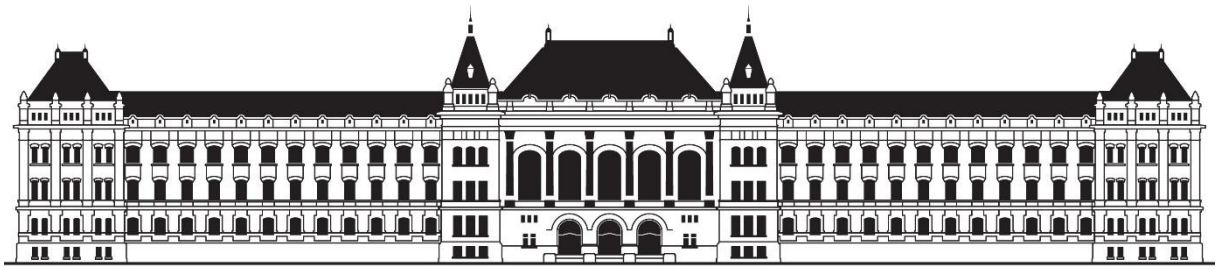


Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Építőmérnöki Kar

Általános- és Felsőgeodézia Tanszék

Magyarországi gradiensmező meghatározása a GOCE műhold adatai és Eötvös-inga mérések alapján

2022.

Konzulensek:

Dr. Tóth Gyula

Dr. Völgyesi Lajos

Készítette:

Pongrácz Dániel

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék……..…... 1

1. Bevezetés ……..…... 2

2. A földi nehézségi erőtér……...…. 3

2.1. Alapfogalmak…….……..…….. 3

2.2. A Föld normál nehézségi erőtere…….…...……..…… 5

2.3. Az Eötvös-tenzor…….…….……. 5

3. Az Eötvös-inga mérések…….. 6

3.1. Mérés az Eötvös-ingával…….…… 6

3.2. A rendelkezésre álló Eötvös-inga mérések……. 7

3.3. Szoftver fejlesztés……... 8

3.4. A kitöltő pontok meghatározása…….…… 8

4. Ellipszoid feletti magasságok számítása……...12

4.1. Tengerszint feletti magasságok interpolálása……. 12

4.2. Geoidunduláció interpolációja……14

5. Gradiensek és görbületi adatok számítása……15

5.1. A felhasznált geopotenciál modellek……..15

5.2. Műholdas adatok……16

4.2.1. GOCE……..16

4.2.2. GRACE……16

5.3. Számítások a GrafLab-bal……. 17

5.4. Eötvös-inga által mért mennyiségek a GrafLab-bal számított értékekből…… 21

6. Eredmények értelmezése…….. 22

6.1. Mért és számított mennyiségek összehasonlítása…….. 22

6.2. Összehasonlító ábrák készítése a mért és számított gradiens és görbületi adatokról az ingamérési pontokra…… 25

6.3. Gradiens és görbületi adatok ábrázolása a kitöltő pontokkal együtt…… 30

7. Összegzés……. 32

1. Bevezetés

A nehézségi erőtér gradienseinek mérése az Eötvös Loránd által megalkotott Eötvös-inga segítségével lehetséges. Az 1890-ben megalkotott műszer 1969-ig több fejlesztésen ment keresztül, ez idő alatt hazánkban kb. 300 db műszer készült. A műszerrel az első nagyobb területre kiterjedő terepi méréseket Eötvös Loránd és munkatársai végezték a Balaton jegén 1901 és 1903 között. Ezt követően a Magyar-Amerikai Olajipari Rt (MAORT), az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet (ELGI) és az Országos Kőolaj és Gázipari Tröszt (OKGT) összesen mintegy 60000 ingamérést végzett a sík- és az enyhén dombvidéki területeken. Ezen rengeteg mérésnek köszönhetően a nehézségi erő gradienseinek tekintetében a Kárpát- medence a Föld egyik legjobban felmért területe lett.

Sajnos ma már a mérési adatok egy része elveszett, viszont a jelentősebb részük a korábbi mérési jegyzőkönyvek alapján hozzáférhető. Ezeken mérési jegyzőkönyvek adatait az ELGI munkatársai számítógépes adatbázisba rendezték (Völgyesi – Tóth, 2002).

1995-2012 között az ELGI-től kutatási célra a BME megkapta a digitalizált adatbázist, mely 97 területről tartalmaz digitalizált gradiens és görbületi adatokat és ezek topografikus korrekcióit. Magyarország területére (és részben azon kívül) rendelkezésre áll 43986 pontbeli mért W_{xz}, W_{yz} gradiens és 37659 pontbeli $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$, illetve $2W_{xy}$ görbületi érték. Vannak viszont olyan részei az országnak, amelyekre nem állnak rendelkezésre Eötvös-inga mérések. Jelen TDK munkám során ezekre a területekre számítom ki a gradiens, illetve görbületi adatokat az Eötvös-inga méréseknek megfelelő pontsűrűséggel három újabb geopotenciál modellből (Tongji-GGMG2021S, EIGEN-6C4, SGG-UGM-2). Ezek a GOCE és GRACE műhold adatait tartalmazzák maximum $n = 300$ fokszámig. Előbbi modell maximális fokszáma 300, az utóbbi két modellé pedig 2190. Az utóbbi két modell az előbb említett műholdak adatain kívül más forrásból is tartalmaz adatokat (pl. szatellita altimetria).

Dolgozatom célja a mért, és a geopotenciál modellből számítható adatok összehasonlítása, illetve a mérések által le nem fedett területekre a mérések számított eredményekkel való kiegészítése. Ezen adatok számításához egy erre alkalmas szoftveren (pl. GrafLab) kívül a pontokhoz tartozó magasságértékekre is szükségünk van, amelyek nem álltak rendelkezésre. Ezeket az EU-DEM felszínmodellből pótoltam.

2. A földi nehézségi erőtér

2.1. Alapfogalmak

A Föld matematikai alakját a nehézségi erőtér potenciáljának szintfelületeként értelmezzük, míg a nehézségi térerősség vektorának iránya a függőleges irányt határozza meg, a nagysága pedig a szabadon eső test gyorsulásával egyezik meg. Így a nehézségi erőtér minél részletesebb leírása rendkívül fontos feladat. A GNSS mérések magasságadatai és a hagyományos módon meghatározott magasságok közötti kapcsolat megteremtéséhez különösen fontos a nehézségi erőtér precíz ismerete, hiszen a magasságokat a geoidra, azaz a nehézségi erőtér kiválasztott szintfelületére vonatkoztatjuk.

Ha valamely x, y, z 3 dimenziós tér minden pontjához valamilyen V skalármennyiség tartozik, akkor skalártérről beszélünk. Ennek leírására a $V(r) = V(x, y, z)$ skalár-vektor függvényt alkalmazzuk.

Ha az (x, y, z) 3 dimenziós tér minden pontjához valamilyen A vektormennyiség tartozik, akkor vektortérről beszélünk. Ilyen például a g nehézségi térerősség, ennek mértékegysége m/s^2. Leírására vektor-vektor függvényt használunk, ez vektorkomponensenként egy skalárfüggvényt jelent:

$$g(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} g_x(x, y, z) \\ g_y(x, y, z) \\ g_z(x, y, z) \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Mivel a vektor-vektorfüggvényt nehezebb használni, mint egy skalár-vektor függvényt, így a vektor-vektor függvényt egy skalár-vektor függvénnyel szeretnénk helyettesíteni. Ez akkor lehetséges, ha az adott erőtérhez rendelhető potenciál.

Ha egy $A(x, y, z)$ vektortér azonos egy V skalártér gradiensvektorainak terével, akkor a V az A erőtér potenciálja, így A helyett használható V.

Így a nehézségi térerősség felírható a nehézségi erőtér W potenciáljának gradienseként.

$$g = \boldsymbol{grad}(W) = \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix}^T \tag{2.2}$$

A földi nehézségi erő a tömegvonzási erő, a forgási centrifugális erő, illetve az árapálykeltő erők eredőjeként írható fel. Utóbbi hatását rendszerint eltávolítjuk a mérési eredményeinkből,

így a továbbiakban nem foglalkozom vele. A tömegvonzási erő potenciálját V-vel jelöljük, míg a nehézségi erő potenciálját W-vel.

Egy M tömegű pontszerű test által keltett tömegvonzási erőtér V potenciálja a következőképpen írható fel attól l távolságban:

$$V = \frac{k \cdot M}{l} \tag{2.3}$$

ahol k a Newton-féle tömegvonzási állandó

Nem pontszerű testre az összefüggés a következőképpen módosul:

$$V(\boldsymbol{r}) = k \cdot \iiint \frac{\rho(\boldsymbol{r_M})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_M}|} dxdydz \tag{2.4}$$

Ebben a képletben $\rho(\boldsymbol{r_M})$ a tömegelem sűrűsége, $\boldsymbol{r}$ a pont helyvektora, ahol a potenciált keressük. A fenti hármasintegrált a Föld teljes térfogatára ki kellene számítani. Ezzel az a probléma, hogy nem ismerjük pontosan a Föld belső sűrűség-eloszlását.

A forgási centrifugális erőtér potenciálját a következő összefüggés adja meg:

$$V_c(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 r^2 \cos^2 \psi \tag{2.5}$$

Az 1.4. egyenlet alkalmazásának nehézsége miatt a tömegvonzási erőtér V potenciálját a jobban használható gömbfüggvénysoros alakban szoktuk felírni. Ez a Laplace-egyenlet alapján vezethető le. Külső, forrásmentes erőtérben igaz:

$$\Delta V = div\big(\boldsymbol{grad}(V)\big) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{2.6}$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldásával, a forgásszimmetrikus tagok különválasztásával és a forgási centrifugális erőtér potenciáljának hozzáadásával a nehézségi erőtér W potenciálja az alábbi alakban írható fel:

$$W = \frac{kM}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(sin\Psi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \left(C_{n,m} cos\, m\lambda + S_{n.m} \sin m\lambda\right) P_{n,m}(sin\Psi)\right] + \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 \cos^2 \psi, \tag{2.7}$$

definíció szerint: $J_n = -C_{n0}$

A jelölések magyarázata: a – skálatényező, C_{nm}, S_{nm}– gömbfüggvény-együtthatók, Ψ – geocentrikus földrajzi szélesség, λ – földrajzi hosszúság, $P_{n,m}(sin\Psi)$ – asszociált Legendre-függvények, r – geocentrikus helyvektor hossza

2.2. A Föld normál nehézségi erőtere

A Föld normál nehézségi erőtere a Föld valódi nehézségi erőterét jól megközelítő szabályos (forgási és egyenlítői szimmetriás) eloszlású, viszonylag egyszerű matematikai összefüggésekkel leírható erőtér. A normál nehézségi erőtér meghatározható a szintszferoidok elméletével, illetve szintellipszoid segítségével. Stokes és Poincarré tétele értelmében egy ω szögsebességgel forgó M tömegű test S külső szintfelületének önkényes felvétele után az U normálpotenciál és a $\boldsymbol{\gamma}$ normál nehézségi gyorsulás már számítható a belső tömegeloszlás ismerete nélkül a Stokes-féle elemekből (ω, M, S). Az S külső szintfelületnek a Föld normálalakját, azaz egy forgási ellipszoidot veszünk fel. A normálpotenciált az alábbi összefüggéssel számíthatjuk a szintellipszoidon:

$$U = \frac{kM}{R}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_{2n}^{*}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(sin\psi)\right] + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\psi \tag{2.8}$$

a J_{2n}^{*} gömbfüggvény-együtthatók a Stokes-féle elemekből zárt képlettel számíthatók (Biró-Ádám- Völgyesi- Tóth, 2013).

A potenciálzavar a valódi potenciál és a normálpotenciál különbsége:

$$T = W - U \tag{2.9}$$

2.3. Az Eötvös-tenzor

Az Eötvös-tenzor a g nehézségi gyorsulás 3 vektorkomponensének x, y, z szerinti deriváltjait tartalmazza, megadja a nehézségi gyorsulás komponenseinek hosszegységre eső megváltozását. Mivel a g nehézségi térerősség a W potenciál gradiensvektora, ezért az Eötvös-tenzor elemei a W potenciálfüggvény második parciális deriváltjai.

$$\boldsymbol{E} = \frac{d\boldsymbol{g}}{d\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_x}{\partial x} & \frac{\partial g_x}{\partial y} & \frac{\partial g_x}{\partial z} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} & \frac{\partial g_y}{\partial y} & \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} & \frac{\partial g_z}{\partial y} & \frac{\partial g_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x\partial x} & \frac{\partial W}{\partial x\partial y} & \frac{\partial W}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial y\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y\partial y} & \frac{\partial W}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial z\partial x} & \frac{\partial W}{\partial z\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$egyszerűbb\ jelöléssel: \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

a nehézségi gyorsulás hosszegységre eső változása (Völgyesi, 2002):

$$\boldsymbol{dg} = \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{ds}, \qquad ahol\ \boldsymbol{ds} = [dx \quad dy \quad dz]^T \tag{2.12}$$

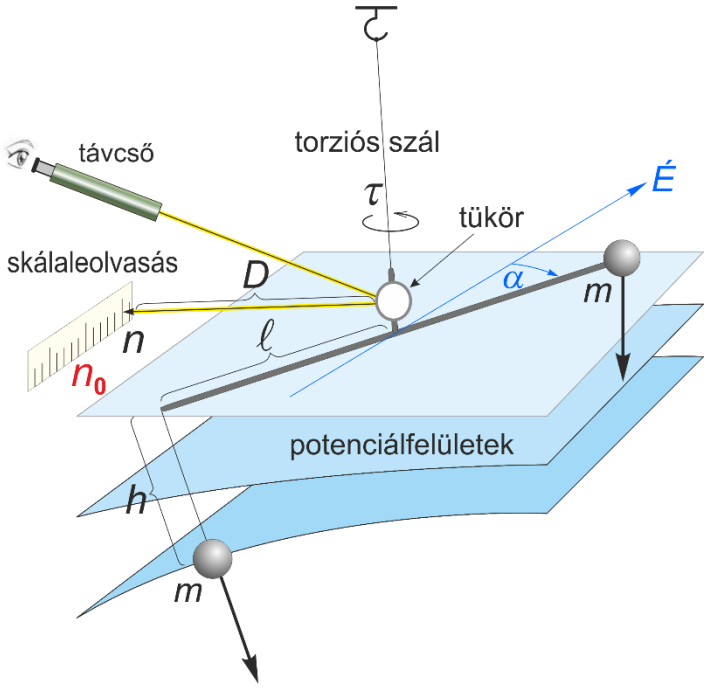
A Young-tétel szerint vegyes második deriváltak egyenlők, így az Eötvös-tenzor 9 eleméből csak 6 független, a tenzor szimmetrikus (Biró- Ádám- Völgyesi- Tóth, 2013). Az Eötvös-tenzor elemeinek SI mértékegysége $1/s^2$ a gyakorlatban azonban inkább ennek a 10^{-9}-szerese használatos, amit Eötvös Loránd tiszteletére 1 Eötvösnek neveznek ($1E = 10^{-9}\frac{1}{s^2}$) (Völgyesi, 2002).

3. Az Eötvös-inga mérések

3.1. Mérés az Eötvös-ingával

Az Eötvös-ingával négyféle mennyiség mérhető: W_{xz}, W_{yz}, $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$, W_{xy}. A mérések pontossága 1-2 E középhibával jellemezhető. A W_{zz} függőleges gradiens is mérhető, de nem Eötvös-ingával és kisebb megbízhatósággal (kb. 20-30 E) (Biró- Ádám- Völgyesi- Tóth, 2013).

Az Eötvös-ingával mért mennyiségeket egy olyan lokális jobbsodrású koordináta-rendszerben értelmezzük, ahol az x-tengely észak felé, az y-tengely kelet felé, a z tengely függőlegesen lefelé mutat. Ezt különösen fontos tisztázni azért, mert a nehézségi gradienseket nem mindig ebben a koordináta-rendszerben értelmezik (ELGI, 1998). A szoftver, amit a gradiensek kiszámításához használtam, a GrafLab, a következő szintén jobbsodrású koordináta-rendszerben (LNOF: Local North Oriented Reference Frame) értelmezi az Eötvös-tenzor elemeit: az x tengely észak felé, az y tengely nyugat felé, a z tengely függőlegesen felfelé mutat. Sajnos a koordináta-rendszer nem volt egyértelműen definiálva a dokumentációban, így nem vettem rögtön észre, hogy az ingamérések és a számított gradiensek koordináta-rendszere nem egyezik.



1. ábra: Az Eötvös-inga működésének alapelve

Az Eötvös-inga működési alapelvét az 1. ábra szemlélteti. Régen az Eötvös-inga a kőolaj-kutatásban gyakran használt műszer volt, manapság csak ritkán különleges feladatokra (pl. függővonal-elhajlás interpoláció) használják. Az Eötvös-ingával mérendő pontokat vagy szelvény mentén, vagy pedig hálózatos formában háromszögek, esetleg négyszögek szerint telepítik.

Az Eötvös-inga érzékenyebb a felszíni sűrűségeloszlásra, mint a graviméterek, ezért csak sík vagy enyhén dombos területek alkalmasak mérésre. A mérési pontoknak a közlekedési utaktól min. 40-50 m-re kell lenniük. A közvetlen környezetben lévő tömegek hatásának számítása miatt a pont közelében 8 irányban szimmetrikusan szintezést végeznek a következő távolságokban: 0.6 m, 1 m, 1.5 m, 3 m, 5 m, 10m, 20 m, 50 m (nagyobb egyenetlenségek esetén esetleg még 70m-re és 100 m-re). A mérési pont közvetlen környezetében (100 m-ig) lévő tömegek hatását térszínhatásnak nevezzük. Ennek számítására levezettek olyan összefüggéseket, amelyekbe a szintezések adatait kell behelyettesíteni. Ha a térszínhatást levonjuk a nyers értékekből, akkor a topografikus értékeket kapjuk meg. (Völgyesi, 2002)

3.2. A rendelkezésre álló Eötvös-inga mérések

1995-2012 között az ELGI-től kutatási célra a BME megkapta a digitalizált adatbázist, mely 97 területről tartalmaz digitalizált gradiens (W_{xz}, W_{yz}) és görbületi ($W_\Delta = W_{yy} - W_{xx}, 2W_{xy}$) adatokat és ezek topografikus korrekcióit. A méréseket 71 karakteres rekordokban tárolták. A Kraszovszkij-ellipszoidra vonatkozó Gauss-Krüger koordinátákat Völgyesi Lajos átszámította EOV-be. Ezeket a .dat állományokat összefűzve és WGS84-be átszámítva Python-ban a pyproj könyvtár használatával, valamint a topografikus korrekciót levonva Tóth Gyula kiírta a convert_dat_all.py programmal az ingared_all1.dat állományba. Összesen 40056 mérési pont van. A topografikus javítással ellátott állomány a következő formátumú:

Pontszám φ λ W_{xz} W_{yz} W_Δ $2W_{xy}$

A pontok ezután át lettek számítva EOV-be, ehhez Tóth Gyula korábban már megírta a szükséges programot. A pontok elhelyezkedése a 2. ábrán látható EOV vetületben. Az ábrán jól látszik, hogy az országban rengeteg területen nem állnak rendelkezésre mérési eredmények. Jól megfigyelhető, hogy a Dunántúlon a mérési pontok vonalakat alkotnak, azok között pedig nagy üres területek vannak, míg az Alföldön és az országhatáron kívül fekvő mérési pontok elhelyezkedése szabályosabb elrendezést mutat.

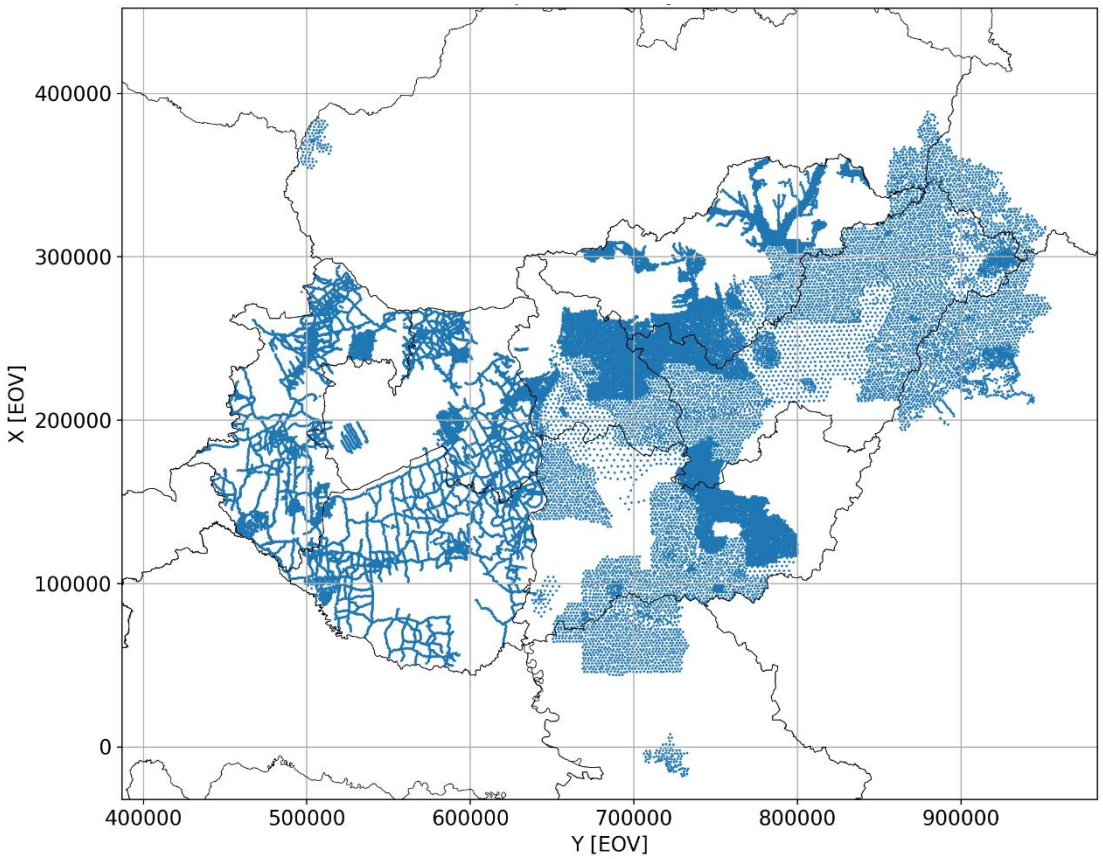
3.3. Szoftverfejlesztés

A számítások nagyrészt Python nyelven írt szkriptek segítségével történtek. A Python könyvtárak közül a numerikus számításokhoz a NumPy, az interpolációhoz és a KD-fához a SciPy, az ábrák készítéséhez a Matplotlib, a vetületi átszámításokhoz a Pyproj, a GEOTIFF fájlok kezeléséhez a GDAL, az ország- és régióhatárok ábrázolására a GeoPandas programkönyvtárakra volt szükség. Kezdetben a Microsoft Visual Studio-t használtam, azonban a GDAL könyvtár telepítése problémát okozott. Szerencsére Google Colab környezetben működött ez is (ez böngészőben használható, telepítést nem igényel a számítógépre), így a továbbiakban ezt használtam. Egyetlen hátrányként megemlíteném, hogy a Colab minden indításakor telepíteni kell a nem standard könyvtárakat (pl. GDAL), akár a szkript elejére írt utasítással, de ez szerencsére néhány másodperc alatt megtehető. Alapértelmezetten interaktív jegyzetfüzet készítésére van lehetőség, de előre megírt szkriptek is futtathatók. A jegyzetfüzet futtatása után a legtöbb szkriptet normál .py kiterjesztésű programkódként mentettem el a jegyzetfüzet helyett (a jegyzetfüzetként való mentés után egy .ipynb kiterjesztésű fájlunk lesz).

3.4. A kitöltő pontok meghatározása

Az első lépés az volt, hogy meghatározzam az adatpontok átlagos távolságát, és ezen rácstávolsággal generáljak Reuter-rácsot (ez utóbbihoz már volt kész programkód, amit konzulensem írt, ennek egyes részeit átírva fel tudtam használni az átlagos ponttávolság számításához is).

Minden egyes pontra meghatároztam a legközelebbi pont távolságát az általam írt Eotvos_points_distance.py programkóddal KD-fa segítségével, majd a kapott távolságokat átlagoltam. Ezt az eljárást már konzulensem sikeresen alkalmazta azon pontok leválogatására, amelyek közelében nem voltak mérési pontok. A KD-fa egy bináris fa adatstruktúra, melyben minden csúcs egy adott hipertéglalapba eső ponthalmazt tárol. A gyökér tárolja az összes pontot. A szülő csúcshoz tartozó hipertéglalapot valamely tengellyel párhuzamosan két részre osztjuk. Az így kapott részeket tartalmazzák az adott csúcs gyerekei. A fa levelei magukat a pontokat tartalmazzák egyenként. Ez különösen hasznos a legközelebbi szomszédok keresésénél, mert így nem kell egy adott pontnak az összes ponthoz képesti távolságát kiszámítani, hogy megtaláljuk a legközelebbit. (Dombi, 2012)



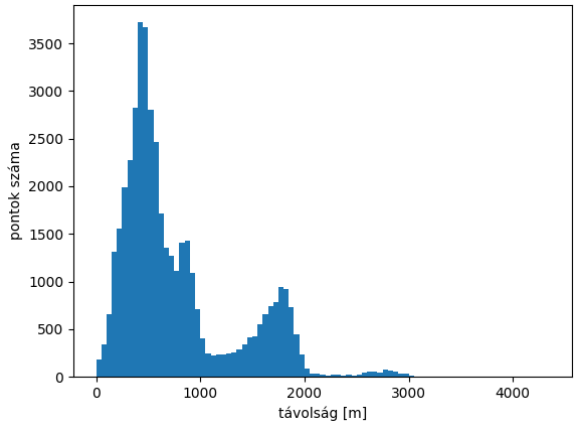
2. ábra: Eötvös-inga mérési pontok elhelyezkedése

Az jött ki, hogy egy adatponttól 776.176 m-re van a legközelebbi adatpont. Ez nagyon kis távolság, így először gyanúsnak tűnt az eredmény. Az ábra alapos tanulmányozása és a távolságokról hisztogram készítése után viszont már látszott, hogy a Dunántúlon a vonalak mentén nagyon sűrűn vannak pontok, míg a vonalak között nagy üres területek vannak. Így úgy döntöttem, hogy a számítást elvégzem a dunántúli pontok nélkül is. Ehhez a QGIS programba betöltöttem a mérési pontok koordinátáit és a mérési eredményeket tartalmazó .dat fájl (ehhez kisebb jegyzettömbben megoldható átalakításra volt szükség, mivel az oszlopok között változó volt a szóközök száma, így először nem akarta beolvasni a QGIS).

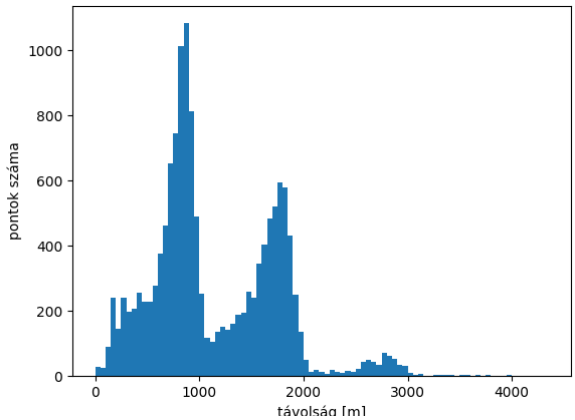
Az országhatárokat és régiók határvonalát .geojson fájlokként töltöttem le a https://osm-boundaries.com weboldalról. Ezután leválogattam az egyrészt az Dél-Alföld, Észak-Alföld és Közép-Magyarország régiókba tartozó pontokat és elmentettem .csv formátumba, majd

terület	átlagos pontköz
összes mérési pont	776.176 m
Alföld + Közép-Magyarország	1155.779 m
külföldi mérések (Szlovákia, Ukrajna, Románia, Szerbia)	1562.675 m
Alföld + Közép-Magyarország + külföldi mérések	1232.497 m

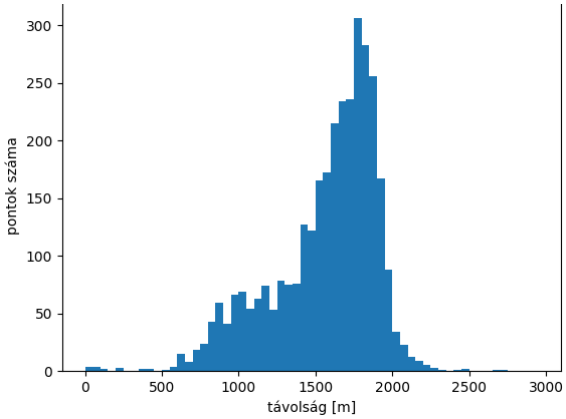
1. táblázat: a mérési pontok átlagos távolsága



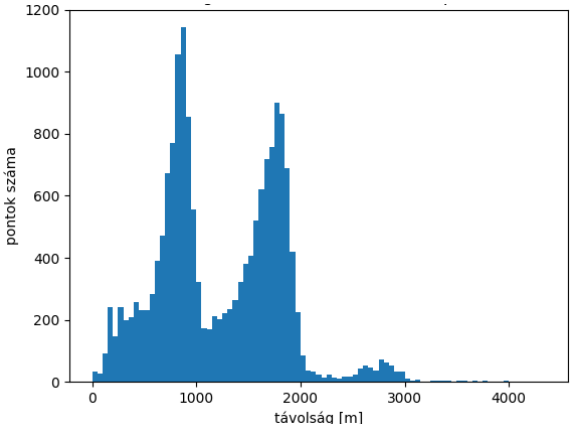
3. ábra: Pontok távolságának eloszlása az összes pontra



4. ábra: Pontok távolságának eloszlása az alföldi és közép-magyarországi pontokra



5. ábra: Pontok távolságának eloszlása a külföldi pontokra



6. ábra: Pontok távolságának eloszlása az alföldi, közép-magyarországi és külföldi pontokra

ugyanezt megtettem az országhatáron kívüli pontokkal. Ezután beolvastam a .csv állományokat, és ugyanezt a számítást elvégeztem az alföldi és közép-magyarországi, illetve a külföldi mérési pontokra, majd legvégül az előbbi két ponthalmazt összevonva is. Az átlagos ponttávolságokat az 1. táblázat, a távolságok eloszlását a 3-6. ábrák szemléltetik hisztogramon.

A kitöltő pontok távolságát így 1232.5 m-ben határoztam meg. A következő lépésben a Reuter-rácsot kellett legenerálni.

A Reuter-rács egy lehetőség a gömbön egyenlő távolságban elhelyezkedő rácspontok elhelyezésére. A pontok közti távolság és a pontok száma egyetlen c paraméter függvénye (Tóth S., 2020):

$$\varphi_j = \frac{j\pi}{c}, j = 1{,}2 \dots c - 1 \tag{3.1}$$

$$\lambda_{ij} = \frac{\Delta\lambda_j}{2} + \frac{i\Delta\lambda_j}{2\pi}, i = 0{,}1{,}2 \dots c_j \tag{3.2}$$

$$\Delta\lambda_j = \arccos\frac{cos(\pi/c) - cos^2\varphi_j}{sin^2\varphi_j}, \tag{3.3}$$

A 3.1. összefüggést átrendezve már meghatározható a c paraméter, ha a rácstávolság adott:

$$ha\ j = 1: \varphi = \frac{\pi}{c}, továbbá\ \varphi\ [rad] = \frac{s}{R}, ebből$$

$$c = \frac{R\,\pi}{s} \tag{3.4}$$

ahol R a gömb sugara (itt az új magyarországi Gauss-gömb sugarát helyettesítettem be: $R = 6\,379\,743.001\,m$), s a rácspontok távolsága m-ben. Az összefüggésbe behelyettesítve c értékére 16260-at kaptam (10-re kerekítettem), ezzel a paraméterrel generáltam le a Reuter-rácsot.

Természetesen a Reuter-rács kisebb módosítással nem csak a teljes gömbfelszínre, hanem egy szűkebb területre is elkészíthető, így viszont további paraméterekre lesz szükség (minimális/maximális szélesség, hosszúság). A kitöltő pontokhoz az érintett területre Reuter-rácsot a Tóth Gyula által készített mkReuter.py programmal generáltam a következő paramérekkel: $\mathrm{c} = 16260\,, \lambda_{min} = 16°, \lambda_{max} = 23°, \varphi_{min} = 45°, \varphi_{max} = 49°$.

A Reuter-rács gömbfelszínen van értelmezve, de a továbbiakban a kapott φ, λ rácspont-koordinátákat WGS84 ellipszoidi szélesség és hosszúság értékekként kezeltük. A kapott rács 136026 pontot tartalmaz. A szintén konzulensem által írt programok által EOV-be átszámítottam a koordinátákat, és ellenőriztem a rácspontok távolságát. Már nem pontosan egyenlő a rácspontok távolsága, hogy a gömbi koordinátákat ellipszoidi koordinátáknak tekintettük. Ezen felül az EOV vetületi torzulásai is módosítják a pontok távolságát. Ezen hatások azonban minimális mértékben változtatták meg a ponttávolságokat. A legközelebbi rácspontok távolsága min. 1234.45 m, max. 1235.34 m, átlagosan 1234.69 m.

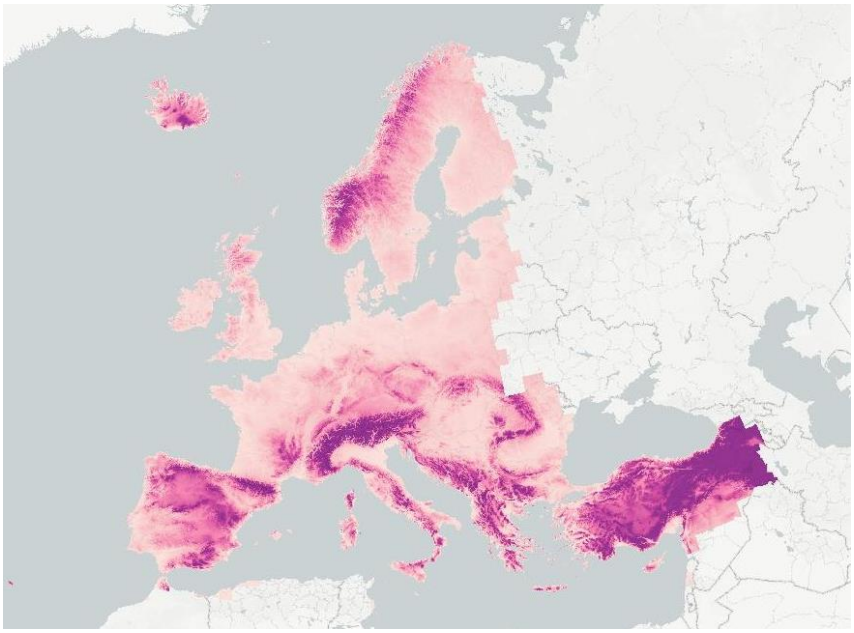
Ezután leválogatom azokat a pontokat, amelyek közelében nincs mérési pont a konzulensem által írt Python kóddal. Az szintén KD-fával történt. Külön történt azon pontok azon pontok leválogatása, amelyek közelében nincs gradiens, illetve görbületi pont. A gradiens és görbületi pontok különválasztása azután történt, miután már ellipszoid feletti magasságot rendeltem hozzájuk. Ezért a további lépéseket először a mérési pontokra kellett elvégezni, majd csak ezután következett a kitöltő pontok leválogatása. Így a kitöltő pontok is 2 külön állományba lettek elmentve (gradiens és görbületi kitöltő pontok).

4. Ellipszoid feletti magasságok számítása

Ahhoz, hogy egy pontra geopontenciál modellekből számíthassunk bármilyen mennyiséget, egyértelműen definiálni kell a helyzetét a 3 dimenziós térben. Ezért nem 2, hanem 3 koordinátára van szükségünk a továbbiakban. A szoftver, amelyet a számításokhoz használtam a következő módon engedi megadni a koordinátákat: ellipszoidi szélesség, hosszúság, ellipszoid feletti magasság, vagy geocentrikus szélesség, hosszúság, gömbi sugár. Ellipszoidi koordináták esetén a koordináták vonatkozhatnak WGS84 vagy GRS80 ellipszoidra. Ehhez első lépésben a mérési és kitöltő pontokhoz tengerszint feletti magasságokat rendeltem EU-DEM felszínmodellből.

4.1. Tengerszint feletti magasságok interpolálása

Az EU-DEM egy 25 m felbontású felszínmodell, amely az Európai Környezetvédelmi Ügynökség tagországain kívül még néhány olyan balkáni ország területét lefedi, amely nem

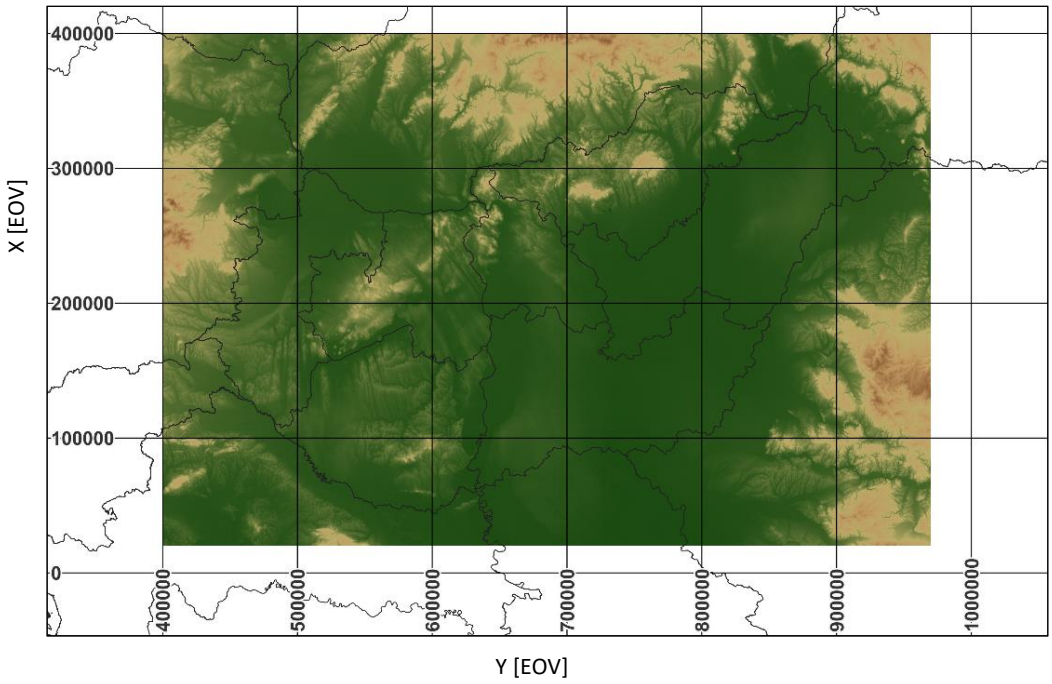


7. ábra: Az EU-DEM felszínmodell által lefedett terület

tagja ennek. A modell az SRTM és az ASTER ~30m felbontású (1") felszínmodellek szintéziséből jött létre. Az északi területeken szovjet topográfiai térképeket is felhasználtak. A hivatalosan szerződésben vállalt RMSE érték ±7 m. Statisztikai elemzések alapján azonban valamivel jobb a modell megbízhatósága: a legtöbb európai ország esetén az RMSE kisebb, mint 4 m. Magyarország esetében még jobb a helyzet, hiszen Magyarországra vonatkozóan az átlagos eltérés -2.38 m, az eltérések szórása 1.42 m, az RMSE 2.77 m. (DHI GRAS, 2014)

Az EU-DEM magasságok az EVRS2000 magassági dátumra vonatkoznak. Ennek alapszintjére vonatkozó W_0 potenciálérték megegyezik a közepes földi ellipszoid $U_0 = 62636856\,m^2\,s^{-2}$ potenciálértékével. Az EOMA magasságok alapszintje 14 cm-rel van magasabban, mint az EVRS2000 dátum magassági alapszintje (Augath – Ihde, 2002).

Az EU-DEM modellből Dr. Siki Zoltán készített egy kivágatot Magyarország és annak szűkebb környezetére EOV vetületben, azaz nagyjából a $16 - 23°$ földrajzi hosszúság és $45.5° - 49°$ földrajzi szélesség által meghatározott területre. Ez a következő linken érhető el: http://www.agt.bme.hu/maps/eu_dem/eu_dem_eov.tif . Ennek lefedettségét a 8. ábra mutatja.



8. ábra: A tanszéki honlapon elérhető EOV kivágat lefedettsége (QGIS-ben megjelenítve)

A magasságok interpolációjához szükséges Python kódot nagyrészt konzulensem írta. Az eredeti változat a ponthoz legközelebbi pixel magasságértékét olvasta ki. A pixelek koordinátáit meg lehet határozni a pixel sor/oszlop számából, illetve a fájlból kiolvasható transzformációs paraméterekből. Ezen transzformáció inverzével pedig kiszámítható egy tetszőleges koordinátájú ponthoz tartozó pixel értékek (tizedestörtként). Erre a GDAL Python könyvtárban vannak egyszerűen használható függvények. Én annyit módosítottam a programon, hogy a legközelebbi pixel helyett a legközelebbi 4 pixel értékét olvassa ki, és azok között lineárisan interpoláljon. Ezt elvégeztem a kitöltő pontokra és az ingamérési pontokra egyaránt. A felhasznált EOV kivágat nem fedi le az összes mérési és kitöltő pontot, így nem sikerült minden mérési és kitöltő pontokat rendelni. Ezek a pontok 0 magasságértéket kaptak (mivel a mérések

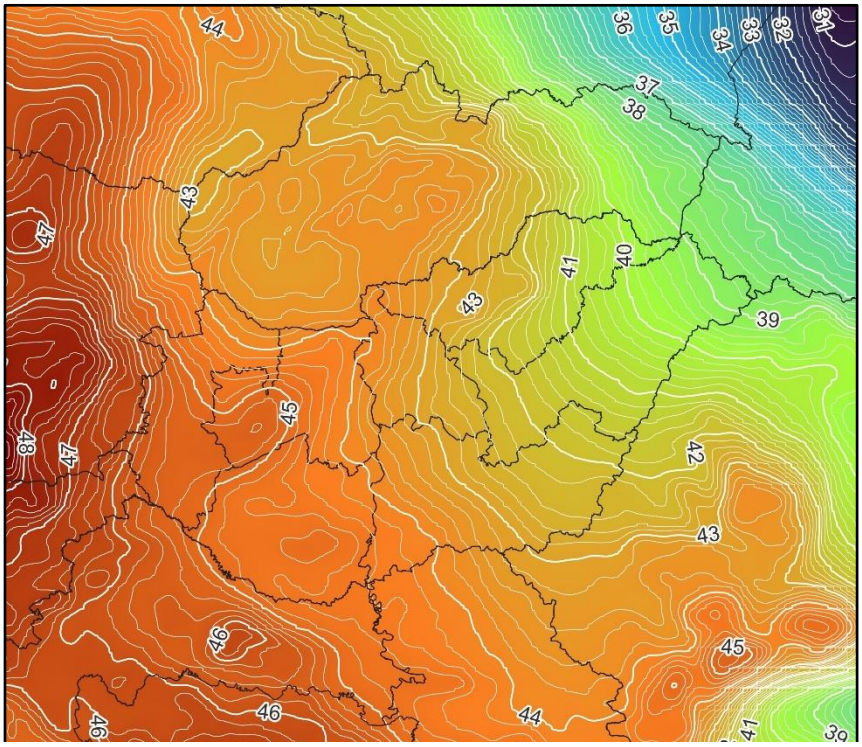
és kitöltő pontok által lefedett területen nincs tengerpart, így a 0 értékek egyértelműen a magassági adat hiányát jelentik).

4.2. Geoidunduláció interpolációja

Sajnos a pontok térbeli helyzetének definiálásához a GrafLab szoftver használatához nem tengerszint feletti, azaz geoid feletti magasságokra, hanem a WGS84 ellipszoid feletti magasságokra van szükségünk. A geoid feletti H magasságon kívül, ha ismerjük az N geoidundulációt, azaz a geoid-ellipszoid távolságot, meghatározható az ellipszoid feletti h magasság.

$$h = N + H \tag{4.1}$$

A geoidunduláció függ a geodéziai dátumtól, ugyanahhoz a ponthoz több geoidunduláció érték tartozhat attól függően, hogy milyen geodéziai dátumra vonatkozik. A geoid-ellipszoid távolságokról ugyanúgy vannak szabályos rácshálóba interpolált GEOTIFF formátumban letölthető modellek, mint a domborzatról. Ilyen GEOTIFF állományok érhetők el pl. a https://www.agisoft.com/downloads/geoids/ weboldalon. A WGS84 ellipszoidra (és geodéziai dátumra) vonatkozó 1'×1' felbontású EGM2008 modellt töltöttem le. Ez az egész világot lefedi. Mivel felesleges az interpoláció során egy ekkora fájl kezelni, így QGIS-ben készítettem egy kivágatot a 44°-50° földrajzi szélesség és 15°-24° földrajzi hosszúság által meghatározott



9. ábra: Geoidunduláció értékek Magyarországra és környékére a WGS84 ellipszoidra vonatkozóan (a megjelenítés és izovonalak generálása QGIS-ben történt)

területre. Erre a raszterre 0.2 m-enként generáltam izovonalakat, 1 m-enként helyezkednek el a vastagabb fő izovonalak. Ezt mutatja a 9. ábra.

Az ellipszoid feletti magasságok számításához a geoidundulációk interpolációja a tengerszint feletti magasságok számításához hasonlóan történt, az ahhoz készült Python program módosításával történt a számítás. Ehhez az EOV koordinátákat WGS84 ellipszoidi koordinátákká (φ, λ) kellett átszámítani (csak vízszintes koordinátákat), mert a rács WGS84 vonatkoztatási rendszerben állt rendelkezésre. Az interpoláció után a geoid feletti magasságokhoz hozzáadtam a geoidundulációt, majd a geoid feletti magasságokat kicseréltem ellipszoid feletti magasságokra. A mérési pontok esetén az ellipszoid feletti magasság meghatározása után különválasztásra kerültek a gradiens és görbületi pontok. Tehát két külön fájlba elmentettem azokat a pontokat, amelyekre mindkét gradiens és görbületi érték rendelkezésre állt. Ezen különválasztott állományok segítségével történt a kitöltő pontok leválogatása. Miután ezek le lettek válogatva, ezekre is elvégeztem az ellipszoid feletti magasság számítását. Elkészítettem az állományokat is olyan formátumban is, hogy csak a koordináták vannak benne pontszámok és mérési eredmények nélkül, és nem tartalmaznak magassági adat nélküli sorokat. Erre azért volt szükség, mert a GrafLab-nak bemeneti adatként csak a koordináták kellettek a következő sorrendben: szélesség, hosszúság, ellipszoid feletti magasság.

5. Gradiensek és görbületi adatok számítása

5.1. A felhasznált geopotenciál modellek

geopotenciál modell	max. fokszám	GM [m^3/s^2]	R [m]	Adatok forrása
Tongji-GMMG2021S	300	3.986004415E+14	6.37813646E+06	GOCE (műhold) Grace (műhold)
EIGEN-6C4	2190	3.9860044150E+14	6.37813646E+06	n=2-30 - LAGEOS (műhold) n=2-130 GRACE (műhold) n=235-ig GOCE (műhold) n=370-ig földi mérések DTU10 globális gravitációs anomália rács
SGG-UGM-2	2190	3.9860044150E+14	6.37813630E+06	GRACE (műhold) -ITSG-Grace2018 modellből GRACE (műhold) - GOSG01s modellből EGM2008 modell szatellita altimetria

2.táblázat: A felhasznált geopotenciál modellek adatai

A számításhoz szükséges geopotenciál modelleket a következő weboldalról töltöttem le: http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime. Az általam felhasznált modellek mind részben (bizonyos fokszám-tartományban) a GOCE műhold gradiométeres mérései alapján készültek. A modelleket .gfc formátumban lehetett letölteni. Ezek szövegfájlok, jegyzettömbben is megnyithatók. A fájlok elején található egy rövid leírás a modellről, majd az R skálatényező és a GM geocentikus gravitációs állandó következik. Ezután az 2.7. egyenlet C_{nm} és S_{nm} együtthatói következnek, az együtthatók számértékei mellett szerepelnek az azok megbízhatóságát jellemző értékek. A felhasznált modellek főbb jellemzőit a 2. táblázat tartalmazza.

5.2. Műholdas adatok

5.2.1.GOCE

Az Európai Űrügynökség által fejlesztett és üzemeltett GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) az első olyan műhold, mellyel a fedélzetén található gradiométer segítségével közvetlenül gradienseket lehetett mérni. A méréseket 2009 és 2013 között végezte a műhold 250 km magasságban keringve. A küldetés célja a nehézségi erőtér szintfelületeinek 1-2 cm pontos modellezése volt kb. 100 km-es térbeli felbontással. Az alacsony műholdpálya miatt az atmoszferikus fékezés és egyéb disszipatív erők torzították a mérési eredményeket. Ezen erők hatását a műhold folyamatosan meghatározta és valós időben azonos nagyságú, de ellentétes irányúgyorsítást végzett, ily módon kompenzálva az erők hatását. (Tóth S., 2020)

A műhold méréseinek teljes vagy részbeni felhasználásával már sok geopotenciál modell készült, például az általam felhasznált Tongji-GMMG2021S, EIGEN-6C4 és SGG-UGM-2 modellek is legalább részben GOCE adatok alapján készültek.

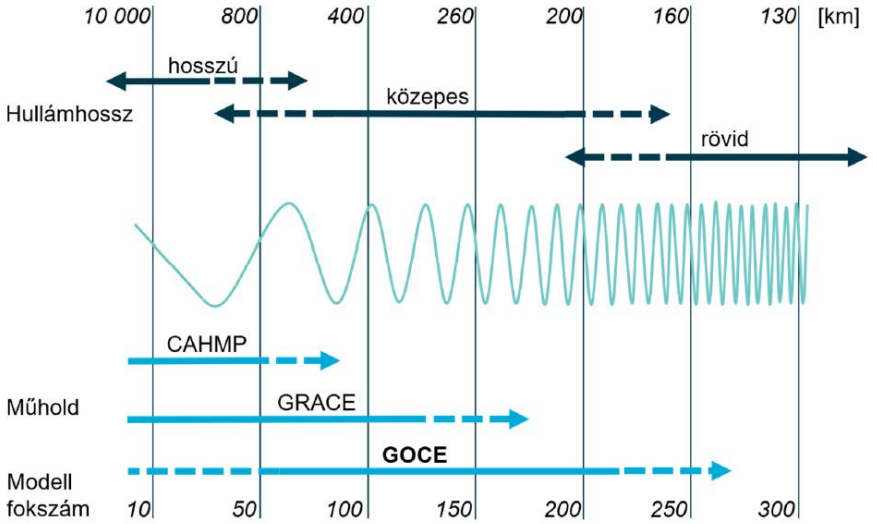
A jel spektrális elemzéséből megállapítható, hogy megfelelő mérési pontosság 30-250 fokszám között, azaz közepes hullámhosszon érhető el. Az ennél kisebb és nagyobb fokszámú összetevőket más forrásból kell pótolni. (Tóth S., 2020)

5.2.2. GRACE

A GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiments) 2002. március 17.-én indult alapvetően a NASA és részben a német DLR közös vállalkozásban. A GRACE két azonos műholdból álló rendszer, amelyek közötti relatív távolság az alacsony-alacsony SST (folyamatos műholdkövetés rendszere) eljárás segítségével µm pontossággal határozható meg. Mindkét műholdon található egy-egy, a tömegközéppontban elhelyezett 3 tengelyű

gyorsulásmérő. A műholdak azonos pályán 250 km távolságban követik egymást, így a rendszer egy óriási, 250 km karhosszúságú gradiométernek tekinthető. A GRACE a Föld nehézségi erőterének hosszú és közepes hullámhosszú szerkezetét, a GOCE műholdnál alacsonyabb fokszám-tartományban (kb. $n=130$ fokszámig) méri igen nagy pontossággal. (Völgyesi, Fizikai geodézia és gravimetria előadásanyag)

Ezeken kívül a földi nehézségi erőtér tanulmányozására bocsátották fel a CHAMP és LAGEOS műholdakat is. Ezek csak az erőtér hosszú hullámhosszú szerkezetének mérésére alkalmasak. A nehézségi erőtér mérését végző műholdak által gyűjtött adatok hullámhossz szerinti jeltartamát a 10. ábra mutatja.



10. ábra: A nehézségi erőtér mérését végző műholdak által gyűjtött adatok hullámhossz szerinti jeltartama

5.3. Számítások a GrafLab-bal

A nehézségi erő gradienseinek számításához a Blažej Bucha által fejlesztett Matlab alapú szoftvert, a GrafLab-ot használtam. A GrafLab a következő mennyiségek számítására képes egy tetszőleges, ellipszoidi/gömbi térbeli koordinátákkal definiált pontban (Bucha – Janák, 2019):

- tömegvonzási erőtér potenciálja (V)
- V tömegvonzási potenciál 2. deriváltjainak tenzora r, φ, λ gömbi koordinátákban
- V tömegvonzási potenciál 2. deriváltjainak tenzora x, y, z lokális térbeli derékszögű koordináta-rendszerben
- nehézségi erőtér potenciálja (W)

- nehézségi gyorsulás vektorkomponensei x, y, z lokális térbeli derékszögű koordináta-rendszerben
- W nehézségi potenciál 2. radiális deriváltja (W_{rr})
- potenciálzavar (T)
- gravitációs anomália (Δg)
- T potenciálzavar 2. radiális deriváltja (T_{rr})
- T potenciálzavar 2. deriváltjainak tenzora r, φ, λ gömbi koordinátákban
- függővonal-elhajlás összetevői (ξ, η)
- T potenciálzavar 2. deriváltjainak tenzora x, y, z lokális térbeli derékszögű koordináta-rendszerben
- fügővonal-elhajlás összetevői (ξ, η)
- geoidunduláció (N)
- magassági rendellenesség (ζ)

A fentiek alapján látszik, hogy sajnos az Eötvös tenzor elemei (azaz a W potenciálfüggvény 2. deriváltjai lokális térbeli derékszögű koordináta-rendszerben) közvetlenül nem számíthatók a programmal. Két lehetséges út kínálkozik ezt figyelembe véve:

- Kiszámítom a V tömegvonzási potenciál 2. deriváltjait derékszögű koordináta-rendszerben a program segítségével, majd hozzáadom a forgási centrifugális erő potenciáljának 2. deriváltjait (utóbbit nekem kell kiszámítani). Tehát:

$$W_{i,j} = V_{i,j} + V_{c_{i,j}} \tag{5.1}$$

- Kiszámítom a T potenciálzavar 2. deriváltjait derékszögű koordináta-rendszerben a program segítségével, majd hozzáadom az U normálpotenciál 2. deriváltjait (utóbbit nekem kell kiszámítani). Tehát:

$$W_{i,j} = T_{i,j} + U_{i,j} \tag{5.2}$$

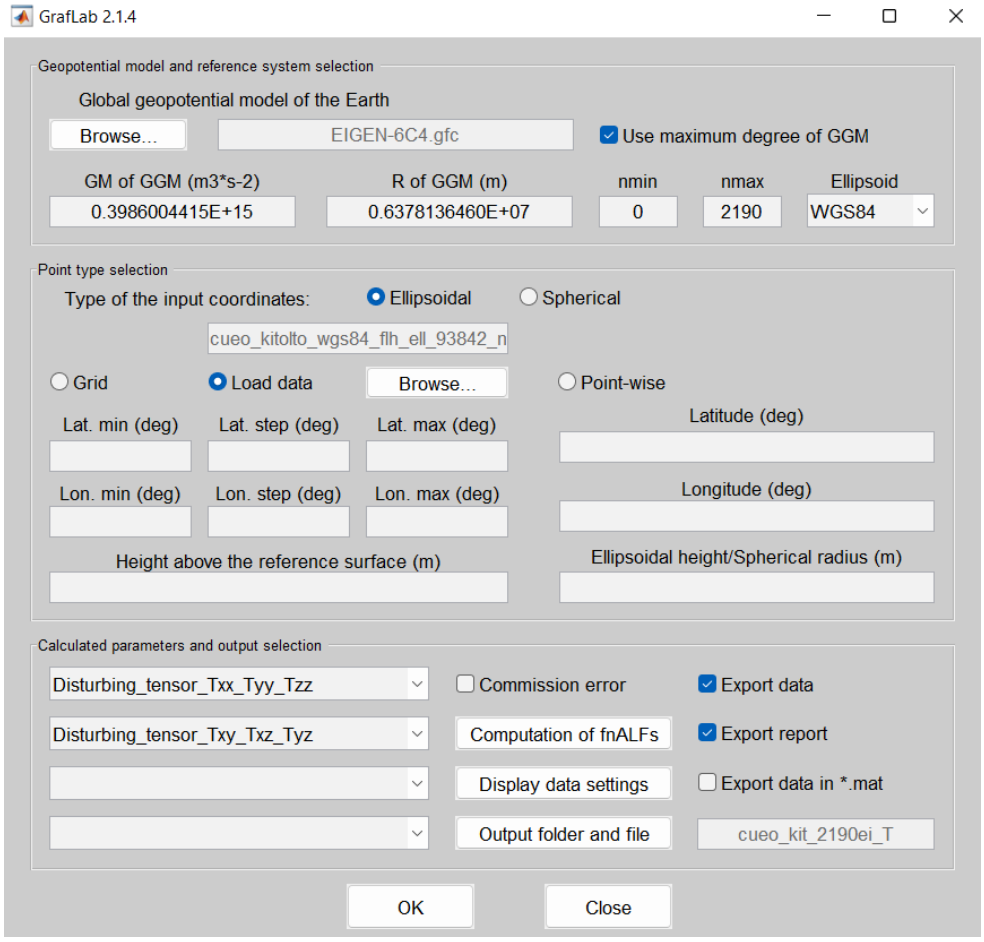
A fentiek közül a második megoldást, azaz a potenciálzavar tenzorának számítását választottam, mivel az U normálpotenciál 2. deriváltjainak (azaz a szélességi hatás) számításához sikerült egyszerű összefüggéseket találnom.

A program használata egyszerű, a Matlab kód futtatásának indítása után megjelenik a grafikus kezelőfelület.

Először is ki kell választani a geopotenciál modell gömbfüggvény-együtthatóit tartalmazó .gfc fájlt. Bár a fájl fejléce tartalmazza, meg kell adni a modellben használt *GM* (az 1.7 képlet

jelölésével kM) geocentrikus gravitációs együtthatót és az R skálatényezőt (az 1.7. képletben: a), és meg kell adni a minimális és maximális fokszámot.

A pontkoordinátákat 3-féleképpen adhatjuk meg: a program lehetőséget ad rács generálására (ez esetben a domborzatot nem tudnám figyelembe venni), a koordinátákat φ, λ, h sorrendben tartalmazó szövegfájlból lehet betölteni, vagy egyetlen pontot is lehet is definiálni a kezelőfelületen.



11. ábra: A GrafLab grafikus kezelőfelülete

A szövegfájlból való betöltéskor figyelni kell a koordináták sorrendjére, mivel a vetületi átszámítás során EOV (Y, X) koordinátákból WGS84-ben az eredményt (λ, φ) sorrendben kapjuk, ezért ezeket meg kell fordítani. Ezután megadjuk a számítani kívánt mennyiségeket, és az eredményfájl nevét és helyét.

A GrafLab által használt lokális derékszögű koordináta-rendszer nem egyezik az Eötvös-inga mérések koordináta-rendszerével. Az Eötvös-inga méréseknél használt jobbsodrású koordináta-rendszerben az x tengely észak felé, az y tengely kelet felé, a z tengely lefelé mutat (ELGI,1998). A GrafLab által használt LNOF (Local North Oriented Frame) koordináta-

rendszer ugyancsak jobbsodrású, de az x tengely észak felé, az y tengely nyugat felé, a z tengely felfelé néz.

Ez a programhoz készült dokumentációban nincs egyértelműen leírva, ezért először akkor vettem ezt észre, amikor a mért és számított adatok között a korreláció negatív lett a W_{xy} és W_{xz} összetevőkre.

Ezt az is megerősíti, hogy a program készítője egyik cikkében (Bucha – Hirt – Kuhn, 2019) a fent említetteknek megfelelően definiálja a gradiensek koordináta-rendszerét (LNOF). Az x, y, z koordináta-tengelyek irányai meghatározhatóak a programhoz készített dokumentációból is, ha az egyenleteket jobban megvizsgáljuk. A gradiensek számítása igen bonyolult, de a nehézségi gyorsulás vektorkomponenseinek számításánál használt egyenletekből már jól látszanak a tengelyek irányai (Bucha – Janák, 2019).

$$g_x = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_c}{\partial \varphi}\right) \tag{5.3}$$

$$g_y = -\frac{1}{r\,cos\varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda} + \frac{\partial V_c}{\partial \lambda}\right) \tag{5.4}$$

$$g_z = \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial V_c}{\partial r} \tag{5.5}$$

Az 5.3. egyenlet szerint x és φ iránya megegyezik, az 5.4. egyenlet pedig azt mutatja, hogy y és λ iránya ellentétes, az 5.5. egyenlet szerint pedig z és r azonos irányú. Ebből a fent említett koordináta-tengely irányok egyértelműen következnek.

A GrafLab-bal a potenciálzavar-tenzor T_{ij} elemeinek számítását összesen 8-szor végeztem el más-más pontokra és különböző modellekkel az alábbiak szerint:

- Az ingamérési gradiens és görbületi pontokra mindhárom geopotenciál modellel (EIGEN-6C4, SGG-UGM-2, Tongji-GMMG2021S) elvégeztem a számítást, ez összesen 2×3, azaz 6 futtatást jelent.
- A kitöltő gradiens és görbületi pontokra csak az EIGEN-6C4 geopotenciál modell alapján futtattam le a számítást.

Az ingamérésekre azért végeztem el több futtatást, mert ezek összehasonlíthatók a mérési eredményekkel, így ebből következtethetünk a számított gradiens és görbületi adatoknak a valósággal való egyezőségére. A Tongji-GMMG2021S modell csak $n = 300$ maximális fokszámú, ezért az így számított adatok térben lassan változnak (míg az ingamérési eredmények

térben hirtelen, gyorsan változnak), a mérésekkel emiatt alacsony korrelációt mutatnak (ezért ezzel a modellel nem végeztem el a számítást a kitöltő pontokra). Az SGG-UGM-2 modell alapján számított adatok kb. ugyanúgy korrelálnak a mérésekkel, mint az EIGEN-6C4 modell alapján számított adatok, így nem láttam értelmét még egyszer kiszámítani a kitöltő pontokra a gradiens és görbületi adatokat.

5.4. Eötvös-inga által mért mennyiségek a GrafLab-bal számított értékekből

A GrafLab segítségével számított adatok és az ingamérések összehasonlításához először a számított T_{ij} mennyiségeket az Eötvös-inga mennyiségek által mérhető mennyiségekké kellett átszámítani $(W_{xy}, W_{\Delta}, W_{xz}, W_{yz})$. A GrafLab eredményeinek utófeldolgozását Python programozási nyelv segítségével, Google Colab környezetben végeztem.

Először is a normálpotenciál 2. deriváltjaira vonatkozó összefüggések az Eötvös-inga mérések koordináta-rendszerében érvényesek. Ezért a T_{ij} elemeket át kellett először számítani ebbe a koordináta-rendszerbe. A két koordináta-rendszer között csak annyi a különbség, hogy az y és z tengelyek iránya ellentétes. Ennek megfelelően a transzformációmátrix:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

A tenzor elemeit az új, elforgatott koordináta-rendszerben a következőképpen kaphatjuk meg (Tóth S., 2020):

$$\boldsymbol{T^{Eötvös}} = \boldsymbol{R}^T \, \boldsymbol{T^{LNOF}} \, \boldsymbol{R} \tag{5.7}$$

Ezek alapján az új rendszerben a tenzor elemeinek elője az alábbiak szerint alakul (itt T_{ij} az eredeti $\boldsymbol{T^{LNOF}}$ tenzor elemeit jelenti)

$$\boldsymbol{T^{Eötvös}} = \begin{bmatrix} T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz} \\ -T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ -T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Ezután ki kellett számítani minden pontra a $T_{\Delta} = T_{yy} - T_{xx}$ mennyiséget. Ezután az 5.2. összefüggés szerint hozzáadtam a normálpotenciál 2. deriváltjait. Ezen utóbbi mennyiségeket, amelyeket másképp normális hatásnak nevezünk, az 5.9-12 képletekkel lehet számítani. A normális hatás a nehézségi gyorsulás normálképletének megfelelő deriváltjaiból származtatható (a $\sin^2 2\varphi$ tag elhagyásával).

$$U_{xy} = 0 \tag{5.9}$$

$$U_{\Delta} = 10.26 \cos^2 \varphi \ [E] \tag{5.10}$$

$$U_{zx} = 8.12 \ \sin 2\varphi \ [E] \tag{5.11}$$

$$U_{zy} = 0 \tag{5.12}$$

A fenti számítások elvégzése után minden gradiens és görbületi mennyiség már az ingamérések koordináta-rendszerében áll rendelkezésünkre. Ezeket külön-külön vektorban tároltam. A gradiens mennyiségeket értelemszerűen a gradiens pontokra számított mennyiségekből, a görbületi adatokat pedig a görbületi pontokra számított mennyiségekből számítottam, bár a GrafLab kiszámolta a gradiens és görbületi pontokra is az összes mennyiséget (azaz rengeteg felesleges adatot tároltunk el eddig). A számított és korrigált eredményeket (szélességi hatást is hozzáadva) pontkoordinátákkal együtt az ingamérési és a kitöltő pontokra egyaránt elmentettem (a gradiens és görbületi adatokat különválasztva). Ez 2×2 fájlt jelent, mivel csak az EIGEN-6C4 modell alapján számított eredményeket mentettem el, bár a korrekciókat elvégeztem a másik 2 geopotenciál modell alapján számított adatokra is (annak érdekében, hogy ezekre is tudjak korrelációs együtthatót számítani).

6. Eredmények értelmezése

6.1. Mért és számított mennyiségek összehasonlítása

Az ingamérési gradiens görbületi pontokra össze lehetett hasonlítani a mért és a számított eredményeket miután a potenciálzavar-tenzor elemeiből a szélességi hatás hozzáadásával rendelkezésre állnak számított W_{xy} és W_{Δ} görbületi, illetve W_{xz} és W_{yz} gradiens adatok (mindhárom geopotenciál modell alapján). Kiszámítottam a mért és számított mennyiségek között az átlagos eltérést, az adatok szórását, ezután pedig a mért és számított mennyiségek közötti korrelációs együtthatót. Utóbbit mindhárom modellből származó adatokra

komponens	korrelációs együttható (EIGEN 6C4) [-] max. fokszám: 2190	korrelációs együttható (SGG-UGM-2) [-] max. fokszám: 2190	korrelációs együttható (Tongji-GMMG2021S) [-] max. fokszám: 300
W_{xy}	0.262659292	0.262924959	0.046012003
W_{Δ}	0.223983027	0.224431668	0.029221837
W_{xz}	0.375451492	0.37464527	0.055743751
W_{yz}	0.425970759	0.426203992	0.091246932

3. táblázat: Mért és számított adatok közötti korrelációs együtthatók

kiszámítottam, az előbbieket csak az EIGEN-6C4 adatokra. A korrelációs együtthatókat a 3. táblázat tartalmazza. A további statisztikai jellemzők a 4. táblázatban láthatók.

komponens	átlagos eltérés (a mért és számított eredmények között) [E]	mérések átlaga [E]	számított eredmények átlaga [E]	mérések szórása [E]	számított eredmények szórása [E]
W_{xy}	6.929028	0.271077	-0.4443969	14.2747869	4.994355
W_{Δ}	13.95247	2.696746	4.71596157	27.5077494	9.718228
W_{xz}	8.549613	9.275032	8.07543466	13.4551879	8.822383
W_{yz}	8.371231	0.240855	0.21419369	13.9637991	8.011814

4. táblázat: A mért és számított adatok átlagos eltérése, átlaga és szórása (az EIGEN-6C4 modell adataiból)

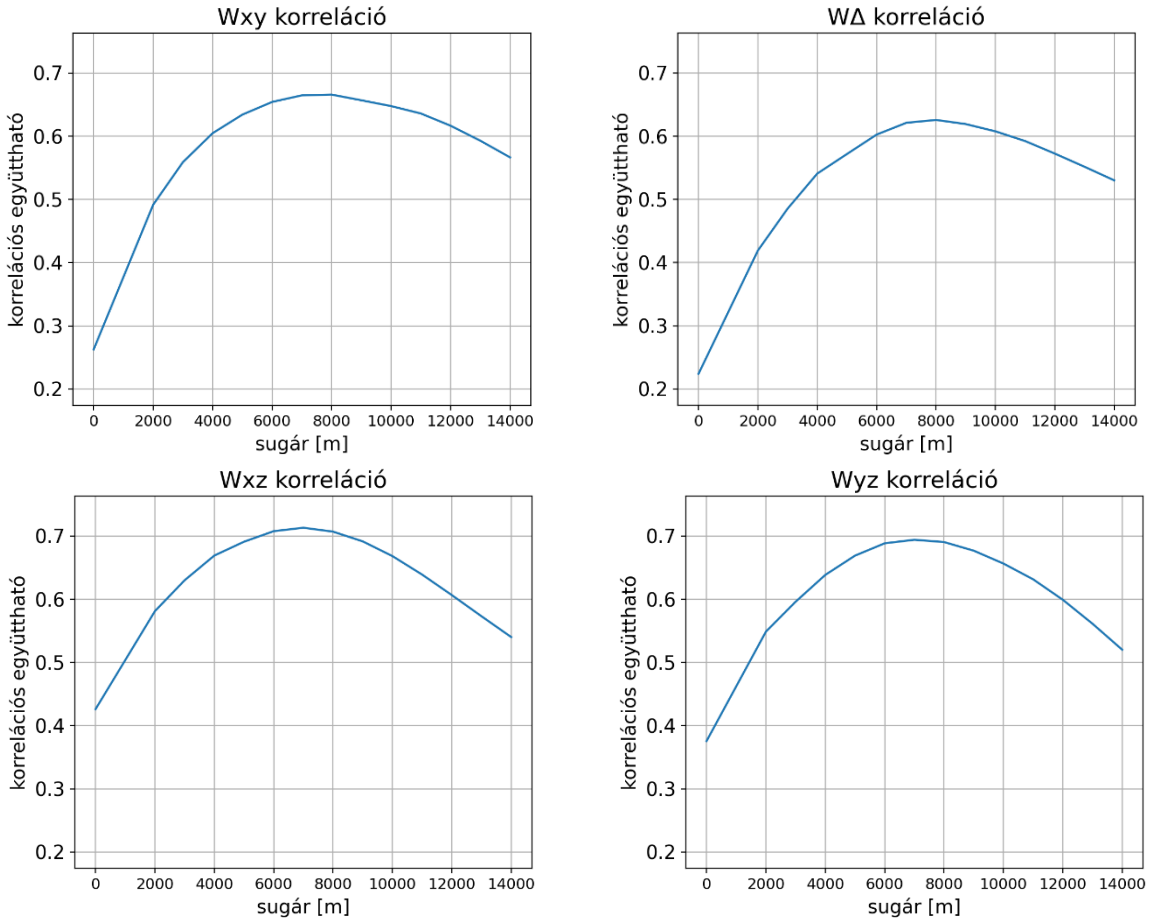
A 3. táblázatból jól látszik, hogy a számított gradiensek jobb korrelációt mutatnak a mérési eredményekkel, mint a görbületi adatok. A Tongji-GMMG2021S geopotenciál modellből számított adatokkal a nagyon rossz korreláció miatt nem érdemes az Eötvös-inga mérések kiegészítését elvégezni. A másik két modell adatai pedig nagyon hasonló korrelációt mutatnak a mérésekkel. Ezért a kettő közül csak az EIGEN-6C4 modell alapján számítottam ki az említett 4 mennyiséget a kitöltő pontokra.

Mivel a GOCE műhold adatai $n = 250$, a GRACE műhold adatai $n = 130$ fokszám tartományig tartalmaz megfelelő pontosságú adatokat, és az n=300 fokszámú modell estén nem volt elég jó a korreláció, megállapítható, hogy az Eötvös-inga méréseket nem lehet kizárólag műholdas gradiométeres mérések segítségével pótolni. A fenti eredmények jól mutatják az Eötvös-inga mérések fontosságát. Az alacsonyabb fokszámú modell alig korrelál a mérésekkel, a magasabb fokszámú modell esetén sem mondható nagyon jónak a korreláció, de a mért és számított eredmények eloszlását bemutató ábrákon látszik, hogy a nagyobb kiterjedésű anomáliák már jól látszanak a számított eredményekben is. A 4. táblázat alapján látszik, hogy a mérési eredményeknek jóval nagyobb a szórása, mint a számított eredményeknek. Ez azt jelenti, hogy a számított eredmények térben lassabban változnak.

Arra voltam kíváncsi, hogy hogyan változik a korreláció, ha a mérési eredményekre egy mozgóátlagot számítok, azaz minden ponthoz hozzárendelem a tőle adott távoságon belül lévő pontok mérési eredményeinek átlagát. Ehhez a már korábban is használt KD-fát alkalmaztam

R [m]	korrelációs együttható [-]			
	W_{xy}	W_{Δ}	W_{xz}	W_{yz}
0	0.26266	0.22398	0.42597	0.37545
2000	0.49155	0.41911	0.58113	0.54868
3000	0.55896	0.48541	0.62998	0.59604
4000	0.60482	0.54091	0.66910	0.63849
5000	0.63422	0.57187	0.69099	0.66900
6000	0.65427	0.60264	0.70771	0.68851
7000	0.66471	0.62128	0.71314	0.69412
8000	0.66589	0.62578	0.70698	0.69048
9000	0.65689	0.61924	0.69155	0.67683
10000	0.64771	0.60773	0.66825	0.65646
11000	0.63600	0.59236	0.63897	0.63151
12000	0.61662	0.57251	0.60654	0.59913
13000	0.59288	0.55166	0.57302	0.56121
14000	0.56651	0.53018	0.54008	0.52006

5. táblázat: A mozgóátlag számítása utáni korrelációs együtthatók



12. ábra: A mozgóátlag számítása utáni korrelációs együtthatók az egyes összetevőkre az R sugár függvényében

azzal a különbséggel, hogy most nem a legközelebbi pontot, hanem adott távolságon belül lévő pontokat kerestem. Az algoritmus az adott távoságon belül lévő pontok indexeit adta vissza.

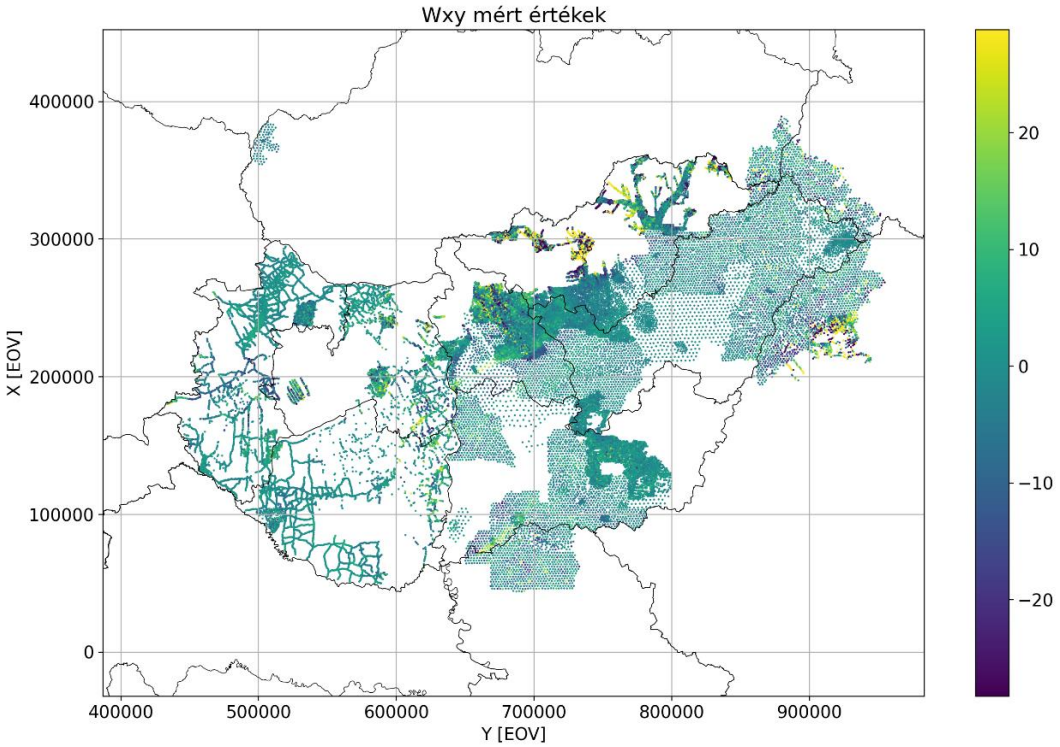
Ezen indexek segítségével ki tudtam keresni a vektorokban tárolt mérési eredményeket, mivel a mérési eredmények a pontkoordinátákkal azonos sorrendben vannak tárolva. Ezután az egyes pontokhoz rendelt átlagolt értékeket is egy-egy vektorban eltároltam, majd kiszámítottam a korrelációt a számított eredményekkel. A koordináták WGS84 rendszerben álltak rendelkezésre a feldolgozott adathalmazra (φ, λ, h), így ezt EOV-be kellett átszámítani. Erre azért volt szükség, mert a WGS84 szélesség és hosszúság fokban vannak, a távolságok egyszerű számítása érdekében viszont m dimenziójú koordinátákra volt szükség.

A mozgóátlag számítását 2 km-től 14 km-es sugárig ismételtem mind a 4 összetevőre. Az eredményeket az 5. táblázat, az egyes összetevők korrelációjának sugár szerinti változását a 12. ábra mutatja. Az eredmények azt mutatják, hogy a korreláció jelentősen nő, ha a mérési eredmények helyett azoknak egy mozgóátlag segítségével simított értékeit hasonlítjuk össze a számított eredményekkel. A legnagyobb korrelációt 6-8 km-es sugárral végzett mozgóátlag esetén lehet tapasztalni, ezen tartományban összetevőtől függően a korrelációs együttható 0.6-0.7 körül van, ez már elég jónak mondható. Ezen tartomány felett viszont már csökkenni kezd a korreláció. Ez arra utal, hogy bár a számított eredmények alapján a lokális, kis kiterjedésű anomáliákat nem lehet kimutatni, de a nagyobb kiterjedésű (kb. 6-8 km) anomáliák jól kirajzolódnak.

6.2. Összehasonlító ábrák készítése a mért és számított gradiens és görbületi adatokról az ingamérési pontokra

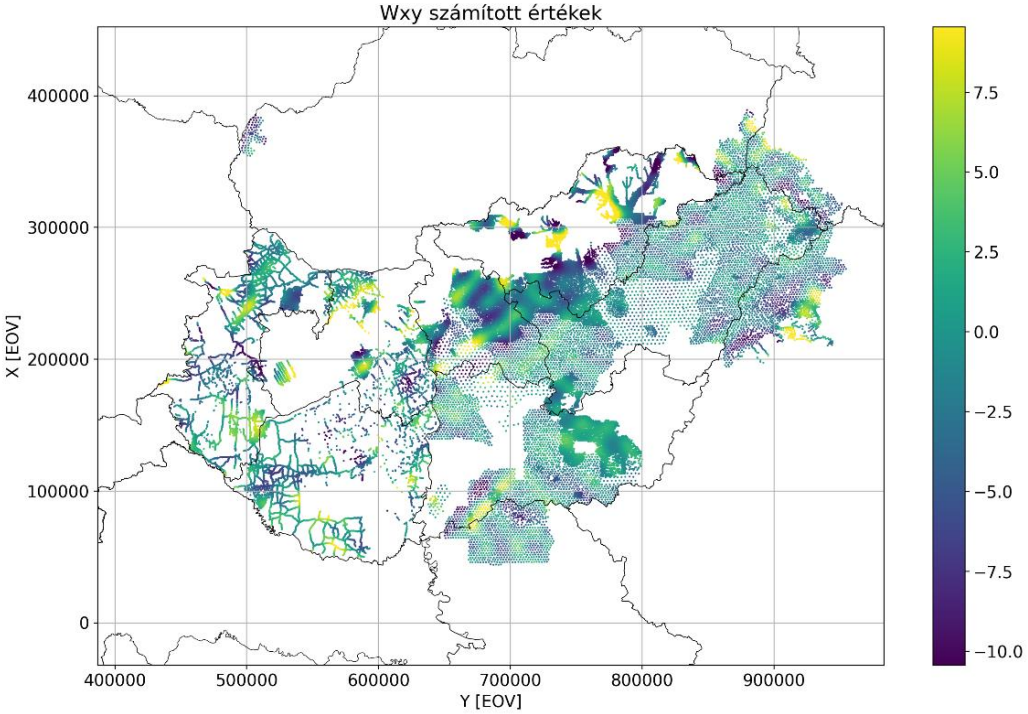
Az ingamérési pontokra a mért és számított eredmények jobb összehasonlítása érdekében színskálás megjelenítésben ábrázoltam az egyes komponensekre a méréseket és számított adatokat. A négy összetevő ábrázolására így nyolc ábrát készítettem. A gradienstérképeket EOV koordináta-rendszerben készítettem el. A tájékozódás megkönnyítése érdekében az ábrákon megjelenítettem az országhatárokat és Magyarországon belül a régióhatárokat, ezen felül koordinátaráccsal is elláttam az ábrákat. A határvonalak .geojson fájlban álltak rendelkezésre, ezt a geopandas Python könyvtár használatával tudtam beolvasni. A határvonalakat minden ábrán ábrázoltam, és mivel ez minden ábra esetében ugyanazokat a határvonalakat jelenti, így erre az ábrák készítése előtt írtam egy függvényt, hogy így csak egyetlen sorban kelljen ezt a függvényt meghívni minden esetben a kódrészlet teljes átmásolása helyett.

Az ábrázolás során problémát jelentett az, hogy a mérések között vannak nagyon kiugró értékek, így a minimális és maximális értékek közötti lineáris színskálával nem sok

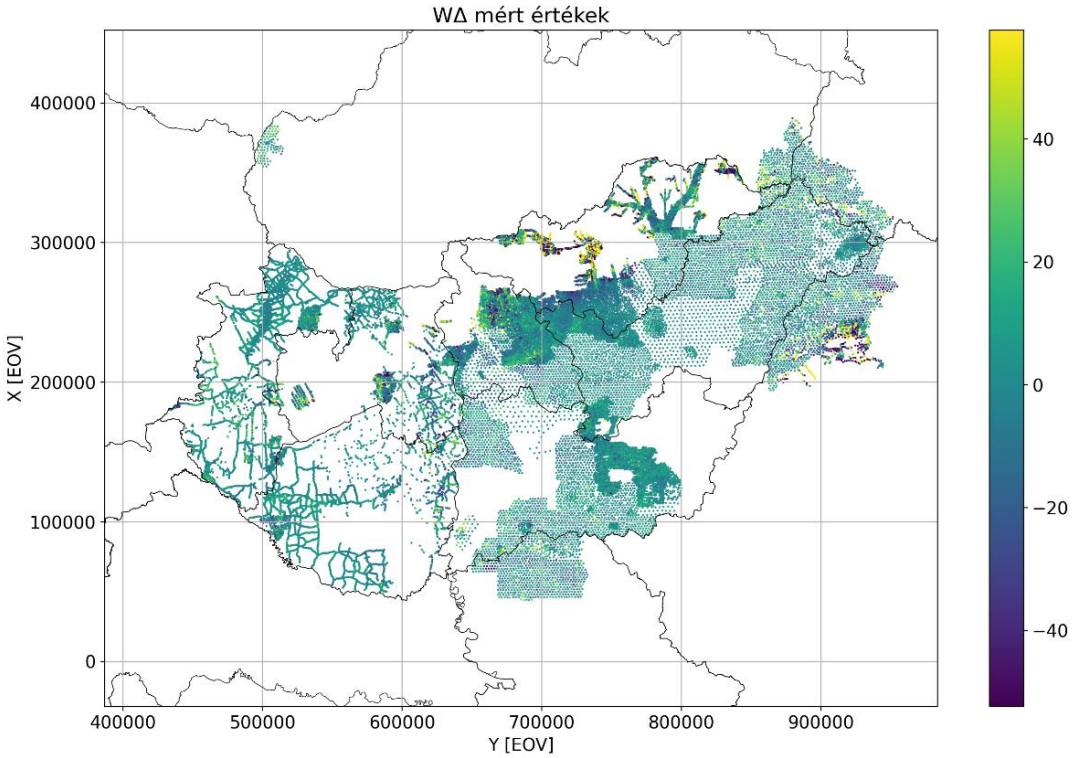


13. ábra: A mért W_{xy} görbületi adatok színskálás megjelenítésben

mindent lehetne látni az ábrán, mivel nagyjából egyszínű lenne az összes pont. Ezért úgy döntöttem, hogy csak a színskála tartományát átlagos értéktől a szórás kétszeresén belül lévő tartományra korlátozom. Jól látszik, hogy ez a tartomány jóval kisebb a számított eredmények esetén, mint a méréseknél. Így már kellően nagy a színek kontrasztja ahhoz,

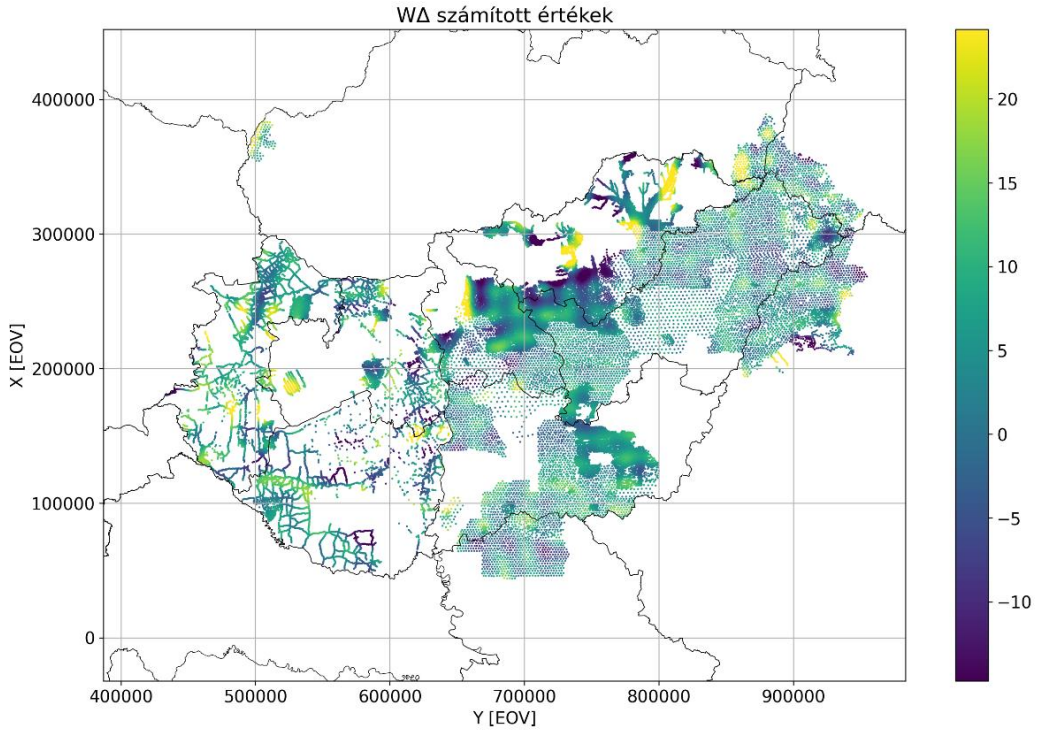


14. ábra: A számított W_{xy} görbületi adatok színskálás megjelenítésben

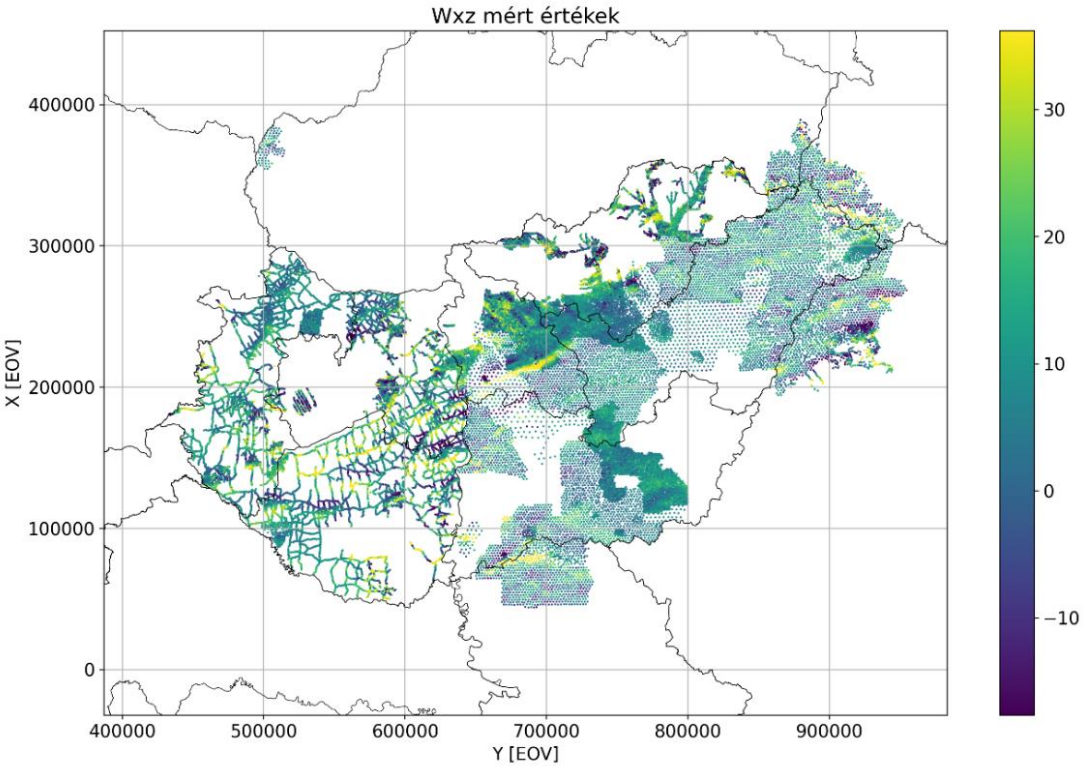


15. ábra: A mért W_Δ görbületi adatok színskálás megjelenítésben

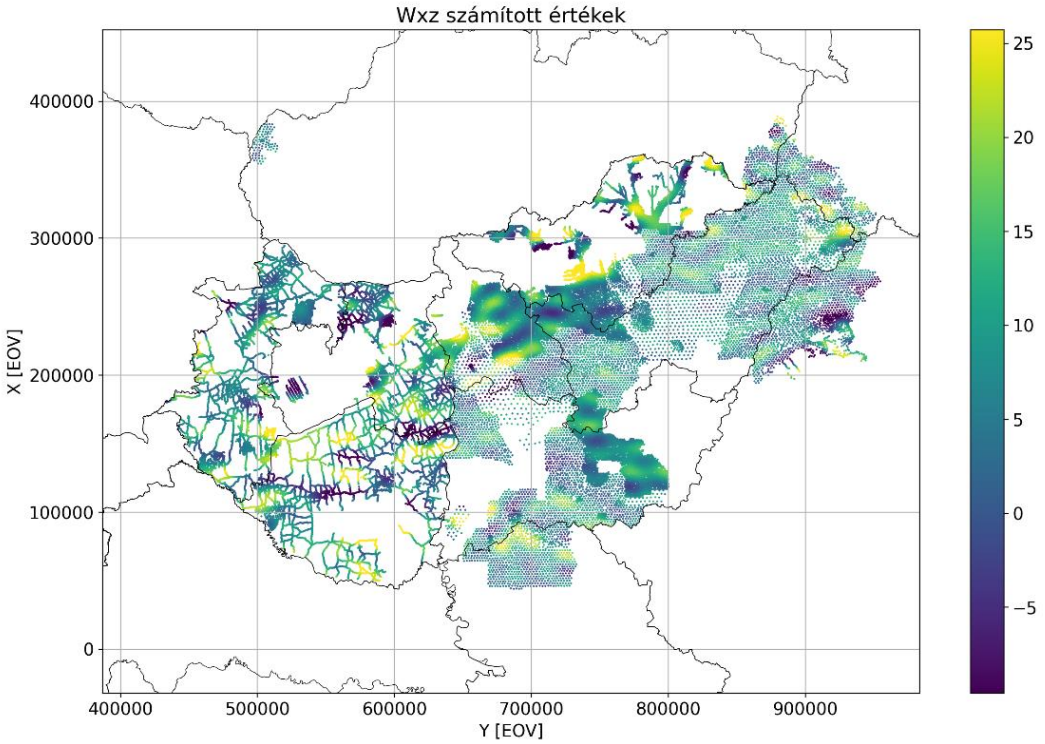
hogy látszódjanak a regionális változások. A mért és számított gradiens és görbületi adatok színskálával térképi formában megjelenítve az ingamérési pontokra a 13. – 20. ábrákon láthatók. A színskálán szereplő számértékek E (Eötvös)-ben értendők.



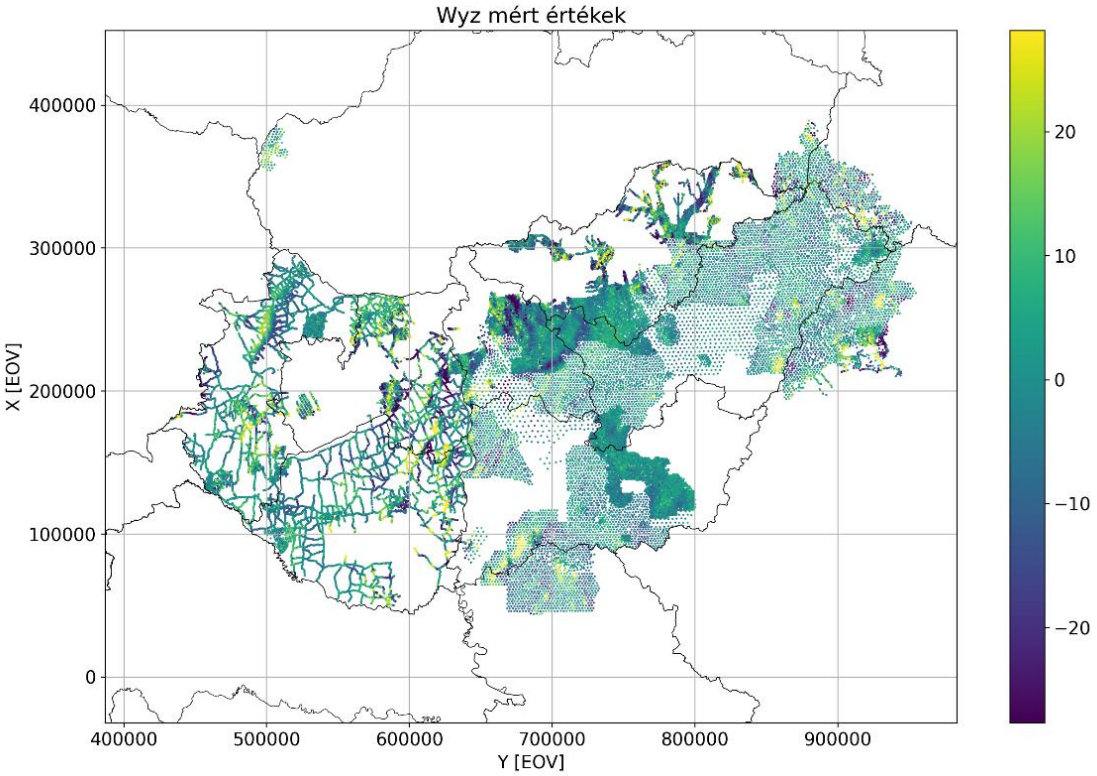
16. ábra: A számított W_Δ görbületi adatok színskálás megjelenítésben



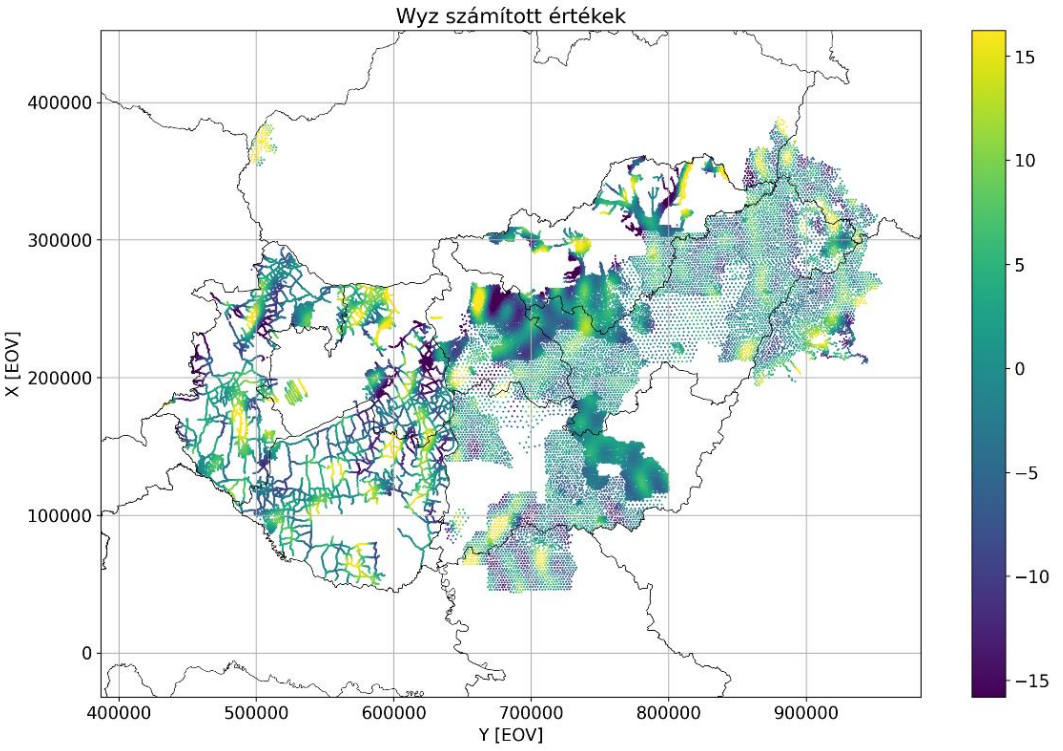
17. ábra: A mért W_{xz} görbületi adatok színskálás megjelenítésben



18. ábra: A számított W_{xz} görbületi adatok színskálás megjelenítésben



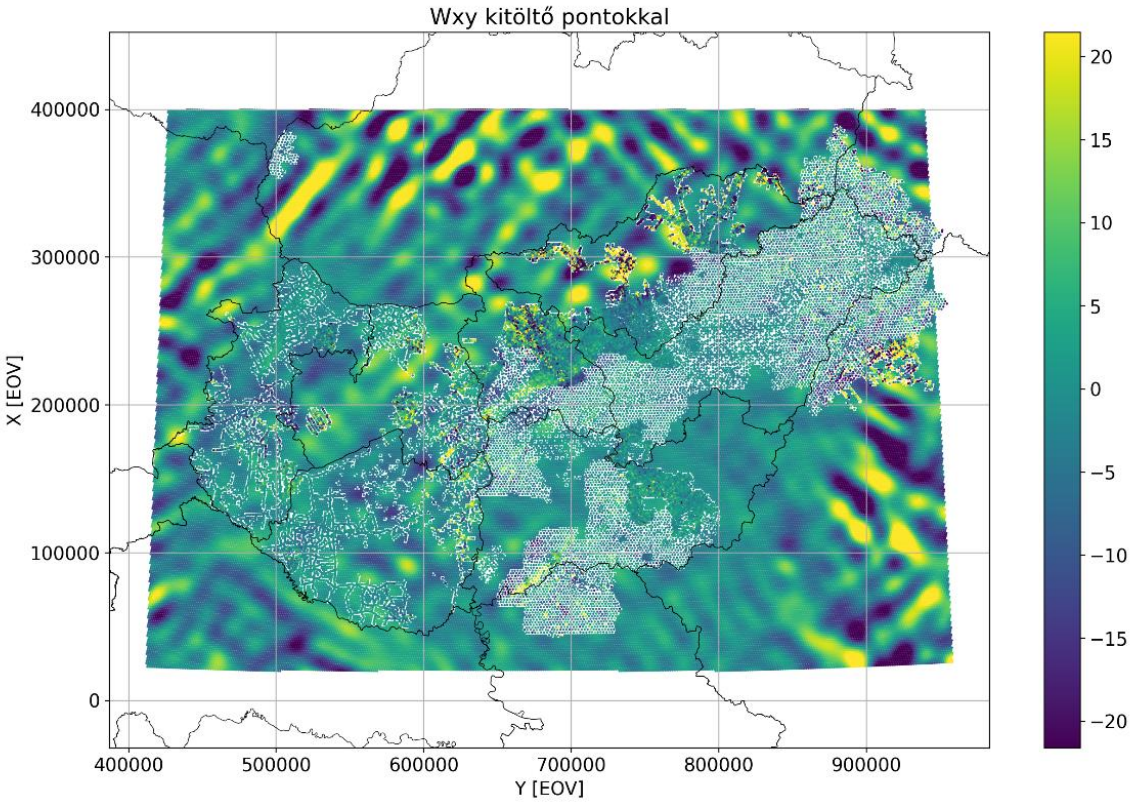
19. ábra: A mért W_{yz} görbületi adatok színskálás megjelenítésben



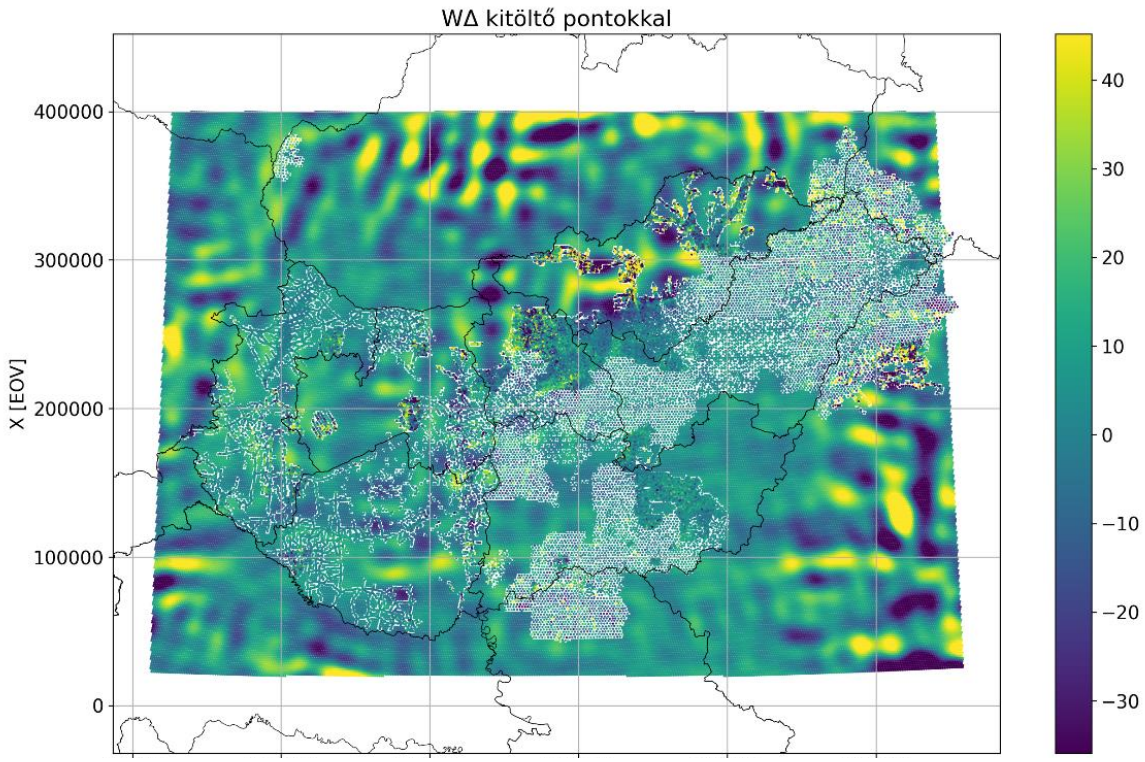
20. ábra: A számított W_{yz} görbületi adatok színskálás megjelenítésben

6.3. Gradiens és görbületi adatok ábrázolása a kitöltő pontokkal együtt

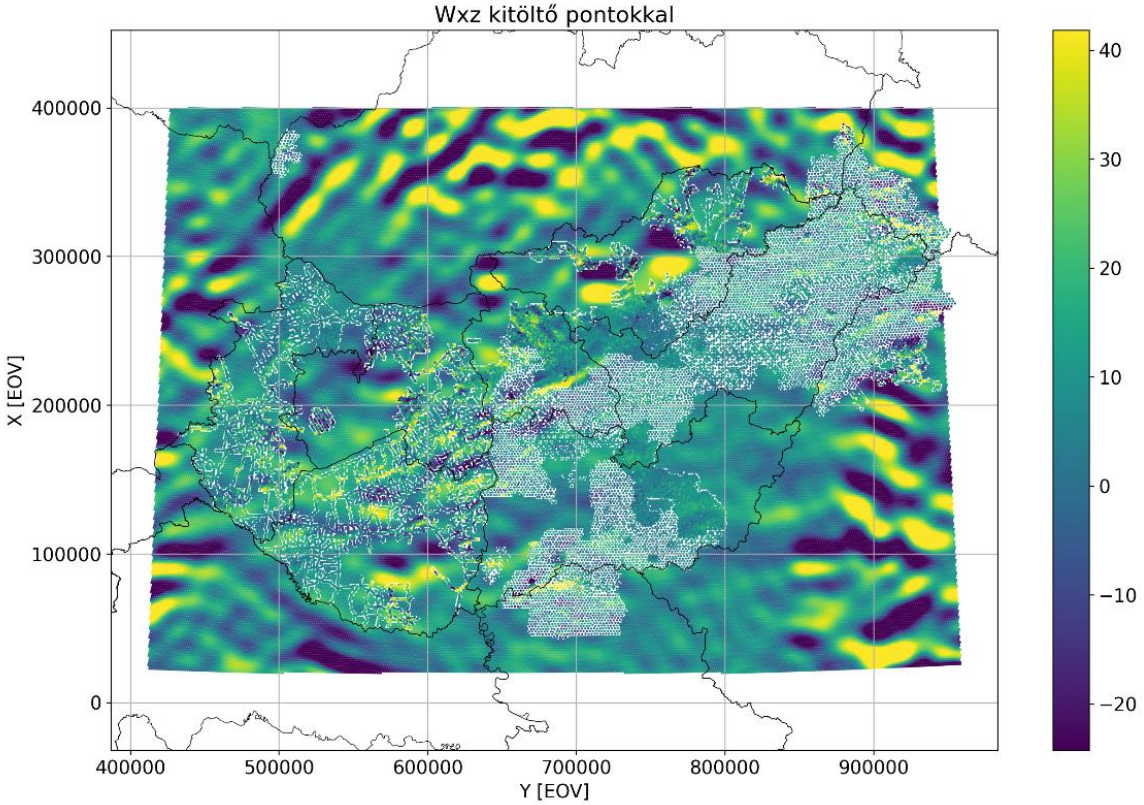
Legvégül elkészítettem a kitöltő pontokra is a gradiens és görbületi adatok színskálás térképét. Ez volt a dolgozat fő célja, hogy azoknak a területeknek a gradiens és görbületi adatairól is legyen információnk, ahol nem állnak rendelkezésre Eötvös-inga mérési eredmények. Az előző ábrák leginkább a számított adatok minőségének bemutatásának céljából készültek, mivel a számított eredmények ellenőrzésére csak az ingamérési pontokban volt lehetőség. A kétféle adatok együttes ábrázolása miatt az ingamérési pontokra vonatkozó adatok közül a mérési eredményeket és a kitöltő pontokra számított eredményeket tartalmazó tömböket összefűztem, ezt megcsináltam a koordinátákkal is. Az ábrázolt számított gradiens és görbületi adatokat az EIGEN-6C4 gepotenciál modell alapján számítottam. A színskála minimum és maximum értékekét a korábbiaknak megfelelően állapítottam meg. A kitöltő pontokkal kiegészített gradienstérképek a 13. – 20. ábrákon láthatók.



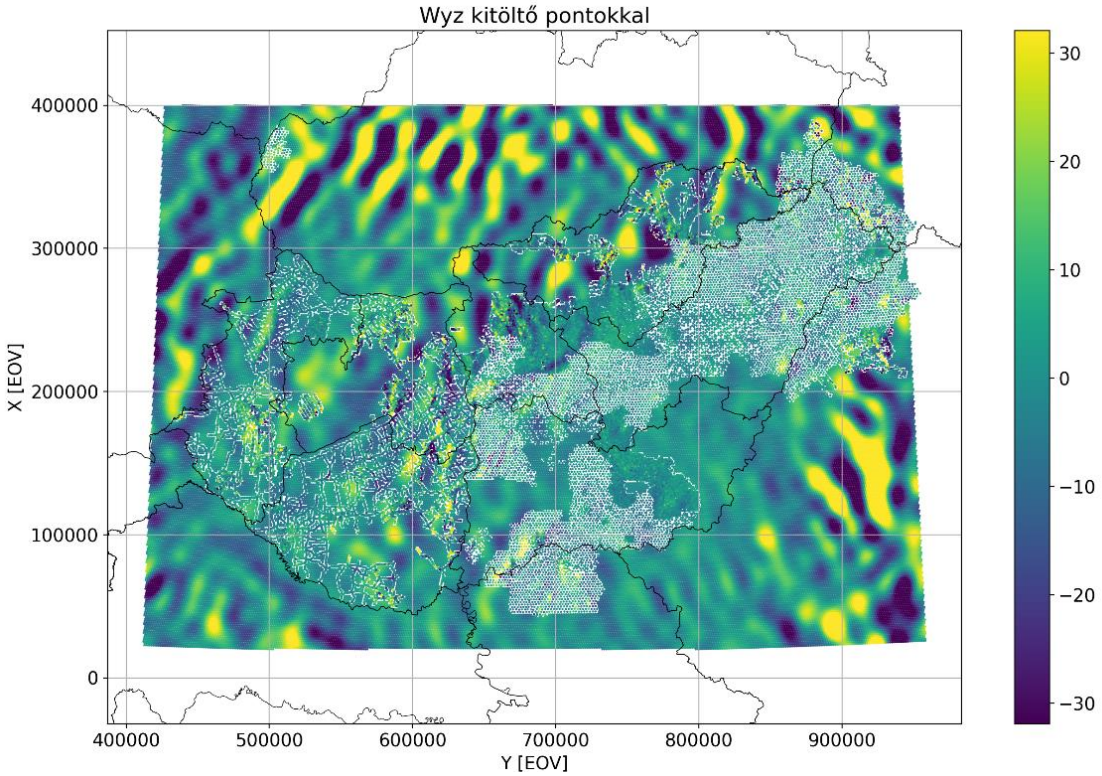
21. ábra: A mért W_{xy} görbületi adatok kiegészítve a kitöltő pontokra számított adatokkal színskálás megjelenítésben



22. ábra: A mért W_Δ görbületi adatok kiegészítve a kitöltő pontokra számított adatokkal színskálás megjelenítésben



23. ábra: A mért W_{xz} gradiens adatok kiegészítve a kitöltő pontokra számított adatokkal színskálás megjelenítésben



24. ábra: A mért W_{yz} gradiens adatok kiegészítve a kitöltő pontokra számított adatokkal színskálás megjelenítésben

7. Összegzés

A nehézségi erő gradienseinek számítására bár létezik alkalmas szoftver, de ez közvetlenül nem alkalmas az Eötvös-tenzor elemeinek számítására, csak utófeldolgozással. A számítások bonyolultabb részét viszont elvégzi helyettünk a program, a normálhatás hozzáadása, illetve a megfelelő összetevők előjelének módosítása már nem annyira bonyolult feladat. Viszont fontos tapasztalat, hogy a hasonló programokkal végzett számítás esetén mindig ellenőrizni kell, hogy az eredmények milyen koordináta-rendszerben értendők, ami nem mindig egyszerű feladat.

A számítások azt mutatják, hogy az $n = 300$ maximális fokszámú, csak műholdas adatok alapján készült geopontenciál modell alapján számított adatok és mért adatok között elég rossz a korreláció. Ez annak köszönhető, hogy az alacsony fokszám miatt a számított mennyiségek térben elég lassan változnak, míg az Eötvös-inga mérések gyorsan változnak, a nehézségi erőtér finomszerkezetéről adnak tájékoztatást. Az $n = 2190$ maximális fokszámú modell alapján számított mennyiségek esetén már körülbelül egy nagyságrenddel magassabb volt a korrelációs együttható. Ezen modellek a gradiensek és görbületi adatok nagyobb kiterjedésű (6-8 km) anomáliáit jól kimutatják a mozgóátlag - számítások alapján, tekintve, hogy az így átlagolt mérésekkel már 0.6-0.7 körül alakult a korrelációs együttható. A mért és számított eredmények összehasonlítása érdekében ábrázoltam a megfelelő összetevőket a mérések, illetve a

számítások alapján. Az EIGEN-6C4 modell alapján az előbb ismertetett megbízhatósággal számított eredményekkel egészítettem ki az ingamérési adatokat, majd színskálás megjelenítésben együttesen ábrázoltam ezeket.

Vizsgálataim alapján levonható az a fontos következtetés, hogy a műholdas gradiometriai (elsősorban a GOCE) mérések felhasználásával egyáltalán nem érhető el az pontosság, amellyel érdemes lenne az Eötvös-ingával mért gradiensek kiegészítése azokra a magyarországi „üres" területekre, amelyeken nem történtek ingamérések. Ez különösen igaz a tagoltabb topográfiájú (hegyvidéki) területekre, ahol korábban azért nem végeztek ingaméréseket, mert a topografikus tömegek hatása miatt olyan változatos a gradiensek eloszlása, hogy eleve nem lehet biztos következtetéseket levonni a felszín alatti szerkezetekre. Ugyanakkor más célokra jól alkalmazhatók a műholdas gradiométeres mérések, amelyekből sikeresen meghatároztam Magyarország területére az Eötvös-tenzor elemeinek területi eloszlását.

Irodalomjegyzék

Bíró Péter, Ádám József, Völgyesi Lajos, Tóth Gyula: A Felsőgeodézia elmélete és gyakorlata, 2013

Blažej Bucha, Christian Hirt, Michael Kuhn: Cap integration in spectral gravity forward modelling up to the full gravity tensor, 2019

Blažej Bucha, Juraj Janák: Definition of functionals of the geopotential used in GrafLab software, 2019

DHI GRAS: EU-DEM Statistical Validation Report, 2014
https://ec.europa.eu/eurostat/documents/7116161/7172326/Report-EU-DEM-statistical-validation-August2014.pdf

Dombi József: Intelligens rendszerek. Jegyzet. SZTE Elektronikus Tananyag, 2012
https://eta.bibl.u-szeged.hu/id/eprint/1810

ELGI, szerk. Szabó Zoltán: Three fundamental papers of Loránd Eötvös, 1998

Tóth Sándor: Geoidmeghatározás Magyarország területére GOCE gravitációs gradiensekből, 2020

Völgyesi Lajos: Geofizika, 2002

Völgyesi Lajos: Légi és űrgravimetria (CHAMP, GRACE, GOCE projectek). Mérési alapelvek, űrgradiometria – Fizikai geodézia és gravimetria (BMEEOAFMF61) 5. előadás

Völgyesi Lajos, Tóth Gyula: Az Eötvös-inga mérések jelentősége és geodéziai alkalmazásuk Geodézia és Kartográfia, Vol. 54, Nr. 10, pp. 28-33, 2002

Wolfgang Augath, Johannes Ihde: Definition and Realization of Vertical Reference Systems – The European Solution EVRS/ EVRF 2000, 2002
https://tu-dresden.de/bu/umwelt/geo/gi/gg/ressourcen/dateien/veroeffentlichungen/european_solution_evrs.pdf?lang=en

https://www.agisoft.com/downloads/geoids/

http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime

https://land.copernicus.eu/imagery-in-situ/eu-dem

https://www.opentopodata.org/datasets/eudem/

Ábrajegyzék

1. ábra: Az Eötvös-inga működésének alapelve……..……6
Forrás: Völgyesi Lajos: Geofizika 161. oldal, 2002

2. ábra: Eötvös-inga mérési pontok elhelyezkedése……..…9

3. ábra: Pontok távolságának eloszlása az összes pontra……10

4. ábra: Pontok távolságának eloszlása az alföldi és közép-magyarországi pontokra……10

5. ábra: Pontok távolságának eloszlása a külföldi pontokra……..10

6. ábra: Pontok távolságának eloszlása az alföldi, közép-magyarországi és külföldi pontokra..10

7. ábra: Az EU-DEM felszínmodell által lefedett terület……..…12
Forrás: https://www.opentopodata.org/datasets/eudem/

8. ábra: A tanszéki honlapon elérhető EOV kivágat lefedettsége (QGIS-ben megjelenítve)….13

9.ábra: Geoidunduláció értékek Magyarországra és környékére a WGS84 ellipszoidra vonatkozóan (a megjelenítés és izovonalak generálása QGIS-ben történt)……14

10. ábra: A nehézségi erőtér mérését végző műholdak által gyűjtött adatok hullámhossz szerinti jeltartama……...17
Forrás: Tóth Sándor: Geoidmeghatározás Magyarország területére GOCE gravitációs gradiensekből 6. oldal, 2020

11. ábra: A GrafLab grafikus kezelőfelülete……19

12. ábra: A mozgóátlag számítása utáni korrelációs együtthatók az egyes összetevőkre az R sugár függvényében……...…24

13. ábra: A mért W_{xy} görbületi adatok színskálás megjelenítésben……26

14. ábra: A számított W_{xy} görbületi adatok színskálás megjelenítésben……...26

15. ábra: A mért W_{Δ} görbületi adatok színskálás megjelenítésben……..…..27

16. ábra: A számított W_{Δ} görbületi adatok színskálás megjelenítésben……27

17. ábra: A mért W_{xz} görbületi adatok színskálás megjelenítésben……..28

18. ábra: A számított W_{xz} görbületi adatok színskálás megjelenítésben……..…28

19. ábra: A mért W_{yz} görbületi adatok színskálás megjelenítésben…….29

20. ábra: A számított W_{yz} görbületi adatok színskálás megjelenítésben……..29

21. ábra: A mért W_{xy} görbületi adatok kiegészítve a kitöltő pontokra számított adatokkal színskálás megjelenítésben……...30

22. ábra: A mért W_{Δ} görbületi adatok kiegészítve a kitöltő pontokra számított adatokkal színskálás megjelenítésben……...31

23. ábra: A mért W_{xz} gradiens adatok kiegészítve a kitöltő pontokra számított adatokkal színskálás megjelenítésben……..31

24. ábra: A mért W_{yz} gradiens adatok kiegészítve a kitöltő pontokra számított adatokkal színskálás megjelenítésben……32

Mellékletek

A számításhoz használt programok jegyzéke

getHfromEOV_lin_int.py

input: ingaeovred_all.dat, eu_dem_eov.tif

output: ingaeovredH_all_lin.dat

leírás: Az EOV-ben lévő ingamérési pontokhoz tengerszint feletti magasságot rendel raszteres EU-DEM felszínmodellből a pixelértékek közötti lineáris interpolációval.

……...

make_gr_cu_eo_0.py

input: ingared_all1.dat, ingaeovredH_all_lin.dat, us_nga_egm2008_1_Hungary.tif

output: cueo1.dat, greo1.dat, cueo1_noPtN.dat, greo1_noPtN.dat

leírás: A tengerszint feletti magasságokat ellipszoid feletti magasságokra cseréli az ingamérési pontok esetén. Az EGM2008 geopotenciál modell alapján készített geoidundulációkat 1'×1' felbontású rácsban tartalmazó raszterből számít geoidundulációt, és hozzáadja ezt a tengerszint feletti magassághoz. Ahol nincs magasság, ott nem számít geoidundulációt. Ezután különválasztja a gradiens és görbületi pontokat, azaz azokat a pontokat írja ki, amelyekben mindkét gradiens / görbületi adat benne van.

……..

transform_gr_cu.py

input: cueo1.dat, greo1.dat

output: cueo1_eov.dat, greo1_eov.dat

leírás: A különválasztott ingamérési adatokhoz tartozó koordinátákat WGS84 ellipszoidi koordinátákból átszámítja EOV-be.

……...

mkReuter.py

input: -

futtatása: !python mkReuter.py 16260 16 23 45.5 49

output: zetar_16260_136026.dat

leírás: A megadott paraméterekkel Reuter-rácsot generál

……

transform_Reuter_eov.py

input: zetar_16260_136026.dat

output: zetar_16260_136026_eov.dat

leírás: A rácspontok koordinátáit átszámítja EOV-be.

……...

Eotvos_points_distance.py

input: ingaeovred_all.dat

output: eloszlas_mind.png, eloszlas_Alfold.png, eloszlas_kulfold.png, eloszlas_nem_Dunantul.png

leírás: Meghatározza az ingamérési pontok átlagos távolságát és azok eloszlását az összes pontra, az alföldi és közép-magyarországi, a külföldi, majd az alföldi, közép-magyarországi és külföldi pontokra együttvéve. Kiszámítja a szükséges Reuter-rács paramétert.

……...

reuter-racskoz.py

input: zetar_16260_136026_eov.dat

output: -

leírás: Ellenőrzi a rácspontok távolságát.

……..

kitolto_pontok.py

input: zetar_16260_136026_eov.dat, cueo1_eov.dat, greo1_eov.dat

output: cueo_kitolto_eov_97510.dat, greo_kitolto_eov_95436.dat

leírás: Kiszámítja a gradiens, illetve görbületi pontokat. Tehát kiválasztja azokat a pontokat, amelyek közelében (azaz legfeljebb egy rácsköznyi távolságra) nincs gradiens, illetve görbületi pont. Az állományokat WGS84-be is átszámítja.

……...

GetHfromEOV_m.py

input: greo_kitolto_eov_95436.dat, cueo_kitolto_eov_97510.dat, eu_dem_eov.tif

output: greo_kitolto_eovH_95436.dat, cueo_kitolto_eovH_97510.dat

leírás: Az EOV-ben lévő kitöltő pontokhoz tengerszint feletti magasságot rendel raszteres EU-DEM felszínmodellből a pixelértékek közötti lineáris interpolációval.

……...

EOV2WGS84.py

input: cueo_kitolto_eovH_97510.dat, greo_kitolto_eovH_95436.dat

output: cueo_kitolto_wgs84_H_93842.dat, greo_kitolto_wgs84_H_91768.dat

leírás: Az EOV-ben lévő magassággal kiegészített állományokat átszámítja WGS84-be, törli a magasságot nem tartalmazó pontokat.

……...

h_over_wgs84_ellipsoid.py

input: cueo_kitolto_wgs84_H_93842.dat, greo_kitolto_wgs84_H_91768.dat, us_nga_egm2008_1_Hungary.tif

output: cueo_kitolto_wgs84_flh_ell_93842.dat, cueo_kitolto_wgs84_flh_ell_93842_noPtN.dat, greo_kitolto_wgs84_flh_ell_91768.dat, greo_kitolto_wgs84_flh_ell_91768_noPtN.dat

leírás: A tengerszint feletti magasságokat ellipszoid feletti magasságokra cseréli a kitöltő pontok esetén. Az EGM2008 geopotenciál modell alapján készített geoidundulációkat 1’×1’ felbontású rácsban tartalmazó raszterből számít geoidundulációt, és hozzáadja ezt a tengerszint feletti magassághoz.

vegso_adatfeldolgozas.ipynb

input: cueo_2190ei_T.txt, cueo_2190sg_T.txt, cueo_kit_2190ei_T.txt, cueo1.dat, greo_2190ei_T.txt, greo_2190sg_T.txt, greo_kit_2190ei_T.txt, greo1.dat, cueo_300to.txt, greo_300to.txt, abroad_borders.geojson, OSMBoundaries_Hungary_Regions.geojson

output: cueo2190graflab.dat, cueo2190kit_graflab.dat, greo2190graflab.dat, greo2190kit_graflab.dat, Wdelta kitöltő pontokkal.png, Wdelta mért értékek.png, Wdelta számított értékek.png, Wdelta_corr.png, Wxy kitöltő pontokkal.png, Wxy mért értékek.png, Wxy számított értékek.png, Wxy_corr.png, Wxz kitöltő pontokkal.png, Wxz mért értékek.png, Wxz számított értékek.png, Wxz_corr.png, Wyz kitöltő pontokkal.png, Wyz mért értékek.png, Wyz számított értékek.png, Wyz_corr.png

leírás: A GrafLab által mért potenciálzavar-tenzor elemekből Eötvös-inga által mérhető mennyiségeket számít. Kiszámítja a mért és a számított eredmények közötti korrelációs együtthatót, és egyéb statisztikai paramétereket. Mozgóátlagot számít a mérésekre, úgy is megvizsgálja a korrelációt a számított eredményekre. Színskálás megjelenítésben ábrázolja az ingamérési pontokra a gradiens és görbületi adatokat. Végül az mért eredményeket együttesen ábrázolja a kitöltő pontokra számított mennyiségekkel.

A fent felsorolt programok, a hozzájuk tartozó adatok, és a gradienstérképek nagyobb felbontásban a következő linken érhetők el:

https://bmeedu-my.sharepoint.com/:f:/g/personal/pongraczdaniel_edu_bme_hu/EjM8dESfVn9Cn4JoggM5UTsBeum-64id3Zh-JSoeMKQhpw?e=c12N2w