalán álló tag legyen $-\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial z} = k_i = 1\frac{A}{m^2}$ értékű.
3. Az i -edik vezetőképés tartományhoz tartozó bázismegoldásban, a többi vezetőképés tartományhoz tartozó parciális differenciálegyenlet jobb oldalán pedig legyen $-\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial z} = k_{0\dots i-1; i+1\dots N} = 0\frac{A}{m^2}$ értékű.

Így az i -edik bázismegoldásához tartozó parciális differenciálegyenletek az alábbi módon írhatóak fel:

$$\begin{aligned}\Omega_{c1\dots i-1; i+1\dots N}: -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}A_i\right) + j\omega\sigma A_i &= 0 \\ \Omega_{ci}: -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}A_i\right) + j\omega\sigma A_i &= 1 \\ \Omega_n: -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}A_i\right) &= 0\end{aligned}$$

N db vezetőképes tartományhoz tehát N db bázismegoldás állítható elő. A $-\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1 \frac{A}{m^2}$ választás miatt az i -edik bázismegoldásban a $\vec{J}$ áramsűrűség a vezetőképes tartományokon:

$$\begin{aligned}\Omega_{c1\dots i-1;i+1\dots N}: J_i &= -j\omega\sigma A_i \\ \Omega_{ci}: J_i &= -j\omega\sigma A_i + 1\end{aligned}$$

2.5.2 A teljes megoldás előállítása lineárkombinációval

Ha létrejöttek a bázismegoldások, akkor a teljes megoldást keressük ortogonális bázisban felírt sor összegeként. A teljes megoldásban a $-\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z} = k_i$ értéke szintén konstans.

A teljes megoldást az ortogonális bázisokban a bázismegoldások k_i együtthatókkal vett lineár kombinációja adja.

$$A = \sum_{i=1}^N k_i A_i$$

Ezekről az együtthatókról egyrészt tudjuk, hogy egy adott vezetőszálon $-\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ értékével egyezik meg, másrészt alább ismertetett kényszerek figyelembevételével állítjuk elő.

Fontos megjegyezni, hogy ez a felbontás csak homogén peremfeltételek mellett tehető meg, azonban a 2.4 fejezetben bemutatott Γ_∞ és Γ_{H0} peremek ilyenek.

Fontos megjegyezni, hogy elméletileg szükségtelen N db bázismegoldást előre előállítani: elegendő a k_i tényezőket ismeretlennek tekinteni, és az egyenletrendszert a hálózati egyenletekkel (az alább ismertetett áram- és feszültségkényszerekkel) kiegészíteni. A bázismegoldások elvi jelentőségét az adja, hogy ezek a különbözőképpen sodrott (vagy egyenes), de azonos keresztmetszetű kábelre megegyeznek. Gyakorlati jelentőségük pedig az, hogy közvetlenül előállíthatók a FEM programmal, és így alkalmazásuk nem igényel hozzáférést a szoftver által előállított egyenletrendszerhez. A Matlab PDE Toolboxban ez éppen lehetséges, de nem minden szoftverben az.

2.5.3 Áramkényszerek

A k_i együtthatók meghatározása során az együtthatók kényszerek figyelembe vételével állnak elő, az egyik ilyen alkalmazott kényszer az áramkényszer. Az i -edik bázismegoldás J_i áramsűrűségének integrálja a vezetőképes tartományokon az elemi vezetősálak áramát adja meg ebben a bázismegoldásban. Például a j -edik vezetősálban a J_i áramsűrűség integrálja a j -edik sál áramát adja meg:

$$I_{ji} = \int_{\Omega_{cj}} J_i d\Omega_{cj}$$

Vegyük észre, hogy N db vezetősál esetén $N * N$ db ilyen sáláramot kapunk: az összes (N db) bázismegoldás áramsűrűségét integrálni kell az összes (N db) vezetősálon. A 2.5.1 pontban levezetett összefüggésekből látszik, hogy az áramsűrűség is lineáris kapcsolatban áll $k = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ konstanssal, ezért az sáláramokra is igaz, hogy a teljes megoldás a bázismegoldások k -val súlyozott összegeként áll elő. Tudjuk továbbá, hogy a sáláramok összege kiadja a köteg teljes áramát. N db vezetősálra:

$$I_{C1} = k_1 * I_{11} + k_2 * I_{12} + \dots + k_i * I_{1i} + \dots + k_N * I_{1N}$$

$$I_{C2} = k_1 * I_{21} + k_2 * I_{22} + \dots + k_i * I_{2i} + \dots + k_N * I_{2N}$$

$\vdots$

$$I_{Cj} = k_1 * I_{j1} + k_2 * I_{j2} + \dots + k_i * I_{ji} + \dots + k_N * I_{jN}$$

$\vdots$

$$I_{CN} = k_1 * I_{N1} + k_2 * I_{N2} + \dots + k_i * I_{Ni} + \dots + k_N * I_{NN}$$

Ahol I_{Cj} a j -edik elemi vezetősál árama a teljes megoldásban.

Tudjuk továbbá, hogy a sáláramok összege kiadja a köteg teljes I áramát:

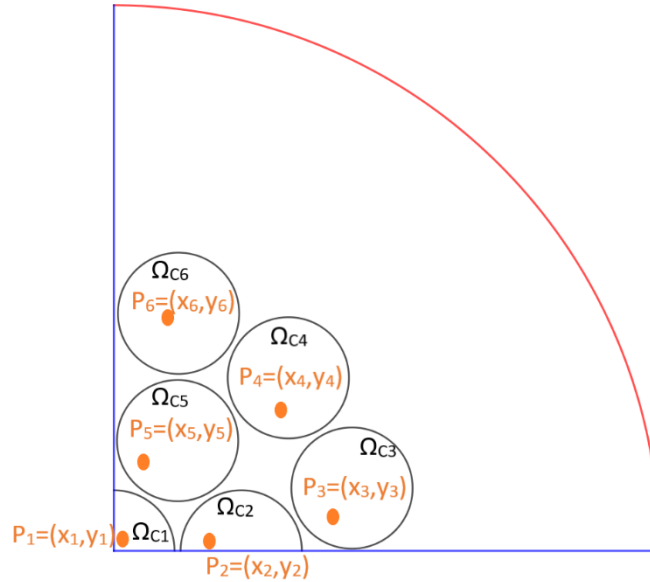
$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_j + \dots + I_N$$

A kábel teljes áramát ismertnek tekintjük, és a feladatokban kiindulási adatként előírjuk.

2.5.4 Feszültségekényszerek

A 2.5.2 pontban tárgyalt k_i együtthatók meghatározása kényszerekkel lehetséges. Az előző pontban tárgyalt áramkényszerek mellett feszültségekényszerek is felírhatóak. A 2.5.2 pontban megállapítottuk, hogy a teljes megoldás bázismegoldások súlyozott

összegeként áll elő. Jelöljük ki az elemi vezetőszálaakon kontrollpontokat, amelyek a vezetőszálon belül tetszőleges helyen lehetnek. A j -edik vezetőszálon jelöljük ezt a kontrollpontot: $P_j = (x_j; y_j)$, ahol $(x_j, y_j) \in \Omega_{cj}$. Az i -edik bázismegoldás A_i vektorpotenciálja a j -edik vezetőszál kontrollpontjában legyen A_{ji} értékű. A kontrollpontok elhelyezkedése a vezetőszálaakon belül a 2. ábrán látható.



2. ábra: Kontrollpontok az elemi vezetőszálaakon

A teljes megoldás ezekben a kontrollpontokban is – értelemszerűen – a bázismegoldások súlyozott összegeként áll elő.

$$A_{P1} = k_1 * A_{11} + k_2 * A_{12} + \dots + k_i * A_{1i} + \dots + k_N * A_{1N}$$

$$A_{P2} = k_1 * A_{21} + k_2 * A_{22} + \dots + k_i * A_{2i} + \dots + k_N * A_{2N}$$

$$\vdots$$

$$A_{Pj} = k_1 * A_{j1} + k_2 * A_{j2} + \dots + k_i * A_{ji} + \dots + k_N * A_{jN}$$

$$\vdots$$

$$A_{PN} = k_1 * A_{N1} + k_2 * A_{N2} + \dots + k_i * A_{Ni} + \dots + k_N * A_{NN}$$

Ahol A_{Pj} a j -edik kontrollpontban a teljes megoldás vektorpotenciáljának pontbéli értéke.

Feszültségkényszer jelent, ha a kábel, illetve akár a kötegek, akár a szálak végei galvanikusan össze vannak kötve. A modellezett kábeleken ez teljesül, így ez adottságnak tekinthető. A feszültségkényszer a Faraday-féle indukciótörvény integrális alakjával fogalmazható meg:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\psi}{dt}$$

Amelyben ψ az l görbe által körbezárt fluxus. Az elektromos térerősség kifejezhető a következő alakban:

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - \text{grad}\varphi$$

Jelenleg azonban a 2.1. h pont miatt mind az $\vec{E}$ elektromos térerősség, mind az $\vec{A}$ vektorpotenciál csak z irányú komponenssel rendelkezik, ez az elektromos térerősség az alábbi formában áll elő:

$$E_z = -j\omega A_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

A 2.1. d. pontban feltettük, hogy az elrendezés eltolási szimmetriával rendelkezik. Ha az $\vec{E}$ elektromos térerősséget integráljuk az i -edik vezetősál kontrollpontja által meghatározott egyenesen a teljes hosszon, majd a hurkot az j -edik vezetősál kontrollpontja által kijelölt egyenesen zárjuk be, akkor az integrálási út során csak a z irányú szakaszok adnak járulékot – mivel csak az $\vec{E}$ vektornak csak z komponense van. A 2.5.2 pont értelmében a j -edik vezetősálon $-\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z} = k_j$. Ezt felhasználva, illetve a fluxust a vektorpotenciállal kifejezve, az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$-l \left(-j\omega A_{Pi} + \frac{k_i}{\sigma} \right) + l \left(-j\omega A_{Pj} + \frac{k_j}{\sigma} \right) = -j\omega l (A_{Pi} - A_{Pj})$$

Az elrendezés l hosszúságával egyszerűsítve $N - 1$ ilyen egyenlettel kifejezhetjük az elrendezés összes feszültségkényszerét, formálisan az alábbi módon:

$$\begin{aligned} & - \left(-j\omega A_{P1} + \frac{k_1}{\sigma} \right) + \left(-j\omega A_{P2} + \frac{k_2}{\sigma} \right) = -j\omega (A_{P1} - A_{P2}) \\ & - \left(-j\omega A_{P2} + \frac{k_2}{\sigma} \right) + \left(-j\omega A_{P3} + \frac{k_3}{\sigma} \right) = -j\omega (A_{P2} - A_{P3}) \\ & \vdots \\ & - \left(-j\omega A_{Pi} + \frac{k_i}{\sigma} \right) + \left(-j\omega A_{Pj} + \frac{k_j}{\sigma} \right) = -j\omega (A_{Pi} - A_{Pj}) \\ & \vdots \\ & - \left(-j\omega A_{PN-1} + \frac{k_{N-1}}{\sigma} \right) + \left(-j\omega A_{PN} + \frac{k_N}{\sigma} \right) = -j\omega (A_{PN-1} - A_{PN}) \end{aligned}$$

Ezek az egyenletek a sodrásmentes kábelre vonatkoznak. A nagy menetemelkedés miatt az eltolási szimmetria, és annak következményeként a térjellemzők egyszerűsödése (pl. $\vec{J} = \vec{e}_z J_z(x, y)$, $\vec{A} = \vec{e}_z A_z(x, y)$, stb...) a sodrott kábelre is fenntarthatóak, de az indukciótörvény ebben az alakjában nem igaz. Mivel az egyes szálak pozíciója keresztmetszetről keresztmetszetre változik, ezért az integrál zárt görbéje is csavarodik, és ezáltal az integrálási út megnövekszik a sodrott szakaszon. A sodrott kábel megfelelő egyenleteit általános képlet helyett (annak bonyolultsága miatt) csak konkrét esetekre tárgyalom (lásd 4.1.1, 4.2.1 és 4.3.1 szakasz).

2.5.5 A teljes megoldás felírása

A teljes megoldást az áramkényszer egyenletek, a feszültségkényszer egyenletek adják. Általános esetben az egyenletrendszert:

- N db áramkényszer egyenlet
- 1 db áramösszegző egyenlet
- N db kontrollpontban az A_{Pi} kifejezésekre felírt egyenlet
- $N - 1$ db kontrollpontpárra felírt Faraday-törvény, feszültségkényszer egyenlet alkotja.

Általános esetben tehát $3 * N$ egyenlet áll elő.

Az ismeretlenek száma:

- N db k konstans
- N db I_i elemi száláram
- N db A_{Pi} kontrollpontban felvett vektorpotenciál érték.

Általános esetben tehát $3 * N$ ismeretlen van az egyenletekben. A megoldhatóságához elő kell írni a megkívánt kötegáramot az áramösszegző egyenlet bal oldalán. Az egyenletek rendszere speciális esetekben egyszerűsíthető. Az egyenletrendszer megoldása után a teljes megoldás előállítható:

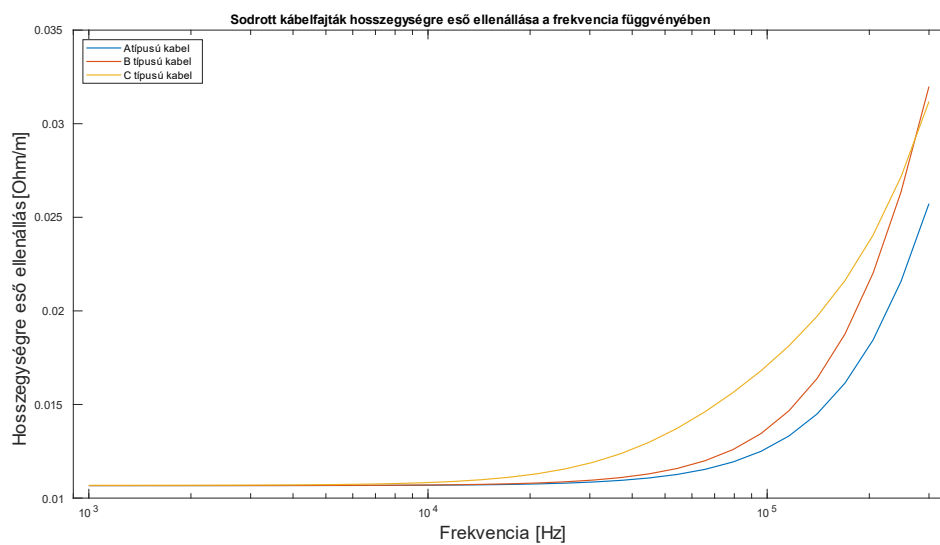
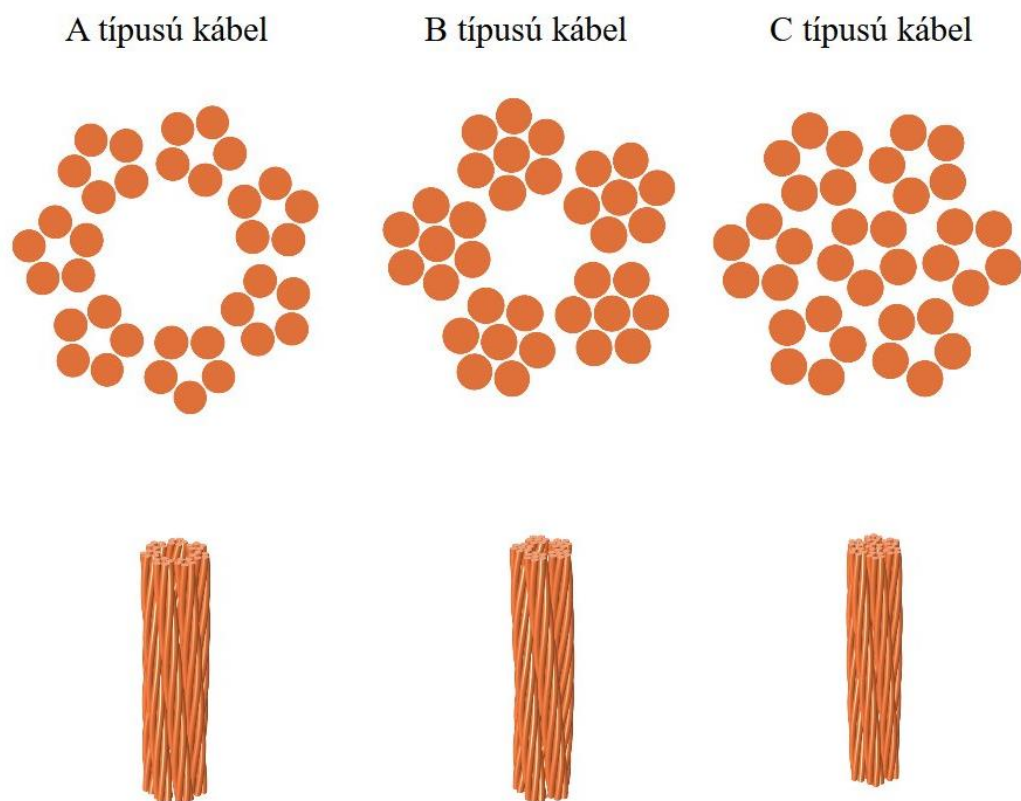
$$A = \sum_{i=1}^N k_i A_i$$

$$\Omega_{ci}: J_i = -j\omega\sigma A_i + k_i$$

3 Tesztfeladatok

A munkám során különböző tesztfeladatok elvégzésével validáltam a kétdimenziós modellszkriptek lefuttatásával kapott eredményt. A három különböző elrendezésű kábelben közös, hogy az azokat alkotó elemi szálak átmérője megegyezik: $d = 0,24 \text{ mm}$. Egy-egy elemi szálon a zománcvastagság $th = 7 \text{ }\mu\text{m}$. A kábelekben közös továbbá az is, hogy azonos számú, $N = 35 \text{ db}$ elemi szálát tartalmaznak. Így a teljes rézkeresztmetszet $A = 1,5833 \text{ mm}^2$. A kábelek abban a tulajdonságukban is megegyeznek, hogy a sodrás hatására az egyes elemi szálak hosszúsága a teljes kábel egy adott hosszán mérve, annál kb. $\Delta l = 1,3\%$ -kal nagyobb. Az azonos rézkeresztmetszetből következik az is, hogy minden kábel hosszegységre eső egyenáramú ellenállása azonos. Ennek értéke $\sigma_{\text{réz}} = 6 * 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ mellett, a sodrással származó Δl hosszúság többlettel kompenzálva $r_0 = 0,0106629 \frac{\Omega}{\text{m}}$.

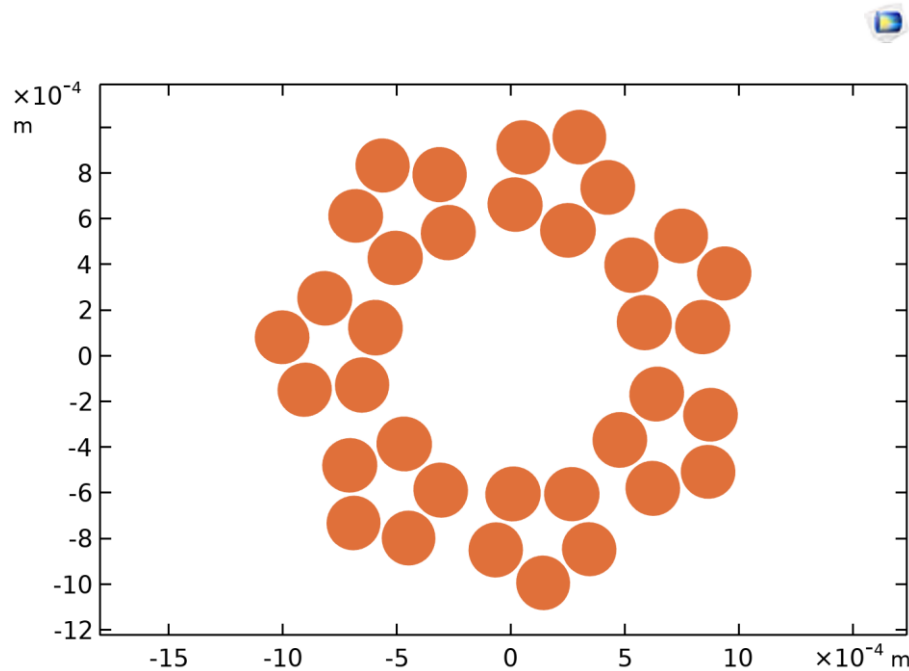
A kábelek áttekintő rajza a 3. ábrán, illetve a hosszegységre eső ellenállásaik frekvenciafüggése a 4. ábrán található. Utóbbin megfigyelhető, hogy alacsonyabb frekvenciákon az r_0 egyenáramú ellenállás jellemzi a kábeleket, azonban a frekvencia növelésével gyökeresen más karakterisztikát mutatnak. Ennek okait és megvalósításait a következő fejezetben tárgyalom. E fejezet többi pontjában pedig részletesebb leírást adok a modellezett kábelekről.



3.-4. ábra: A kábelfajták összefoglaló ábrája (fenn), és hosszegységre eső ellenállásuk a frekvencia függvényében (lent)

3.1 A típusú kábel

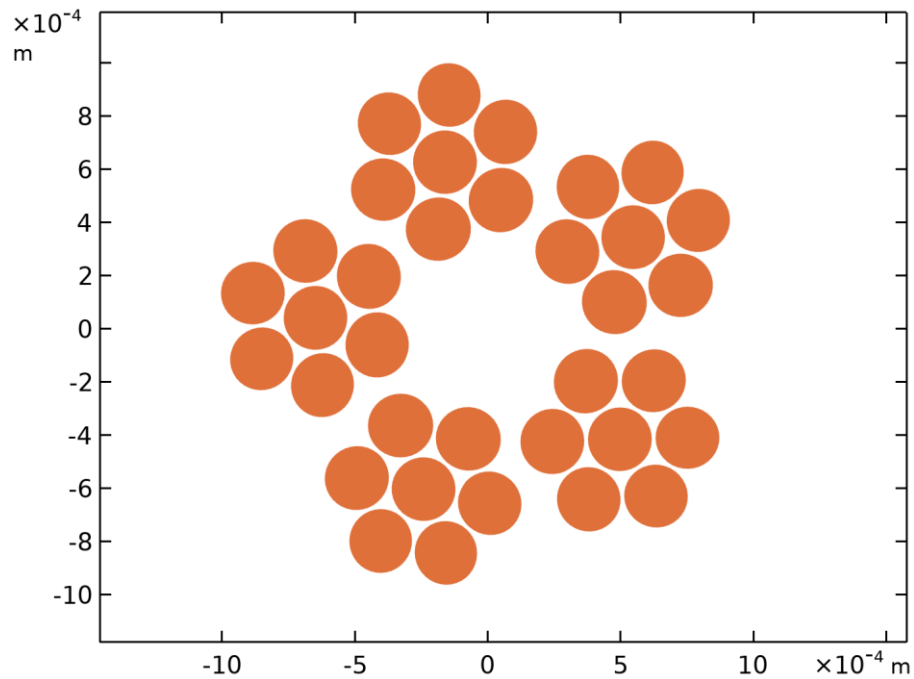
Az A típusú kábel egy kötege 5 db vezetőszálat tartalmaz, és 7 köteg van a kábelben. Mind a kötegek elhelyezkedése a kábelben belül, mind az elemi vezetőszálok elhelyezkedése a kötegen belül azonos. Az A típusú kábel keresztmetszeti ábrája zománcréteg nélkül $z = konst.$ síkban az 5. ábrán látható.



5. ábra: Az A típusú kábel keresztmetszeti rajza zománcréteg nélkül, $z=konst.$ síkban

3.2 B típusú kábel

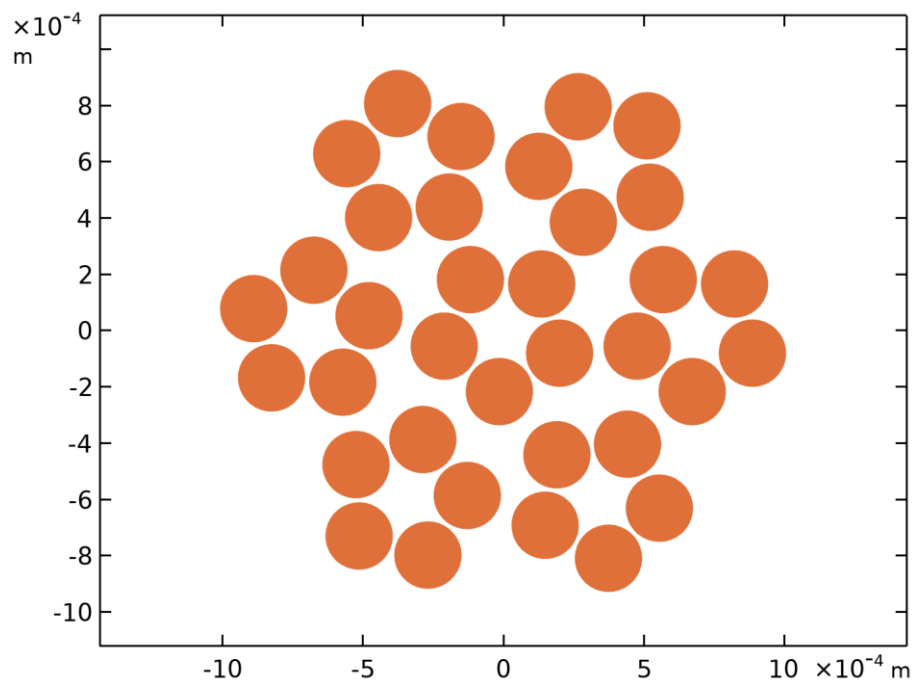
A B típusú kábel egy kötege 7 db vezetőszálat tartalmaz, és 5 köteg van a kábelben. A kötegek elhelyezkedése a kábelben belül azonos, az elemi vezetőszálok elhelyezkedésük szerint lehetnek centrális, vagy perifériális szálak. Egy kötegen belül 1 db centrális és 6 db perifériális vezetősál található. A B típusú kábel keresztmetszeti ábrája zománcréteg nélkül $z = konst.$ síkban a 6. ábrán látható.



6. ábra: A B típusú kábel keresztmetszeti rajza zománcréteg nélkül, $z=\text{konst.}$ síkban

3.3 C típusú kábel

A C típusú kábel egy kötege 5 db vezetőszálat tartalmaz, és 7 köteg van a kábelben. A kötegek elhelyezkedésük szerint lehetnek centrális, vagy perifériális kötegek. A kábelben belül 1 db centrális és 6 db perifériális köteg található. Az elemi vezetőszálok elhelyezkedése a kötegen belül azonos A C típusú kábel keresztmetszeti ábrája zománcréteg nélkül $z = \text{konst.}$ síkban a 7. ábrán látható.



7. ábra: A C típusú kábel keresztmetszeti rajza zománcréteg nélkül, $z=\text{konst.}$ síkban

4 Kétdimenziós modellek és validálásuk

A modellek validálását – a fizikai mérések 1.2 pontban említett nehézségei miatt – úgy végeztem, hogy a kétdimenziós modell implementálását követően, a lefuttatott szkript által szolgáltatott eredményeket összehasonlítottam a háromdimenziós modell szkriptjei által szolgáltatott eredményekkel. A validálás során az alábbi paramétereket hasonlítottam össze:

1. A J_z áramsűrűséget $f = 300 \text{ kHz}$ frekvencián.
2. A száláramok $I_c(f)$ frekvenciafüggvényét
3. A hosszegységre eső ellenállás $r(f)$ frekvenciafüggvényét.

A frekvenciafüggvényeket $f_1 = 1000 \text{ Hz}$ és $f_2 = 300 \text{ kHz}$ frekvenciaértékek között, $n = 30$ lépésben, logaritmusos lépésközzel számoltam ki. Míg a J_z áramsűrűséget, és az I_c száláramokat a szkriptek közvetlenül előállítják, a hosszegységre eső ellenállás az utófeldolgozás során számítható ki. A J_z áramsűrűségből a következőképpen meghatározható minden C_i elemi vezetősálon a disszipálódó hatásos teljesítmény:

$$P_{Ci} = \int_{\Omega_{Ci}} J_z d\Omega_{Ci}$$

A kiszámított hatásosteljesítményből, és a száláramokból pedig az alábbi módon kiszámítható egy köteg hosszegységre eső ellenállása:

$$r_{\text{köteg}} = \frac{2 * \sum P_{Ci}}{\sum |I_{Ci}^2|}$$

A teljes kábel hosszegységre eső ellenállása ekvivalens kötegek esetén osztandó a kötegszámmal:

$$r = \frac{r_{\text{köteg}}}{\text{kötegszám}}$$

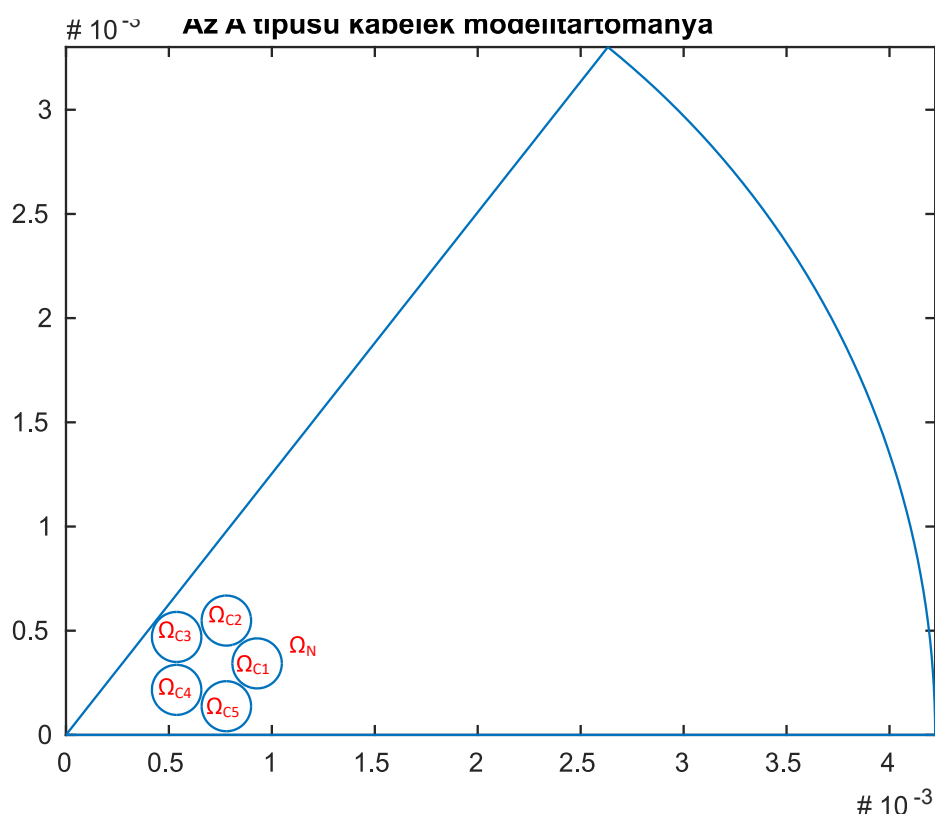
A sodrás hatására az egyes elemi szálak hosszúsága a teljes kábel egy adott hosszán mérve, annál kb. $\Delta l = 1,3\%$ -kal nagyobb. Ezt úgy vesszük figyelembe, hogy az egyenes kábelre vonatkozó ellenállást Δl tényezővel kompenzáljuk

$$r_{\text{sodrott}} = r * \Delta l$$

Az egyes kábelfajtákra kapott eredményeket a következő pontokban ismertetem. A kábelek teljes áramát az összes modellezési feladatban $I = 1A$ értékűnek választottam meg.

4.1 A típusú kábel

Az A típusú kábel kétdimenziós, keresztmetszeti modellezéséhez elegendő a teljes kábel 1/7-ed részét, azaz egy köteget modellezni. A modelltartomány képe a 8. ábrán látható:

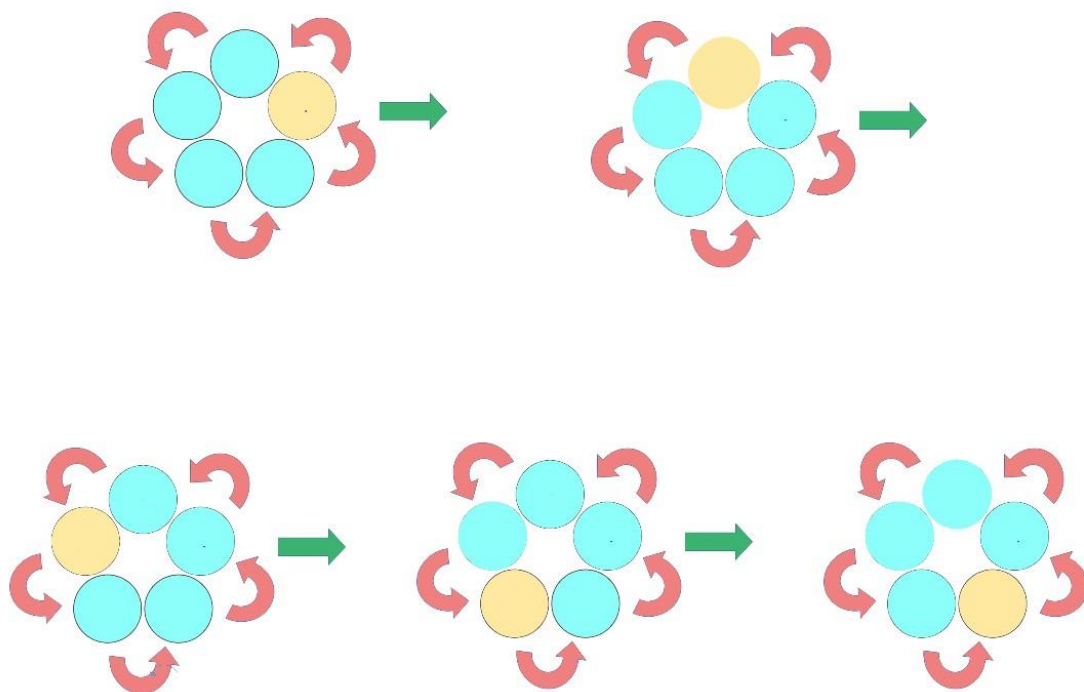


8. ábra: Az A típusú kábelek kétdimenziós modelltartománya

4.1.1 A sodrás figyelembevétele, a modellt leíró egyenletek

A kábelek kétdimenziós modellezése során a sodrás hatása ciklikus permutációval vehető figyelembe. Úgy tekintjük, hogy a kötegen belül az egyes elemi vezetősálak pozíciója keresztmetszetről keresztmetszetre folyamatosan változik. Ha a kábel kellően hosszú (legalább 5 menetemelkedésnyi), akkor minden elemi vezetősál minden lehetséges pozícióba eljut. Ha a sodrás egyenletes, és a vezetősálak között sincs megkülönböztetett szál, akkor minden egyes vezetősál minden lehetséges pozícióban azonos hosszúságon van jelen a kábel hossza mentén. Az A típusú kábel kötegeiben az így létrejövő szimmetria

miatt ekvivalenssé tehető minden vezetősál. Az A kábel egy kötegének vezetősálainak ciklikus permutációját a 9. ábrán szemléltetem.



9. ábra: Az A típusú kábelek egy kötegének vezetősálainak ciklikus permutációja

A 2.5 pontban levezetett egyenletek emiatt nagyban egyszerűsödnek. Mivel minden szál árama megegyezik, feszültségkényszer nélkül is előállítható a teljes megoldás. A k_i együtthatók értékét a 2.5.1 pontban meghatározott módon előállított $A_{1...5}$ bázismegoldások létrehozását, majd ezen bázismegoldásokból előállított I_{cj} elemi vezetősáláramok kiszámítását követően az alábbi egyenletrendszer szolgáltatja:

$$I_{szál} = k_1 * I_{11} + k_2 * I_{12} + k_3 * I_{13} + k_4 * I_{14} + k_5 * I_{15}$$

$$I_{szál} = k_1 * I_{21} + k_2 * I_{22} + k_3 * I_{23} + k_4 * I_{24} + k_5 * I_{25}$$

$$I_{szál} = k_1 * I_{31} + k_2 * I_{32} + k_3 * I_{33} + k_4 * I_{34} + k_5 * I_{35}$$

$$I_{szál} = k_1 * I_{41} + k_2 * I_{42} + k_3 * I_{43} + k_4 * I_{44} + k_5 * I_{45}$$

$$I_{szál} = k_1 * I_{51} + k_2 * I_{52} + k_3 * I_{53} + k_4 * I_{54} + k_5 * I_{55}$$

Ahol $I_{szál} = \frac{I_{kötég}}{5}$ és $I_{kötég} = \frac{I}{7}$ (a teljes kábeláram 1/7-e). Az ismeretlen k_i együtthatók meghatározását követően a teljes megoldás előállítható:

$$A = \sum_{i=1}^5 k_i A_i$$

$C_{i=1...5}$ vezetősízalak árama pedig az alábbi egyenletből:

$$\Omega_{ci}: J_i = -j\omega\sigma A_i + k_i$$

4.1.2 Implementáció

A 2.5.1. pont értelmében az implementálandó egyenletek a következők:

$$\Omega_{c1...i-1;i+1...N}: -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}A_i\right) + j\omega\sigma A_i = 0$$

$$\Omega_{ci}: -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}A_i\right) + j\omega\sigma A_i = 1$$

$$\Omega_n: -\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}A_i\right) = 0$$

Az A típusú kábel modelljének implementálása során $N = 5$ bázismegoldást kell előállítani. Ehhez a Matlab PDE Toolbox elliptikus sablonját használjuk fel, amely általános alakja az alábbi:

$$-\operatorname{div}(c \cdot \operatorname{grad}(u)) + a \cdot u = f$$

Az együtthatók beállítását az alábbi táblázatban mutatom be.

Elliptikus sablon együtthatói	c	a	f	u
Az i-edik bázismegoldáshoz tartozó vezető tartományra	$1/\mu$	$j\omega\sigma$	1	A_i
A többi vezető tartományra	$1/\mu$	$j\omega\sigma$	0	A_i
Nem vezető tartományra	$1/\mu$	0	0	A_i

A távoli lezárás peremén a 2.4.1 pontnak megfelelően Γ_∞ peremet kell előírni. Az implementálandó egyenlet:

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow A_z = konst. = 0$$

Ehhez a Matlab PDE Toolbox Dirichlet-perembeállítását használjuk fel, amelynek általános egyenlete:

$$h \cdot u = r$$

Az együtthatók beállítását az alábbi táblázatban mutatom be.

Dirichlet-peremfeltétel paraméterei	h	r	u
Γ_{∞} perem (távoli lezárás)	1	0	A_i

A szimmetriatengelyeken előírandó a 2.4.3. pontnak megfelelően Γ_{H0} peremet kell előírni.

Az implementálandó egyenlet:

$$\vec{n} \times \vec{H} = \vec{0} \rightarrow \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial n} = 0$$

Ehhez a Matlab PDE Toolbox Neumann-perembeállítását használjuk fel, amelynek általános egyenlete:

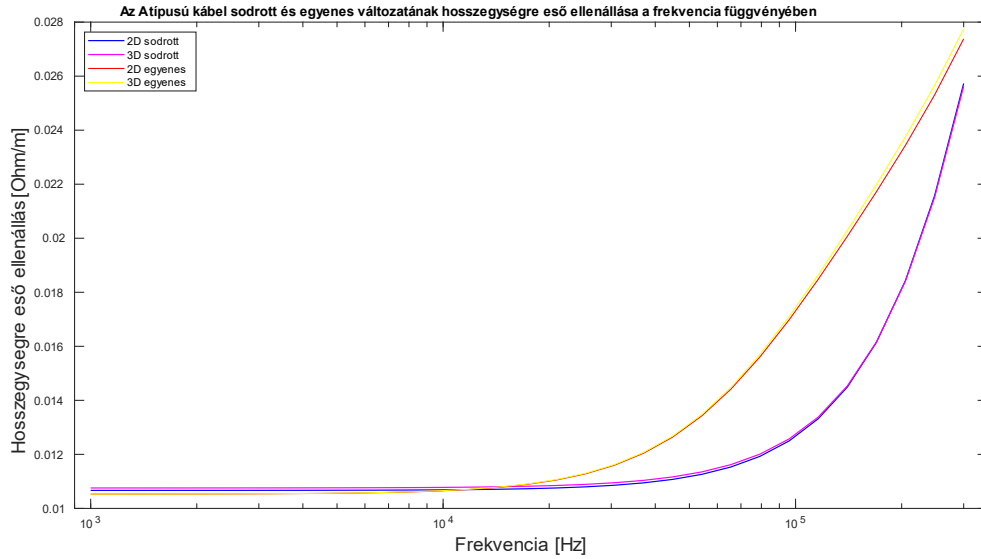
$$n \cdot c \cdot \text{grad}(u) + qu = g$$

Neumann-peremfeltétel paraméterei	c	q	g	u
Γ_{H0} peremek a szimmetriatengelyek mentén	$1/\mu$	0	0	A_i

Miután előálltak a bázismegoldások, az alkalmazott áram és feszültségkényszereket az utófeldolgozás során írjuk elő.

4.1.3 Eredmények

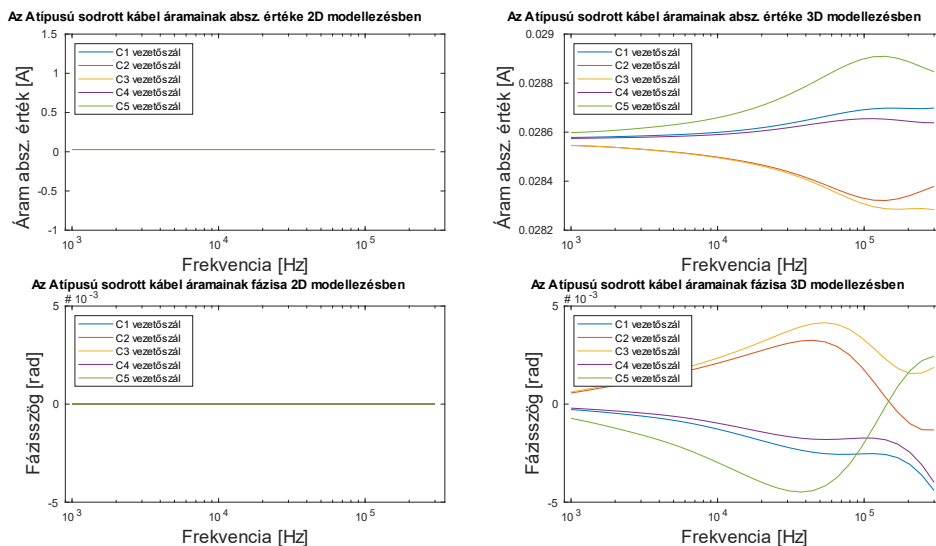
A 4. pont bevezetőszakaszában megfogalmazottak szerint három paramétert hasonlítottam össze. A 10. ábrán a hosszegységre eső r ellenállás frekvenciafüggését ábrázoltam. Hogy a sodrás hatása szemléltethető legyen, ábrázoltam a – gyakorlatban nem igazán használt – sodrásmentes (egyenes) kábel hosszegységre eső ellenállását is. Szeretném megjegyezni, hogy az egyenes kábel modelljének implementálása során nem a 2.4.2 pontban tárgyalt Γ_{HT} peremet előírva kényszerítettem az összes áramot a kötegre, hanem a 2.5 pontnak megfelelően előállítottam a bázismegoldásokat, és a 2.5.4 pontban sodrásmentes esetre felírt egyenletrendszerrel oldottam meg. A többi kábelfajta egyenes változatának modellezésekor is így jártam el.



10. ábra: Az A típusú kábel sodrott és egyenes változatának hosszegységre eső ellenállása a frekvencia függvényében

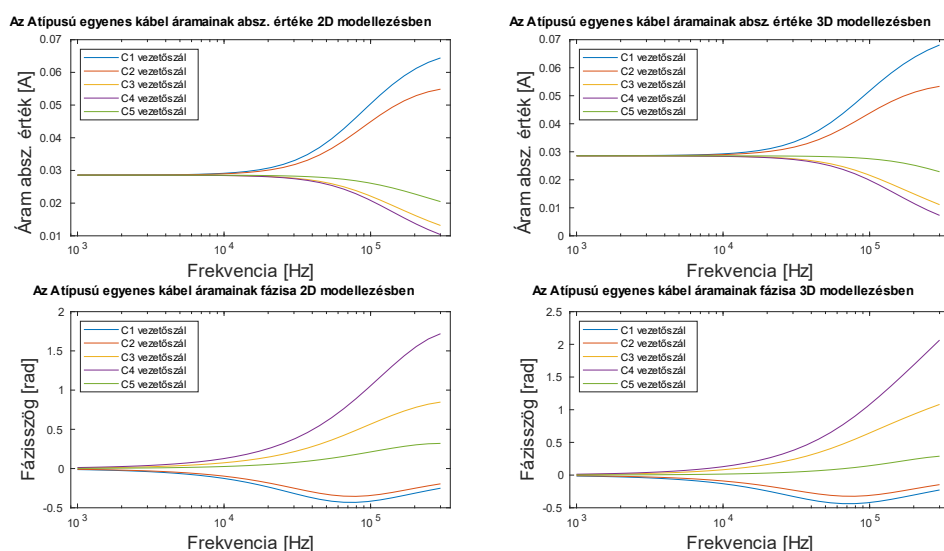
Az ábrán megfigyelhető, hogy alacsony frekvenciatartományban az egyenáramú ellenállásuk jellemzi a kábeleket. Az egyenes modelleknél ez némileg kisebb, mert a sodrás miatt a sodrott kábel vezetőszálai kis mértékben hosszabbak. Látható, hogy az is, hogy az üzemi frekvenciatartományban (50-100 kHz közötti tartomány) a sodrás hatására jelentősen kisebb a hosszegységre eső ellenállás.

Az A kábel I_{Ci} száláramait a frekvencia függvényében a 11. ábrán mutatom be.



11. ábra: Az A típusú sodrott kábel száláramai 2D és 3D modellezésben

Az ábrákon látszik, hogy a kétdimenziós modell implementációjában előírt szigorú áramkényszer miatt a száláramok abszolútértékei is, és fázisai is megegyeznek. A háromdimenziós eredmény mutat egy finom aszimmetriát, de a középértéktől való eltérés abban az esetben is rendkívül kicsi. A 12. ábrán az A típusú kábel sodrásmentes változatának árameloszlásait vizsgálom, és hasonlítom össze a kétdimenziós, és a háromdimenziós modellezés eredményeül kapott száláramokat.

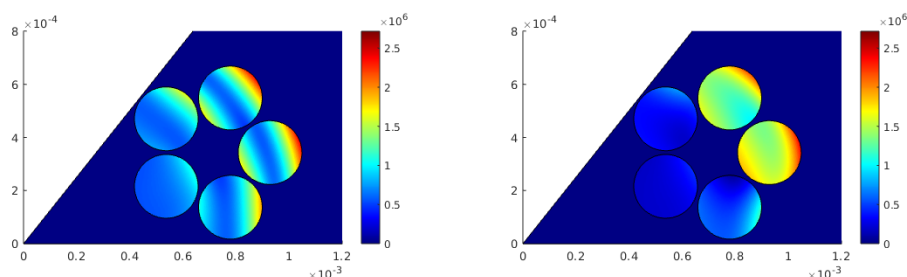


12. ábra: Az A típusú egyenes kábel száláramai 2D és 3D modellezésben

Megfigyelhető, hogy az eredmények alacsony frekvencián megegyeznek az előírt $I = 1A$ teljes kábeláram a köteg áram $1/35$ -öd részével, azaz minden vezetőszálon pontosan a kábeláram $1/35$ -öd része, azaz $I = 0,02857 A$ áram folyik. A frekvencia növekedésével azonban látható, hogy érdemben két vezetőszáll vesz részt az áramvezetésben. A kétdimenziós, és a háromdimenziós modellezésből származó eredmények gyakorlatilag megegyeznek.

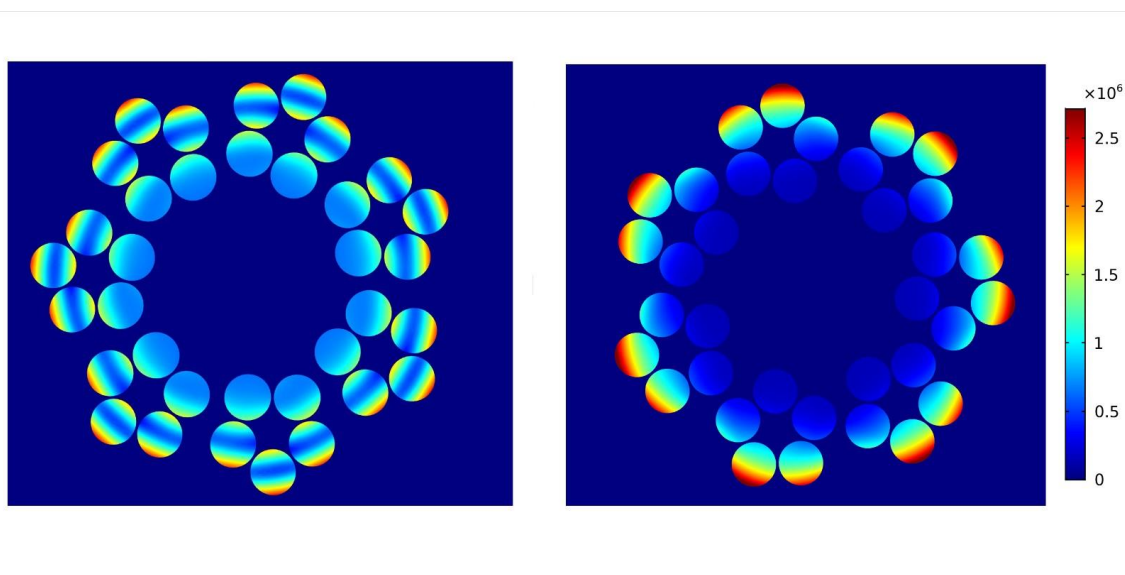
A 13. ábrán a kétdimenziós modell szkriptje által előállított J_z áramsűrűség abszolút értékét ábrázolom $f = 300 kHz$ frekvencián, míg a 13. ábrán a háromdimenziós modell szkriptje által előállított J_z mező abszolútértékét.

Az áramsűrűség abszolút értéke az A sodrott (balra) és egyenes (jobbra) kábelben $f=300$ kHz frekvencián [A/m^2]



13. ábra: A kétdimenziós szkript eredményeiből előálló, A típusú sodrott kábel és a sodrás nélküli (egyenes) kábel árameloszlásának abszolútértéke $f=300$ kHz frekvencián

Ezen az ábrán megfigyelhető, hogy ha nem lenne sodrás, akkor sokkal kiegyenlítetlenebb árameloszlás jönne létre a kábel vezetőszálaiban. Az áramvezetésben csupán a két külső vezetősál vesz részt. Ez a 11. és 12. ábrákon ábrázolt grafikonról is leolvasható. A 14. ábrán a háromdimenziós modellszkript által szolgáltatott árameloszlás abszolútértékét mutatom be.



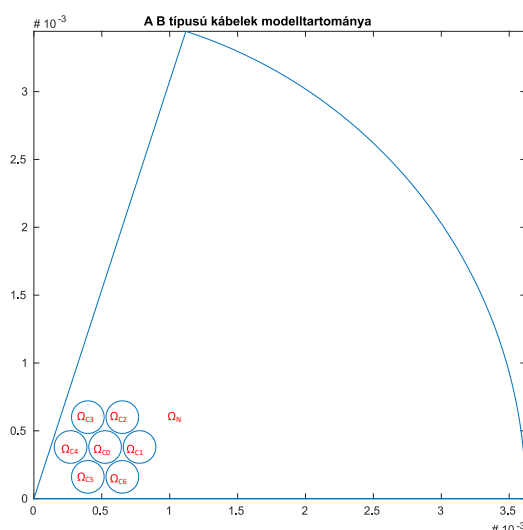
14. ábra: A háromdimenziós szkript eredményeiből előálló, A típusú sodrott kábel és a sodrás nélküli (egyenes) kábel árameloszlásának abszolútértéke $z=\text{konst.}$ síkban, $f=300$ kHz frekvencián

Az ábrákat 'jet' színskálával ábrázoltam, melynek határai mindkét szkriptben azonosnak. Habár a színes ábráról nehéz kvantitatív mennyiségeket leolvasni, látható hogy kvalitatívan

erős hasonlóságot mutat a két sodrott kábelt ábrázoló ábra. A grafikonokról leolvasható, hogy kvantitatívan ugyan megegyeznek a feltétezett egyenes kábelek árameloszlásai is, mégis mintha a kétdimenziós modellezés eredményéül kapott ábrán az áramvezetésben résztvevő két külső vezetőszálon némileg egyenletesebb lenne az árameloszlás. Ez kis mértékű eltérés, és adódhat az eltérő diszkretizálásból, illetve a 3D modell sodrásának finom aszimmetriájából.

4.2 B típusú kábel

A B típusú kábel kétdimenziós, keresztmetszeti modellezéséhez elegendő a teljes kábel 1/5-öd részét, azaz egy köteget modellezni. A modelltartomány képe a 15. ábrán látható:



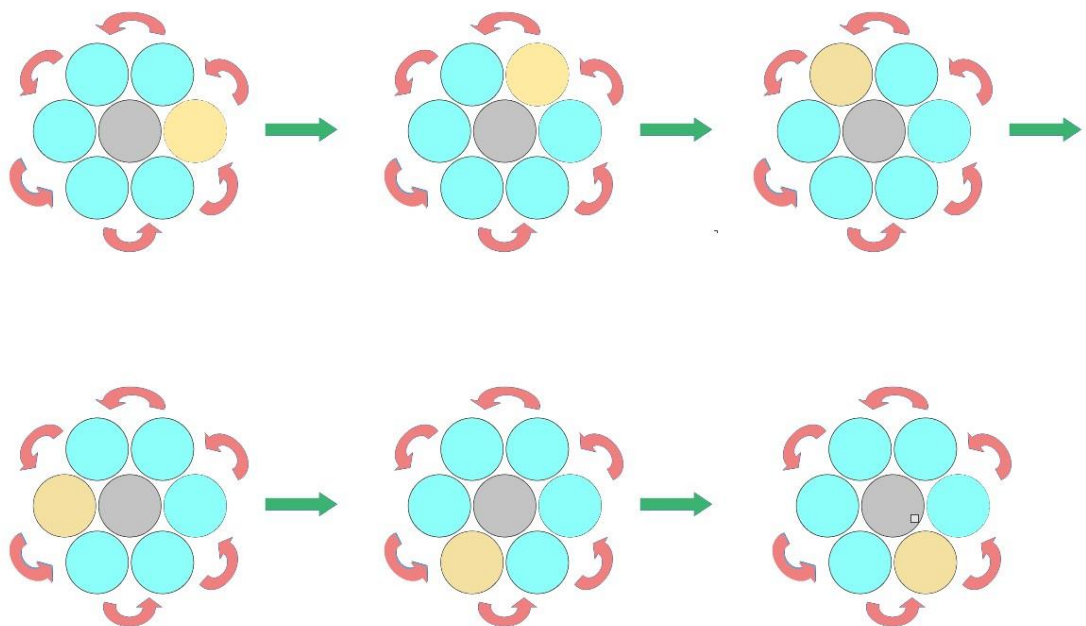
15. ábra: A B típusú kábelek kétdimenziós modelltartománya

4.2.1 A sodrás figyelembevétele, a modellt leíró egyenletek

A sodrás hatása a 4.1.1 pontban, az A típusú kábel esetéhez hasonlóan, ezúttal is ciklikus permutációval vehető figyelembe. A B kábel kötegeiben azonban van egy-egy centrális szál, és ezek nem kerülnek sodrásra. A perifériális elemi vezetősálak pozíciója keresztmetszetről keresztmetszetre folyamatosan változik. Ha a kábel kellően hosszú (legalább 6 menetemelkedésnyi), akkor minden elemi vezetősál minden lehetséges pozícióba eljut. Ha a sodrás egyenletes, és a vezetősálak között nincs megkülönböztetett szál, akkor minden egyes perifériális vezetősál minden lehetséges pozícióban azonos hosszúságon van jelen a kábel hossza mentén. Az így létrejövő szimmetria miatt a perifériális vezetősálak ekvivalenssé tehetők. Ekkor áramaik megegyeznek. A sodrás

hatására továbbá a Faraday-törvény felírása során, a zárt görbe által körbezárt fluxus is a pozícióhoz hasonlóan, keresztmetszetről keresztmetszetre változik. Ezen túlmenően, ha egy szál „megjárja” az összes lehetséges pozíciót, és ezekben egyenlő mértékben van jelen a kábel hossza mentén, akkor a kontrollpontokban előálló A_{pi} vektorpotenciálérték is felveszi az összes lehetséges pozícióhoz tartozó értéket – még hozzá egyenlő szakaszon. És az elemi szál teljes megoldáshoz való „hozzájárulása” – amit a k_i konstansok fejeznek ki – is az összes lehetséges pozícióból megvalósul, még hozzá egyenlő mértékben. A pozíció folyamatosan – a feljebb is említett módon keresztmetszetről keresztmetszetre – változik, azonban a számítások egyszerűsítése érdekében csak hat diszkrét pozíciót veszünk figyelembe. Ezért ezt a módszert diszkrét csavarásnak is nevezzük.

Ezen diszkrét pozíciókban a köteg keresztmetszeti képe azonos, viszont az elemi vezetősálak egy-egy pozíciót ugranak két ilyen diszkrét állapot között. Ezt a 16. ábra szemlélteti.



16. ábra: A B típusú kábelek egy kötegének perifériális vezetősálainak ciklikus permutációja

A megoldás szempontjából kulcsfontosságú, hogy egy-egy vezetősál egy-egy diszkrét pozícióban a keresztmetszetben a hossz mentén azonos számú alkalommal legyen jelen. Ehhez egy fontos feltétel, hogy a kábel l hossza legyen több nagyságrenddel nagyobb, mint a menetemelkedése, hiszen két diszkrét pozíció egymástól egy menetemelkedésnyi

távolságra helyezkedik el, így diszkrét sodrás csak ilyen feltétel mellett alkalmazható. Esetünkben ez megvalósul, mert $l = 1\text{ m}$, a menetemelkedés $9,6\text{ mm}$.

Mivel mind a kontrollpontban felvett lehetséges A_{Pi} vektorpotenciál értékek, mind az adott vezetősál megoldáshoz való hozzájárulását kifejező lehetséges k_i értékek egyenlő számban fordulnak elő a kábel teljes hossza mentén, ezért kifejezi a sodrás hatását, ha a Faraday-törvényt a centrális vezetősál, és egy „átlagos-fiktív perifériális vezetősál” között írjuk fel. Az erre vonatkozó A_{Pi} és k_i értékek az $A_{P1..6}$ értékek számtani közepeként, illetve a $k_{1..6}$ konstansok számtani közepeként állíthatók elő. A 2.5.4 pontban már említett módon az integrál zárt görbéje is csavarodik a sodrott szakaszon, és ezáltal az integrálási út megnövekszik a sodrott szakaszon. Ezt a Δl kompenzáló tényezővel lehet figyelembevenni, melynek értéke 1,3%.

A k_i együtthatók értékét a 2.5.1 pontban meghatározott módon előállított $A_{0..6}$ bázismegoldások létrehozását, majd ezen bázismegoldásokból előállított I_{cj} elemi vezetősáláramok kiszámítását követően az alábbi egyenletrendszer szolgáltatja:

$$I_c = k_0 * I_{00} + k_1 * I_{01} + k_2 * I_{02} + k_3 * I_{03} + k_4 * I_{04} + k_5 * I_{05} + k_6 * I_{06}$$

$$I_p = k_0 * I_{10} + k_1 * I_{11} + k_2 * I_{12} + k_3 * I_{13} + k_4 * I_{14} + k_5 * I_{15} + k_6 * I_{16}$$

$$I_p = k_0 * I_{20} + k_1 * I_{21} + k_2 * I_{22} + k_3 * I_{23} + k_4 * I_{24} + k_5 * I_{25} + k_6 * I_{26}$$

$$I_p = k_0 * I_{30} + k_1 * I_{31} + k_2 * I_{32} + k_3 * I_{33} + k_4 * I_{34} + k_5 * I_{35} + k_6 * I_{36}$$

$$I_p = k_0 * I_{40} + k_1 * I_{41} + k_2 * I_{42} + k_3 * I_{43} + k_4 * I_{44} + k_5 * I_{45} + k_6 * I_{46}$$

$$I_p = k_0 * I_{50} + k_1 * I_{51} + k_2 * I_{52} + k_3 * I_{53} + k_4 * I_{54} + k_5 * I_{55} + k_6 * I_{56}$$

$$I_p = k_0 * I_{60} + k_1 * I_{61} + k_2 * I_{62} + k_3 * I_{63} + k_4 * I_{64} + k_5 * I_{65} + k_6 * I_{66}$$

$$A_{P0} = k_0 * A_{00} + k_1 * A_{01} + k_2 * A_{02} + k_3 * A_{03} + k_4 * A_{04} + k_5 * A_{05} + k_6 * A_{06}$$

$$A_{P1} = k_0 * A_{10} + k_1 * A_{11} + k_2 * A_{12} + k_3 * A_{13} + k_4 * A_{14} + k_5 * A_{15} + k_6 * A_{16}$$

$$A_{P2} = k_0 * A_{20} + k_1 * A_{21} + k_2 * A_{22} + k_3 * A_{23} + k_4 * A_{24} + k_5 * A_{25} + k_6 * A_{26}$$

$$A_{P3} = k_0 * A_{30} + k_1 * A_{31} + k_2 * A_{32} + k_3 * A_{33} + k_4 * A_{34} + k_5 * A_{35} + k_6 * A_{36}$$

$$A_{P4} = k_0 * A_{40} + k_1 * A_{41} + k_2 * A_{42} + k_3 * A_{43} + k_4 * A_{44} + k_5 * A_{45} + k_6 * A_{46}$$

$$A_{P5} = k_0 * A_{50} + k_1 * A_{51} + k_2 * A_{52} + k_3 * A_{53} + k_4 * A_{54} + k_5 * A_{55} + k_6 * A_{56}$$

$$A_{P6} = k_0 * A_{60} + k_1 * A_{61} + k_2 * A_{62} + k_3 * A_{63} + k_4 * A_{64} + k_5 * A_{65} + k_6 * A_{66}$$

$$k_{avg} = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6}{6}$$

$$A_{Pavg} = \frac{A_{P1} + A_{P2} + A_{P3} + A_{P4} + A_{P5} + A_{P6}}{6}$$

$$-l \left(-j\omega A_{P0} + \frac{k_0}{\sigma} \right) + (l + \Delta l) * \left(-j\omega A_{Pavg} + \frac{k_{avg}}{\sigma} \right) = -j\omega l (A_{P0} - A_{Pavg} * \Delta l)$$

$$I_{k\ddot{o}teg} = I_c + 6 * I_p$$

Ahol I_c a centrális vezetősál árama, I_p a perifériális vezetősálak árama. Valamint $I_{k\ddot{o}teg} = \frac{I}{5}$ (a teljes kábeláram 1/5-öde). Az ismeretlen k_i együtthatók meghatározását követően a teljes megoldás előállítható:

$$A = \sum_{i=0}^6 k_i A_i$$

$C_{i=0...6}$ vezetősálak árama pedig az alábbi egyenletből számolható:

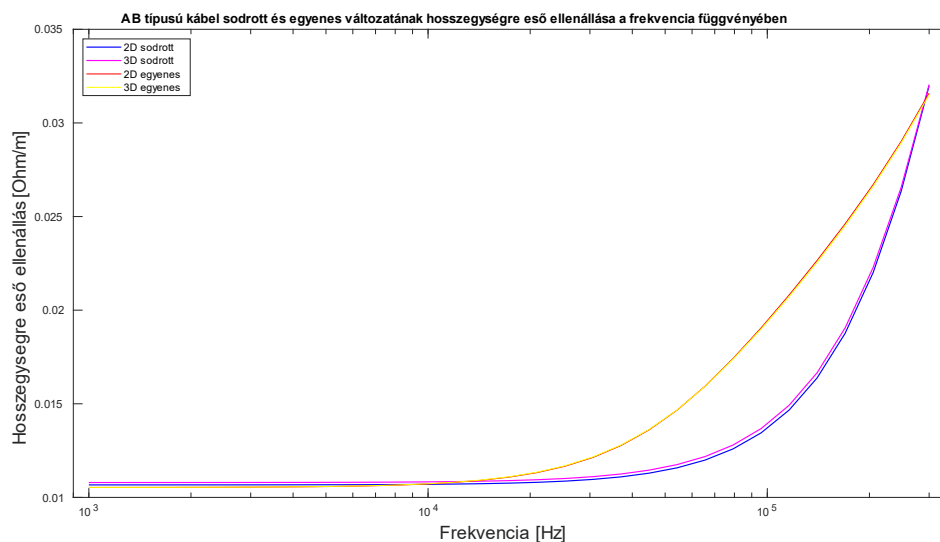
$$\Omega_{ci} : J_i = -j\omega \sigma A_i + k_i$$

4.2.2 Implementáció

Az implementáció szinte teljesen megegyezik a 4.1.1 pontban bemutatott kábel implementációjával. Az egyetlen – triviális – különbség, hogy a B típusú kábelek modellezésénél $N = 7$ bázismegoldást kell előállítani. Az implementáció egyebekben azonos. Az alkalmazott áram és feszültségkényszereket az utófeldolgozás során írjuk elő.

4.2.3 Eredmények

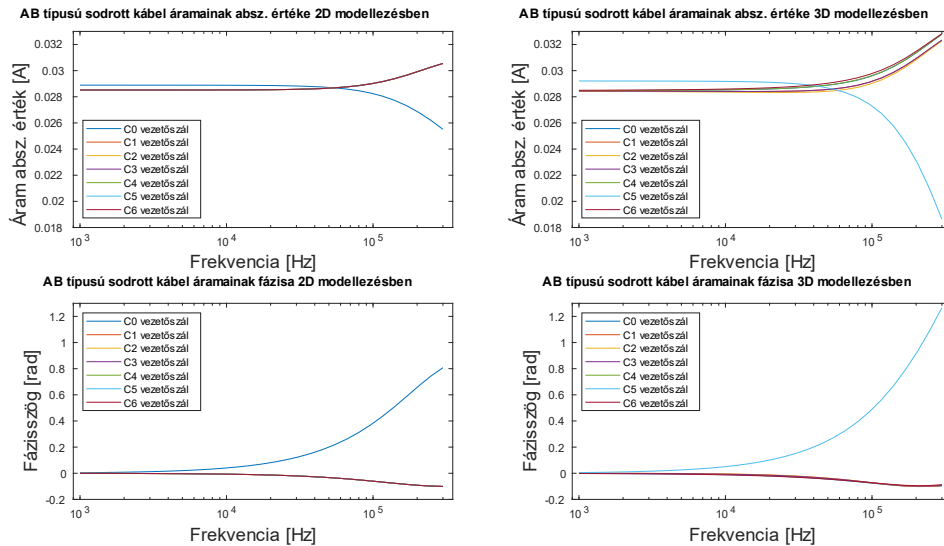
A 4. pont bevezetőszakaszában megfogalmazottak szerint, valamint a 4.1.3 ponthoz hasonlóan, a B kábelre is három paraméteret hasonlítottam össze. A 17. ábrán a hosszegységre eső r ellenállás frekvenciafüggését ábrázoltam. Hogy a sodrás hatása szemléltethető legyen, ábrázoltam a – gyakorlatban nem igazán használt – sodrásmentes (egyenes) kábel hosszegységre eső ellenállását is.



17. ábra: Az B típusú kábel sodrott és egyenes változatának hosszegységre eső ellenállása a frekvencia függvényében

Ezen az ábrán megfigyelhető, hogy alacsony frekvenciatartományban az egyenáramú ellenállásuk jellemzi a kábeleket. Az egyenes modelleknél ez némileg kisebb, mert a sodrás miatt a sodrott kábel perifériális vezetőszállai kis mértékben hosszabbak. Látható, hogy az is, hogy az üzemi frekvenciatartományban (50-100 kHz közötti tartomány) a sodrás hatására ezen a kábelen is jelentősen kisebb a hosszegységre eső ellenállás.

A B kábel I_{Ci} száláramait a frekvencia függvényében a 18. ábrán mutatom be.

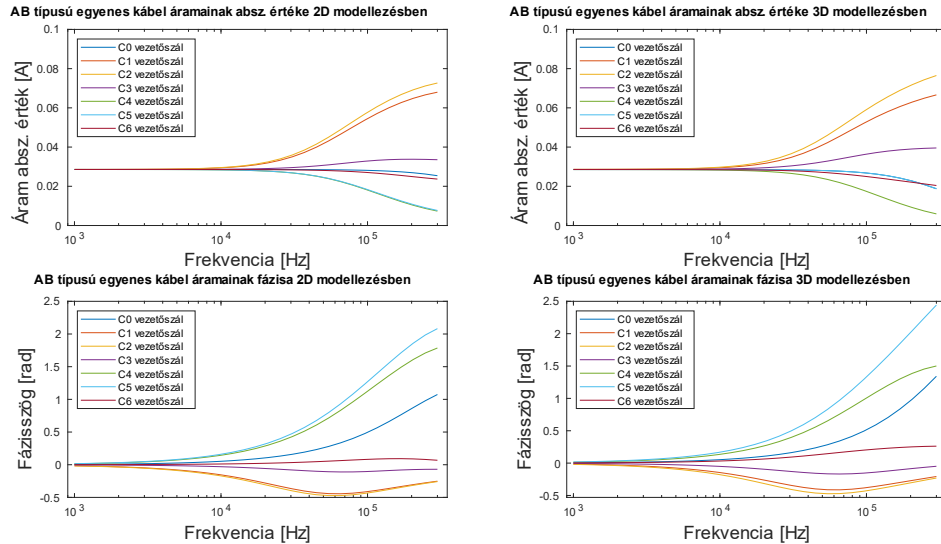


18. ábra: A B típusú sodrott kábel száláramai 2D és 3D modellezésben

Az áramok ábrázolása során feltűnő, hogy a C_0 centrális vezetőszál árama alacsony frekvenciákon kicsit nagyobb a perifériális vezetőszálakénál. Ennek oka, hogy a sodrásban nem vesz részt a centrális vezetőszál, emiatt azonos kábelhosszúságon a centrális vezetőszál picit rövidebb. Emiatt a hosszegységre eső ellenállása is alacsonyabb. Magasabb frekvenciákon a centrális szál áramának abszolútértéke csökken, a fázisa azonban jelentősen eltolódik. Ez arra utal, hogy ugyan kevesebb áramot szállít ez a vezetőszál, de az a többi szál áramirányához képest ellentétes irányú. Ez a hatás a háromdimenziós modellezés során erősebb.

Míg kétdimenziós és a háromdimenziós megközelítésből származó eredmények között a hosszegységre eső ellenállás frekvenciafüggvénye teljesen egybeesik, az áramok abszolútértékének frekvenciafüggvénye kis mértékű eltérést mutat, azok fázisszöge valamivel nagyobb, habár az ábrák jellege megegyezik. Az eltérés adódhat egyrészt abból, hogy a kétdimenziós szálak perifériális szálai között szigorú áramkényszert írtunk elő, másrészt származhat a csavarás diszkretizálásából, harmadrészt pedig a modelltartomány diszkretizálásának enyhe eltéréséből. Tekintettel arra, hogy a hiba viszonylag alacsony, az eredmények elfogadhatóak.

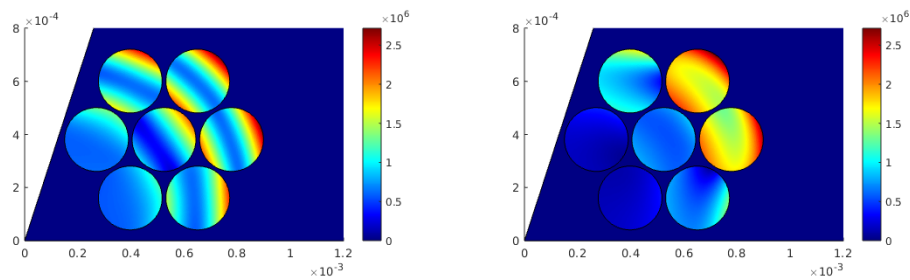
Az elméleti, egyenes kábelmodell eredményeképp kapott I_{Ci} száláramokat a következő ábrán, 19. ábrán mutatom be, hogy a csavarás hatását vizsgálni lehessen.



19. ábra: A B típusú egyenes kábel száláramai 2D és 3D modellezésben

A 17. ábrán bemutatott, egyenes kábel száláramainak jellege szintén megegyezik. Az leolvasható a görbékről, hogy a két külső vezetőszál nagyobb áramot szállít, mint a belsők, és ezek fázismenetének jellege is azonos. A 18. ábrán a kétdimenziós modell szkriptjei által szolgáltatott J_z árameloszlás abszolútértékét ábrázoltam.

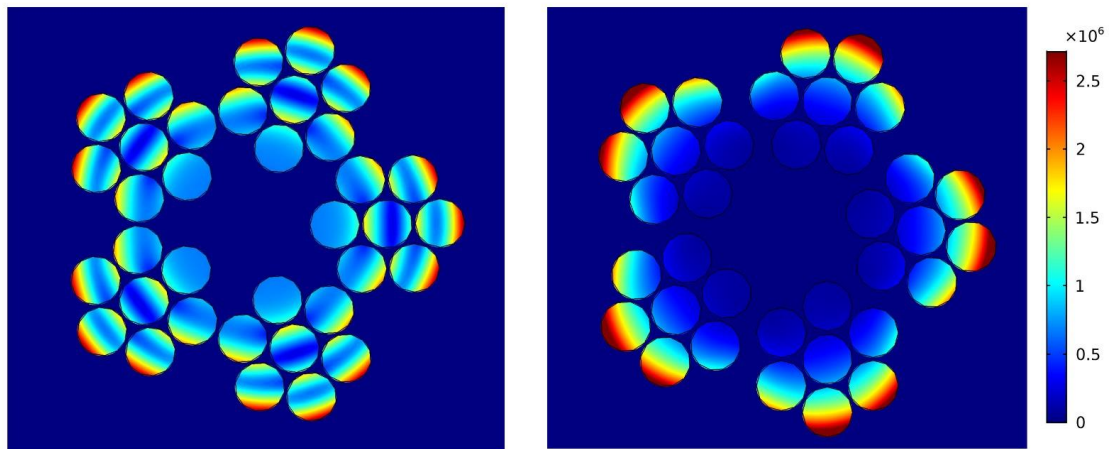
Áramsűrűség abszolút értéke az B sodrott (balra) és egyenes (jobbra) kábelben $f=300$ kHz frekvencian $[A/m^2]$



20. ábra: A kétdimenziós szkript eredményeiből előállók, B típusú sodrott kábel és a sodrás nélküli (egyenes) kábel árameloszlásának abszolútértéke $f=300$ kHz frekvencián

A 20. ábrán is látszik, ami a 18. ábráról és a 19. ábráról leolvasható, hogy a belső vezetők az áramvezetésben kevésbé vesznek részt az egyenes kábelben. A 21. ábrán a

háromdimenziós modellezés eredményeül előálló árameloszlás abszolútértékét ábrázoltam.

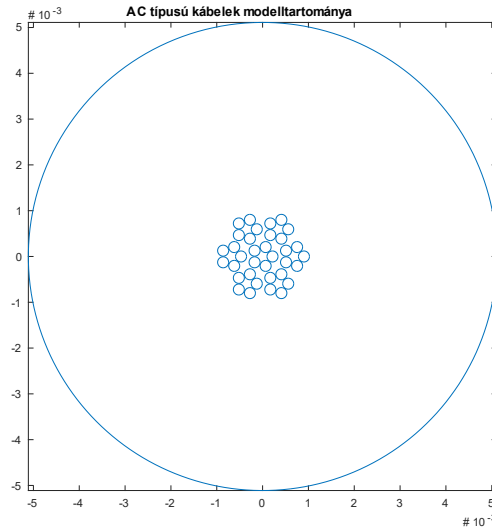


21. ábra: A háromdimenziós szkript eredményeiből előálló, B típusú sodrott kábel és a sodrás nélküli (egyenes) kábel árameloszlásának abszolútértéke $z=\text{konst.}$ síkban, $f=300\text{ kHz}$ frekvencián

Ugyan kvantitatív összehasonlítást ilyen jellegű ábrákon nehéz végezni, de az megfigyelhető, hogy a kétdimenziós és a háromdimenziós csavart kábel modell-szkriptjeinek futtatásából származó eredmények nagyon hasonlóak. Az egyenes kábel árameloszlása valamivel kiegyenlítettebb a kétdimenziós esetben.

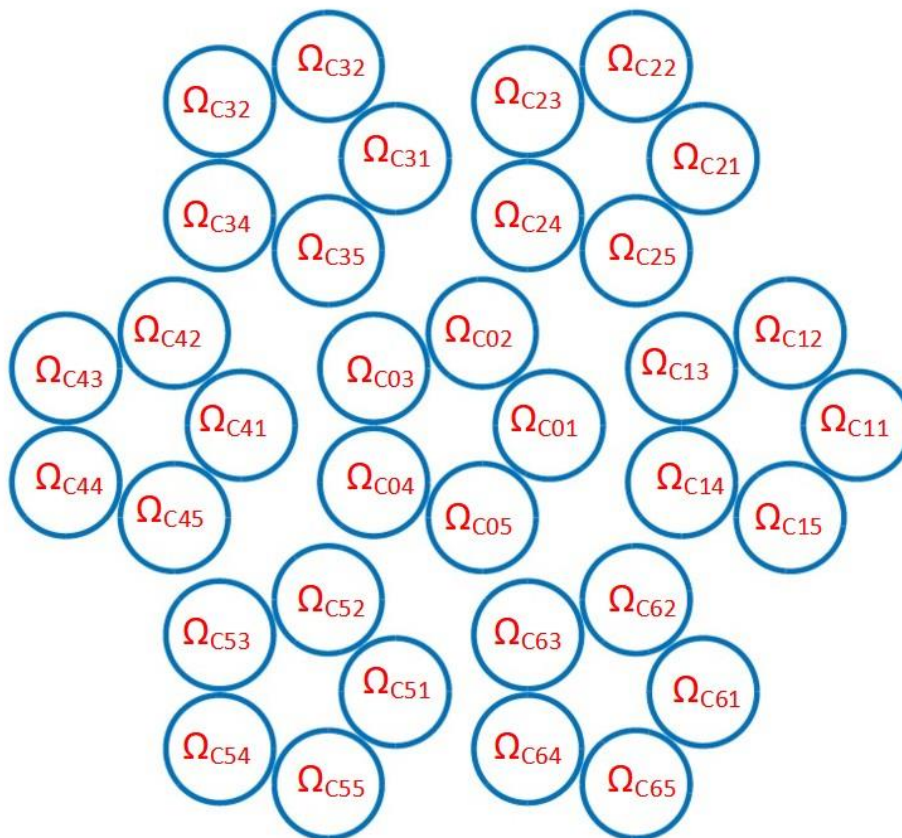
4.3 C típusú kábel

A C típusú kábel kétdimenziós, keresztmetszeti modellezéséhez a teljes kábelt modelleztem. A modelltartomány képe a 23. ábrán látható:



23. ábra: A C típusú kábelek kétdimenziós modelltartománya

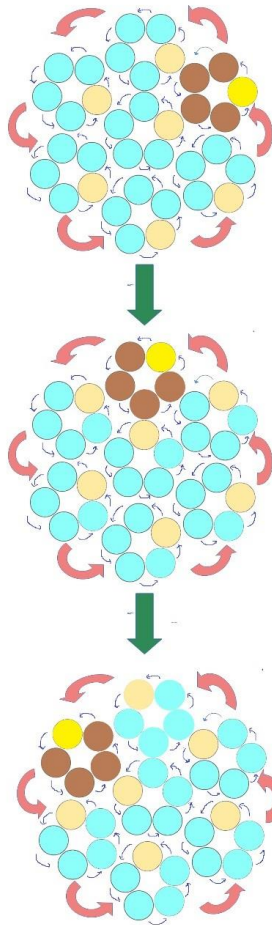
A modelltartományok számozását a 24. ábrán mutatom be. Egy vezetősál jelölése C_{ij} , ahol i a köteg száma, j a vezetősál száma.



24. ábra: A C típusú kábelek kétdimenziós modelltartományainak számozása

4.3.1 A sodrás figyelembevétele, a modellt leíró egyenletek

A sodrást az A típusú (4.1.1 szakasz) és B típusú (4.2.1 szakasz) kábeleknél már tárgyalt, ciklikus permutációval vesszük figyelembe. A 25. ábrán a ciklikus permutáció figyelhető meg a C kábel esetén. Megjegyzem, hogy az ábrázolás kedvéért úgy tekintettem, hogy szomszédos diszkrét állapotokban mind az egyes vezetősálak, mind az a perifériális köteg egy pozíciót ugranak.



25. ábra: A C típusú kábelek egy kötegének perifériális vezetősálainak ciklikus permutációja

Mivel a C kábel minden köteget modelleztem, ezért nem csak az elemi vezetősálakat, de a kötegeket is permutálni kell. A sodrás hatásának figyelembevétele egyebekben azonos módon történik, mint a B típusú kábelnél. A centrális vezetőkötégből a vezetősálak A_{pi} és k_i paramétereinek átlagolásával képzünk egy „átlagos-fiktív centrális” vezetőkötéget, valamint a 6 db perifériális kötegből hasonló módszerrel egy-egy

„átlagos-fiktív perifériális” vezetőköteget. Ezzel a kötegek sodrását figyelembe vettük. Végül a kábel sodrásának figyelembevételéhez az „átlagos-fiktív perifériális” vezetőkötegeket egymással is összeátlagolva létrejön a teljes, figyelembeveendő perifériális vezetőköteg.

Ezt a modellt 76 db egyenlet írja le, amelyeket egyszerűsítve az alábbiakban bemutatom. Az alkalmazott terminológia:

- I_{jk-nm} : A jk -adik vezetőszámban az nm -edik áramsűrűség integrálja
- A_{jk-nm} : A jk -adik vezetőszáll kontrollpontjában az nm -edik vektorpotenciál értéke:

$$I_C = k_{01} * I_{01-01} + k_{02} * I_{01-02} + \dots + k_{64} * I_{01-64} + k_{65} * I_{01-65}$$

$$\vdots$$

$$I_C = k_{01} * I_{06-01} + k_{02} * I_{06-02} + \dots + k_{64} * I_{06-64} + k_{65} * I_{06-65}$$

$$I_P = k_{01} * I_{11-01} + k_{02} * I_{11-02} + \dots + k_{64} * I_{11-64} + k_{65} * I_{11-65}$$

$$\vdots$$

$$I_P = k_{01} * I_{65-01} + k_{02} * I_{65-02} + \dots + k_{64} * I_{65-64} + k_{65} * I_{65-65}$$

$$A_{P01} = k_{01} * A_{01-01} + k_{02} * A_{01-02} + \dots + k_{64} * A_{01-64} + k_{65} * A_{01-65}$$

$$\vdots$$

$$A_{P65} = k_{01} * A_{65-01} + k_{02} * A_{65-02} + \dots + k_{64} * A_{64-64} + k_{65} * A_{65-65}$$

$$k_{Cavg} = \frac{k_{01} + k_{02} + k_{03} + k_{04} + k_{05}}{5}$$

$$k_{Pavg} = \frac{k_{11} + k_{12} + \dots + k_{64} + k_{65}}{30}$$

$$A_{Cavg} = \frac{A_{P01} + A_{P02} + A_{P03} + A_{P04} + A_{P05}}{5}$$

$$A_{Pavg} = \frac{A_{P11} + A_{P12} + \dots + A_{P64} + A_{P65}}{30}$$

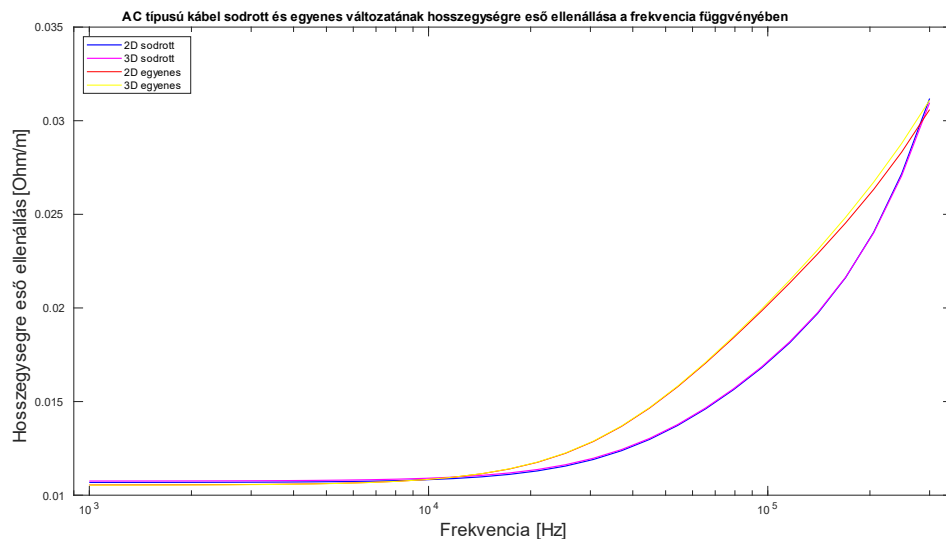
$$-\left(-j\omega A_{Cavg} + \frac{k_{Cavg}}{\sigma}\right) + \left(-j\omega A_{Pavg} + \frac{k_{Pavg}}{\sigma}\right) = -j\omega l(A_{Cavg} - A_{Pavg})$$

4.3.2 Implementáció

Az implementáció szinte teljesen megegyezik a 4.1.1 pontban bemutatott kábel implementációjával. Az egyetlen – triviális – különbség, hogy a C típusú kábelek modellezésénél $N = 35$ bázismegoldást kell előállítani. Az implementáció egyebekben azonos. Az alkalmazott áram és feszültségkényszereket az utófeldolgozás során írjuk elő.

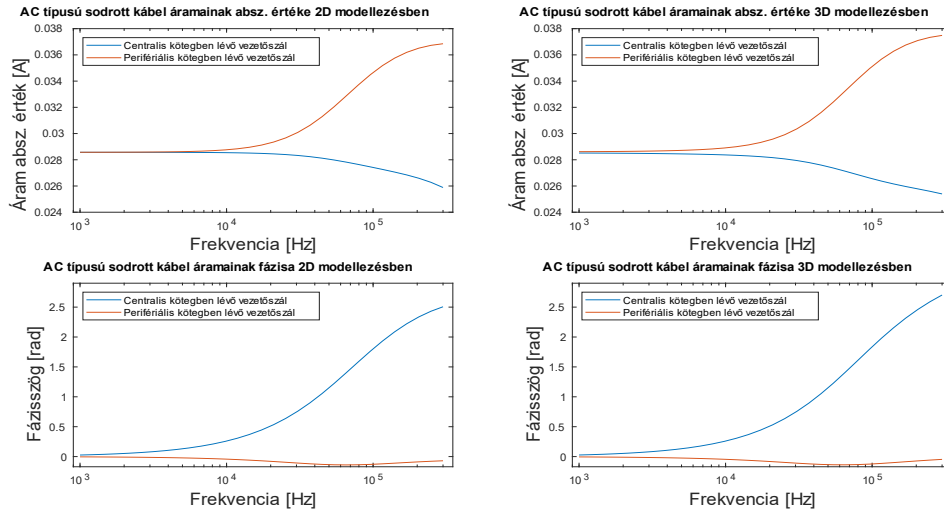
4.3.3 Eredmények

A kapott eredményeket a 3D modell eredményeivel vetem össze. 4. pont bevezetőszakaszában megfogalmazottak szerint, valamint a 4.1.3 ponthoz hasonlóan, a C kábel validálásához is három paramétert hasonlítottam össze. A 26. ábrán a hosszegységre eső r ellenállás frekvenciafüggését ábrázoltam.



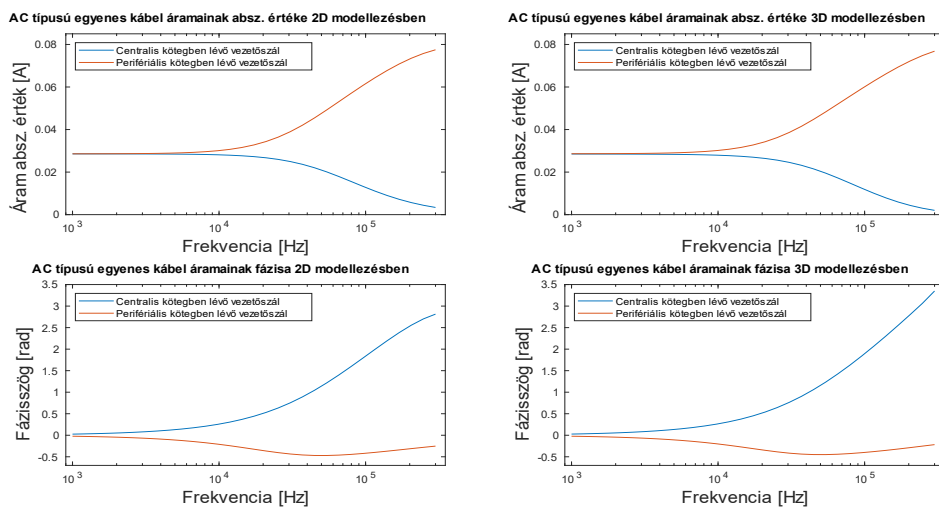
26. ábra: A C típusú kábel sodrott és egyenes változatának hosszegységre eső ellenállása a frekvencia függvényében

A tanszéki módszerrel készült modellszkriptek által előállított hosszegységre eső ellenállás-frekvencia $r_0(f)$ függvény mind az egyenes, mind a csavart esetre megegyezik a háromdimenziós modellszkript által szolgáltatottal. Tehát ezzel a módszerrel meghatározható a hosszegységre eső ellenállás. A csavart elrendezés kétféle modellezés során előállt áramait is összehasonlítottam 27. ábrán. Mivel a keresztmetszeti modellből kapott eredményekben szigorú áramkényszer van előírva az összes centrális, és perifériális kötegre, ezért csak egy-egy szálát ábrázolok mind a centrális, mind a perifériális kötegekből:



27. ábra: A B típusú sodrott kábel száláramai 2D és 3D modellezésben

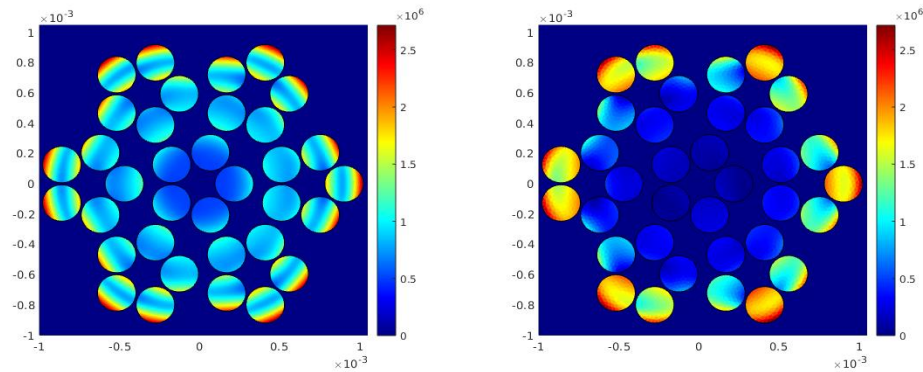
Látható, hogy a kétfajta modellezésből számított végeredmény, azaz az $I_{cij}(f)$ függvény nagyon jó közelítéssel megegyezik egymással. A minimális eltérések az abszolútérték és a fázis értékében magasabb frekvencián szintén származhatnak a 4.1.3 és a 4.2.3 szakaszban tárgyalt okokból. A 28. ábrán a feltételezett egyenes kábel áramait hasonlítom össze hasonló módszerrel azért, hogy a sodrás hatása figyelembe vehető legyen. Ez az ábra a teljesség igénye nélkül készült, azonos helyzetben lévő vezetőszalakat vettem fel mind a centrális, mind a perifériális vezetőkötegekből az áramok ábrázolásához. A teljes megoldáshoz egyébként 19 db vezetőszal áramának ábrázolása lenne szükséges. Azonban miután sodrásmentes kábel a gyakorlatban nem létezik, ezért nem törekedtem a teljességre az ábrázolás tekintetében.



19. ábra: A C típusú egyenes kábel száláramai 2D és 3D modellezésben (egy centrális és egy perifériális szál ábrázolásával)

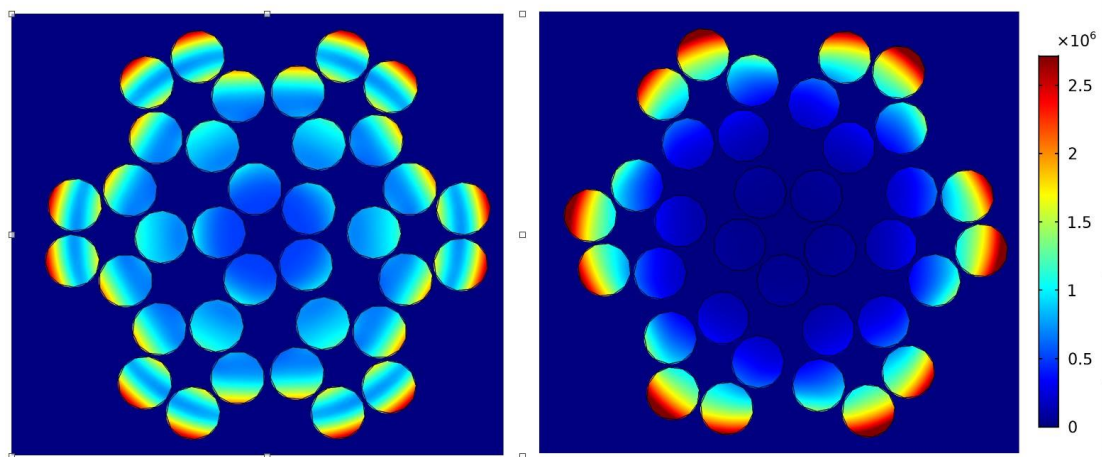
Az mindenképpen jól látszik az egyszerűsített ábráról is, hogy sokkal kevésbé kiegyenlített a C típusú kábel szálainak árama, ha nincs sodrás. Erről informál a 29. ábra, ahol a J_z áramsűrűség abszolútértékét ábrázoltam, először a kétdimenziós modellből megkapott áramsűrűség értékekre.

Aramsűrűség absz. értéke az C típusú sodrott (jobbra) és egyenes (balra) kábelben $f=300$ kHz frekvencián [A/m^2]



29. ábra: A kétdimenziós szkript eredményeiből előálló, C típusú sodrott kábel és a sodrás nélküli (egyenes) kábel árameloszlásának abszolútértéke $f=300$ kHz frekvencián

Hogy a kétdimenziós modell validálását ebben a tekintetben is elvégezhessük, a 30. ábrán bemutatom a háromdimenziós modell által szolgáltatott eredményeket is.



30. ábra: A háromdimenziós szkript eredményeiből előálló, A típusú sodrott kábel és a sodrás nélküli (egyenes) kábel árameloszlásának abszolútértéke $z=\text{konst.}$ síkban, $f=300$ kHz frekvencián

Az eddig bemutatott A és B kábelekhez hasonlóan, most is azt figyelhetjük meg, hogy a C típusú kábel egyenes változatán a kétdimenziós modellfájl által szolgáltatott végeredményben enyhén kiegyenlítettebb az árameloszlás. Az eltérés oka valószínűsíthetően itt is azonos az előző tesztfeladatok kiértékelése során már említett okokkal. Mind a diszkretizáció tökéletlensége, mind a háromdimenziós modell finom aszimmetriája okozhat ilyen jellegű eltérést. A sodrott kábelek esetén – amit egyébként a gyakorlati alkalmazásokban használnak – szinte tökéletesen követi a kétdimenziós modell a háromdimenzióst.

5 Összegzés, kitekintés

A diplomatervezési feladatomban sodrott, és kötegelt vezetőkkel, azok kétdimenziós modellezésével, illetve a modellezés általános szabályaival foglalkoztam. Az elméleti háttér ismertetését követően egy általános megoldási formulát is adtam. A megoldási formulákat tesztfeladatokon ellenőriztem, amelyeken többféle csavarás figyelembevételének lehetőségét is megmutattam. A tesztfeladatok széles frekvencia-tartományon kifejezetten jól illeszkednek a háromdimenziós modell által számolt eredményekre, amelyeket hitelesnek tekintettünk, mert a fizikai mérés érzékenysége miatt még pontosabban képesek visszaadni a valós kábel paramétereit. Megállapítottam, hogy a kötegek csavarása ugyan kiegyenlíti az árameloszlást a kábeleken, és az üzemi frekvenciatartományban sokat javít az egyes kábelek hosszegységre eső ellenállásán.

Az elkezdett feladatomat több irányban lehetne folytatni. A modellek összehasonlításának tekintetében egy újabb érdekes kérdés lenne összehasonlítása a kétfajta modellezési megközelítés a futási idejének összevetése. Sajnos nem volt módom arra, hogy a szkripteket azonos számítógépen lefuttassam, ezért a kapott eredményeket nem tudom összehasonlítani. A modellezés kiterjeszthető forgásszimmetrikus elrendezésekre is. A kiterjesztés első lépéseit már el is végeztem, a munkám során azért nem vizsgáltam behatóbban a tekercselt elrendezések tulajdonságait, mert a háromdimenziós modellel való validálása még nehezkesebb, mint az egyenes kábeleknek. Sodrott, és kötegelt vezetők közül álló tekercsek esetén is érdekes lenne vizsgálni az elrendezések ellenállásának frekvenciafüggését, illetve a sodrás mágneses tulajdonságokra vonatkozó hatását is.

Irodalomjegyzék

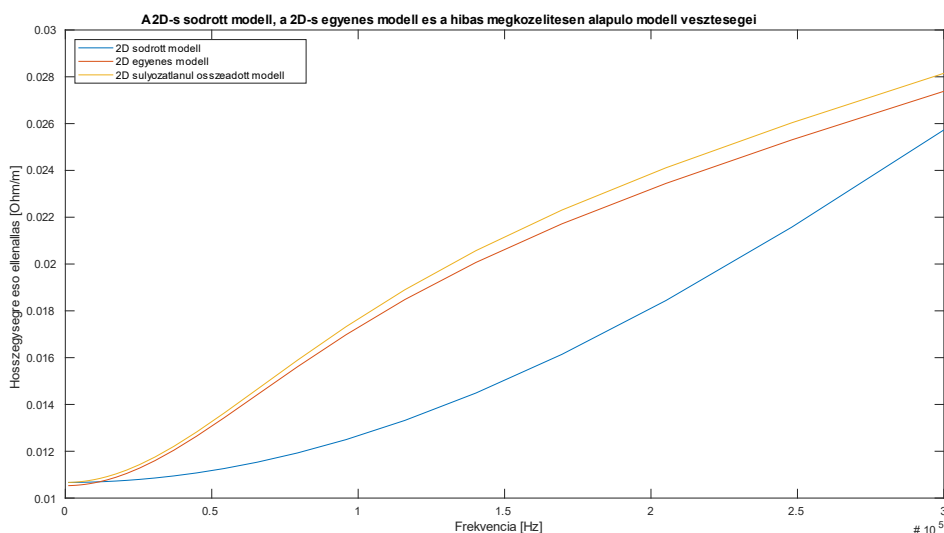
- [1] K. Simonyi and L. Zombory: *Elméleti villamosságtan*. Műszaki Könyvkiadó 2000.
- [2] L. Fejérvári, S. Bilicz, Sz. Gyimóthy, J. Pávó, G. Varga, Z. Várallyay:
Electromagnetic modeling of coils made of twisted Litz wire by combining finite element simulation and circuit laws Publikálatlan kézirat
- [3] H. Igarashi.: „*Semi-analytical approach for finite-element analysis of multi-turn coil considering skin and proximity effects*”. In: IEEE Transactions on Magnetics 53.1 (Jan. 2017) pp. 1–7.
- [4] A. Roßkopf, S. Schuster, A. Endruschat, and E. Bär.: „*Influence of varying bundle structures on power electronic systems simulated by a coupled approach of FEM and PEEC*”. In: IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC). Miami, FL, USA, 13-16 Nov 2016, pp. 1–1.
- [5] C. R. Sullivan. „*Optimal choice for number of strands in a litz-wire transformer winding*”. In: IEEE Transactions on Power Electronics 14.2 (Mar. 1999), pp. 283–291.

I. számú függelék: Hibás megközelítések

A dolgozatomban két féle hibás megközelítést is vizsgáltam.

I.A: Hibás megközelítés: bázismegoldások egyszerű összeadása

A bázismegoldások megfelelő súlyozására nagy figyelmet kell fordítani. Téves eredményre vezet a bázismegoldások súlyozatlan összeadása. A 2.5. fejezetben bemutatott k_i konstansok értékét mind a gerjesztett vezetőben kialakuló áram által a többi elemi szálon létrehozott áram, mind a gerjesztett vezető által létrehozott mágneses tér által a többi vezetőben létrejövő mágneses tér befolyásolja. Ezért súlyos hiba a bázismegoldások egyszerű összeadása, azaz formálisan minden $k_i = 1$ -nek tekintése. Az A típusú kábel paramétereit így is kiszámoltam, meglepő módon nem okozott jelentős hibát $f = 300 \text{ kHz}$ frekvencián, ám ebben valószínűleg szerepet játszik a kötegek egyszerűége.

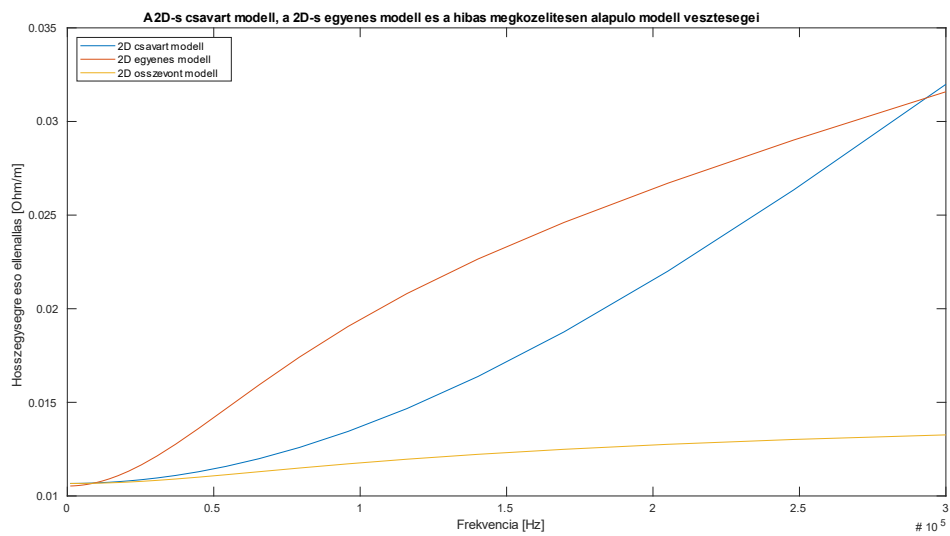


Hibás megközelítés: a bázismegoldások súlyozatlan összeadásából származó eredmény: $r_0(f)$ frekvenciafüggő ellenállás

I.B: Hibás megközelítés: A perifériális szálak összevonása

Hibás megközelítés, ha a vélt szimmetria miatt a perifériális szálak összevonásra kerülnek. Ezt a B típusú kábelben vizsgáltam. Ekkor két bázismegoldás keletkezik: az egyik esetén csak a perifériális szálak mindegyikén $k_{i=1..6} = 1$, míg $k_{i=0} = 0$ a centrális szálon. A másik bázismegoldásban éppen fordítva: a centrális szálon $k_{i=0} = 1$, míg a perifériális szálon $k_{i=1..6} = 0$. Ez az eset egy teljesen szimmetrikus mágneses teret feltételez, ami a kábel többi kötege miatt jelen elrendezésben nem teljesül. A feltételezett, de nem létező

szimmetria miatt a frekvencia növelésével sokkal kisebb mértékben növekszik a rosszul elkészített modell vesztesége.



**Hibás megközelítés: a perifériális szálak összevonásával keletkezett eredmények : $r_0(f)$
frekvenciafüggő ellenállás**

II. számú függelék: A beadott modellszkriptek

Kábelmodell megjelölése	Fájl neve
A kábel egyenes: peremen előírt H_t gerjesztéssel (nem került felhasználásra):	cable_TypeA_boundary.m
A kábel egyenes: bázismegoldásokkal gerjesztve	cable_TypeA.m
A kábel sodrott: bázismegoldásokkal gerjesztve	cable_TypeATwist.m
B kábel egyenes: peremen előírt H_t gerjesztéssel (nem került felhasználásra):	cable_TypeB_boundary.m
B kábel egyenes: bázismegoldásokkal gerjesztve	cable_TypeB.m
B kábel sodrott: bázismegoldásokkal gerjesztve	cable_TypeBTwist.m
C kábel egyenes: peremen előírt H_t gerjesztéssel (nem került felhasználásra):	cable_TypeC_boundary.m
C kábel egyenes: bázismegoldásokkal gerjesztve	cable_TypeC.m
C kábel sodrott: bázismegoldásokkal gerjesztve. Ez a szkript mind a kötegszinten, mind a kábelszinten sodrott megoldást szolgáltatja.	cable_TypeCTwist.m