



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

OTDK DOLGOZAT

Kvencs dinamika a Blume–Capel modellben

Király Csilla

Témavezető: Dr. Lencsés Máté
Tudományos munkatárs
Wigner Fizikai Kutatóközpont
Részecske- és Magfizikai Intézet,
Elméleti Fizikai Osztály

BME, TTK
2023

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Lencsés Máténak, aki nemcsak szakértelmével és hasznos magyarázataival, de határtalan segítőkészségével is hozzájárult ahhoz, hogy megszülethessen ez a dolgozat. Szeretném továbbá kifejezni őszinte hálám azért, hogy mindig pontosan szem előtt tartotta céljaimat és önzetlen munkájával segítette beteljesítenem azokat. Ugyanakkor szeretném megköszönni támogatását, rengeteg értékes tanácsát és azt a mérhetetlen motivációt is, amivel a konzultációk során folyamatosan elhalmozott. Ezek mind nagyban hozzájárultak a személyes fejlődésemhez nemcsak szakmailag, de Máténak köszönhetően önbizalmat is nyertem, az egyetemen elémt gördülő akadályokkal pedig könnyebben nézek szembe és sokkal jobban bírom magamban és abban, hogy meg tudom valósítani az álmaimat.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Végtelen időfejlesztő blokk decimációs algoritmus (iTEBD)	4
2.1. Kvantumösszefonódás és entrópia	5
2.2. Terület- és térfogattörvény	7
2.3. Mátrix szorzat állapotok (MPS)	7
2.4. Az iTEBD algoritmus működése	10
3. A Blume–Capel modell vizsgálata egzakt diagonalizációval	16
3.1. A Blume–Capel modell	16
3.2. Energiaszintek véges lánc esetén	17
3.3. Alapállapotú energiasűrűségek	20
4. A Blume–Capel modell vizsgálata iTEBD-vel	21
4.1. Összefonódás időfejlődése kvencseknél	22
4.2. Operátorok várható értékeinek időfejlődése kvencs után	23
5. Az E_7 modell vizsgálata	27
5.1. Fourier-transzformáció és a kvencsekből kapott spektrum	27
5.2. Z_2 szimmetria	29
5.3. E_7 vonal	30
5.4. E_7 spektrum	32
5.5. Skálázó limesz	35
5.5.1. Térelméleti összefoglaló és form faktorok	35
5.5.2. Rendezetlen $E_7 \rightarrow E_7$ kvencs	36
5.5.3. Rendezett $E_7 \rightarrow E_7$ kvencs	40
6. Összefoglalás és kitekintés	41

1. fejezet

Bevezetés

A statisztikus fizika sok szabadsági fokú rendszerek vizsgálatával foglalkozik, például az egydimenziós soktest kvantumrendszerek, így a spinláncok kritikus jelenségeivel is.

Az egydimenziós kvantumrendszerek fázisátmeneti (kritikus) pontjaikban konform térelméletekkel modellezhetők. Célunk a kritikus ponthoz közeli kvantumrendszerek nemegyensúlyi dinamikájának vizsgálata volt a kvencs utáni időfejlődés tanulmányozásával. Ilyenkor a rendszer egy Hamilton operátor alapállapotából indul, majd ennek egy paraméterét megváltoztatva az új Hamilton operátorral törénő időfejlődést hívjuk kvencs utáni dinamikának, amit a kvencs operátor és más időfüggő operátorok jellemezhetnek, például a mágnesezettség.

A dolgozatban a Blume–Capel modellt vizsgáltuk, melynek trikritikus pontja a skálázó limeszben konform térelmélettel írható le, és melynek trikritikus pontja körüli termális perturbációja az E_7 modell. Az E_7 modell spektrumára és különböző operátorok kvencs utáni időfejlődésére vonatkozó térelméleti jóslatokat ellenőriztük a Blume–Capel modell skálázó határesetének numerikus vizsgálatával. Ehhez rendezetlen és rendezett $E_7 \rightarrow E_7$ kvencsek után a kvencs operátor és a longitudinális mágnesezettség operátorának időfüggését tanulmányoztuk.

Térelméleti jóslatok vannak az E_7 modell spektrumára, illetve a skálázó limeszre, ami a posztkvencs operátorok várható értékeivel van kapcsolatban. Ezen jóslatokat szerettük volna alátámasztani a numerikus eredményeinkkel, ehhez rendezetlen és rendezett $E_7 \rightarrow E_7$ kvencseket vizsgáltunk, nevezetesen a Θ energia-impulzus tenzor nyomát, ami maga a kvencs operátor, és a longitudinális mágnesezettséget.

A dolgozatban először az iTEBD módszert ismertetjük. Bemutatjuk, hogy milyen feltételezéseket és közelítéseket alkalmazunk az algoritmusban. Ezt követően egzakt diagonalizációval vizsgáljuk a véges Blume–Capel spinláncot és megmutatjuk, hogy az alapállapot energiásűrűségekre kapott eredmények összhangban vannak az iTEBD-vel számolt eredménnyel.

A dolgozat második felében először röviden bemutatjuk a szimulációk során használt paramétereket és hogy hogyan kell ezeket megválasztani, majd rátérünk az E_7 modell vizsgálatára. Itt a modellre ismert térelméleti jóslatokat járjuk körbe, különös hangsúlyt fektetve a skálázó limeszre, ahol a rendezetlen $E_7 \rightarrow E_7$ kvencsek esetén a Θ kvencs operátor, míg rendezett $E_7 \rightarrow E_7$ kvencseknél a kvencs és a mágnesezettség operátorának várható értékét határoztuk meg az idő függvényében. A szimulációinkból kapott numerikus eredményeket pedig összevetjük a térelméletből ismert eredményekkel.

2. fejezet

Végtelen időfejlesztő blokk decimációs algoritmus (iTEBD)

A kvantumrendszerek állapotainak közelítésére több algoritmus is szolgál. Ezek egyike az ún. időfejlesztő blokk decimációs algoritmus (time-evolving block decimation, TEBD), ami egy speciális módszer arra, hogy zárt nagy kvantumrendszerek időfejlődését vizsgáljuk valós vagy képzetes időben egyaránt.

A TEBD módszer alapillére a kvantumrendszerek kvantumos összefonódási tulajdonsága és az algoritmus azt a fontos megállapítást használja ki, hogy egy általános kvantumállapotot át lehet írni mátrix szorzat állapotba (MPS), melyen speciális állapotokra további közelítésekkel élhetünk.

Mi olyan végtelen spinláncokat vizsgáltunk, amit bizonyos esetekben hatékonyan lehet MPS alapú iTEBD-vel (végtelen időfejlesztő blokkdecimálással) közelíteni. Ebben a fejezetben tehát az iTEBD módszert és az ehhez szükséges fizikai háttérrel mutatjuk be, majd az algoritmus működéséről, illetve az abban használt közelítésekről is szó lesz. Mindezt pedig az [1] jegyzet alapján tesszük.

2.1. Kvantumösszefonódás és entrópia

Az összefonódás a kvantummechanika egyik alapvető jelensége. Akkor beszélünk róla, amikor egy kvantumrendszert jellemző szabadsági fokok nem írhatók le egymástól függetlenül. Például ha két spin összefonódott állapotban van, akkor nem tudunk úgy mérést végezni az egyikén, hogy az ne legyen hatással a másikra. Soktest kvantumrendszerekben a részecskék közötti ismétlődő kölcsönhatások is összefonódást hoznak létre, ezt hívjuk kvantum soktest-összefonódásnak. Az összefonódás tanulmányozása ilyen rendszerekben hasznos eszköz lehet azok jellemzésére. Például az összefonódási entrópia skálázásának vizsgálatából tudunk következtetni a kritikus pont tulajdonságaira. [2, 3, 4, 5].

A továbbiakban egydimenziós soktest kvantumrendszerekben való összefonódással foglalkozunk. Ehhez tekintsünk egy speciális rendszert, az egydimenziós N hosszú spinláncot. Ennek Hilbert-tere a

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N \quad (2.1)$$

tenzorszorzattal adható meg, ahol $\mathcal{H}_i$ az i -edik helyen lévő spin Hilbert-tere, az ún. lokális állapottér. Az egyszerűség kedvéért feltesszük most, hogy a lokális állapotterek megegyeznek, és $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}^d$. Ebből pedig következik, hogy a spinlánc (komplex) deminziója $\dim \mathcal{H} = d^N$.

A rendszer egy tiszta állapota felírható a természetes tenzorszorzat bázison:

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N=1}^d \psi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N} |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_N\rangle, \quad (2.2)$$

azaz d^N komplex $\psi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}$ együtthatóval adható meg. Ahhoz, hogy vizsgálni tudjuk az adott rendszert, meg kell határozni az összes együtthatót, ez azonban már nem túl nagy N rendszer-méretre is nagyon sok komplex számot jelent. A számítógép véges memóriájából adódóan nem tudunk ennyi adatot egyszerre eltárolni, vagyis csak kis méretű rendszerek vizsgálatára van lehetőségünk. Ha nagyobb kvantumrendszerek tanulmányozása a cél, akkor viszont közelítésekre van szükség, melyek segítségével elég kevesebb adattal dolgozni ahhoz, hogy jellemezni tudjuk a rendszert. Erre az ún. mátrix szorzat állapotok (MPS) nyújtanak egy megoldást. Ennek ismertetése előtt azonban emlékeztetünk néhány kvantummechanikai fogalomra.

Vágjuk ketté valahol a példaként vett N hosszú spinláncunkat. Ekkor a teljes rendszer egy bal- ($\mathcal{H}_L$) és egy jobb ($\mathcal{H}_R$) oldali részrendszer tenzorszorzataként adható meg:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_R, \quad (2.3)$$

az összetett rendszer tiszta állapota pedig legyen $|\psi\rangle$ ($\in \mathcal{H}$). Ekkor léteznek a $\mathcal{H}_L$ -ben és a $\mathcal{H}_R$ -ben olyan ortonormált állapotok ($|\alpha\rangle_L$ és $|\alpha\rangle_R$), melyekkel a rendszer tiszta állapota

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha} |\alpha\rangle_L \otimes |\alpha\rangle_R \quad (2.4)$$

alakban írható fel. Ezt nevezzük Schmidt-féle felbontásnak, a Λ_{α} faktorokat pedig Schmidt-együtthatóknak melyekre:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha} &\geq 0 \quad \forall \alpha\text{-ra} \\ \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Egy rendszer összefonódott állapotban van, ha nem tudjuk tiszta állapotok szorzatára szétbontani. A $\mathcal{H}_L$ ($\mathcal{H}_R$) részrendszert leíró sűrűségmátrixot redukált sűrűségmátrixnak hívjuk, amit úgy kapunk, hogy kiszedjük a $\mathcal{H}_R$ ($\mathcal{H}_L$) rendszert leíró szabadsági fokokat azzal, hogy a teljes sűrűségmátrix $\mathcal{H}_R$ ($\mathcal{H}_L$) rendszer szerinti parciális nyomát vesszük. Értelemszerűen tehát egy összefonódott tiszta kvantumállapot redukált sűrűségmátrixa a részrendszer egy kevert állapotát leíró sűrűségmátrix lesz.

Az összetett rendszer sűrűségmátrixa az alábbi

$$\rho \equiv |\psi\rangle \langle\psi| = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^2 |\alpha\rangle_L \langle\alpha|_L \otimes |\alpha\rangle_R \langle\alpha|_R \quad (2.6)$$

tenzorszorzáttal adható meg, ahol használtuk a (2.4) felbontást. A redukált sűrűségmátrixokra pedig a

$$\begin{aligned} \rho^L &\equiv \text{Tr}_R \rho = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^2 |\alpha\rangle_L \langle\alpha|_L \\ \rho^R &\equiv \text{Tr}_L \rho = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^2 |\alpha\rangle_R \langle\alpha|_R \end{aligned} \quad (2.7)$$

kevert állapotok adódnak. Vegyük észre, hogy a redukált sűrűségmátrixok sajátértékei éppen a Schmidt-együtthatók négyzetei. A részrendszerek közötti összefonódás számszerűsítésére a von Neumann entrópia vagy összefonódási entrópia szolgál¹, amely a redukált sűrűségmátrixsal adható meg:

$$S_i \equiv -\text{Tr} \rho_i \ln \rho_i \quad i = L, R. \quad (2.8)$$

Könnyen látható, hogy

$$S(\rho^L) = S(\rho^R) = -\sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^2 \ln \Lambda_{\alpha}^2, \quad (2.9)$$

azaz az összefonódási entrópia meghatározható a Schmidt-koefficiensek ismeretében.

¹Kiindulásként feltettük, hogy a teljes rendszer tiszta állapotban van.

2.2. Terület- és térfogattörvény

Az összefonódási entrópia kapcsán lehet terület- vagy térfogattörvényről beszélni, attól függően, hogy hogyan függ a részrendszerek összefonódása azok méretétől. Itt a terület és térfogat mennyiségeket az adott részrendszer dimenziójának megfelelően kell értelmezni. Például egy dimenzióban a terület maga a vágási pont és a térfogat a lánc hossza.

Az hogy az állapot terület- vagy térfogattörvényt mutat attól függ, hogy mennyire összefonódott. Erős összefonódás esetén nagy a korrelációs hossz és ilyenkor az entrópia nőni fog a térfogattal, míg gyenge összefonódás esetén a kicsi korrelációs hosszának köszönhetően az entrópia arányos lesz a területtel.

Kvantumos soktestrendszerek spektruma tartalmazhat m tömegrést. Kvantum kritikus pontban ez a tömegrés elűnik, azaz ilyenkor $m = 0$. Tömeges esetet vizsgálva a korrelációs hossz ($1/m$) véges lesz, egymástól ennél nagyobb távolságra lévő spinek között már nem igazán lesz korreláció. Ilyen esetben az alapállapot felülettörvényt követ, azaz ha az egydimenziós láncunkat elvágjuk az A és a B kellően távoli pontokban, akkor az így kapott részrendszer entrópiája konstans lesz, ha az elvágási helyeket változtatjuk is. Kritikus pontban azonban a korrelációs hossz gyakorlatilag végtelen és ebben az esetben az entrópia már nem a területtel lesz arányos, hanem az A és B pontok közötti lánc hossz (l) természetes alapú logaritmusával ($S_{AB} \sim \ln l/a$), ahol a a rácsállandó. Ezt log-térfogattörvénynek nevezik.

A területtörvényt követő állapotok sajátos tulajdonsága, hogy az állapot jól közelíthető $\chi \ll d^N$ Schmidt-bázisállapottal²:

$$\sum_{\alpha=1}^{\chi} \Lambda_{\alpha} |\alpha\rangle_L \otimes |\alpha\rangle_R \approx |\psi\rangle \Rightarrow \left\| |\psi\rangle - \sum_{\alpha=1}^{\chi} \Lambda_{\alpha} |\alpha\rangle_L \otimes |\alpha\rangle_R \right\| < \epsilon, \forall \epsilon > 0 \quad (2.10)$$

Ez a tulajdonság teszi lehetővé az egydimenziós kvantumállapotok MPS reprezentációját.

2.3. Mátrix szorzat állapotok (MPS)

Ebben az alfejezetben azt fogjuk megnézni, hogy hogyan lehet egy általános kvantumállapotot átírni MPS formába. Az átláthatóság kedvéért innentől kezdve nem fogjuk kiírni a tenzorszorzásokat, $|j_1\rangle \otimes |j_2\rangle \otimes \dots \otimes |j_N\rangle \equiv |j_1, \dots, j_N\rangle$.

²végtelen lánc esetén véges sok

Ugyancsak az N hosszú egydimenziós spinláncot vizsgáljuk, ahol a lokális állapotterek egyformák,

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N \\ \dim \mathcal{H}_i &= d \quad \forall i \\ \dim \mathcal{H} &= d^N\end{aligned}\tag{2.11}$$

Egy általános kvantumállapot a spinek bázisainak tenzorszorzata a megfelelő együtthatókkal

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_N} \psi^{j_1, j_2, \dots, j_N} |j_1, \dots, j_N\rangle\tag{2.12}$$

Ennek MPS alakja a $\chi_{n-1} \times \chi_n$ dimenziójú $A^{[n]j_n}$ tenzorok segítségével állítható elő [6, 7],

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_N} A^{[1]j_1} A^{[2]j_2} \dots A^{[N]j_N} |j_1, \dots, j_N\rangle,\tag{2.13}$$

ahol $|j_n\rangle$ az n -ik lokális állapotter bázisa és az $A^{[n]j_n}$ tenzor pedig, ahogy azt lentebb látni fogjuk, a lokális állapotok és a Schmidt-állapotok között teremt kapcsolatot.

A célunk tehát az, hogy egy ilyen általános kvantumállapotot MPS formába alakítsunk át, amit egymás utáni Schmidt-dekompozíciók végrehajtásával tudunk megtenni úgy, hogy változtatjuk a lánc elvágásának helyét a 2.1. ábrán látható módon.

Első lépésben az egydimenziós láncot úgy vágjuk ketté, hogy a bal részrendszer csak egy spint tartalmazzon, míg a jobb az összes többi $(N-1)$. Így az összetett rendszer $|\psi\rangle$ kvantumállapotának Schmidt-felbontása (2.4) alapján

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha_1=1}^d \Lambda_{\alpha_1}^{[1]} |\alpha_1\rangle_{[1]} |\alpha_1\rangle_{[2, \dots, N]}\tag{2.14}$$

ahol a Schmidt-dekompozíció szerint $|\alpha_1\rangle_{[1]}$ ortonormált bázist képez $\mathcal{H}_L$ -ben, míg $|\alpha_1\rangle_{[2, \dots, N]}$ $\mathcal{H}_R$ -ben.

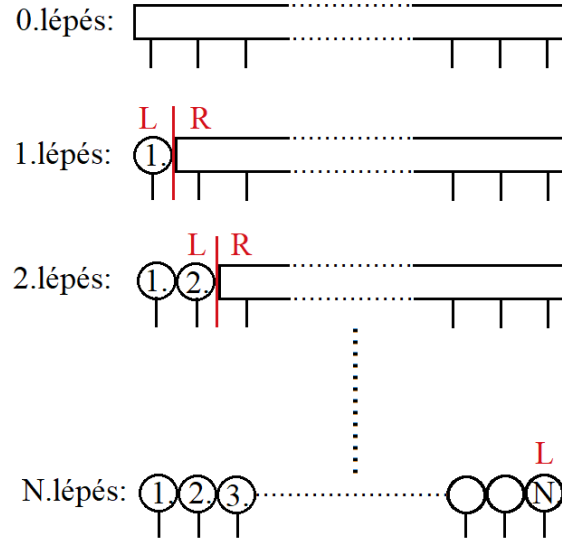
A levezetés során feltesszük, hogy $\chi_0 = \chi_N = 1$, vagyis az első és utolsó A tenzor tulajdonképpen egy d -hosszú (sor- és oszlop-) vektor.

Az MPS-ben megjelenő első tenzor:

$$A_{\alpha_1}^{[1]j_1} = \langle j_1 | \alpha_1 \rangle_{[1]}\tag{2.15}$$

Ebből kifejezve az $|\alpha_1\rangle_{[1]}$ Schmidt-állapotot és visszaírva a (2.15)-be, a következőt kapjuk

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1=1}^d \sum_{\alpha_1=1}^d A_{\alpha_1}^{[1]j_1} \Lambda_{\alpha_1}^{[1]} |\alpha_1\rangle_{[1]} |\alpha_1\rangle_{[2, \dots, N]}\tag{2.16}$$



2.1. ábra. Az általános kvantumállapotokat át lehet írni MPS formára, ezt egy N hosszú spinlánc esetén a Schmidt-dekompozíció egymás utáni alkalmazásával tehetjük meg, ahol lépcsőről lépcsőre változtatjuk a teljes rendszert alkotó bal- és jobb oldali részrendszereket.

Ha továbblépünk és a spinláncot úgy vágjuk el, hogy a bal oldali részrendszer két spint tartalmazzon, akkor az így kapott részrendszerekre a Schmidt-felbontás a

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha_2=1}^{d^2} |\alpha_2\rangle_{[1,2]} |\alpha_2\rangle_{[3,\dots,N]} \quad (2.17)$$

alakot ölti, ezek alapján a második tenzor pedig a következő

$$A_{\alpha_1\alpha_2}^{[2]j_2} = (\langle\alpha_1|_{[1]} \langle j_2|) |\alpha_2\rangle_{[1,2]}. \quad (2.18)$$

Beépítjük az új tenzort is (2.14)-be,

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha_1=1}^d \sum_{\alpha_2=1}^{d^2} \sum_{j_1, j_2=1}^d A_{\alpha_1}^{[1]j_1} A_{\alpha_1\alpha_2}^{[2]j_2} \Lambda_{\alpha_2}^{[2]} |j_1, j_2\rangle |\alpha_2\rangle_{[3,\dots,N]}. \quad (2.19)$$

Ezt a módszert alkalmazva a harmadik lépés után az állapotunk:

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha_1=1}^d \sum_{\alpha_2=1}^{d^2} \sum_{\alpha_3=1}^{d^3} \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^d A_{\alpha_1}^{[1]j_1} A_{\alpha_1\alpha_2}^{[2]j_2} A_{\alpha_2\alpha_3}^{[2]j_3} \Lambda_{\alpha_3}^{[3]} |j_1, j_2, j_3\rangle |\alpha_3\rangle_{[4,\dots,N]}. \quad (2.20)$$

Egyre nagyobb bal részrendszereket véve végül eljutunk az N -ik lépésben oda, hogy eltűnik a jobb részrendszer, tehát egy teljes rendszerünk lesz, amiben már a Schmidt-koefficiensek sem szerepelnek. A rendszer állapotát kizárólag a tenzorok és a lokális állapotok írják le ahogy azt a (2.13)-ba előrevetítettük. Az általános kvantumállapotot átírtuk tehát MPS alakra, ezt tovább alakíthatjuk a (2.10) közelítés bevezetésével az alábbiak szerint.

Legyenek a $\chi_n \times \chi_n$ dimenziós X_n tenzorok olyanok, hogy

$$\tilde{A}^{[n]j_n} = X_{n-1} A^{[n]j_n} X_n^{-1}. \quad (2.21)$$

Ekkor nagyon könnyen belátható, hogy az állapot ugyanaz marad, ha az A tenzorokat $\tilde{A}$ tenzorokra cseréljük

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_N} A^{[1]j_1} A^{[2]j_2} \dots A^{[N]j_N} |j_1, \dots, j_N\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_N} \tilde{A}^{[1]j_1} \tilde{A}^{[2]j_2} \dots \tilde{A}^{[N]j_N} |j_1, \dots, j_N\rangle, \quad (2.22)$$

csak a korábbi feltevéseinket kell figyelembe venni, miszerint $\chi_1 = \chi_N = 1$, azaz az X_0 és az X_N^{-1} tenzorok egydimenziósak, vagyis ezek csak skalárszorozók lesznek és egy skalárral való szorzás az állapotot nem változtatja meg.

Egy lineáris algebra tételt felhasználva az $A^{[n]j_n}$ mátrixok előállnak egy $\chi_{n-1} \times \chi_n$ -es mátrix és egy pozitív, valós, négyzetes $(\chi_n \times \chi_n)$ diagonális mátrix szorzataként.

$$A^{[n]j_n} = \Gamma^{[n]j_n} \Lambda^{[n]}. \quad (2.23)$$

Ezzel az N hosszú spinlánc MPS-ének kanonikus formája az alábbi alakot ölti

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_N} \Gamma^{[1]j_1} \Lambda^{[1]} \Gamma^{[2]j_2} \Lambda^{[2]} \dots \Gamma^{[N]j_N} \Lambda^{[N]} |j_1, j_2, \dots, j_N\rangle \quad (2.24)$$

Végtelen MPS esetén, ha a rendszer translációinvariáns is, akkor minden mátrix megegyezik,

$$\begin{aligned} \Gamma^{[n]j_n} &= \Gamma^j \quad \forall n\text{-re} \\ \Lambda^{[n]} &= \Lambda \quad \forall n\text{-re.} \end{aligned} \quad (2.25)$$

A továbbiakban is a korábbi példánknál maradunk annyi változtatással, hogy most a spinlánc végtelen hosszú ($N \rightarrow \infty$), translációinvariáns és olyan a kölcsönhatás, amit vizsgálunk majd, hogy csak elsőszomszédokat csatol (kettő méretű elemi cella), így a leíráshoz szükséges tenzorok: $\Gamma^A, \Gamma^B, \Lambda^A$ és Λ^B [8, 9, 10].

2.4. Az iTEBD algoritmus működése

A iTEBD algoritmus egy kvantumállapot időfejlődését közelíti,

$$|\psi(N\delta t)\rangle = \prod_{i=1}^N U(\delta t) |\psi(0)\rangle, \quad (2.26)$$

ahol $U(\delta t) = e^{-iH\delta t}$ operátor diszkrét időlépéseket ír le, ami megvalósíthat valós ($\delta t \in \mathbb{R}$) vagy képzetes ($\delta t = -i\delta\tau$; $\delta\tau \in \mathbb{R}$) időfejlődést is. A diszkrét időlépések sorozata pedig folytonossá tehető $\delta t, \delta\tau \rightarrow 0$ határesetben.

Egy $\mathcal{H}$ Hilbert-terű végtelen hosszú egydimenziós spinlánc $|\psi_{GS}\rangle$ alapállapotát végtelen sok egymás utáni képzetes időfejlődés alkalmazásával tudjuk meghatározni,

$$|\psi_{GS}\rangle = \prod_{j=1}^{\infty} U(-i\delta\tau) |\psi_0\rangle, \quad (2.27)$$

ahol $|\psi_0\rangle$ a kezdeti állapot és $\delta\tau > 0$, amit időfejlesztünk és ami sok idő után bekonvergál az alapállapotba³.

A továbbiakban azt mutatjuk be, hogy az iTEBD algoritmus hogyan működik egydimenziós láncokon.

Először is fontos megjegyezni, hogy a módszer akkor hatékony, ha az összefonódás kellően kicsi, ugyanis az MPS ekkor lesz jó közelítés. Fontos továbbá, hogy a rendszert rövid hatótávolságú kölcsönhatások írják le, mivel a lokális iTEBD lépéseket ekkor tudjuk hatékonyan alkalmazni. Legyen a végtelen egydimenziós spinláncunk Hamilton-operátora most olyan, ami legfeljebb elsőszomszéd kölcsönhatásokat tartalmaz,

$$H = \sum_n h^{[n,n+1]} \quad (2.28)$$

Mivel végtelen spinláncot szeretnénk vizsgálni és a számítógép memóriája is véges, ezért az algoritmusban közelítéseket kell alkalmaznunk ahhoz, hogy a rendszert hűen tudjuk reprezentálni. Az egyik és talán legfontosabb használt közelítés a Trotter–Suzuki dekompozíció. Az ötlet az, hogy a rendszer H Hamilton-operátorát felbontjuk olyan operátorok összegére, melyek jól szimulálhatóak, majd a teljes időfejlődést felírjuk egyszerűbb időfejlődések szorzataként kihasználva a Hamilton-operátor felbontását.

A Hamilton-operátorban válogassuk szét a tagokat aszerint, hogy n páros vagy páratlan, ekkor a szétválogatott hatásokból kapott operátorok:

$$\begin{aligned} H &= H_{\text{odd}} + H_{\text{even}} \\ H_{\text{odd}} &= \sum_{n \text{ odd}} h^{[n,n+1]} = h^{[1,2]} + h^{[3,4]} + h^{[5,6]} + \dots \\ H_{\text{even}} &= \sum_{n \text{ even}} h^{[n,n+1]} = h^{[2,3]} + h^{[4,5]} + h^{[6,7]} + \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

A két operátor általában nem kommutál egymással, viszont mindkettő kommutáló operátorok összege és az algoritmus pont ezt használja ki.

$$\begin{aligned} [H_{\text{odd}}, H_{\text{even}}] &\neq 0 \\ [h^{[i,i+1]}, h^{[i+2,i+3]}] &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.30)$$

Általánosan felírva az első- és másodrendű kiterjesztése a Trotter–Suzuki dekompozíciónak az alábbi

$$\begin{aligned} e^{(V+W)\delta} &= e^{V\delta} e^{W\delta} + \mathcal{O}(\delta^2) \\ e^{(V+W)\delta} &= e^{V\delta/2} e^{W\delta} e^{V\delta/2} + \mathcal{O}(\delta^3). \end{aligned} \quad (2.31)$$

³amennyiben van az alapállapottal közös komponense, azaz $\langle\psi_0|\psi_{GS}\rangle \neq 0$

Ha most felosztjuk az időt δt infinitezimálisan kicsi időszeletekre, akkor az elsőrendű Trotter–Suzuki dekompozíciót alkalmazva, az időfejllesztő operátor a következő alakban írható fel

$$\begin{aligned} U(\delta t) &= e^{-iH\delta t} = e^{-i(H_{\text{odd}}+H_{\text{even}})\delta t} = e^{-iH_{\text{odd}}\delta t}e^{-iH_{\text{even}}\delta t} + \mathcal{O}(\delta t^2) = \\ &= \left[\prod_{n \text{ odd}} e^{-i\mathbf{h}^{[n,n+1]}\delta t} \right] \left[\prod_{n \text{ even}} e^{-i\mathbf{h}^{[n,n+1]}\delta t} \right] + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &\Rightarrow U(\delta t) \approx \left[\prod_{n \text{ odd}} U^{[n,n+1]}(\delta t) \right] \left[\prod_{n \text{ even}} U^{[n,n+1]}(\delta t) \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

ahol $U^{[n,n+1]}(\delta t) = e^{-i\mathbf{h}^{[n,n+1]}\delta t}$.

Egy ilyen diszkrét időfejlődés az MPS-ansatz egy két-spin részén az alábbi módon valósítható meg. A kiválasztott két spin állapota a

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{\alpha,j,k,\gamma} \Theta_{\alpha\gamma}^{jk} |\alpha_{n-1}\rangle_L |j_n\rangle |k_{n+1}\rangle |\gamma_{n+1}\rangle_R, \\ \Theta_{\alpha\gamma}^{jk} &= \sum_{\beta} \Lambda_{\alpha}^B \Gamma_{\alpha\beta}^{A,j} \Lambda_{\beta}^A \Gamma_{\beta\gamma}^{B,k} \Lambda_{\gamma}^B \end{aligned} \quad (2.33)$$

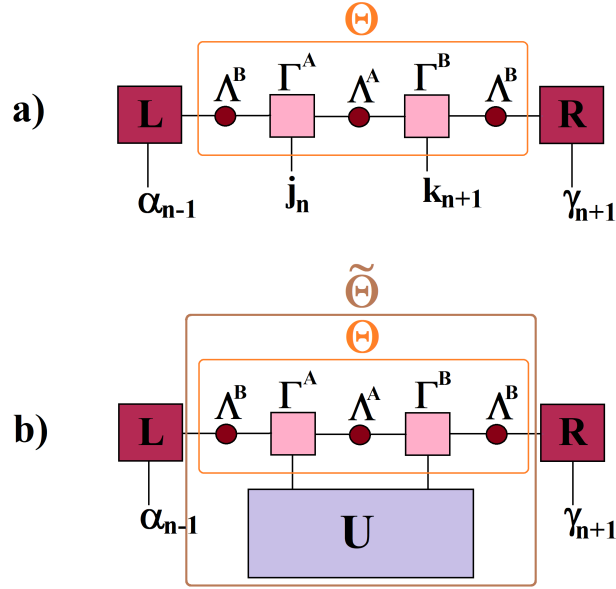
alakban adható meg, ahol $|\alpha_{n-1}\rangle_L$ az $[n-1, n]$ kötés bal oldalán lévő Schmidt-állapotok, míg a $|\gamma_{n+1}\rangle_R$ az $[n+1, n+2]$ kötés jobb oldali Schmidt-állapotai. A $|j_n\rangle$ és $|k_{n+1}\rangle$ az n -ik és $n+1$ -ik lokális Hilbert-tér egy adott bázisállapota. A $\Theta_{\alpha\gamma}^{jk}$ együtthatók pedig az előző fejezet végén felírt tenzorok szorzatai. Kihasználva az eltolásinvarianciát, a teljes állapot ilyen MPS darabok szorzataként állítható elő. Egy ilyen MPS darab a 2.2.a) ábrán látható módon úgy néz ki, hogy vesszük az adott kettő méretű elemi cellát, illetve ennek bal- és jobb oldalán maradt rácshelyeket.

Könnyen látható, hogy az egy spin operátorok egyértelmű módon hatnak. Bonyolultabb a helyzet két spin operátorok esetén. Ha egy fent említett elemi cellára egy U unitér operátorral hatunk, akkor megváltozik (2.2.b) ábra)

$$\tilde{\Theta}_{\alpha\gamma}^{jk} = \sum_{j',k'} U_{j'k'}^{jk} \Theta_{\alpha\gamma}^{j'k'}. \quad (2.34)$$

A transzformált $\tilde{\Theta}_{\alpha\gamma}^{jk}$ -ból szeretnénk az új MPS tenzorokat is meghatározni. Ezt pedig úgy tudjuk megtenni, hogy a $\tilde{\Theta}_{\alpha\gamma}^{jk}$ indexeit kombináljuk, vagyis a $d \times d \times \chi \times \chi$ dimenziós 4 indexű $\tilde{\Theta}_{\alpha\gamma}^{jk}$ tenzor 2-2 indexét egybeolvasztjuk és kapunk egy $d\chi \times d\chi$ -s 2 indexű $\tilde{\Theta}_{j\alpha,k\gamma}$ tenzort, ami tulajdonképpen így már egy mátrix lesz. Mivel $\det(\Theta_{j\alpha,k\gamma}) \approx 0$, ezért ezt a mátrixot szinguláris érték dekompozíció (SVD) segítségével szétbonthatjuk három mátrix szorzatára,

$$\tilde{\Theta}_{j\alpha,k\gamma} = \sum_{\beta} X_{j\alpha,\beta} D_{\beta} Y_{\beta,k\gamma}, \quad (2.35)$$



2.2. ábra. Elsőszomszéd kölcsönhatást leíró transzformáció esetén kettő méretű az egydimenziós spinlánc elemi cellája, ami így az A és B tenzorokkal írható le. Az a) ábrán egy végtelen hosszú spinlánc MPS-ének egy darabkája látható, a b) ábrán pedig egy az erre a darabra ható unitér operátor.

ahol X és Y is $d_\chi \times d_\chi$ -s mátrix és D egy diagonális $d_\chi \times d_\chi$ -s mátrix. Az X mátrix az új $|\beta_n\rangle_L$ Schmidt-állapotok és a kombinált $|\alpha_{n-1}\rangle |j_n\rangle$ bázisok közötti kapcsolatot írja le, míg Y a $|\beta\rangle_R$ és a $|k_{n+1}\rangle |\gamma_{n+1}\rangle$ közötti kapcsolatot adja meg. Így a D diagonális mátrix pontosan a transzformált állapot Schmidt-együtthatóit tartalmazza, vagyis $D = \tilde{\Lambda}^A$. Az új $\tilde{\Gamma}$ tenzorok pedig a Θ definíciójából a korábbi Γ mátrixok alapján

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{A,j} &= (\Lambda^B)^{-1}_\alpha X_{j\alpha,\beta} \\ \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{B,j} &= Y_{\beta,k\gamma} (\Lambda^B)^{-1}_\gamma.\end{aligned}\tag{2.36}$$

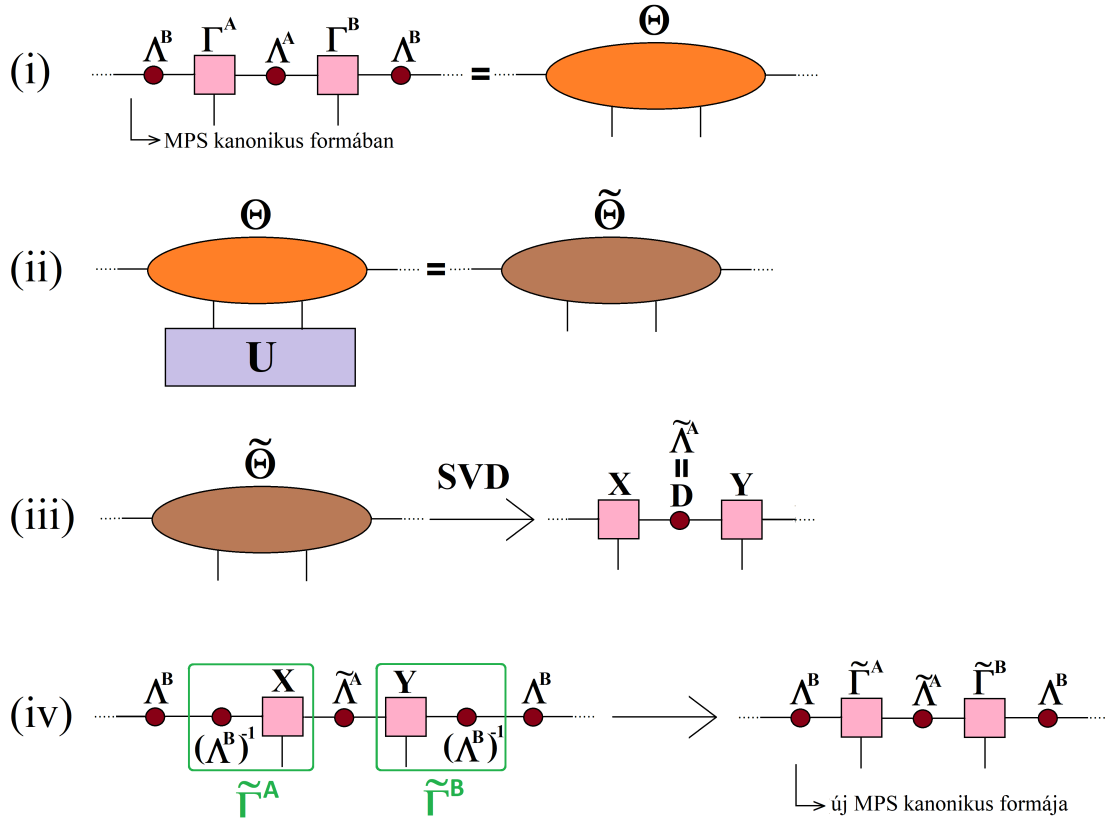
Az új elemi cella tehát

$$\tilde{\Theta}_{\alpha\gamma}^{jk} = \sum_\beta \Lambda_\alpha^B \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{A,j} \tilde{\Lambda}_\beta^A \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{B,k} \Lambda_\gamma^B,\tag{2.37}$$

látható, hogy az új MPS továbbra is kanonikus formában van.

Összefoglalva a fentebb leírtakat az iTEBD lépései a 2.3. ábrán láthatóak. Először a rendszert leíró állapot MPS felírását, ami kanonikus formában van, összeolvasztjuk a Θ tenzorba (2.3.(i)). Majd az adott $[n, n+1]$ elemi cellán végrehajtjuk az U unitér időfejlődést és így kapjuk a $\tilde{\Theta}$ új tenzort (2.3.(ii)). Az állapotot leíró új tenzort SVD-vel szétbontjuk az X, D és Y mátrixokra, ahol egyszerű megfontolásokból kiderül, hogy a diagonális D tulajdonképpen az új Schmidt-együtthatókat tartalmazza (2.3.(iii)). Utolsó lépésként pedig a kapott állapotot

visszaírjuk az új MPS kanonikus formájára (2.3.(iv)). Így néz ki tehát egy teljes iTEBD lépés, amit nagyon sokszor megismétlünk, váltakozva a páros- és páratlan alrácsokon.



2.3. ábra. Az iTEBD algoritmus lépései. (i) Az elemi cellát leíró kanonikus formában lévő MPS egy tenzorként való felírása. (ii) Az unitér operátor hatása erre a tenzorra új elemi cellát eredményez, és (iii)-ben az algoritmus ezt az új tenzort SVD-vel szétbontja három mátrix szorzatára majd az (iv) lépésben az új MPS kanonikus formájára alakítja.

Megjegyzendő továbbá, hogy az algoritmusban további közelítéseket is alkalmazunk. Egy teljes lépés során, amit az $[n, n+1]$ elemi cellán alkalmazunk, megváltozik az $[n, n+1]$ kötésnél lévő összefonódás és a kötés mérete is $d\chi$ -re nő. Így a lépések során ahogy egyre több unitér operátort haddatunk az állapotra exponenciálisan növekszik az az információmennyiség, amit a hullámfüggvény leírásához el kell tárolnunk. Egy idő után azonban erre képtelenek vagyunk, ezért van szükség valamilyen közelítésre.

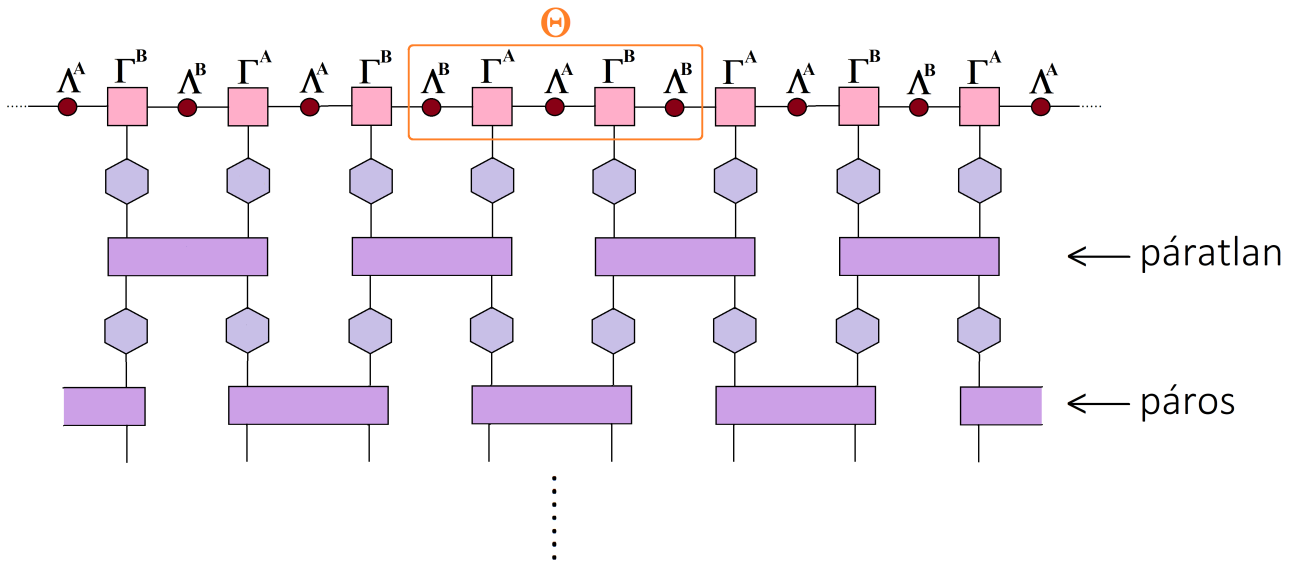
Feltéve, hogy alkalmazhatjuk a (2.10) közelítést, a Schmidt-állapotok számára bevezetünk egy χ_{max} maximum értéket, vagyis minden teljes iTEBD lépés után csak a legfontosabb χ_{max} darab Schmidt-állapotot tartjuk meg. Ez egyszerűen annyit jelent, hogy az (2.35)-be a β index csak 1-től χ_{max} -ig fut, amennyiben a Schmidt-állapotokat a méreteik szerint rendezzük. Ez a csonkolás korlátozza az MPS dimenzióját, ugyanis a korábbi tenzorok méreteiben a χ_{max} fog

majd szerepet játszani, éppen ezért χ_{max} -t hívjuk a bond-dimenziónak (csonkolási dimenzió), ami egy kis szám⁴. Ebből kifolyólag pedig a kanonikus forma normalizálási feltételei jó közelítéssel teljesülnek, de a hullámfüggvény normalizálása érdekében a csonkolás után osztani kell az

$$\mathcal{N} = \sqrt{\sum_{i,j,\alpha,\gamma} |\Theta_{\alpha\gamma}^{ij}|^2} \quad (2.38)$$

csonkolt normával.

Ebben az alfejezetben megismerkedtünk tehát az iTEBD algoritmussal, amit a következő fejezetekben az ún. Blume–Capel modell vizsgálatánál fogunk alkalmazni. Végül példaként és egyben egy kis előretekinésként megjegyezzük, hogy a modellen a végzett iTEBD során az algoritmusban elsőrendű Trotter–Suzuki közelítést alkalmaztunk, ami a 2.4. ábrán látható. A következő fejezetben majd érthetővé válik az ábra, itt csak egy példa erejéig teszünk róla említést.



2.4. ábra. A Blume–Capel modellre alkalmazott elsőrendű Trotter–Suzuki dekompozíció látható az ábrán, ahol a kis hatszögek jelölik az egy spinen ható operátorokat és a téglalapok a két-spin kölcsönhatásokat leíró operátorokat. A Blume–Capel modellben az egy spin operátor az $\frac{\alpha}{2}(S_i^x)^2 + \frac{\beta}{2}S_i^z + \frac{\gamma}{2}(S_i^z)^2$ és az elsőszomszéd kölcsönhatást leíró operátor pedig az $S_i^x S_{i+1}^x$.

⁴Itt kicsi alatt azt értjük, hogy $N\chi_{max}^2 d \ll d^N$, azaz az eltárolni kívánt számok legyenek sokkal kevesebben, mint a d^N db. szám, hisz ez volt a célunk a közelítések bevezetésével. Tehát χ_{max} lehet nagy, ugyanis minél nagyobb, annál pontosabbak az eredményeink, a lényeg, hogy teljesüljön az előzőleg említett feltétel.

3. fejezet

A Blume–Capel modell vizsgálata egzakt diagonalizációval

A továbbiakban egy többparaméterű kvantumrendszer által leírt spinláncról, nevezetesen a Blume–Capel modellről lesz szó, mely a trikritikus pontjában egy konform térelmélettel írható le, melynek egyik perturbációja az E_7 integrálható modell [11, 12]. Ebben a fejezetben [13] alapján egzakt diagonalizációval vizsgáltam a Blume–Capel modellt véges lánc esetén. Az alapállapot energiásűrűségre kapott eredmények összhangban vannak az iTEBD-vel számolt eredménnyel.

3.1. A Blume–Capel modell

A Blume–Capel modell ismertetése előtt érdemes megemlíteni a klasszikus trikritikus Ising modellt, ugyanis ez szoros kapcsolatban áll az általunk vizsgálni kívánt speciális modellel.

A klasszikus trikritikus Ising modell egy kétdimenziós rácsot ír le, ami üres, valamint fel és le spint tartalmazó rácspontokból áll és a rendszert jellemző kölcsönhatás csak elsőszomszédokat csatol. Így a modellt leíró hatás az

$$S = \beta \sum_i s_i s_{i+1} t_i t_{i+1} - \mu \sum_i t_i \quad (3.1)$$

alakot ölti, melyben $s_i = \pm 1$ az i -ik rácshelyen lévő spint írja le ($s_i = +1$ fel spin esetén és $s_i = -1$ le spin esetén), $t_i = 0, 1$ pedig a rácspont betöltöttségéről ad információt ($t_i = 0$ ha üres, nincs az i -ik rácshelyen spin és $t_i = 1$ ha nem üres). A rendszert jellemző paraméterek a $\beta = 1/T$ inverz hőmérséklet (térelméletek esetén $k_B = 1$) és a μ kémiai potenciál. Ennek a klasszikus rendszernek két fázisa van a $\beta - \mu$ síkban, melyek között másodrendű fázisátalakulási vonal van. Ez a vonal a modell trikritikus pontjában végződik és áthaladva rajta a rendszernek

már elsőrendű fázisátalakulása lesz. Továbbá, ami nagyon fontos, hogy az S hatásnak Z_2 szimmetriája van, amit a későbbiekben a 5.2. alfejezetben részletezünk.

A transzfer mátrix formalizmus segítségével a klasszikus $n \times n$ -es kétdimenziós trikritikus Ising modell átírható egydimenziós n hosszú kvantum spinláncra, amit háromállapotú spinek alkotnak. Az így kapott kvantumrendszert hívjuk Blume–Capel modellnek és ezt végtelen rendszerméret esetén a

$$H = \xi \sum_i \left(\alpha (S_i^x)^2 + \beta S_i^z + \gamma (S_i^z)^2 - S_i^x S_{i+1}^x \right) \quad (3.2)$$

Hamilton-operátor írja le, melyben a megjelenő mátrixok

$$S_i^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_i, \quad S_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_i. \quad (3.3)$$

A rendszert az S^z bázisban írjuk fel, melynek sajátértékei $-1, 0$ és 1 lehetnek.

A modellnek három paramétere is van: α , β és γ . Az összegzés előtt szereplő ξ pedig az euklideszi időskálát rögzíti, másként ξ felelős a csatolási állandók megfelelő átskálázásáért.

A (3.1) és (3.2) képletek között kapcsolat áll fenn a paramétereik által, mégpedig a (3.1) összefüggésben a β paraméter szerepét a (3.2)-beli β és a (3.1)-beli $-\mu$ szerepét a (3.2)-ben szereplő α paraméter tölti be. A γ egy bizonyos intervallumon belüli változtatásával a fázisgörbe eltolható úgy, hogy a trikritikus ponton való áthaladás után a rendszert elsőrendű fázisátalakulások jellemezzék.

Fentebb általánosan egy véges N hosszú spinlánc esetén mutattuk be a Blume–Capel modellt, mi azonban a későbbiekben végtelen spinláncokkal dolgozunk és a továbbiakban a $\gamma = 0$ választással élünk, melyre a trikritikus pontot az alábbi paraméterek jellemzik [13]:

$$\begin{aligned} \alpha_{tp} &= 0,910207(4) \\ \beta_{tp} &= 0,415685(6). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Továbbá ξ értékét úgy választottuk, hogy

$$\xi^{-1} = 0,56557. \quad (3.5)$$

3.2. Energiaszintek véges lánc esetén

A Blume–Capel modell konform térelméletekkel írható le a trikritikus pontjában, és ennek különböző perturbációit vizsgálhatjuk a következő Hamilton operátorral:

$$H = H_{CFT} + \lambda H_{pert}, \quad (3.6)$$

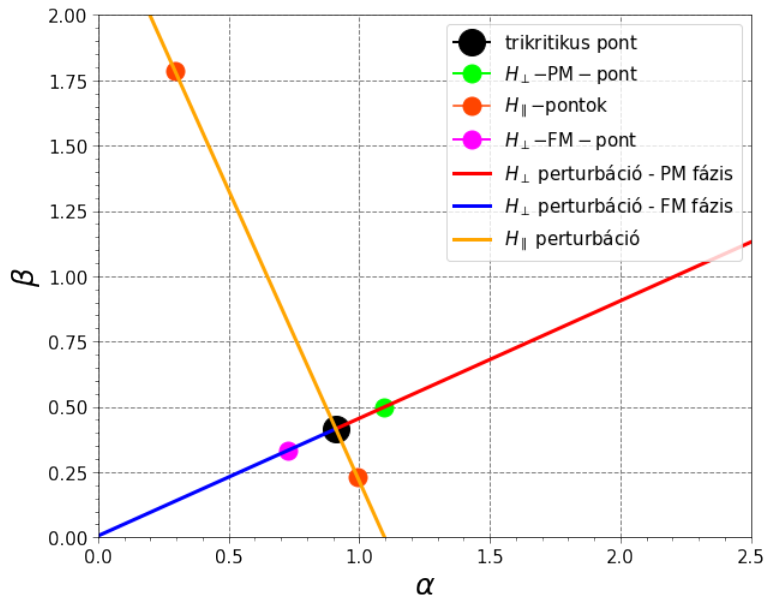
ahol H_{CFT} egy minimális unitér konform elmélet Hamilton operátora, H_{pert} a perturbált Hamilton operátor és λ pedig egy valós szám, ami a konform térelmélettől való eltérés mértékét jellemzi. Egyes perturbációk integrálhatóak [14]. A Blume–Capel modellben a γ paraméter fix értéke esetén több integrálható irány adódik a megfelelő trikritikus pontból indulva. Ezek közül az alábbiakat nevezzük merőleges-fel és -le, illetve párhuzamos-fel és -le irányoknak (3.1.ábra), ahol a fel irány a (3.6) egyenletben $\lambda > 0$ -t jelent, míg a le irány $\lambda < 0$ -t. Ha $\gamma = 0$ esetén $\tan \theta$ a kritikus görbe meredeksége a trikritikus pontban, akkor a merőleges perturbációra feltételezhető a

$$H_{pert}^{\perp} = \sum_{i=1}^N \left(-\sin \theta (S_i^x)^2 + \cos \theta S_i^z \right) \quad (3.7)$$

alak és a párhuzamos perturbációra pedig a

$$H_{pert}^{\parallel} = \sum_{i=1}^N \left(-\cos \theta (S_i^x)^2 - \sin \theta S_i^z \right) \quad (3.8)$$

alak.



3.1. ábra. A Blume–Capel modell trikritikus pontjából induló négy integrálható perturbációs irány

A Blume–Capel modell trikritikus pontját a $c = 7/10$ centrális töltéssel jellemzett konform térelmélet írja le. Ennek egy termális perturbációja az E_7 modell [11, 12], melyben 7 stabil részecske található, melyek tömegéből képzett tömegarányok a 3.2. táblázatban láthatók.

Ezen tömegek igazolására egy nagyon egyszerű módszer, ha megnézzük a

$$\Delta E_i(N) = E_i(N) - E_0(N) \quad (3.9)$$

i	2	3	4	5	6	7
m_i/m_1	1,285	1,879	1,969	2,532	2,879	3,701

3.1. táblázat. Az E_7 spektrumban megjelenő kvázirészecskék közelítő tömegarányai [11, 12] alapján.

energiaszinteket különböző N hosszú láncok esetén. A [13] forrás ezt négy $\alpha - \beta$ paraméter-páros¹ esetén teszi meg, ahol a Blume–Capel modell paraméterterében ez a négy pont a négy különböző integrálható irányban húzott egyenesen van rajta (3.1.ábrán látható pontok) Én is ezekben a pontokban vizsgáltam meg az energiaszintek értékeit a modellre megírt saját programommal, melyben egzakt diagonalizációt alkalmaztam a Hamilton operátor spektrumának meghatározására.

N	$\Delta E_i(N)/\Delta E_1(N)$							
9	0	1	1,277705	1,870747	1,923333	2,405179	2,470943	2,585593
10	0	1	1,281513	1,913613	1,948981	2,189466	2,241903	2,373756
11	0	1	1,283245	1,941778	1,964535	2,355735	2,385915	2,502599
12	0	1	1,284031	1,956299	1,973068	2,240794	2,525531	2,768079

3.2. táblázat. $\alpha = 1,092616$, $\beta = 0,497703$

N	$\Delta E_i(N)/\Delta E_1(N)$							
9	0	1	2,199629	3,244564	3,592034	4,556583	4,789589	5,152363
10	0	1	2,170591	3,100133	3,380087	3,519029	4,293256	4,373800
11	0	1	2,147115	2,979107	3,458124	4,667610	4,413396	4,915838
12	0	1	2,127968	2,876529	3,381457	3,381457	3,406874	4,271193

3.3. táblázat. $\alpha = 0,295069$, $\beta = 1,783751$

Az eredményeimet a 3.2, 3.3, 3.4. és 3.5. táblázatok tartalmazzák. Az így kapott energiaszintek nem mindig felelnek meg a várt 3.2 tömegarányoknak, melynek oka az lehet, hogy véges láncon végeztem a számításokat². Az általaam írt egzakt diagonalizációval az energiaszintekre öt tizedesjegy pontosságig visszakaptam a [13] cikkben bemutatott eredményeket.

¹ $\gamma = 0$ rögzített

²A véges láncok vizsgálatánál periodikus határfeltételt használtam.

N	$\Delta E_i(N)$							
8	0	0,253550	0,253623	0,969074	1,006415	1,394000	1,443772	1,842677
9	0	0,285219	0,285247	0,947192	0,978900	1,312642	1,356137	1,712890
10	0	0,316900	0,316912	0,933128	0,960952	1,252636	1,290728	1,610597
11	0	0,348587	0,348592	0,924206	0,949369	1,208189	1,241721	1,529505
12	0	0,380275	0,380277	0,918666	0,942034	1,175333	1,205059	1,464959

3.4. táblázat. $\alpha = 0,992225$, $\beta = 0,233276$

N	$\Delta E_i(N)$							
8	0	0,000003	1,625163	1,632767	2,307964	2,503016	2,732657	2,918642
9	0	0,000001	1,628566	1,630796	2,394225	2,475473	2,795331	3,044097
10	0	0,000000	1,629485	1,630148	2,427779	2,461672	2,851866	2,918626
11	0	0,000000	1,629743	1,629941	2,439574	2,454832	2,849365	3,009717
12	0	0,000000	1,629817	1,629877	2,444151	2,451432	2,830431	2,918625

3.5. táblázat. $\alpha = 0,727798$, $\beta = 0,333667$

3.3. Alapállapot energiásűrűségek

Mivel az energiaszintekre elég pontosan visszakaptam a [13] eredményeit, feltételezhető, hogy az egzakt diagonalizáció a modellen jól működik. Ez pedig egy jó ellenőrzésre ad lehetőséget, amivel az iTEBD algoritmusom működőképességét tesztelhetem. A ellenőrzés a következő: különböző N hosszú véges láncok esetén kiszámolom az alapállapot energiásűrűségét,

$$\epsilon_0 = \frac{E_0}{L}, \quad (3.10)$$

ahol $L = N$ a lánc hossza. Majd a végtelen lánc esetén az iTEBD-vel is kiszámolom ugyanezt és a véges és végtelen láncokra kapott eredményeket összehasonlítom.

Rögzített $\gamma = 0$ mellett több $\alpha - \beta$ paraméterpárosra elvégeztem ezt az ellenőrzést és mindegyik esetén hasonló tapasztaltam. Ezekből az ellenőrzésekből kettőt mutatok itt be, melyek paraméterpárosai a 3.1. ábrán látható $H_\perp$ perturbációs irányon felvett paramágneses és ferromágneses pontokhoz tartoznak. A kapott alapállapot energiásűrűségeket a két pont esetén a 3.6. táblázat tartalmazza.

A véges láncra egzakt diagonalizációval és a végtelen láncra iTEBD-vel kapott alapállapot energiásűrűségek az $\alpha = 1,092616$, $\beta = 0,497703$ paramágneses pontban négy tizedesjegyre, míg az $\alpha = 0,727798$, $\beta = 0,333667$ ferromágneses pontban öt tizedesjegyre egyeznek meg.

Alapállapotí energiasűrűség					
$\alpha = 1,092616$; $\beta = 0,497703$			$\alpha = 0,727798$; $\beta = 0,333667$		
Egzakt Diag		iTEBD	Egzakt Diag		iTEBD
N = 9	-0,35747688	-0,35741872	N = 9	-0,56038768	-0,56038067
N = 10	-0,35747561		N = 10	-0,56038765	
N = 11	-0,35747523		N = 11	-0,56038764	

3.6. táblázat. Alapállapotí energiasűrűség értékei véges és végtelen láncok esetén

Megfigyelhető továbbá, hogy ahogy növeljük a lánc hosszát az alapállapotí energiasűrűség értéke a végtelen láncra kapott eredmény felé közelít. A fent látott ellenőrzésekből következik, hogy az iTEBD algoritmusunkkal jól szimulálható és vizsgálható a Blume–Capel modell.

4. fejezet

A Blume–Capel modell vizsgálata iTEBD-vel

A végtelen Blume–Capel láncot iTEBD módszerrel vizsgáltam. Az algoritmus több közelítést is alkalmaz, az egyik és talán legfontosabb ezek közül a 2. fejezetben már emlegetett χ_{max} bond-dimenzió megválasztása, ugyanis a bond-dimenzió korlátozza a figyelembe vett Schmidt-állapotok számát és ezzel együtt a Schmidt-együtthatókat is. Tehát χ_{max} mondja meg, hogy mekkora lehet a maximálisan kinyerhető összefonódási entrópia. Így például ha túl kicsinek választjuk a bond-dimenziót, akkor telítésbe mehet az entrópia és így nem tudunk hiteles következtetéseket levonni az időfüggésről.

Ebben a fejezetben az iTEBD segítségével vizsgált kvencsek paramétereit fogom bemutatni, valamint a kvencsek során kapott időfüggő mennyiségek ábráinak összehasonlításával megmutatom, hogy hogyan győződhetünk meg afelől, hogy a szimulációs eredmények hitelesek.

4.1. Összefonódás időfejlődése kvencseknél

A Blume–Capel modell kvencs utáni dinamikájának vizsgálata során az iTEBD algoritmust használtam, melyben az időlépést $\delta t = 0,005$ értékre állítottam és a kezdeti Hamilton-operátor alapállapotának megkeresését az S^x mátrix $+1$ sajátértékéhez tartozó sajátállapotából indítottam. Az alapállapotkeresésnél is és az új Hamilton-operátorral végzett időfejlődések esetén is $N = 500000$ teljes iTEBD lépést hajtottam végre és elsőrendű Trotter–Suzuki közelítést alkalmaztam (2.4. ábra). Fontos megjegyezni továbbá, hogy az algoritmusban az entrópiát a páros és páratlan (ábrákon $E_{\text{páratlan}}$) rácshelyekre is kiszámoltuk, ellenben a mágnesezettséggel (ábrákon M) és a kvencs operátor várható értékével (ábrákon Θ), amiknek a két alrácsra vett értékét átlagoltuk.

A továbbiakban a rendszer ferromágneses és paramágneses fázisában végzett kvencsek során kapott eredményeket részletezem. Ezt több módon is megteszem: például egy adott kvencs vizsgálatánál a különböző bond-dimenziók esetén kapott eredmények összehasonlítása révén avagy a különböző paraméterpárosokra elvégzett kvencsek esetén a kvencs utáni dinamikában látott időfüggő fizikai mennyiségek viselkedésének összehasonlítása révén. Tehát a továbbiakban a 4.1. táblázatban szereplő kvencseket fogom elemezni, ahol a kvencs utáni dinamika vizsgálatánál az időfüggő mennyiségeket az $m = \text{const} \cdot \lambda^{1/(2-2 \cdot \frac{1}{10})}$ tömeg-csatolás összefüggéssel átskálázott idő függvényében ábrázolom, ahol a konstans (const) úgy választottam meg, hogy az időtengely az $m_1 t$ legyen (5.10. ábra), ahol m_1 a 3.2. táblázatban is megjelenő m_1 tömeget jelöli. Ekkor $\text{const} = 2,5776$.

kvencsek		tapasztalatok
fázis	λ_0	t_{max}
PM	0,004	30
	0,01	40
FM	0,0055	35
	0,009	35

4.1. táblázat. Vizsgált paramágneses és ferromágneses kvencsek, valamint az entrópia görbék összehasonlításánál tapasztalt t_{max} idők

Mind a négy kvencs esetén a bond-dimenzió négy különböző értékére is elvégeztem a szimulációkat, nevezetesen a $\chi_{\text{max}} = 30, 70, 100$ és 200 értékekre. A kvencsek vizsgálatánál az entrópia időfüggését tekintve nem tapasztaltam tartós átfedést a különböző bond-dimenziókhoz tartozó entrópia görbék között, ami azzal az egyszerű ténnyel magyarázható, hogy ha nem vá-

lasztunk elég nagy bond-dimenziót a szimuláció során, akkor az entrópia hamar telítődni fog. Éppen ezért tapasztatom azt, hogy a nagyobb bond-dimenzió választásnál bizonyos idő elteltével az entrópia görbe a kisebb bond-dimenzióhoz tartozó entrópiához képest megnő. Tehát a szimuláció eredményeit addig tarthatjuk hitelesnek, míg a legnagyobb bond-dimenziókhoz tartozó entrópia görbék közelítőleg átfednek. Például a $\lambda_0 = 0,004$ paramágneses kvencs esetén nagyjából $t_{max} \approx 30$ -nál kezd a $\chi_{max} = 100$ és $\chi_{max} = 200$ bond-dimenziókhoz tartozó a páratlan entrópiát leíró oszcilláló görbe kicsit eltérni egymástól (4.1. legfelső ábráján látható sárgával és kékkel jelölt görbék). Hasonlóképpen megállapítható a többi kvencs esetén is, hogy a szimuláció eredményei meddig hitelesek, ezt a 4.1. táblázatban foglaltam össze. Fontos, hogy ezek a t_{max} idők a már átskálázott ábrákról lettek leolvasva.

Az entrópiák összehasonlításánál mindenhol a páratlan összefonódási entrópiát használtam, de nagyon hasonló ábrákhoz jutnánk, ha a páros entrópiák időfüggését tekintenénk, ugyanis a kettő közel ugyanolyan oszcilláló függvényt ír le, ahogy az a 4.2. ábrán is látható. Itt a entrópiák értékeiből levontam a kezdeti állapot entrópiáját és azt ábrázoltam (ΔE).

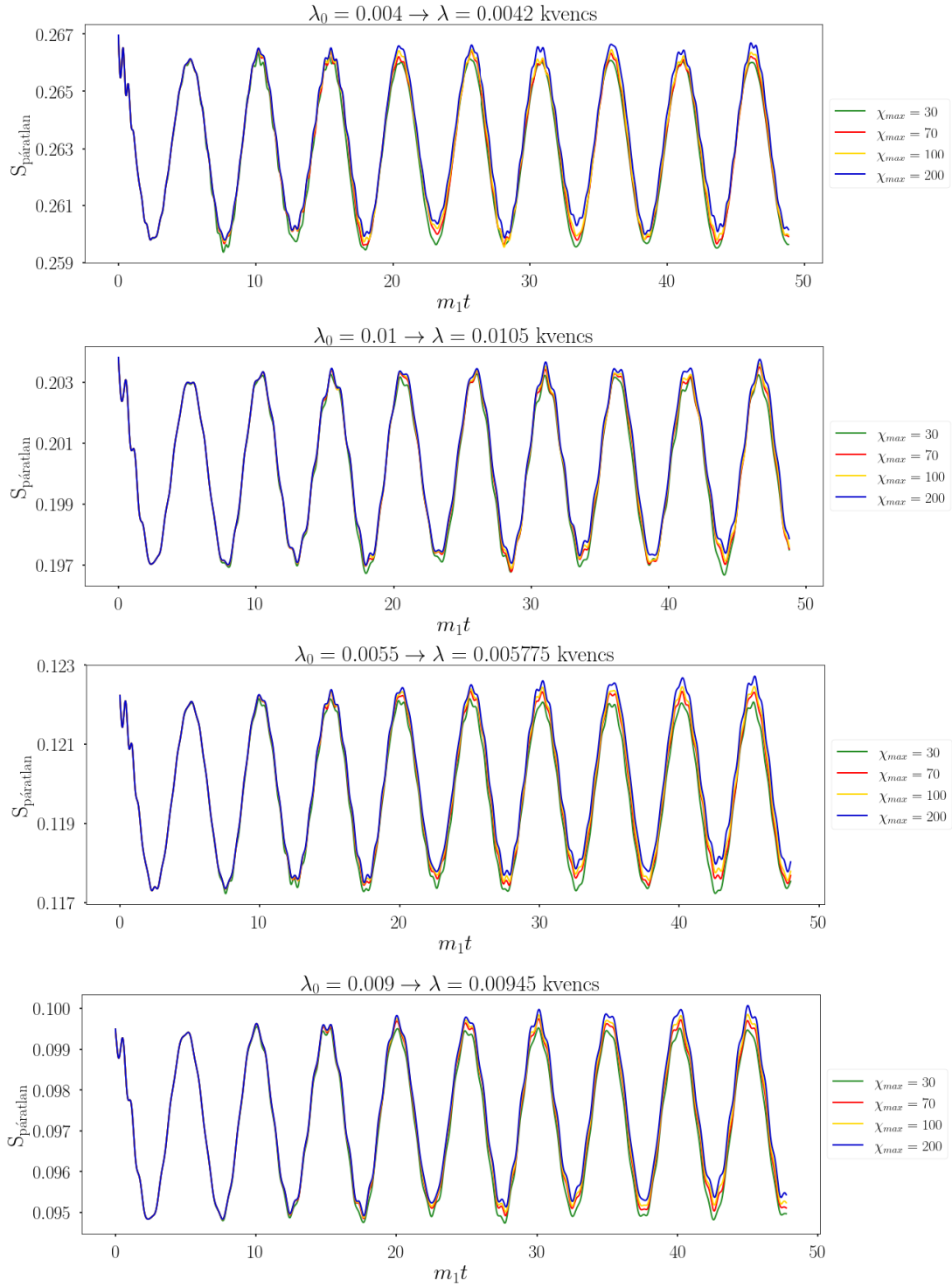
4.2. Operátorok várható értékeinek időfejlődése kvencs után

Az entrópiák összehasonlításából kapott t_{max} meghatározza tehát, hogy a szimulációs eredményeinket meddig vizsgálhatjuk, így ez a kvencs utáni dinamika időfüggő fizika mennyiségeinek vizsgálatára is érvényes.

A tekintett paramágneses (rendezetlen) és a ferromágneses (rendezett) kvencsek esetén is $\Theta \propto H_{pert}$ energia-impulzus tenzor a kvencs operátor (normálás erejéig) és a kvencs utáni dinamika egy vizsgálható fizikai mennyisége a longitudinális mágnesezettség, azaz az S^x mátrix várható értéke. A mágnesezettség a rendezetlen fázisban nulla, míg a rendezett fázisban véges, éppen ezért csak a rendezett fázisú kvencsek esetén vizsgáltuk.

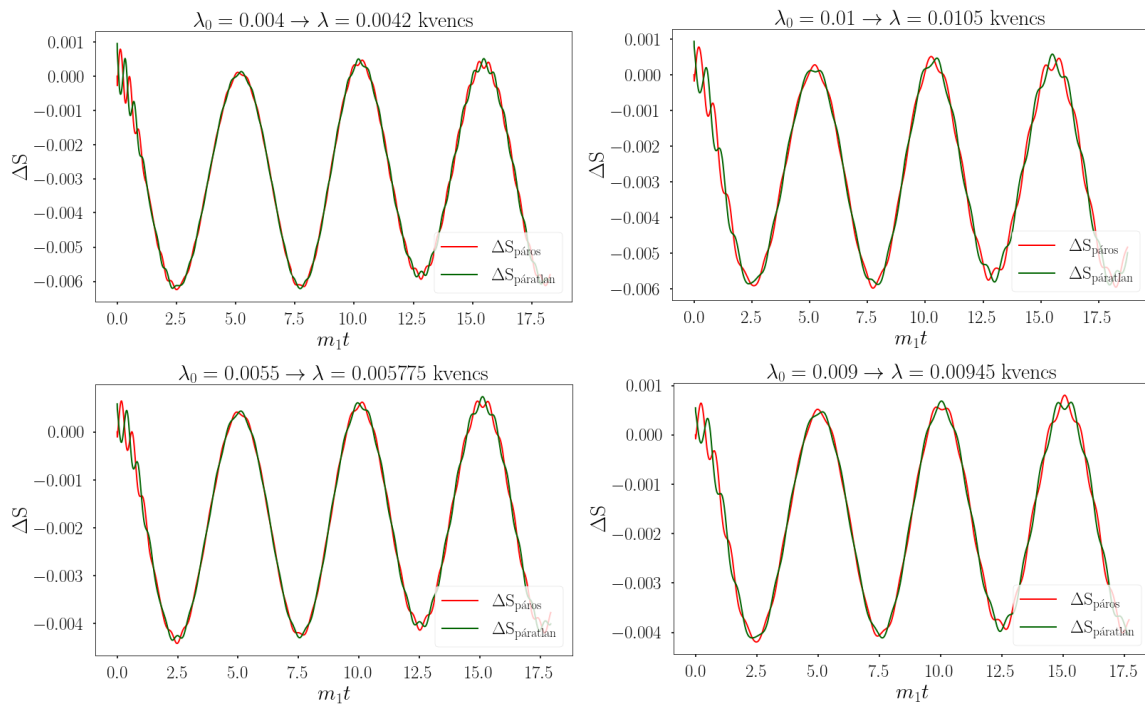
A továbbiakban az egyszerűség kedvéért $\Theta = H_{pert}$ azonosítással élünk. A kapott Θ várható értékeket és mágnesezettségeket a bond-dimenzióknak megfelelően és kivonva belőlük az alapállapot értékeit, a 4.3. , 4.4. és a 4.5. ábrák szemléltetik. Látható, hogy ezek is mind oszcilláló függvényeket írnak le. A lényeges különbség az egyes kvencseknél látott görbék között, hogy az őket leíró oszcilláló függvények más-más periódusidővel rendelkeznek, azonban ha

ezeket átskálázzuk a tömeg-csatolás összefüggéssel¹, akkor ugyanakkora periódusidőket fogunk kapni minden kvencsre (5.10. ábra).

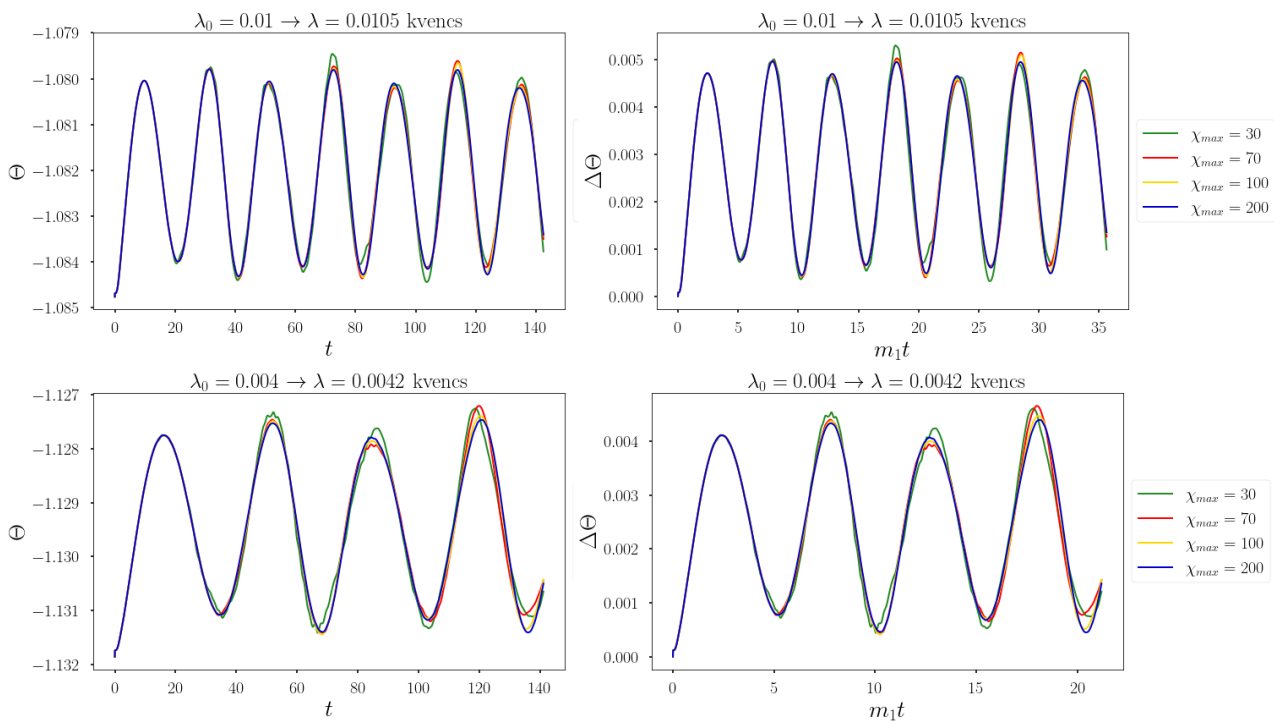


4.1. ábra. A paramágneses és ferromágneses fázisban látott von Neumann entrópiák időfüggései különböző bond-dimenziók esetén

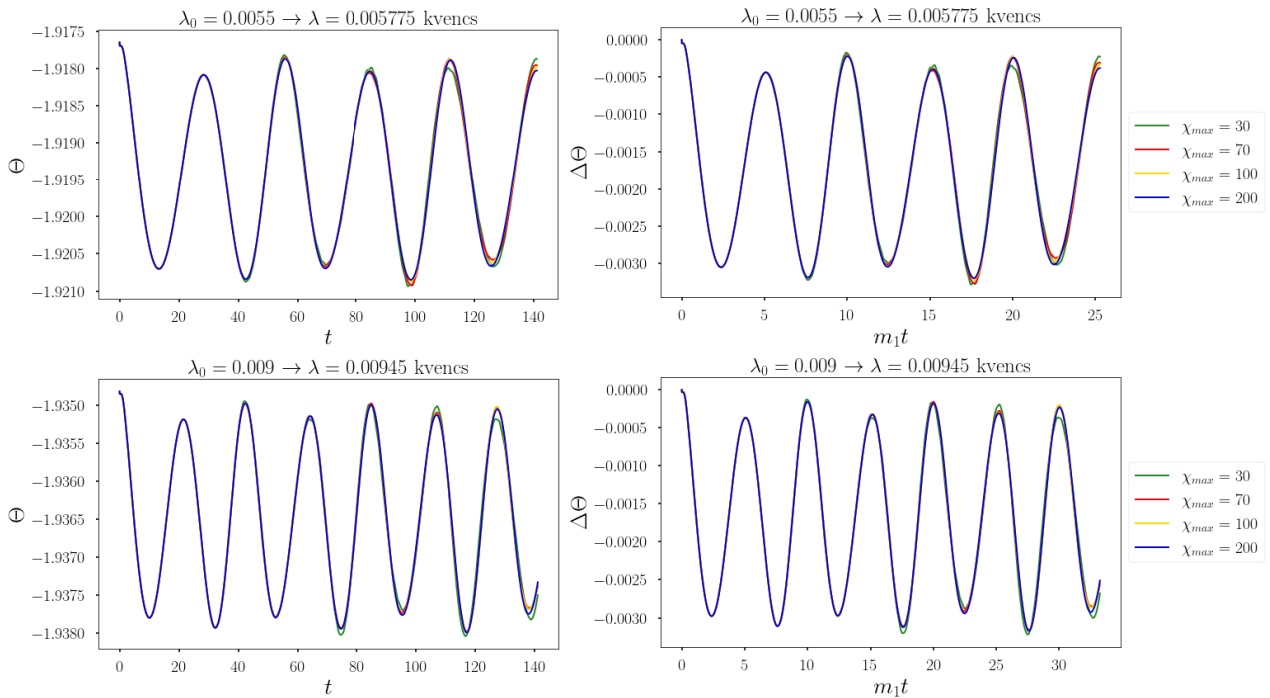
¹Ez dimenzióanalízisből következik. Az E_7 modellt megvalósító termális perturbáció jobb és bal konform dimenziója $(1/10, 1/10)$



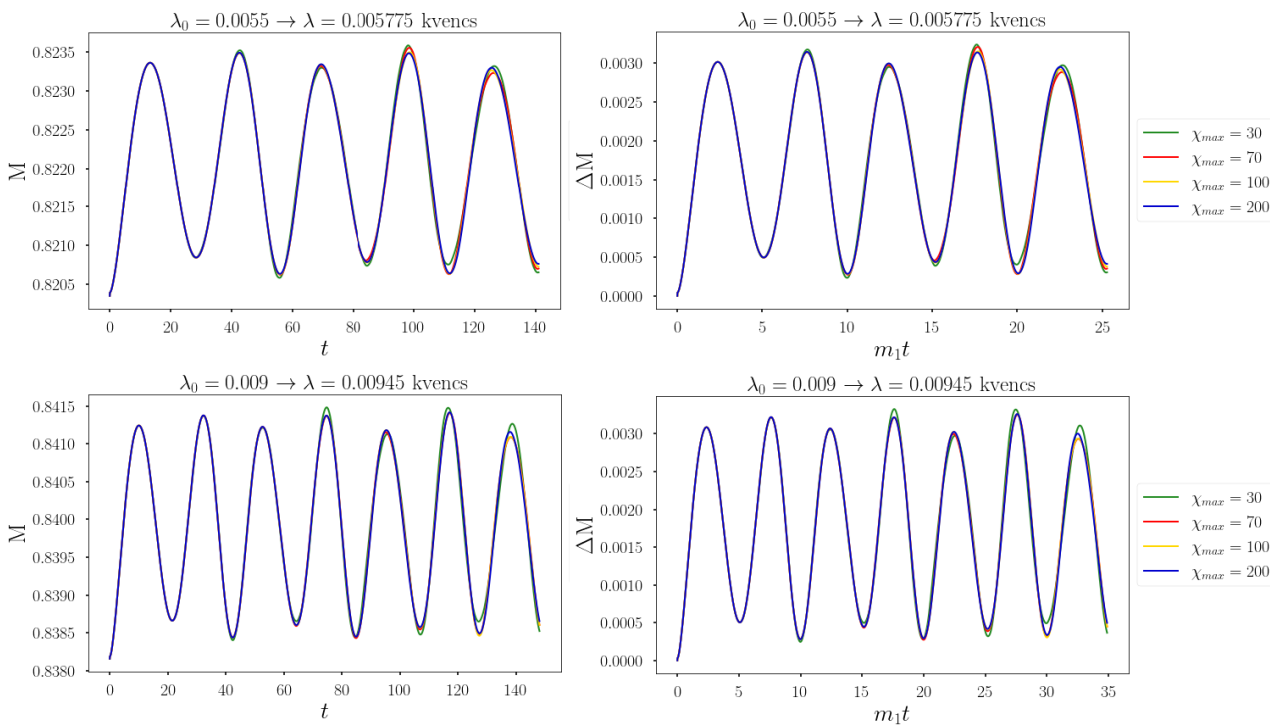
4.2. ábra. A paramágneses és ferromágneses fázisban kapott páros és páratlan entrópiák



4.3. ábra. Az energia-impulzus operátor várható értékének időfüggése különböző bond-dimenziók esetén a paramágneses fázisban



4.4. ábra. Az energia-impulzus operátor várható értékének időfüggése különböző bond-dimenziók esetén a ferromágneses fázisban



4.5. ábra. A longitudinális mágneszettség időfüggése különböző bond-dimenziók esetén a ferromágneses fázisban

5. fejezet

Az E_7 modell vizsgálata

Az előző fejezetekben körbejárt összefonódási entrópia és perturbációs operátorok időfüggéseiből Fourier-transzformációval kaphatjuk meg a kvencsek spektrumát. Azonban még mielőtt a spektrumok elemzésébe belekezdenénk fontos visszatérni a korábban már megemlített Z_2 szimmeriára, ugyanis ez szoros kapcsolatban áll a spektrumban megjelenő csúcsokkal. Ebből tudunk következtetni arra, hogy az általunk vizsgálni kívánt E_7 modell spektrumában mely kvázirészecskék megjelenését várhatjuk. Ebben a fejezetben a fejezetben a Z_2 szimmetriát figyelembe véve az E_7 modellre vonatkozó térelméleti jóslatok igazolása a célunk.

5.1. Fourier-transzformáció és a kvencsekből kapott spektrum

A szimuláció során a kvencs utáni dinamika vizsgálata volt a célunk a kvencs operátornak és az összefonódási entrópiának a segítségével, illetve ezek időfejlődése által Fourier-spektrum vizsgálattal megkeresni a kvázirészecskéket. Ugyanis az általunk tanulmányozott rendszerben az E_7 szimmetriacsoport a spektrumban összesen hét kvázirészecske megjelenését jósolja [11, 12], melyek tömegarányát a korábban bemutatott 3.2. táblázat tartalmazza.

A kvázirészecskék tömegarányait a Fourier-spektrumból tudjuk kiolvasni, ennek magyarázatát az alábbiakban mutatjuk be.

A prekvens rendszer H_{pre} Hamilton-operátorának az iTEBD-vel megkeresett $|\psi_{GS}\rangle$ alapállapotát bázisvektorok megfelelő együtthatóval vett lineáris kombinációjaként tudjuk felírni,

$$|\psi_{GS}\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle \quad (5.1)$$

és ez az új rendszer kezdeti állapota, amit a posztkvens rendszer H_{poszt} Hamilton-operátorával időfejlesztünk tudván, hogy a $|\psi_{GS}\rangle$ egyes bázisvektorai a H_{poszt} sajátállapotai valamilyen saj-

átenergiával,

$$\begin{aligned} H_{poszt} |\varphi_n\rangle &= E_n |\varphi_n\rangle \\ \hookrightarrow |\psi(t)\rangle &= e^{-iH_{poszt}t} |\psi_{GS}\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n t} |\varphi_n\rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Kis időlépésekben haladva minden időléptetésnél kiszámoljuk a vizsgálni kívánt operátor várható értékét, ami az egyszerűség kedvéért legyen most a longitudinális mágnesezettség,

$$M_l(t) = \langle \psi(t) | S_i^x | \psi(t) \rangle = \sum_{n,m} c_m^* c_n e^{-i(E_n - E_m)t} \langle \varphi_m | S_i^x | \varphi_n \rangle, \quad (5.3)$$

ami a kvencs utáni dinamika egy időfüggő mennyisége. Emlékezzünk vissza, hogy itt most térelméletről van szó, ahol $c = \hbar = 1$ egységrendszer választva, a tömeg-energia ekvivalencia miatt a nyugalomban lévő részecskék energiája a tömeggel lesz egyenlő¹. Tehát Fourier-spektrumban az $E_n - E_m$ frekvenciát, amit látunk tulajdonképpen a kvázirészecskék tömegei határozzák meg.

A mágnesezettség mátrixelemeiben egy- és többészecske állapotok is megjelennek [15, 16, 17],

$$\begin{aligned} M(t) &= |c_0|^2 \langle 0 | S_i^x | 0 \rangle + \\ &+ c_{11}^* c_0 e^{-im_1 t} \langle 0 | S_i^x | 1(1pt) \rangle + c_0^* c_{11} e^{im_1 t} \langle 1(1pt) | S_i^x | 0 \rangle + \\ &+ c_{12}^* c_0 e^{-im_2 t} \langle 0 | S_i^x | 2(1pt) \rangle + c_0^* c_{12} e^{im_2 t} \langle 2(1pt) | S_i^x | 0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

ahol $(1pt)$ utal az egyészecske állapotokra, a c_{11} az $|1(1pt)\rangle$ 1-es típusú egyészecske állapothoz tartozó együttható, a c_{12} a $|2(1pt)\rangle$ 2-es típusú egyészecske állapothoz tartozó együttható és így tovább. Látható, hogy a mágnesezettség egy oszcilláló függvény, amelyben a mátrixelemek konjugált párjai is megjelennek. Például az alapállapot ($|0\rangle$), aminek az energiáját 0-nak választjuk, és az 1-es típusú egyészecske állapot által vett mátrixelem és konjugáltjának összege is megjelenik, ami pontosan a mátrixelem valós részének kétszeresével lesz egyenlő,

$$c_{11}^* c_0 e^{-im_1 t} \langle 0 | \sigma_i^z | 1(1pt) \rangle + c_0^* c_{11} e^{im_1 t} \langle 1(1pt) | \sigma_i^z | 0 \rangle = 2\text{Re}\{c_{11}^* c_0 e^{-im_1 t} \langle 0 | \sigma_i^z | 1(1pt) \rangle\}, \quad (5.5)$$

ez pedig egy koszinusz függvényt ír le valamilyen fázistolással. Tehát a Fourier-spektrumban a kvázirészecskék tömegei, tömegösszegei és tömegkülönbségei lesznek a frekvenciák és ahhoz, hogy egy adott frekvencia megjelenjen a spektrumban két feltételnek kell teljesülnie. Például az m_1 tömeget csak akkor fogjuk látni, ha az $|1(1pt)\rangle$ egyészecske állapotnak van átfedése a H_{pre} iTEBD-vel megkeresett $|\psi_{GS}\rangle$ alapállapotával, illetve ha a mátrixelemben szereplő második tag nem zérus, azaz

$$\begin{aligned} \langle 1(1pt) | \psi_{GS} \rangle &= c_1 \neq 0 \\ \langle 0 | \sigma^z | 1(1pt) \rangle &\neq 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

¹ esetünkben a kezdeti állapot zérus impulzussal rendelkezik, tehát nem várunk mozgó részecskéket, mivel homogén, ún. globális kvencset csinálunk, ami azt jelenti, hogy mindenhol egyformán változtatjuk a teret

Az entrópia esetén a fenti eljárás nem működik, viszont az entrópiát lehet származtatni úgynevezett *twist* operátorok mátrixelemeiből [2, 18]. Erre itt most nem térünk ki, de az állítás az az, hogy a vizsgált operátor, ami a fentebbi példában a mágnesezettség volt, és az entrópia Fourier-spektrumában ugyanazokat a csúcsokat várhatjuk. A fenti megfontolások végeredményben az (5.10) formulára vezetnek.

Tehát láttuk, hogy a kvencs utáni dinamikát jellemző időfüggő mennyiségek oszcilláló függvények, melyek Fourier-spektrumából kiolvashatjuk a rendszerben megjelenő kvázirészecskék tömegarányait perturbáció számításból figyelembe véve azt a form-faktorokra vonatkozó megfigyelést is, miszerint a legnagyobb csúcshoz mindig a legelső, legkönnyebb részecske tartozik és így tovább.

Továbbá megjelenhetnek egyrészecske-egyrészecske mátrixelemek is, mint például $\langle 1(1pt) | S_i^x | 2(1pt) \rangle$. Ezek a tagok a megfelelő tömegkülönbségek által meghatározott oszcillációkhoz vezetnek. Végül megemlítjük, hogy a $\langle 0 | S_i^x | j(2pt) \rangle$ kétrészecske mátrixelemek miatt kétrészecske-kontinuumok megjelenését is várhatjuk $2m_j$ -től.²

5.2. Z_2 szimmetria

A Z_2 szimmetria a rendszer állapotain ábrázolódik ± 1 értékkel, ugyanis a spinláncnak vannak páros és páratlan konfigurációi. Párosak azok az állapotok, amelyek nem változnak meg azzal, ha minden spint átfordítunk a láncban és páratlanok azok, amelyek egy ilyen átfordítás után az állapotot egy negatív előjellel módosítják. Az előbbieken ábrázolódik a Z_2 szimmetria +1-el, az utóbbiakon -1-el. A jobb érthetőség kedvéért, íme két nagyon egyszerű példa a fenti diszkusszióra:

$$\begin{aligned} \text{páros állapot: } & \dots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots + \dots \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \dots = (+1) \cdot (\dots \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \dots + \dots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots) \\ \text{páratlan állapot } & \dots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots - \dots \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \dots = (-1) \cdot (\dots \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \dots - \dots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots) \end{aligned} \quad (5.7)$$

A Blume–Capel modellben a Z_2 szimmetria abból ered, hogy ha a modellt leíró (3.2) Hamilton operátorban az S^x mátrixot $-S^x$ -re cseréljük, akkor ugyanazt a Hamilton operátort kapjuk ugyanazokkal az állapotokkal.

A konform térelméleteken belül van még egy külön osztály, az ún. szuperkonform térelméletek, és ennek szuperszimmetriája is van, ami a szuperkonformális unitér minimális sorozat, ezt ezen a szinten most csak megemlítjük, ami lényeges, hogy ehhez tartoznak a Neveu-Schwarz-nak és a Ramond-nak nevezett szektorok (mezők), amik a Hilbert-teret két részre bontják.

²kétrészecske állapotoknak lehet relatív impulzusa zérus összipulzus esetén is

Ezek a szektorok állnak kapcsolatban a Z_2 szimmetriával, mégpedig a Neveu-Schwarz-szektor a Z_2 -páros szektornak és a Ramond-szektor a Z_2 -páratlan szektornak felel meg. A Blume–Capel modellben megjelenő kvázirészecskék tömegei is függnék attól, hogy éppen melyik szektorban van a rendszer, így az m_2, m_4, m_5 és m_7 tömegek a Z_2 -páros szektorban, míg az m_1, m_3 és m_6 tömegek a Z_2 -páratlan szektorban jelennek meg a spektrumban.

A leírtak alapján levonhatunk következtetéseket a kvázirészecskék paritását illetően. Két kérdést kell ennek érdekében körbejárni. Az első kérdés, hogy mit várunk a spektrumtól? Ha véges láncot tekintünk és periodikus határfeltételt feltételezünk, akkor a rendezett és rendezetlen fázisok spektruma különböző lesz. Rendezetlen fázisban egy alapállapota van a rendszernek és a részecskék efeletti gerjesztések. Ebben az esetben a spektrumban páros és páratlan részecskék is megfigyelhetők. Rendezett fázis esetén viszont két alapállapota van a rendszernek és a páratlan részecskék a két állapot között interpoláló kink. Így periodikus határfeltétel mellett nem jelenhetnek meg magukban. A páros részecskék pedig ezek kötött állapotai és párban jelennek meg a két vákuum fölött. Itt fontos megjegyezni, hogy a rendezett fázis spektruma erősen függ a határfeltételtől. A második kérdés, amit meg kell gondolnunk, hogy mit várunk a kvencsektől? Térelméletről tudni lehet, hogy egy E_7 pontból E_7 pontba történő kvencs operátora páros.

Összegezve tehát, mivel páros állapotnak nincs páratlan részecskével átfedése és mivel páros kvencs operátor nem tud páratlan részecskét kelteni, ezért két E_7 pont közötti kvencsnél sem a paramágneses, sem a ferromágneses fázisban nem várhatjuk páratlan részecskék megjelenését a Fourier-spektrumban.

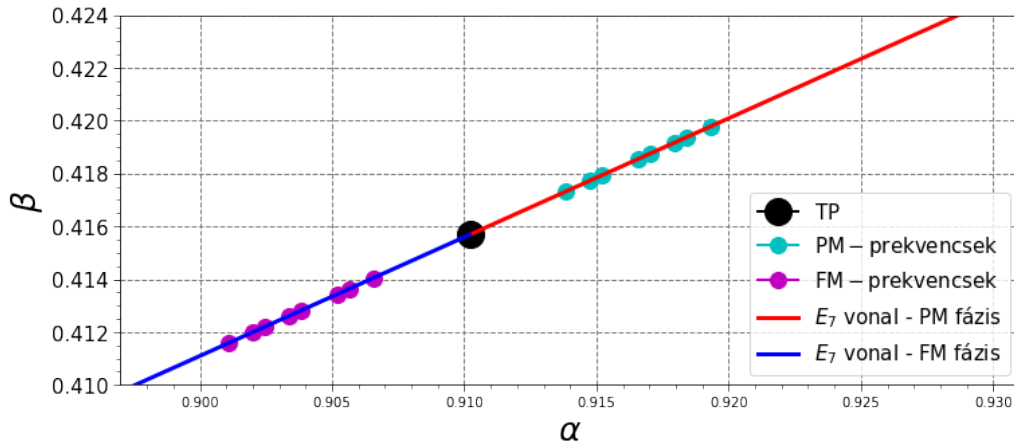
Kicsit konkrétabban tehát azt várjuk, hogy a rendezett fázisú rendszerben végzett kvencs esetén az m_2, m_4, m_5 és m_7 tömegek jelenjenek meg a Fourier-spektrumban, illetve esetlegesen ezekből képezhető tömegösszegek vagy tömegkülönbségek a 5.1. alfejezetben leírtak alapján. Fontos megjegyezni továbbá, hogy egyedül egy kink (páratlan részecske) nem jelenhet meg, viszont két páratlan részecske tud keltődni, ez nem sérti a periodikus határfeltételt. Így két páratlan részecske tömegösszegénél, például $2m_1$ -nél vagy m_1+m_3 -nál, indulhat egy kontinuum.

5.3. E_7 vonal

Ahogy az már több helyen is szerepelt, a Blume–Capel modell trikritikus pontját a $c = 7/10$ centrális töltéssel jellemzett konform térelmélet írja le, melynek egy termális perturbációja az E_7 modell [11, 12]. Ebben a modellben az E_7 szimmetriacsoportnak megfelelően 7 stabil kvázirészecske található, melyek tömegarányait a korábban már bemutatott 3.2. táblázat tartalmazza.

Világos, hogy az E_7 modellben a részecskéket az E_7 szimmetriacsoport generálja, de mi maga az E_7 modell? A Blume–Capel spinláncnak van egy trikritikus pontja, mely a skálázó határesetben konform térelmélettel írható le. Skálázó határeset alatt azt értjük, hogy a rácscsillammal tartunk 0-ba és a (3.2)-ben szereplő ξ -vel tartunk végtelenbe, mindemellett a többi paramétert megfelelően állítjuk be ahhoz, hogy a kívánt tömeget kapjuk a térelméletben (lásd: 5.5. alfejezet). Ha elég közel vagyunk a skálázó limeszhez, akkor léteznek olyan irányok, ahol már az E_7 spektrum megfigyelhető és tulajdonképpen ezt hívjuk E_7 modellnek. Az E_7 vonal ilyen irányokat ír le, de E_7 modell csak a trikritikus ponthoz nagyon közel lesz az E_7 vonalon.

A trikritikus pontból a 3. fejezetben bemutatott (3.6) egyenlet alapján tudunk kimozdulni és az E_7 vonal az ebben a fejezetben bemutatott integrálható irányok közül a (3.7) perturbált Hamilton operátorral kapott merőleges irány, ami a Blume–Capel modell paraméterterében a 5.1. ábra alapján azt jelenti, hogy a merőleges-fel irány a rendezetlen fázis, míg a merőleges-le irány a rendezett fázis.



5.1. ábra. A Blume–Capel modell trikritikus pontjából induló E_7 vonal paramágneses és ferromágneses fázisa

A végzett kvencsek során E_7 pontokat a (3.6) és (3.7) alapján rögzített $\gamma = 0$ mellett $\tan \theta = 2,224$ ismeretében a következőképpen tudtunk generálni:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{tp} \pm \lambda \sin \theta \\ \beta &= \beta_{tp} \pm \lambda \cos \theta, \end{aligned} \tag{5.8}$$

ahol α_{tp} és β_{tp} a (3.4)-ban megadott trikritikus pont paraméterei és az egyenletekben az összeadás esetén kapunk rendezetlen fázisú E_7 pontot és kivonás esetén rendezett fázisú E_7 pontot (5.1. ábra).

5.4. E_7 spektrum

Az E_7 modell spektrumát a 5.1. alfejezetben leírák szerint kapjuk meg.

A kvázirészecskék paritását figyelembe véve két rendezetlen fázisú E_7 pont között történő kvencs spektrumában a páros részecskét megjelenését várhatjuk, azaz az m_2 , m_4 , m_5 és m_7 tömegű kvázirészecskéket, illetve megjelenhetnek párban páratlan részecskék is, ahogy azt a 5.1. alfejezetben bemutattuk.

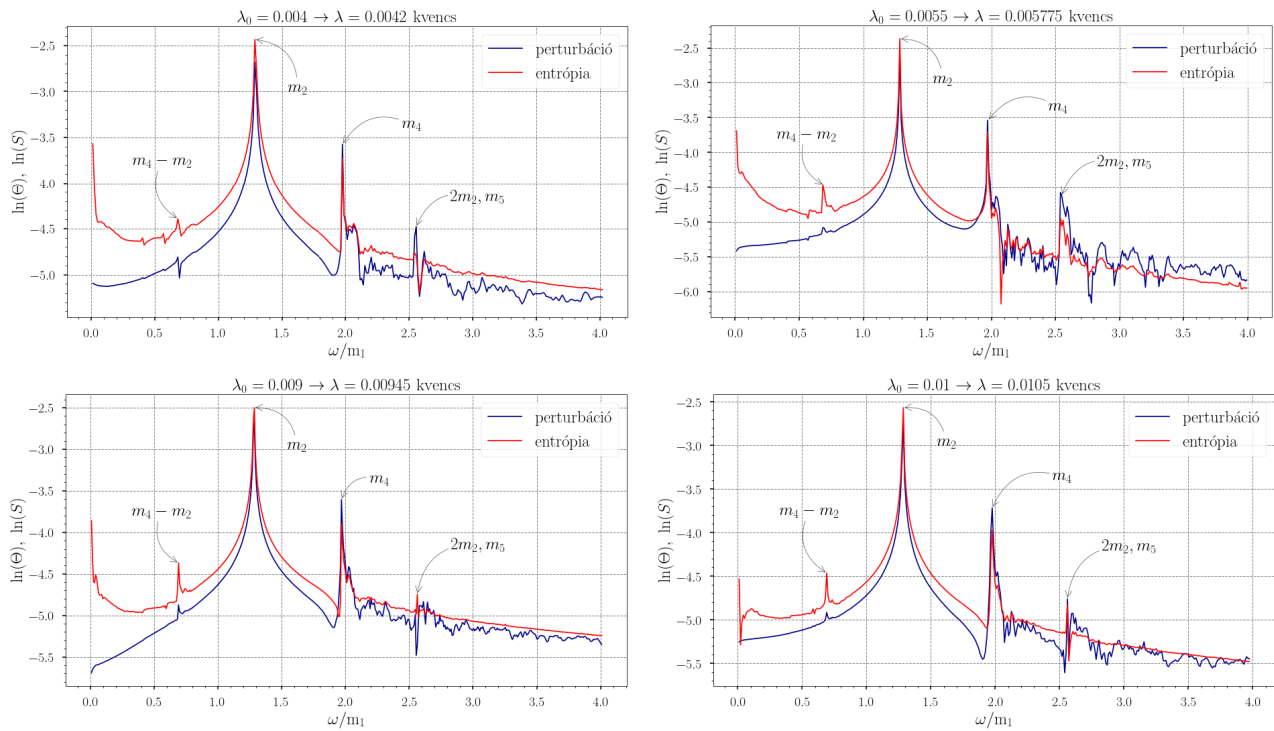
Összesen nyolc ilyen rendezetlen $E_7 \rightarrow E_7$ kvencset csináltuk fokozatosan közeledve a trikritikus ponthoz (5.1. ábrán PM-prekvencsek) és az így kapott E_7 spektrumokat átskáláztuk úgy, hogy az $\omega = 1$ frekvenciához az m_1 kvázirészecske tömeg tartozzon, azaz a látott csúcsok m_1 -el vannak normálva, ahogy a 3.2. táblázatban szereplő kvázirészecske tömegek is. A spektrumot az entrópia és a Θ perturbációs operátor várható értékének időfüggéséből kaptuk Fourier-transzformációval, ahol $\Theta = H_{pert}^\perp$ energia-impulzus tenzor nyoma az $E_7 \rightarrow E_7$ kvencs operátor. Ez egy Z_2 páros operátor, míg a mágneszettség páratlan, ezért a ilyen kvencseknél a mágneszettség vizsgálatának nincs értelme, hisz ennek várható értéke 0 a rendezetlen fázisban. A kvencsek során pontosan ezt tapasztaltuk: némi nagyon kicsi numerikus zajt láttunk csak a mágneszettség időfüggvényében.

A kapott nyolc rendezetlen spektrumból itt csak négyet mutatunk be a 5.2. ábrán. Megfigyelhető, hogy ahogy azt vártuk a spektrumokban az entrópia és a kvencs operátor várható értéke ugyanazokat a csúcsokat tartalmazza, melyek a páros kvázirészecskékre engednek következtetni.

A négy spektrumban kapott csúcsok helyeit a 5.1. táblázatban foglaltuk össze (PM értékek), ahol figyeltünk arra, hogy mekkora felbontásunk van és hány tizedesjegyre tekinthetjük pontosnak a kapott tömegeket. A felbontás egyszerűen meghatározható, tudván, hogy T hosszúságú időablak esetén a legkisebb körfrekvencia, amit fel lehet bontani $\omega \approx 2\pi/T$, ahol $T = N\delta t$ a végrehajtott iTEBD lépések száma és a választott időlépés szorzata. Ahogy minden időt, T -t is át kell skálázni. Ezt a kis számolást elvégezve azt kapjuk, hogy $\omega \sim 0,001$ nagyságrendű, így a spektrumokból leolvasott tömegeket három tizedesjegyre tekintjük pontosnak.

Látható, hogy hibahatáron belül a spektrumban kapott tömegeink egyeznek a térelméleti jóslattal, de nem teljesen ugyanazokat a számokat kaptuk. Ez azért lehet, mert az E_7 modell konkrét realizációja egy finomhangolási feladat. Így valószínűleg nem is várható, hogy tökéletes spektrumot kapjunk.

Rendezett $E_7 \rightarrow E_7$ kvencseket is vizsgáltunk ugyanakkora λ paraméterekkel (5.1. ábrán FM-prekvencsek). Ezeknél a kvencseknél is ugyanúgy páros egyrészecskék megjelenését várjuk.


 5.2. ábra. E_7 spektrumok paramágneses fázisban

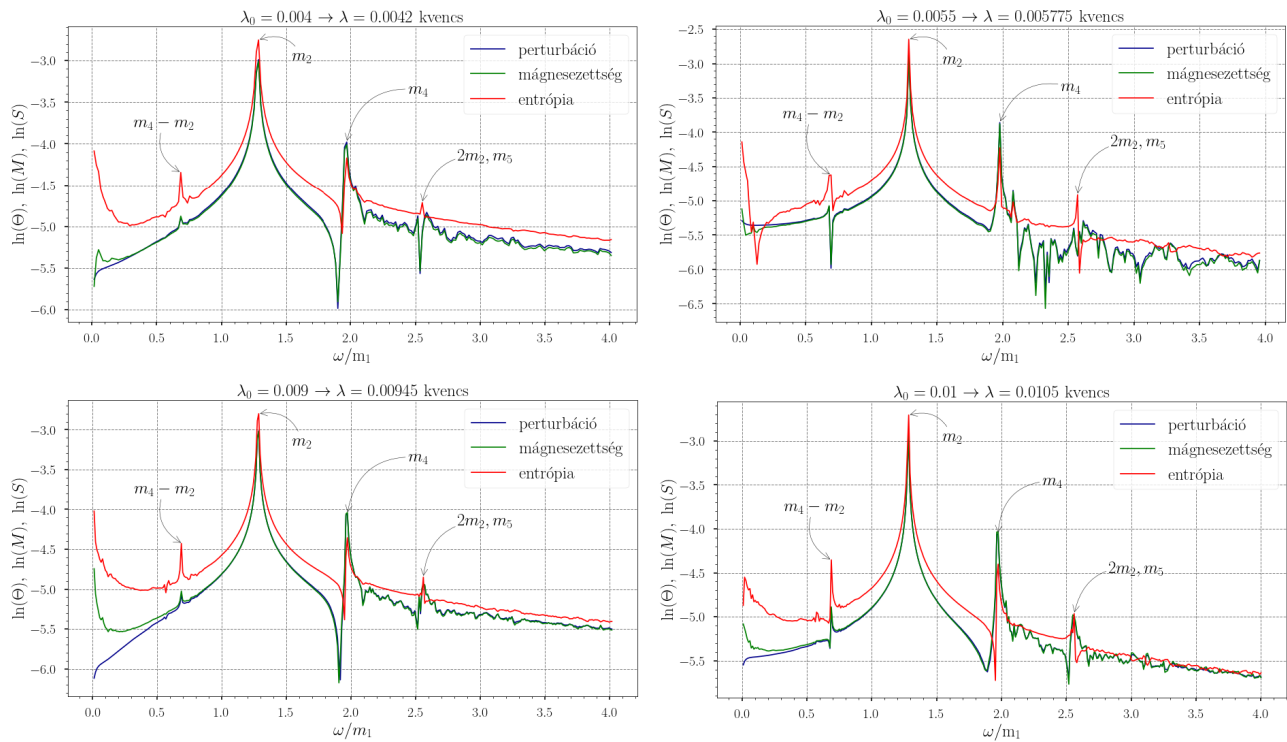
kvencs	fázis	csúcsok				$\chi_{\max}$
		$m_4 - m_2$	m_2	m_4	$2m_2$ vagy m_5	
$\lambda_0 = 0,004$	PM	0,681	1,286	1,979	2,559	200
	FM	0,686	1,286	1,971	2,554	100
$\lambda_0 = 0,0055$	PM	0,691	1,286	1,976	2,550	200
	FM	0,693	1,286	1,979	2,571	70
$\lambda_0 = 0,009$	PM	0,691	1,286	1,969	2,563	100
	FM	0,692	1,286	1,972	2,560	70
$\lambda_0 = 0,01$	PM	0,691	1,286	1,976	2,561	70
	FM	0,689	1,286	1,975	2,561	70

 5.1. táblázat. Paramágneses és ferromágneses E_7 spektrumokban látott csúcsok

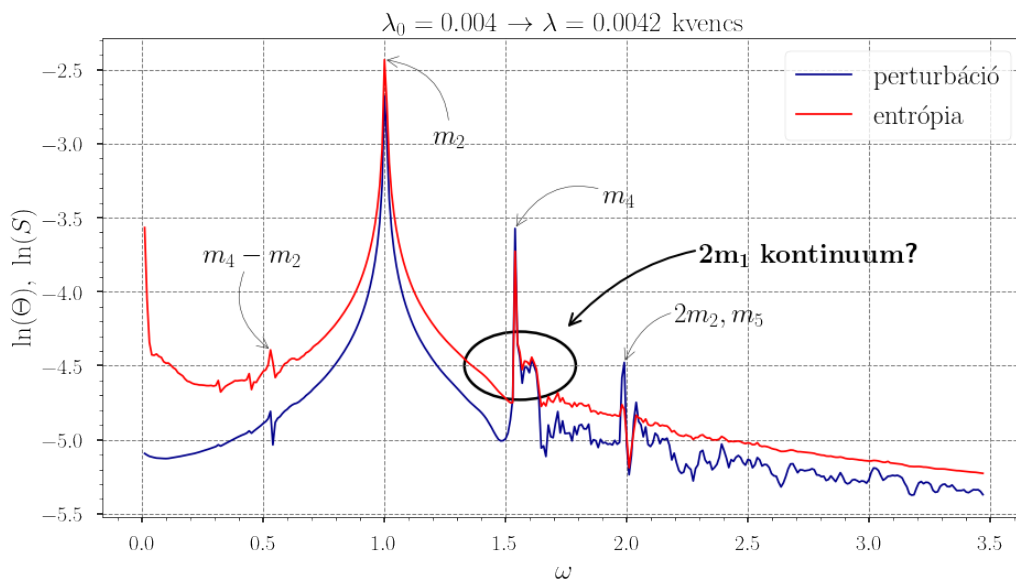
Az így kapott Fourier-spektrumokban pedig a mágnesezettség várható értékét is feltüntettük, ugyanis rendezett fázisban már van értelme a mágnesezettséget, mint páratlan operátort vizsgálni, itt véges lesz. A rendezett $E_7 \rightarrow E_7$ kvencsek Fourier-spektruma a 5.3. ábrán látható és az ezekről leolvasott csúcsokat szintén a 5.1. táblázat tartalmazza (FM értékek).

Ahogy azt már a 5.2. alfejezetben említettük rendezett és rendezetlen $E_7 \rightarrow E_7$ kvencsek Fourier-spektrumában megjelenhetnek két páratlan részecskéhez tartozó kontinuumok. Érdekes megfigyelni a kapott 5.2. és 5.3. spektrumok esetén, hogy m_4 környékén van egy ugrás, ha úgy

tetszik a spektrumban felnő egy váll (például a 5.4. ábrán látható kvencs esetén), ami a $2m_1$ kontinuum lehet. Ez viszont egyelőre csak egy sejtés, ahhoz, hogy ez ténylegesen látszódjon nem elég nagy a felbontásunk, de a jövőben ezt tovább vizsgáljuk majd.



5.3. ábra. E_7 spektrumok ferromágneses fázisban



5.4. ábra. $2m_1$ kontinuumra utaló jelek a $\lambda_0 = 0,004$ PM kvencs esetén

5.5. Skálázó limesz

Mint azt már korábban említettük a Blume–Capel modell trikritikus pontja a skálázó limeszben konform térelmélettel írható le. Ebben az alfejezetben a szimulációink alapján a kvencs utáni dinamika operátorainak várható értékére kapott skálázó limeszbeli görbét fogjuk összevetni a térelmélet szerinti görbével.

5.5.1. Térelméleti összefoglaló és form faktorok

A kvencs utáni dinamikát több időfüggő operátorral is jellemezni tudjuk. Legyen most a prekvens Hamilton operátor H_0 és a kvencs utáni

$$H = H_0 + \lambda V, \quad (5.9)$$

ahol H és V is lokális (véges rácshelyen ható) $\mathcal{O}_i^{(q)}$ operátorok összege (a spinláncon) vagy lokális operátor $\mathcal{O}^{(q)}(x)$ integrálja (a skálázó térelméletben). Egy általános $\mathcal{O}$ operátor várható értékének kvencs utáni időfejlődése $t \gg 0$ és $\lambda \ll 1$ esetén a következő térelméleti formulával adható meg [15, 16, 17]:

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle \approx \mathcal{C}_0^{\mathcal{O}\mathcal{O}^{(q)}} + \lambda \mathcal{C}_1^{\mathcal{O}\mathcal{O}^{(q)}} \sum_a \frac{F_a^{\mathcal{O}} F_a^{\mathcal{O}^{(q)}}}{r_a^2} \cos(m_a t) + O(\lambda^2), \quad (5.10)$$

ahol $r_a = m_a/m_1$ az a részecske tömege a posztkvens elméletben. A $\mathcal{C}_i$ együtthatók a vizsgált $\mathcal{O}$ operátor és az $\mathcal{O}^{(q)}$ kvencs operátor várható értékeit tartalmazzák, $F_a^{\mathcal{O}}$ pedig az $\mathcal{O}$ operátor a részecskével vett egyrészecske form faktora:

$$F_a^{\mathcal{O}} = \langle 0 | \mathcal{O} | a \rangle, \quad (5.11)$$

ahol $|a\rangle$ az a részecskéhez tartozó egyrészecske állapot.

A spinlánc skálázó limeszében nézve ez a formula akkor lesz érvényes, hogyha a skálázó limeszben lévő és a láncon élő operátorok normálásának kapcsolatát meghatározzuk. Mi most ettől eltekintetünk és a form faktorokra koncentrálunk, ezeket a normálásokat pedig úgy választjuk meg, hogy az elméleti görbe és a numerikus görbe egymásra essen.

A kvencs utáni dinamika vizsgálatakor mi két operátort néztünk, a Θ -t, ami az energia-impulzus tenzor nyomának felel meg, valamint a longitudinális mágnesezettséget (M). Tetszőleges tömeg-kvencsek esetén, amilyen az $E_7 \rightarrow E_7$ is, Θ maga a kvencs operátor, ami Z_2 -páros, míg a mágnesezettség Z_2 -páratlan. Ez azt is jelenti, hogy a megfelelő form faktorok eltűnnek, éppen ezért azt várjuk, hogy a mágnesezettség várható értéke nem fog változni egy rendezetlen

$E_7 \rightarrow E_7$ kvencs esetén. A rendezett fázisban viszont a mágnesezettség operátorának a páros részecskékkal van nem eltűnő form faktora ³

A (5.11) térelméleti formula kiértékeléséhez a Θ operátorhoz tartozó form faktorokat a [20]-ból vettük, míg a mágnesezettség form faktorait a [19]-ből, ezek értékeit a 5.2. táblázatban foglaltuk össze.

form faktorok		
a	F_a^Θ	$F_a^{S^x}$
2	0,96049	0,46266
4	-0,450024	-0,19062
5	0,264147	0,10005
7	-0,0557	-0,0182823

5.2. táblázat. Θ és S^x operátorokhoz tartozó form faktorok

5.5.2. Rendezetlen $E_7 \rightarrow E_7$ kvencs

Összesen nyolc rendezetlen $E_7 \rightarrow E_7$ kvencset néztünk, melyekhez az (5.8) alapján választottuk meg a két pontot, hogy honnan hova kvencselünk. A kiindulási pontokat megadó különböző λ_0 -ákhoz tartozó $\alpha - \beta$ paraméterpárosakat a 5.1. ábrán tüntettük fel PM-prekvencs néven. Ezek mind 5%-os kvencsek voltak, vagyis a kezdeti λ_0 -ák 5%-kal megnövelt λ értékéhez tartozó pontba kvencseltünk. A kezdeti λ_0 értékeket az alábbi táblázatban foglaltuk össze (PM sor).

fázis	λ_0 értékei							
PM	0,004	0,005	0,0055	0,007	0,0075	0,0085	0,009	0,01
FM	0,004	0,005	0,0055	0,007	0,0075	0,009	0,01	

5.3. táblázat. Vizsgált kvencsek

Ezeknél a rendezetlen fázisú kvencseknél a Θ kvencs operátor várható értékének időfejlődését vizsgáltuk. Ehhez a kapott nyolc $\langle \Theta(t) \rangle$ görbét egy ábrára tettük (5.5. baloldali ábra), majd a tömegcsatolási összefüggés alapján összeskáláztuk, hogy a periódusidejük megegyezzen (5.5. jobboldali ábra). A tömegcsatolásnál a konstans úgy választottuk meg, hogy az időtengely

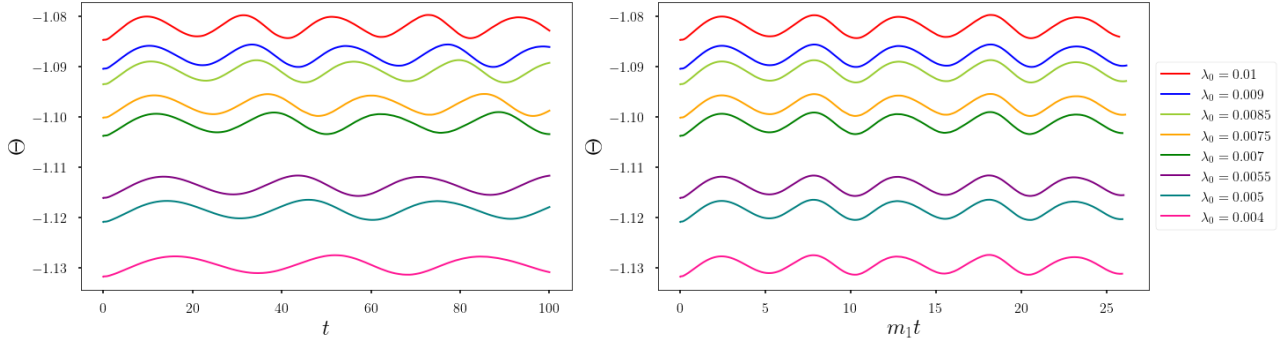
³ezt a rendezetlenség μ operátorából lehet kiszámolni, rendezett fázisban, ez a Kramers-Wannier dualitás eredménye.[19]

az $m_1 t$ legyen, ahol m_1 az E_7 modellben a legnagyobb kvázirészecske tömeg. Az így kapott konstans értéke $const = 2,5776$.

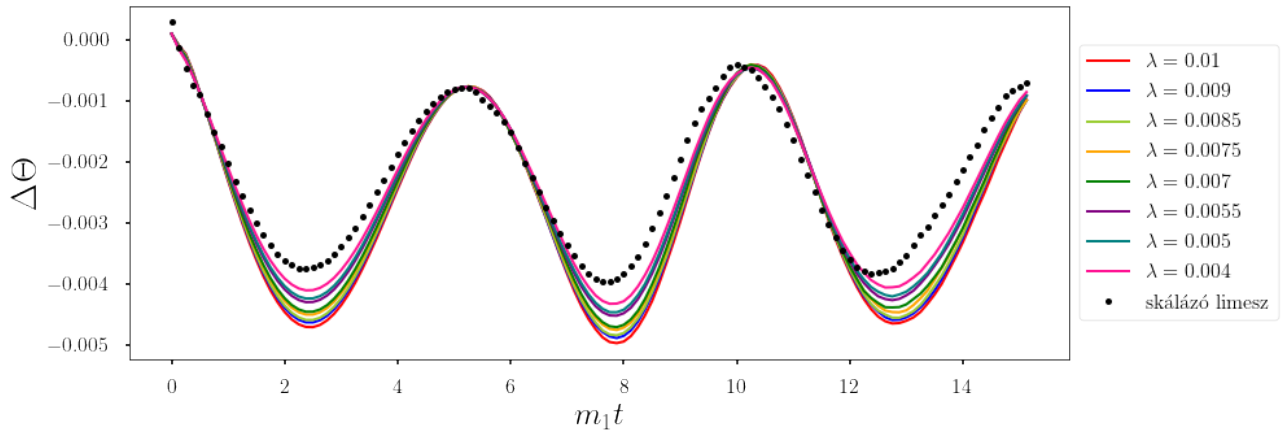
A Θ operátor várható értékeiből levonva az alapállapotú várható értéket,

$$\Delta\Theta(t) \equiv \langle\Theta(t)\rangle - \langle\Theta(0)\rangle, \quad (5.12)$$

ezek a görbék egymásra esnek, ahogy az a 5.6. ábrán látszik.



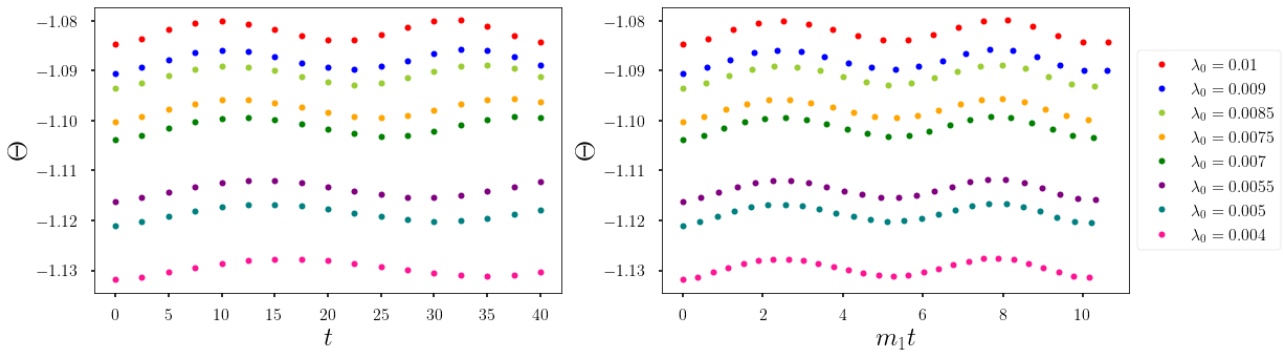
5.5. ábra. Különböző λ -ák esetén a kvencs operátor várható értékének időfüggése átskálázás előtt és után



5.6. ábra. A kvencs operátor várható értékére extrapolációkból kapott skálázó limesz

Megfigyelhető, hogy ahogy közeledünk a trikritikus ponthoz (csökkentjük λ -t), úgy a $\Delta\Theta(t)$ görbék csúcsai csökkennek. Mi arra voltunk kíváncsiak, hogy mi történne, ha pont a skálázó limeszben lennénk, egyszerűen hogyan néz ki a skálázó limesz időfüggvénye. Ezt úgy kaphatjuk meg, hogy a trikritikus ponthoz közel megextrapoláljuk a különböző λ -ákhoz tartozó, azonos időpillanatbeli adatainkat. Ez azonban nem könnyű feladat és ehhez nagyon sokszor újra kellene futtatni a szimulációinkat, ami ráadásul nagyon időigényes is. Éppen ezért máshogy jártunk el a extrapolált értékek meghatározásában.

A szimulációinkból diszkrét pontokból álló időfüggő görbéket kaptunk, melyek egymás alatt helyezkednek el, vagyis egy időponthoz mind a nyolc görbén hozzá tudunk rendelni egy adott pontot (5.7. baloldali ábra). Azonban mikor ezeket összeskálázzuk, egy átskálázott időpontra már nem lesz igaz, hogy rendelhető hozzá minden görbéről egy adott pont, mivel ezek a pontok kicsit el fognak csúszni egymáshoz képest, ahogy az az 5.7. jobboldali ábrán is látszik. Bár nagyon sűrűn vannak az adatpontjaink, ezek mégis csak diszkrét pontok és ha picit elcsúsznak egymáshoz képest, akkor nem tudunk egy adott időpontban mind a nyolc görbének megfelelő extrapolációt végrehajtani.



5.7. ábra. Az egyes görbék diszkrét pontjainak elcsúszása egymáshoz képest átskálázáskor

Az ötlet azonban a következő: a nyolc $\Delta\Theta$ várható értékhez tartozó adatsort egy interpoláló függvénnyel közelítjük és mivel elég sűrűn vannak a diszkrét adatpontjaink, ezért az interpolált függvények nagyon jól fogják közelíteni ezeket. Az interpoláló függvények pedig már folytonosak, egyszóval bárhol ki tudjuk értékelni őket. Így megoldottuk, hogy egymás alatti pontokat tudjunk tekinteni különböző csatolások esetén.

A trikritikus ponthoz avagy skálázó limeszhez közeledni azt jelenti, hogy a λ -t egyre csökkentjük és az a rácsállandóval tartunk a 0-hoz. A mi végtelen spinláncunk esetén ez a rácsállandó tekinthető a (3.2) képletbeli ξ reciprokanak. A szimulációk során azonban ξ értékét nem változtattam, hiszen a számított mennyiségek ettől függetlenek. Azonban, ha a rácsállandó $a \approx 0$, akkor egy O operátor várható értéke megadható a következő térelmélet motiválta formulával:

$$\langle O \rangle \approx Bma + \langle O \rangle_{SC}, \quad (5.13)$$

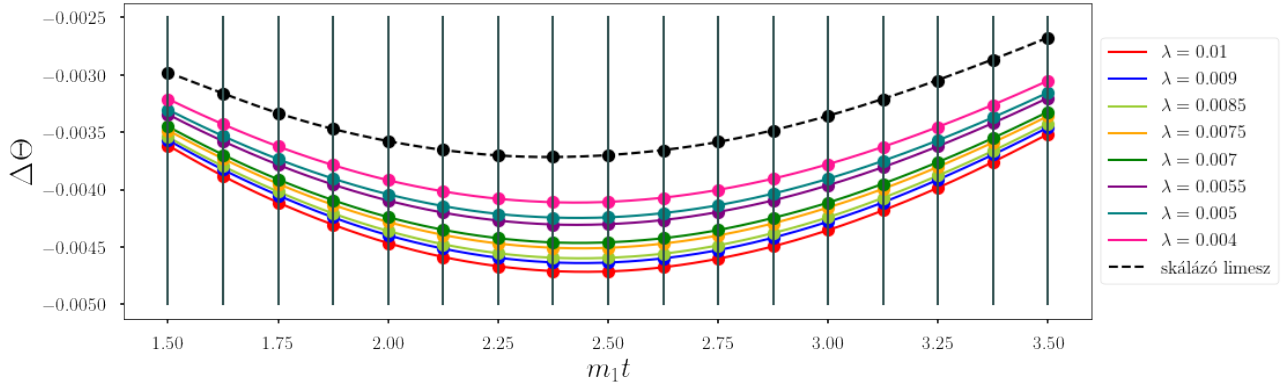
ahol B egy konstans, m a tömeg, a a rácsállandó és $\langle O \rangle_{SC}$ az operátor várható értéke a skálázó limeszben. A rácsállandót beépítve a B konstansba és kihasználva az

$$m = \text{const} \cdot \lambda^{5/9} \quad (5.14)$$

összefüggést a következő formulára jutunk:

$$\langle O(mt) \rangle \approx \tilde{B}(mt) \cdot \lambda^{5/9} + \langle O(mt) \rangle_{SC}, \quad (5.15)$$

ahol $\tilde{B}$ egy új konstans jelöl. Mi a skálázó limeszbeli értékekre vagyunk kíváncsiak, tehát a $\langle O(mt) \rangle_{SC}$ értékekre.



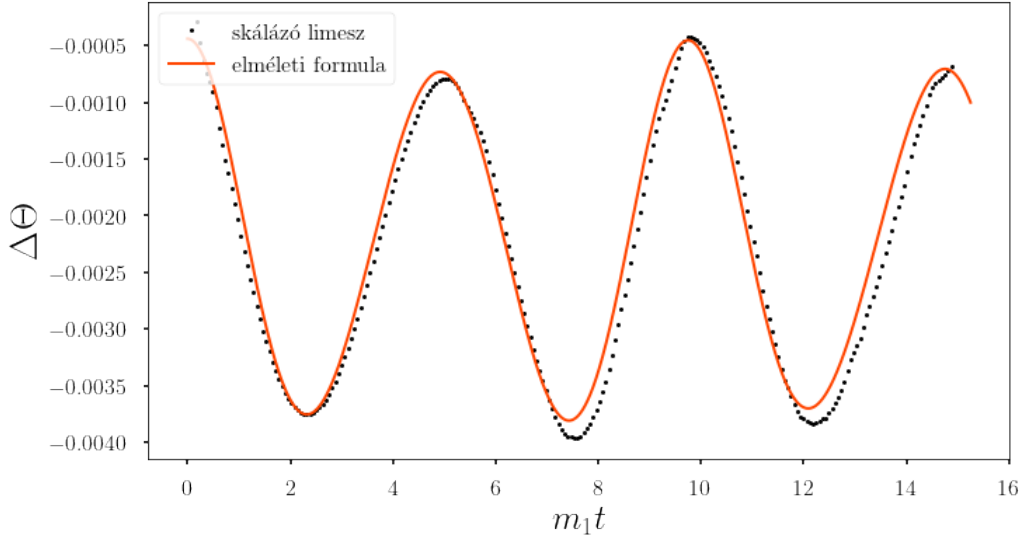
5.8. ábra. A skálázó limeszhez ilyen idők mellett vettünk extrapolációkat

Ehhez bevezetjük az $x = \lambda^{5/9}$ változót, ami a nyolc görbe esetén más és más lesz. Majd adott időközönként a nyolc görbe x értékeire egyenes illesztéssel (5.8. ábra) megkapjuk a skálázó limeszbeli értékeket. Ezzel az eljárással tehát meghatároztuk a szimulációink adataiból a numerikus jóslatot a skálázó limeszre, az extrapolált értékek a skálázó limeszben az 5.6. ábrán fekete pöttyökkel vannak jelölve.

Ezt a numerikus eredményt vetettük össze az (5.10) térelméleti formulából kapott skálázó limesszel a 5.9. ábrán. A formula $\mathcal{C}_i$ konstansaira kapott értékek a következők:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0^{\Theta\Theta} &= -0,0022 \\ \mathcal{C}_1^{\Theta\Theta} &= 0,27 \end{aligned} \quad (5.16)$$

A két függvény nem illeszkedik tökéletesen egymásra, de célunk a jövőben ezt pontosabb szimulációkkal javítani, valamint megérteni a $\mathcal{C}_i$ konstansokat.



5.9. ábra. A rendezetlen fázisban a kvencs operátorra kapott numerikus és elméleti skálázó limesz

5.5.3. Rendezett $E_7 \rightarrow E_7$ kvencs

Rendezett fázisban hét kvencset néztünk, ezeket a 5.3. táblázat FM sora tartalmazza. Ebben az esetben is ugyanúgy jártunk el, mint a rendezetlen fázisban, annyi különbséggel, hogy itt a vizsgált operátor a longitudinális mágnesezettség volt, azaz az S^x várható értéke.

Hasonlóan megfigyelhető, hogy a különböző λ -ákhoz tartozó mágnesezettség időfejlődések periódusa csak az idő tömeggel való átskálázása után egyezik meg (5.10. ábra).

A mágnesezettségnél is levontuk a kezdeti értéket,

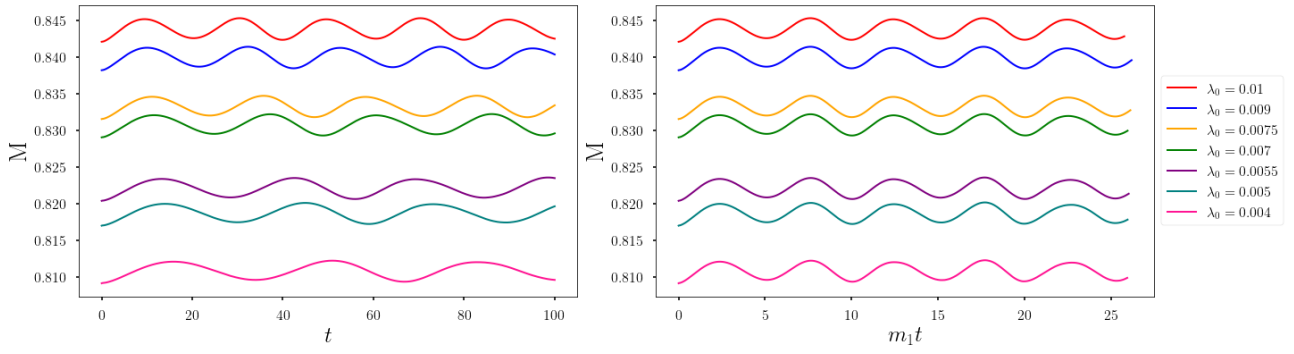
$$\Delta M = M(t) - M(0) = \langle S^x(t) \rangle - \langle S^x(0) \rangle, \quad (5.17)$$

és a 5.11. ábrán így feltüntetett mágnesezettség görbék esetén az figyelhető meg, hogy míg a rendezetlen fázisban a Θ kvencs operátor ilyen λ -ák mellett jobban változott, addig a mágnesezettség görbéi nem és a skálázó limeszre kapott extrapolált értékek is közel vannak.

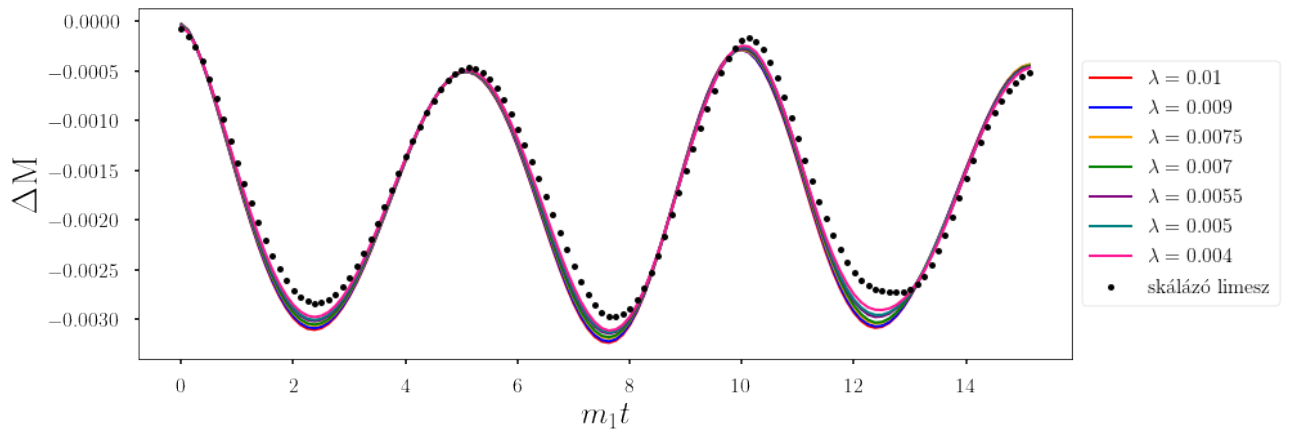
A térelméleti görbe meghatározásához ezúttal a (5.10) formulában a 5.2. táblázat második oszlopában szereplő értékekre is szükség volt, hisz most $\mathcal{O} = S^x$, a kvencs operátor pedig változatlan, $\mathcal{O}^{(q)} = \Theta$. Az így kapott elméleti görbe és az általunk nyert numerikus jóslat a skálázó limeszre a 5.12. ábrán látható, ahol az elméleti görbére kapott konstansok:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0^{S^x\Theta} &= -0,000165 \\ \mathcal{C}_1^{S^x\Theta} &= 0,43 \end{aligned} \quad (5.18)$$

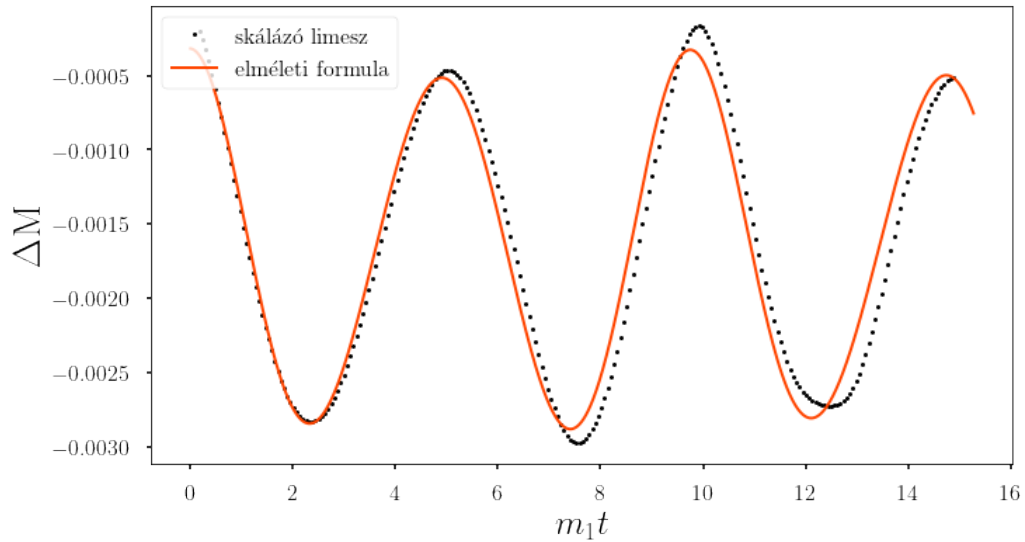
Célunk a jövőben itt is még pontosabb egyezést találni a numerika és az elmélet között, meg természetesen ezeket a konstansokat is szeretnénk megérteni.



5.10. ábra. Különböző λ -ák esetén a longitudinális megmagnettség időfüggése átskalázás előtt és után



5.11. ábra. A longitudinális mágnesszetre extrapolációkból kapott skalázó limesz



5.12. ábra. A rendezett fázisban a mágnesszetre kapott numerikus és elméleti skalázó limesz

6. fejezet

Összefoglalás és kitekintés

A végzett szimulációk mögötti motiváció a kapott eredmények térelmélettel való összevetése és annak igazolása volt.

Először egzakt diagonalizációval vizsgáltam a véges Blume–Capel láncot és a [13]-ban szereplő energiaréseket öt tizedesjegy pontossággal reprodukáltam. Majd a véges láncokra egzakt diagonalizációval és a végtelen láncra iTEBD-vel kiszámolt alapállapotú energiasűrűségek összehasonlításából meggyőződtem az iTEBD helyes működéséről.

Ezt követően az E_7 modellt vizsgáltam iTEBD-vel. Rendezetlen és rendezett $E_7 \rightarrow E_7$ kvencsek néztem egyre közelebb a trikritikus ponthoz. Tudván, hogy az $E_7 \rightarrow E_7$ kvencsek operátora páros, a Fourier spektrumban csak páros egyrészecskéket várhatunk, illetve párban megjelenő páratlan részecskéket, úgynevezett kontinuumokat. A végzett szimulációimmal sikerült a modell Fourier-spektrumában kimutatni a térelmélet által jóslott páros részecskék közül az első kettőt (m_2, m_4), illetve ezek különbségét is ($m_4 - m_2$). Ahhoz, hogy a másik két kvázi-részecskét (m_5, m_7) is lássuk, sokkal pontosabb szimulációkra van szükség, ez célunk a jövőben például magasabb rendű Trotter–Suzuki közelítés alkalmazásával.

Az E_7 modell skálázó limeszt is vizsgáltuk. Ehhez a különböző csatolások esetén végrehajtott szimulációs eredményeimet tekintettem. A kvencs utáni dinamika operátorainak várható értékét vettem az idő függvényében. Az így kapott görbék periódusideje eltérő volt. Ezek összeskálázásához meghatároztam a tömeg csatolás relációt az E_7 modell Blume–Capel modell realizációjában. És az adatok extrapolációjával numerikus jóslatot adtam a skálázó limesz időfüggésére. Ezt a skálázó limeszt a térelméleti formula segítségével is előállítottam. Majd a numerikus és elméleti görbék összevetésénél az elméleti formulában szereplő konstansokat úgy határoztam meg, hogy a két görbe egymásra illeszkedjen. Sikerült tehát a rendezetlen $E_7 \rightarrow E_7$ kvencsek esetén a Θ energia-impulzus tenzor nyomának várható értékére megkapni a skálázó

limeszt, ami az elmélettel nem mutat tökéletes egyezést, de pontosabb szimulációkkal ez javítható. Hasonlóan a rendezett $E_7 \rightarrow E_7$ kvencseknél az S^x operátor várható értékére, azaz a longitudinális mágneszettségre sikerült előállítani a skálázó limeszt. A jövőben szeretnénk megérteni ezeket a konstansokat is.

Továbbá szeretnénk meghatározni az E_7 modell ún. *twist* operátor form faktorait, hogy a [17]-ben található összefonódás jóságot az E_7 modellben is meg tudjuk konstruálni

Mint említettük a rendezett fázisban két degenerált alapállapot található. Kis mágneses tér esetén bezáródást várunk a spektrumban [21], ezt is szeretnénk vizsgálni [22]-höz hasonlóan. Továbbá a hamis vákuum bomlását is vizsgálhatjuk kvencs scenárió használatával. Erre már végeztek numerikus szimulációkat [23]-ben Ising lánc és XXZ létra esetén. A trikitikus Ising körüli skálázó térelméletben pedig [24] tanulmányozta.

Irodalom

- [1] Frank Pollmann. “Efficient Numerical Simulations Using Matrix-Product States”. (2016). URL: https://www.ggi.infn.it/sft/SFT_2016/LectureNotes/Pollmann.pdf.
- [2] Pasquale Calabrese és John Cardy. “Entanglement entropy and quantum field theory”. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2004.6 (2004. jún.), 6002. old. DOI: 10.1088/1742-5468/2004/06/P06002. arXiv: hep-th/0405152 [hep-th].
- [3] L. Tagliacozzo és tsai. “Scaling of entanglement support for matrix product states”. 78.2, 024410 (2008. júl.), 24410. old. DOI: 10.1103/PhysRevB.78.024410. arXiv: 0712.1976 [cond-mat.stat-mech].
- [4] Pasquale Calabrese és Alexandre Lefevre. “Entanglement spectrum in one-dimensional systems”. 78.3, 032329 (2008. szept.), 32329. old. DOI: 10.1103/PhysRevA.78.032329. arXiv: 0806.3059 [cond-mat.str-el].
- [5] Frank Pollmann és tsai. “Theory of Finite-Entanglement Scaling at One-Dimensional Quantum Critical Points”. 102.25, 255701 (2009. jún.), 255701. old. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.255701. arXiv: 0812.2903 [cond-mat.str-el].
- [6] Stellan Östlund és Stefan Rommer. “Thermodynamic Limit of Density Matrix Renormalization”. 75.19 (1995. nov.), 3537–3540. old. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.3537. arXiv: cond-mat/9503107 [cond-mat].
- [7] Stefan Rommer és Stellan Östlund. “Class of ansatz wave functions for one-dimensional spin systems and their relation to the density matrix renormalization group”. 55.4 (1997. jan.), 2164–2181. old. DOI: 10.1103/PhysRevB.55.2164. arXiv: cond-mat/9606213 [cond-mat].
- [8] D. Perez-Garcia és tsai. “Matrix Product State Representations”. *arXiv e-prints*, quant-ph/0608197 (2006. aug.), quant-ph/0608197. arXiv: quant-ph/0608197 [quant-ph].
- [9] R. Orús és G. Vidal. “Infinite time-evolving block decimation algorithm beyond unitary evolution”. 78.15, 155117 (2008. okt.), 155117. old. DOI: 10.1103/PhysRevB.78.155117. arXiv: 0711.3960 [cond-mat.stat-mech].

- [10] G. Vidal. “Classical Simulation of Infinite-Size Quantum Lattice Systems in One Spatial Dimension”. 98.7, 070201 (2007. febr.), 70201. old. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.070201. arXiv: cond-mat/0605597 [cond-mat.str-el].
- [11] P. Christe és G. Mussardo. “Integrable systems away from critically: The Toda field theory and S-matrix of the tricritical Ising model”. *Nuclear Physics B* 330.2 (1990), 465–487. old. ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(90\)90119-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90119-X). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139090119X>.
- [12] V. A. Fateev és A. B. Zamolodchikov. “Conformal Field Theory and Purely Elastic S-Matrices”. *International Journal of Modern Physics A* 5.6 (1990. jan.), 1025–1048. old. DOI: 10.1142/S0217751X90000477.
- [13] G. von Gehlen. “Off-criticality behaviour of the Blume-Capel quantum chain as a check of Zamolodchikov’s conjecture”. *Nuclear Physics B* 330.2 (1990), 741–756. old. ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(90\)90130-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90130-6). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321390901306>.
- [14] A. B. Zamolodchikov. “Integrable field theory from conformal field theory”. *Adv. Stud. Pure Math.* 19 (1989). Szerk. M. Jimbo, T. Miwa és A. Tsuchiya, 641–674. old.
- [15] Gesualdo Delfino. “Quantum quenches with integrable pre-quench dynamics”. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 47.40 (2014. szept.), 402001. old. DOI: 10.1088/1751-8113/47/40/402001. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/47/40/402001>.
- [16] Kristóf Hódsági, Márton Kormos és Gábor Takács. “Quench dynamics of the Ising field theory in a magnetic field”. *SciPost Phys.* 5 (2018), 27. old. DOI: 10.21468/SciPostPhys.5.3.027. URL: <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.5.3.027>.
- [17] Olalla A. Castro-Alvaredo és tsai. “Entanglement Oscillations near a Quantum Critical Point”. *Phys. Rev. Lett.* 124 (23 2020. jún.), 230601. old. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.230601. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.230601>.
- [18] J. L. Cardy, O. A. Castro-Alvaredo és B. Doyon. “Form Factors of Branch-Point Twist Fields in Quantum Integrable Models and Entanglement Entropy”. *Journal of Statistical Physics* 130.1 (2008. jan.), 129–168. old. DOI: 10.1007/s10955-007-9422-x. arXiv: 0706.3384 [hep-th].

- [19] Axel Cortés Cubero és tsai. “Duality and form factors in the thermally deformed two-dimensional tricritical Ising model”. *SciPost Phys.* 12 (2022), 162. old. DOI: 10.21468/SciPostPhys.12.5.162. URL: <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.12.5.162>.
- [20] C. Acerbi, A. Valleriani és G. Mussardo. “Form Factors and Correlation Functions of the Stress-Energy Tensor in Massive Deformation of the Minimal Models $(E_n)_1 \otimes (E_n)_1 / (E_n)_2$ ”. *International Journal of Modern Physics A* 11.30 (1996. jan.), 5327–5364. old. DOI: 10.1142/S0217751X96002443. arXiv: hep-th/9601113 [hep-th].
- [21] M. Lencsés, G. Mussardo és G. Takács. “Confinement in the tricritical Ising model”. *Physics Letters B* 828, 137008 (2022. máj.), 137008. old. DOI: 10.1016/j.physletb.2022.137008. arXiv: 2111.05360 [hep-th].
- [22] Marton Kormos és tsai. “Real-time confinement following a quantum quench to a non-integrable model”. *Nature Physics* 13.3 (2017. márc.), 246–249. old. DOI: 10.1038/nphys3934. arXiv: 1604.03571 [cond-mat.stat-mech].
- [23] Gianluca Lagnese és tsai. “False vacuum decay in quantum spin chains”. *Phys. Rev. B* 104 (20 2021. nov.), L201106. old. DOI: 10.1103/PhysRevB.104.L201106. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.104.L201106>.
- [24] M. Lencsés, G. Mussardo és G. Takács. “Variations on vacuum decay: the scaling Ising and tricritical Ising field theories”. *arXiv e-prints*, arXiv:2208.02273 (2022. aug.), arXiv:2208.02273. arXiv: 2208.02273 [hep-th].