

Ryu-Takayanagi összefüggés szegmentált húrokra

TDK DOLGOZAT

Boldis Bercel

BME Természettudományi Kar

Kutatófizikus MSc

Témavezető:

Dr. Lévay Péter Pál

Tudományos főmunkatárs

BME Fizikai Intézet

Elméleti Fizika Tanszék



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2022

A Kulturális és Innovációs Minisztérium **ÚNKP-22-2-III-BME-3** kód-számú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI
ÉS INNOVÁCIÓS HIVATAL



Új Nemzeti
Kiválóság Program

Absztrakt

Dolgozatomban az AdS/CFT megfeleltetésben a Ryu-Takayanagi összefüggést felhasználva kapcsolatba hozom az AdS térben terjedő kétdimenziós húrok szegmentált közelítéseinek területét a határ vákuum állapotú CFT rendszereinek összefonódottsági entrópiáival. [1] cikk sémáját követve a kapcsolatot először a statikus AdS_3 téren mutatom meg. Ezután eredményeimet általánosítom a nem statikus esetre és mutatok néhány példát arra, hogy a kapcsolatnak milyen következményei vannak az AdS_3/CFT_2 megfeleltetés két oldalán. Ilyen például a húr területének pozitivitásából következő erős szuubadditivitás és a hatásból levezetett Toda-típusú egyenlet az összefonódottsági entrópiákra. Végül eredményeimet tovább általánosítom az AdS_{d+1}/CFT_d megfeleltetésre $d = \text{páros}$ esetben. Dolgozatom egy új megközelítést ad a geometria és az összefonódottság kapcsolatára.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	6
2. Az AdS_3 tér és a Ryu-Takayanagi összefüggés	9
2.1. Az AdS_3 tér és a Poincaré felső térrész	9
2.2. Statikus minimális felületek	10
2.3. A Ryu-Takayanagi összefüggés	13
3. Szegmentált húrok AdS_3-ban	17
3.1. Szegmentált húrok definíciója	17
3.2. Kauzalitási feltételek	21
3.3. Húr szegmensek területe	22
3.4. Statikus szegmensek a Poincaré modellben	23
3.5. Ryu-Takayanagi összefüggés szegmentált húrokra	25
3.5.1. Kölcsönös feltételes információ	28
4. Ryu-Takayanagi formula általános helyzetű AdS_3 húr szegmensekre	30
4.1. Minimális felületek	30
4.2. Húr szegmensek és a Ryu-Takayanagi megfelelés	33
5. Dualitás a húrok és az összefonódás között	37
5.1. Pozitivitás és az erős szubadditivitás	37
5.2. Az interpolációs ansatz következményei	39
5.3. Mérték szabadság	40
5.4. Toda-egyenlet	40
6. A megfelelés páros dimenzióban	44
6.1. AdS_{d+1} tér és a Poincaré felső térrész modell	44
6.2. AdS_{d+1} minimális felületek	46

6.3. Szegmentált hurok	49
6.4. Szegmentált hurok és az összefonódottság kapcsolata páros dimenzióban .	51
7. Összefoglalás	54
Függelék	56
A. Példa egy húr szegmensre	56
Irodalomjegyzék	59

1. fejezet

Bevezető

A modern fizika egyik alapvető kérdése, hogy a gravitációs kölcsönhatás geometriai elmélete hogyan ágyazható be a mikroszkópikus jelenségeket leíró kvantummechanikába. A 20. század végén ezen kérdés megválaszolására született az úgynevezett húrelmélet, amely a részecskéket a téridőben terjedő húr szerű objektumokként írja le. Bár a húrelmélet eredményei kísérletileg nehezen igazolhatónak bizonyultak, rengeteg új eszközt biztosított a fizika számos területén. A gravitáció kvantummechanikai leírására továbbá olyan elméletek is születtek, amelyek szerint a téridő szövetét kvantumállapotok összefonódottsága tartja össze [2].

A húrelmélet egyik modern megközelítése az úgynevezett AdS/CFT megfelelés, amely kapcsolatot teremt a kvantumozott összefonódottság és a gravitáció jelenségei között. A megfelelés egyik eredménye az úgynevezett Ryu-Takayanagi összefüggés [3, 4, 5] amely szerint egy tetszőleges dimenziójú aszimptotikusan anti-de Sitter tér minimális felületének nagysága arányos a tér egyel alacsonyabb dimenziós határán lévő konform térelmélet megfelelő tartományainak összefonódottsági entrópiáival. Dolgozatomban a Ryu-Takayanagi formulát felhasználva megmutatom, hogy egy hasonló összefüggés írható fel a három dimenziós AdS térben mozgó diszkrétizált húrok felületei és a határ vákuum állapotának összefonódottsági entrópiái között.

Dolgozatom második fejezetében bevezetem a háromdimenziós anti-de Sitter (AdS_3) teret és bevezetem annak Poincaré féle felső térrész modelljét [1] konvencióit használva. Bemutatom az AdS_3 tér kettő kodimenziós (egydimenziós) térszerű minimális felületeit statikus esetben, valamint kiszámítom azok felszínét. Végül bemutatom a Ryu-Takayanagi összefüggést és azt, hogy ez hogyan alkalmazható az AdS/CFT megfelelésben

az AdS tér határán élő vákuumállapotú CFT részrendszer összefonódottsági entrópiáinak meghatározására.

A harmadik fejezetben ismertetem az AdS_3 térben terjedő húrokat, majd [1, 6, 7] cikkem alapján definiálom azok szegmentált közelítését. Ezekután meghatározom egy húr szegmens területét és megkötéseket teszek arra vonatkozóan, hogy a szegmenst definiáló mennyiségeknek milyen kauzalitási feltételeket kell teljesíteniük, hogy jól rendezett, időszerű húrokat kapjunk. Végül speciális, sztatikus esetben, a Ryu-Takayanagi összefüggésen keresztül megmutatom, hogy ezek hogyan állnak kapcsolatba a határon lévő konform térelmélet összefonódottsági entrópiáival. A végső formulában megjelenő összefonódottsági entrópiák kombinációja egy másik információelméleti mennyiséget határoz meg, az úgynevezett kölcsönös feltételes információt.

A negyedik fejezetben, hogy a statikus eset eredményeit általánosítsam, ismertetem azt az általános helyzetű elrendezést, amely a szegmentált hurok és a kvantumozott összefonódottság kapcsolatát a levezetett összefüggések segítségével matematikailag precíz módon alapozza meg. Bemutatom, hogy a hurok mozgásegyenlete hogyan jelenik meg a határ résztartományainak kölcsönös helyzetében, valamint hogyan lehet a részrendszerek tetszőleges elrendezéséhez húr szegmenseket rendelni. Megmutatom, hogy a hurok területének pozitivitása szoros kapcsolatban áll az információelméletből jól ismert egyenlőtlenséggel, az úgynevezett erős szubadditivitással. Végül a húr hatás variálásból kapható Toda típusú egyenletből kiindulva a határ vákuum állapotú részrendszereinek összefonódottsági entrópiáira egy összefüggést vezetek le.

Az utolsó fejezetben tovább általánosítom eredményeimet az AdS_{d+1}/CFT_d megfeleltetésre $d = \text{páros}$ esetben. Ismertetem a $d + 1$ dimenziós AdS teret és azok kettő kodimenziójú minimális felületeit. $d = \text{páros}$ esetben megadom ezen felületek felszínét is. Diszkutálom, hogy az AdS_{d+1} térben terjedő kétdimenziós hurok területei azonos módon számíthatók a $d = 2$ esetben érvényessel. Végül az AdS_{d+1}/CFT_d megfeleltetésre vonatkozó Ryu-Takayanagi összefüggésen keresztül megmutatom, hogy tetszőleges $d = \text{páros}$ dimenzióban kapcsolat van a szegmentált hurok és a határ vákuumállapotú összefonódottsági entrópiáinak univerzális tagjai között.

A dolgozat függeléke tartalmaz egy példát (Függelék A) egy szegmentált húrra, amely teljesíti a 3. fejezetben elhangzó kauzalitási feltételeket. Elméletileg ebből a megoldásból tetszőleges, a feltételeket kielégítő szegmens előállítható szimmetria transzformációk segítségével.

Dolgozatomban tehát az AdS térben terjedő hurok, az AdS tér minimális felületei és a határon élő CFT vákuum állapotának összefonódottsága közötti kapcsolatra mutatok rá, továbbá a Ryu-Takayanagi összefüggésből kiindulva levezetek egy formulát, amely szerint az AdS tér belüli szegmentált hurok felületét egy duális térelmélet részrendszereinek összefonódottsági entrópiája határozza meg. Ez a dualitás tehát egy egyszerű és szemléletes módon illusztrálja azt a sejtést, hogy bizonyos esetekben a téridő geometriája valóban kapcsolatba hozható a kvantumozott összefonódottsággal.

2. fejezet

Az AdS_3 tér és a Ryu-Takayanagi összefüggés

Ebben a fejezetben ismertetem az AdS_3 teret és [1] konvencióját használva annak Poincaré féle felső térrészmodelljét. Bevezetem az AdS_3 tér kettő kodimenziójú minimális felületeit és statikus esetben kiszámítom azok felszínét.

2.1. Az AdS_3 tér és a Poincaré felső térrész

A három dimenziós anti-de Sitter teret (AdS_3) azon $\mathbb{R}^{2,2}$ -beli pontok halmazaként definiáljuk, amelyre teljesül a következő kényszer:

$$X \cdot X := -(X^{-1})^2 - (X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 = -(X^0)^2 + (X^2)^2 + X^+ X^- = -L^2 \quad (1)$$

Ahol:

$$X^\pm = X^1 \pm X^{-1}, \quad (2)$$

Valamint L az úgynevezett AdS sugár. A tér kétdimeziós, aszimptotikus határát a következő halmaz definiálja:

$$\partial_\infty AdS_3 := \mathbb{P}\{U \in \mathbb{R}^{2,2} | U \cdot U = 0\} \quad (3)$$

Ahol $\mathbb{P}$ projektivizálást jelent.

[1] konvencióját követve bevezethetjük az AdS_3 tér Poincaré felső térrész modelljét:

$$X = \left(\frac{t^2 - z^2 - x^2 - L^2}{2z}, L \frac{t}{z}, \frac{t^2 - z^2 - x^2 + L^2}{2z}, L \frac{x}{z} \right) \quad (4)$$

Ahol $z > 0$. Az ívelemnégyszet ezen koordinátákban:

$$ds^2 = L^2 \frac{dz^2 - dt^2 + dx^2}{z^2} \quad (5)$$

Az AdS_3 tér x Poincaré koordinátáit a globális X változók segítségével kifejezhetjük a következő módon:

$$z = \frac{L^2}{X^-}, \quad t = L \frac{X^0}{X^-}, \quad x = L \frac{X^2}{X^-} \quad (6)$$

Az AdS tér határát a felső térrész reprezentációban a $z \rightarrow 0$ határeset adja. Vegyük észre, hogy ebben a határesetben az (5) metrika konform ekvivalens a kétdimenziós Minkowski tér ívelem négyszetével. Az $\mathbb{R}^{2,2}$ beli U null vektorok Poincaré koordinátái:

$$x_u^\mu := (t_u, x_u) = \frac{L}{U^-} (U^0, U^2) \quad (7)$$

Amelyek a határon lévő Minkowski tér pontjait határozzák meg.

2.2. Statikus minimális felületek

A következőkben meghatározom az AdS_3 tér azon egy dimenziós (kettő kodimenziós) minimális felületeit, amelyek határa $S^0 = \mathbb{Z}_2$ nulla dimenziós gömb felületek¹. Ezeket a beágyazó $\mathbb{R}^{2,2}$ té null vektorai segítségével a következő képpen definiálhatjuk: Legyenek $U = (U^{-1}, U^0, U^1, U^2)$, $U \cdot U = 0$ és $V = (V^{-1}, V^0, V^1, V^2)$, $V \cdot V = 0$ null vektorok, amelyekre:

$$U \cdot V < 0, \quad U^- V^- < 0 \quad (8)$$

Ahol $U^\pm = U^1 \pm U^{-1}$ és $V^\pm = V^1 \pm V^{-1}$. Ekkor a minimális felületet a következő két kényszer határozza meg [8]:

$$U \cdot X = 0, \quad V \cdot X = 0 \quad (9)$$

¹Általános, nem statikus esetben valójában ellipszoidok, azonban innentől kezdve az egyszerűség kedvéért gömbfelületekként hivatkozok rájuk.

Ahol $X = (X^{-1}, X^0, X^1, X^2)$ AdS beli pontok, vagyis $X \cdot X = -L^2$.

A következőkben vizsgáljuk meg, hogy a Poincaré modellben az említett kényszerek, valamint a minimális felületek milyen objektumokat határoznak meg. Ahogy láttuk, a (4) koordináta transzformációt használva az x felső térrész koordináták az AdS_3 beli globális koordinátákkal kifejezve a következők:

$$z = \frac{L^2}{X^-}, \quad t = L \frac{X^0}{X^-}, \quad x = L \frac{X^2}{X^-} \quad (10)$$

Az U és V null vektorok határpontokat határoznak meg, amelyek koordinátái:

$$x_u^\mu := (t_u, x_u) = \frac{L}{U^-}(U^0, U^2), \quad x_v^\mu := (t_v, x_v) = \frac{L}{V^-}(V^0, V^2) \quad (11)$$

Egyszerűen megmutatható, hogy az $U \cdot V < 0$ és $U^- V^- < 0$ feltételek miatt x_u^μ és x_v^μ vektorok időszerűen szeparáltak.

Ezeket felhasználva az $U \cdot X = 0$ és $V \cdot X = 0$ kényszerek a következő felületeket határozzák meg:

$$z^2 - \left(t - L \frac{U^0}{U^-}\right)^2 + \left(x - L \frac{U^2}{U^-}\right)^2 = z^2 - (t - t_u)^2 + (x - x_u)^2 = 0 \quad (12)$$

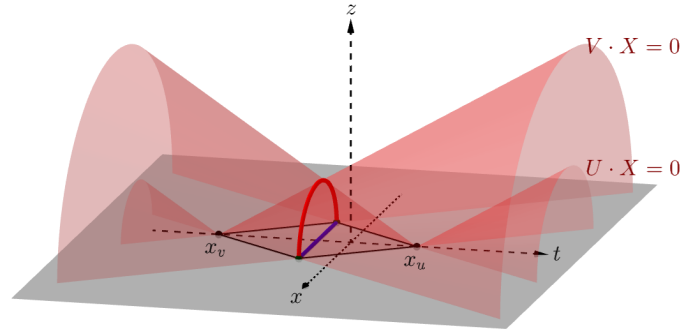
$$z^2 - \left(t - L \frac{V^0}{V^-}\right)^2 + \left(x - L \frac{V^2}{V^-}\right)^2 = z^2 - (t - t_v)^2 + (x - x_v)^2 = 0 \quad (13)$$

Ezek (fél) kúpok (1. ábra), amelyek középpontjai az $(z, t, x) = (0, t_u, x_u)$ és $(z, t, x) = (0, t_v, x_v)$ pontokban helyezkednek el. A két egyenletet kivonva egymásból megmutatható, hogy a metszetük által meghatározott felület azon síkban helyezkedik el, amelynek egyenlete:

$$t \cdot 2L \left(\frac{U^0}{U^-} - \frac{V^0}{V^-} \right) - x \cdot 2L \left(\frac{U^2}{U^-} - \frac{V^2}{V^-} \right) = L^2 \left(\frac{U^+}{U^-} - \frac{V^+}{V^-} \right) \quad (14)$$

A következőkben a statikus minimális felületeket vizsgáljuk. Ahhoz, hogy $t = \text{const.}$ legyen a felület mentén, a következő feltételnek kell teljesülnie:

$$x_u = x_v \quad (15)$$



1. ábra. Az AdS_3 tér térszerű minimális felületeit azon $X \in AdS_3$ pontok adják, amelyek kielégítik az $U \cdot X = 0$ és $V \cdot X = 0$ egyenleteket, ahol $U, V \in \mathbb{R}^{2,2}$ null vektorok. A Poincaré felső térrész modellben ezek az egyenletek kúpokat definiálnak (piros kúpok). A minimális felület ezek metszete, amely egy félkörív (piros félkör). Az AdS tér határán ($z = 0$ szürke sík) a kúpok egy kauzális gyémántot feszítenek ki (fekete deltoid), a minimális felület képe pedig egy térszerű intervallum (kék intervallum). A minimális felület és a részrendszer közös határa egy $S^0 = \mathbb{Z}_2$ nulla dimenziós gömb, amely ebben az esetben két diszjunkt pontnak felel meg.

Statikus esetet feltételezve algebrai átalakítások után megmutatható, hogy a (12) és (13) egyenletek a következő felületet határozzák meg:

$$z^2 + (x - x_0)^2 = R^2, \quad t = \frac{1}{2}L(t_u + t_v) \quad (16)$$

Ahol:

$$x_0 = x_u = x_v \quad (17)$$

Továbbá:

$$R = \frac{L}{2} \left| \frac{U^0}{U^-} - \frac{V^0}{V^-} \right| = \frac{L}{2} |t_u - t_v| \quad (18)$$

Ez a felület tehát az AdS_3 statikus minimális felülete, amely a felső térrész modellben egy (t_0, x_0) középpontú félkörív (1. ábra). Ennek határa valóban egy nulla dimenziós gömb. A következőkben az $x_0 = 0$ esetet tekintjük azonban mivel a Poincaré modell térbeli eltolási szimmetriával rendelkezik, a következő levezetés végeredménye igaz tetszőleges x_0 esetén is.

A felületet parametrizálhatjuk az $y = z/R$ változóval. Ekkor a felületen indukált metrika a következő:

$$h = L^2 \frac{\partial_y z \partial_y z + \partial_y x \partial_y x}{z^2} = L^2 \frac{1}{y^2(1-y^2)} \quad (19)$$

Ennek segítségével meghatározhatjuk a minimális felület nagyságát, amelyet a következő felületi integrál kiértékelésével kaphatunk meg:

$$A_{\min} = \int dS \sqrt{h} \quad (20)$$

Ahol az integrálás a teljes felületre értendő. Könnyen megmutatható, hogy az $y = z/R$ parametrizációt használva ez a következő egydimenziós integrálra vezet:

$$A_{\min} = 2L \int_{\delta/R}^1 dy \frac{(1-y^2)^{-1/2}}{y} \quad (21)$$

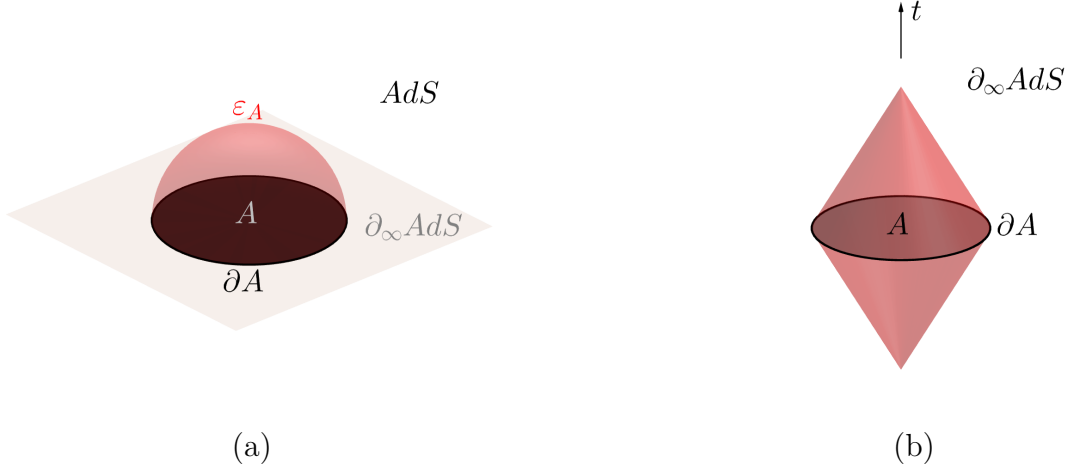
Vegyük észre, hogy az integrandus $y = 0$ -ban divergens, ezért ezért bevezettem egy $z > \delta$ regularizációt, ahol $\delta \ll R$. Ezt figyelembe véve kapjuk végeredményben, hogy az AdS_3 tér statikus, U és V null vektorok által meghatározott minimális felületének a nagysága:

$$A_{\min}(U, V) = 2L \log \frac{2R}{\delta} = 2L \log \frac{L}{\delta} \left| \frac{U^0}{U^-} - \frac{V^0}{V^-} \right| = 2L \log \frac{1}{\delta} |t_u - t_v| \quad (22)$$

Fontos megjegyezni, hogy az U és V null vektorok megválasztásánál van egy mérték szabadságunk, ugyanis az U és V vektorok tetszőleges $U \rightarrow \Lambda_u U$ és $V \rightarrow \Lambda_v V$, $\Lambda_u \Lambda_v > 0$ átskálázása esetén ugyanazokat az $U \cdot X = 0$ és $V \cdot X = 0$ kúpokot kapjuk.

2.3. A Ryu-Takayanagi összefüggés

Amint láttuk, az AdS tér határa a felső térrész modellben konform ekvivalens egy eggyel alacsonyabb dimenziós Minkowski térrel. Az AdS/CFT megfelelés szerint a tiszta AdS



2. ábra. A Ryu-Takayanagi összefüggés szerint (a) kapcsolat van az AdS_3 tér minimális felületeinek (ϵ_A piros félgömb) felszíne és a $\partial_\infty AdS$ határ (szürke sík) vákuum állapotú CFT A részrendszereinek (bordó körlap) összefonódottsági entrópiái között. A ϵ_A minimális felület folytonosan összehúzható A -ba és közös határuk ∂A . A (b) ábra az AdS tér $\partial_\infty AdS$ határát ábrázolja (vagyis az (a) ábra szürke síkját) benne egy A részrendszerrel. Dolgozatomban olyan térszerű részrendszerek összefonódottságát vizsgálom, amelyek a határon köralakú tartományok. Ezek kauzális kiterjesztését kúpok határolják (piros gyémánt).

tér klasszikus gravitációja duális a tér Minkowski határán élő vákuum állapotú konform térelmélettel, amennyiben a CFT -t jellemző effektív centrális töltés $c_{\text{eff}} \gg 1$.

A dualitás egyik legalapvetőbb megnyilvánulása az úgynevezett Ryu-Takayanagi összefüggés, amely kapcsolatot teremt az AdS tér minimális felületei és a határ bizonyos részrendszereinek összefonódottsága között. Az összefüggés szerint az AdS_3/CFT_2 megfelelésben a határ egy térszerű részrendszerének összefonódottsági entrópiája vákuum állapotban arányos a részrendszer határára illeszkedő, tiszta AdS tér beli minimális felület nagyságával. Precízen szólva tekintsünk egy kétdimenziós, holografikus ($c_{\text{eff}} \gg 1$) konform térelméletben egy Σ Cauchy-felületet és azon egy A térszerű részrendszert, amelynek határa ∂A , komplementere pedig A^c (vagyis $\Sigma = A \cup A^c$). Tegyük fel, hogy a konform térelmélet vákuum állapotát a ρ sűrűség operátor jellemzi. Ekkor az A részrendszer redukált állapota:

$$\rho_A = \text{Tr}_{A^c} \rho \quad (23)$$

Amelynek segítségével a részrendszer összefonódottsági entrópiája:

$$S(A) = -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A \quad (24)$$

Közvetlen térelméleti számításokon keresztül, tetszőleges részrendszerre az entrópia meghatározása igen bonyolult. Tegyük fel azonban, hogy egy a térelmélet egy tiszta AdS tér $\partial_\infty AdS$ határán él. Tekintsük ekkor az AdS tér belüli felületek közül azt az ε_A -t, amelyre teljesül, hogy (2. ábra):

- egydimenziós (kettő kodimenziójú),
- $\varepsilon_A|_{\partial_\infty AdS} = \partial A$,
- ε_A folytonosan „összehúzható” A -ba,
- valamint felülete minimális.

Ennek AdS tér belüli felszínét jelöljük $A(\varepsilon_A) = A_{\min}(A)$ -val. A Ryu-Takayanagi összefüggés szerint ekkor az A részrendszer összefonódottsági entrópiája és a ε_A felület (2. ábra) nagysága között a következő kapcsolat áll fenn [3, 4, 5]:

$$S(A) = \frac{A_{\min}(A)}{4G^{(3)}} \quad (25)$$

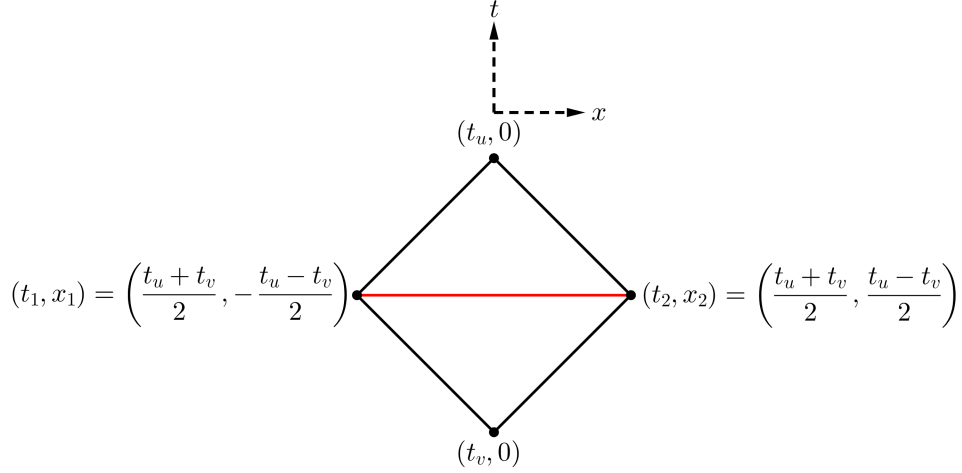
Ahol az arányossági tényezőben $G^{(3)}$ a háromdimenziós gravitációs állandót jelöli. Ennek alapján a konform térelméleti összefonódottsági entrópia ekvivalens egy, a duális térben lévő klasszikus geometriai mennyiséggel.

A fejezet korábbi részeiben láttuk, hogy a háromdimenziós AdS térben két, $U, V \in \mathbb{R}^{2,2}$ null vektor segítségével definiálhatunk egy olyan statikus, egydimenziós minimális felületet, amelynek határa egy S^0 nulla dimenziós gömb (1. ábra). Ekkor az előző definíciókkal azonosítva legyen a minimális felület ε_A , a határa ∂A , valamint a felület határra vetített képe (vagyis a ∂A két pontja közt futó szakasz) A . Láttuk, hogy ε_A felület nagysága:

$$A_{\min}(U, V) = 2L \log \frac{L}{\delta} |t_u - t_v| \quad (26)$$

Ahol x_u és x_v az U és V vektorok által meghatározott Minkowski térbeli térkoordináták. Ekkor a (25) Ryu-Takayanagi összefüggést felhasználva az A részrendszer összefonódottsági entrópiája:

$$S(U, V) = \frac{L}{2G^{(3)}} \log \frac{1}{\delta} |t_u - t_v| \quad (27)$$



3. ábra. A határ egy statikus részrendszere (piros intervallum), amelyet egy kauzális gyémánt határol (fekete gyémánt). A gyémánt múlt- és jövőbeli részét két kúp határozza meg, amelyet két, $U, V \in \mathbb{R}^{2,2}$ vektor határoz meg. A kúpok középpontjainak Minkowski tér belüli koordinátái $(t_u, 0)$ és $(t_v, 0)$. Ezek segítségével meghatározható a részrendszer két térszerűen elválasztott határának (t_1, x_1) és (t_2, x_2) koordinátái is.

Az $U \cdot X = 0$ és a $V \cdot X = 0$ kényszerek által meghatározott AdS belüli kúpok határai az A részrendszer múlt és jövő belüli kauzális függőségi tartományait² („kauzális gyémántját”) feszítik ki. Egyszerű megmutatni, hogy ezen kauzális gyémánt térszerű csúcsainak, vagyis a részrendszer végpontjainak x koordinátái $x_1 = -\frac{t_u - t_v}{2}$ és $x_2 = \frac{t_u - t_v}{2}$ (3. ábra). Ezek alapján az entrópia átírható a következő alakra:

$$S(U, V) = \frac{L}{2G^{(3)}} \log \frac{1}{\delta} |x_2 - x_1| \quad (28)$$

Ez az eredmény megegyezik az entrópiára levezetett, közvetlenül, konform térelméleti számítások alapján kapott eredménnyel [9].

Dolgozatomban a Ryu-Takayanagi összefüggésből kiindulva egy ahhoz hasonló megfelelést vezetek le az AdS térben terjedő szegmentált hurok és a határ összefonódottsága között.

²Az A részrendszer kauzális függőségi tartományának azt a tartományt nevezzük ahova a ρ_A sűrűség mátrix a Hamilton operátor ismeretében időben egyértelműen tovább-, vagy visszafejleszthető. Vagyis létezik egy unitér operátor, amelynek segítségével a ρ_A állapotot a kauzális gyémánton belül transzformálni tudjuk [10].

3. fejezet

Szegmentált húrok AdS_3 -ban

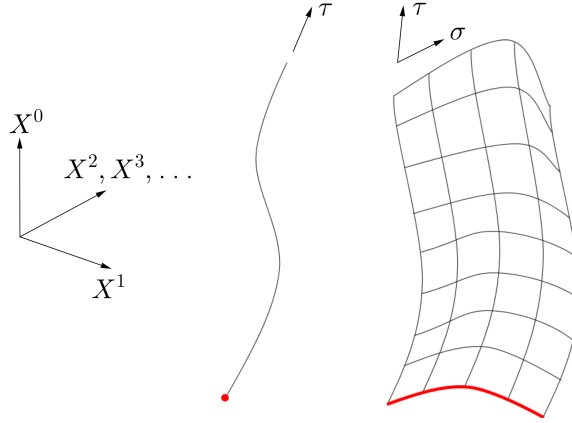
A következőkben bevezetem a háromdimenziós anti-de Sitter térbe ágyazott kétdimenziós húrokat és azok szegmentált közelítését. Kiszámítom ezen szegmensek területét, majd megmutatom, hogy statikus esetben ezek hogyan állnak kapcsolatban a határ összefonódottsági entrópiáival.

3.1. Szegmentált húrok definíciója

Az AdS_3 térbe ágyazott kétdimenziós húrokat az úgynevezett Nambu-Goto hatásból kiindulva határozhatjuk meg. Egy pontszerű részecske a téridőben egy „világvonalon” mozog (4. ábra). A mozgását egy hatás integrál határozza meg, amelynek olyannak kell lennie, hogy invariáns a beágyazó tér szimmetriáira, illetve a legkisebb hatás elve alapján ezen világvonal mentén extrémális. Ekkor a hatás variálásából megkaphatók a részecske mozgását leíró mozgásegyenletek. Ezen eredmény általánosítása az, amikor pontszerű részecskék mozgása helyett egydimenziós húrok mozgását vizsgáljuk. A húrok a téridőben kétdimenziós „világlepedők” mentén söpörnek végig. A világlepedőt már két, τ és σ paraméterrel tudjuk jellemezni (4. ábra). A lepedő mozgását ismét előállíthatjuk egy, a beágyazó tér szimmetriáira invariáns hatás variációjával. A legegyszerűbb, klasszikus húrokat leíró hatás az úgynevezett Nambu-Goto hatás, amely a következő alakú [11]:

$$S_{\text{NG}} = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{(\partial_\tau X \cdot \partial_\tau X)(\partial_\sigma X \cdot \partial_\sigma X) - (\partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X)^2} \quad (29)$$

Ahol T az úgynevezett húr feszültség illetve a „ $\cdot$ ” belsőszorzatot a beágyazó tér $g^{\mu\nu}$ metrikája definiálja. A világlepedő $X(\tau, \sigma)$ pontjaira vonatkozó mozgásegyenletet a $\delta S = 0$



4. ábra. Egy $X = (X^0, X^1, X^2, \dots)$ koordinátákkal jellemzett beágyazó térben egy pontszerű részecske (piros pont) egy világvonalat jelöl ki a téridőben. Ezt a világvonalat egy τ paraméterrel jellemezhetjük. Ezzel szemben egy húr (piros görbe) egy világlepedőn seper végig, amelyet két, τ és σ paraméter jellemez.

variáció határozza meg. A továbbiakban a világlepedőkre húrokként hivatkozok. A húroknak a parametrizáció speciális választásából adódóan további kényszereket is teljesíteniük kell. Ezek az úgynevezett Virasoro-kényszerek, amelyek a következők [11]:

$$(\partial_\tau X \pm \partial_\sigma X)^2 = 0 \quad (30)$$

Ezek alapján megmutatható, hogy az AdS_3 térben mozgó hurok mozgásegyenlete a következő [12]:

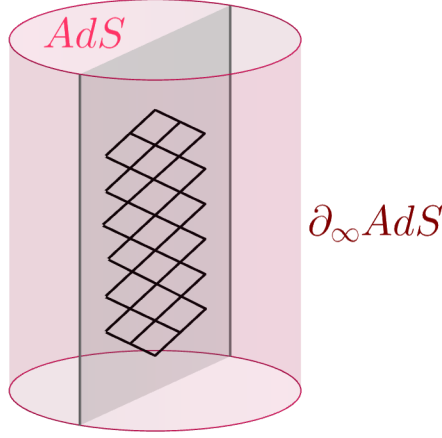
$$\partial_+ \partial_- X - (\partial_- X \cdot \partial_+ X) X = 0 \quad (31)$$

Ahol a húr ezúttal a $\sigma^- = \frac{\tau - \sigma}{2}$ és $\sigma^+ = \frac{\tau + \sigma}{2}$ változók parametrizálják. A húr mentén továbbá teljesülnie kell a Virasoro kényszereknek is, vagyis:

$$\partial_- X \cdot \partial_- X = \partial_+ X \cdot \partial_+ X = 0 \quad (32)$$

Háromdimenziós esetben a húr normálvektorát a következőképpen definiálhatjuk:

$$N_a = \frac{\epsilon_{abcd} X^b \partial_- X^c \partial_+ X^d}{\partial_- X \cdot \partial_+ X} \quad (33)$$



5. ábra. Egy AdS_3 térben (piros tömör henger) terjedő statikus húr. A húr által végigsepart világlepedő (szürke téglalap) az AdS tér $\partial_\infty AdS_3$ aszimptotikus határán (sötét piros henger) egy görbét határoz meg. A húr szegmentálása alatt a világlepedő téglalapokkal való közelítését (fekete rács) értjük. Ezen szegmensek mentén a húr normálvektora állandó.

Fontos megjegyezni, hogy a (31) és (32) egyenletek tetszőleges dimenziós AdS_{d+1} térbe ágyazott, kétdimenziós húr esetén fennállnak.

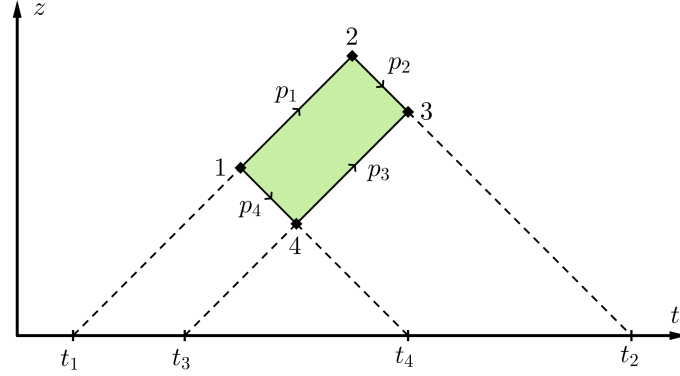
A (31) mozgásegyenlet legegyszerűbb megoldásai azok a húrok, amelyekre a normál vektor a húr mentén állandó. Ennek segítségével definiálhatjuk az úgynevezett szegmentált húrokat, amelyek a mozgásegyenlet bonyolultabb megoldásainak közelítései. Egy húr akkor nevezünk szegmentáltnak, ha olyan elemi húr szegmensekből épül fel, amelyek mentén a normál vektor állandó (5. ábra). A következőkben ilyeneket vizsgálunk.

Egy négyszög alakú húr szegmenst definiálhatunk az $i = 1, 2, 3, 4$ csúcsait meghatározó V_i , $V_i \cdot V_i = -L^2$ AdS_3 vektorok segítségével. Tegyük fel, hogy ezek a csúcsok fényszerűen szeparáltak, vagyis minden szomszédos i, j csúcsra $V_i \cdot V_j = -L^2$. Vezessük be továbbá a szegmens oldalait meghatározó null vektorokat a következőképpen [1]:

$$p_1 = V_2 - V_1 \qquad p_2 = V_3 - V_2 \qquad (34)$$

$$p_3 = V_4 - V_3 \qquad p_4 = V_1 - V_4 \qquad (35)$$

Ahol $p_i \cdot p_i = 0$ és $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ (6. ábra). Az utóbbi egyenletre jellegéből adódóan a következőkben „momentum megmaradásként” fogok hivatkozni. Fontos megjegyezni, hogy a szomszédos csúcsokra vonatkozó $V_i \cdot V_j = -L^2$ feltételek a null vektorokat felhasználva



6. ábra. Egy statikus húr szegmens (zöld téglalap) a Poincaré felső tér-rész modellben. A húr csúcsait a $V_1, V_2, V_3, V_4 \in AdS_3$ vektorok definiálják (fekete pontok a megfelelő címkékkel), míg éleit a p_1, p_2, p_3, p_4 null vektorok határozzák meg. Az élek által kijelölt egyenesek a t tengelyt az t_1, t_2, t_3, t_4 pontokban metszik.

a következő alakra hozhatók:

$$p_1 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1 = 0 \qquad p_2 \cdot V_3 = p_2 \cdot V_2 = 0 \qquad (36)$$

$$p_3 \cdot V_3 = p_3 \cdot V_4 = 0 \qquad p_4 \cdot V_4 = p_4 \cdot V_1 = 0 \qquad (37)$$

A húr szegmens N normál vektora szintén kifejezhető a V_1, p_1, p_4 vektorok segítségével:

$$N_a = \frac{\epsilon_{abcd} V_1^b p_1^c p_4^d}{p_1 \cdot p_4} \qquad (38)$$

Amely állandó a szegmens mentén.

Az előbbi definíció szemléletes, azonban a (31) mozgásegyenlet miatt valójában a húr szegmensek meghatározásához három adat: egy V_1 AdS_3 vektor, valamint két null vektor p_1 és p_4 illetve a következő határfeltétel kikötése is elég:

$$X(\sigma^-, 0) = V_1 + \sigma^- p_1 \qquad (39)$$

$$X(0, \sigma^+) = V_1 + \sigma^+ p_4 \qquad (40)$$

Ahol $\sigma^\pm \in [0,1]$ a húr pontjait jellemző paraméterek. A következőkben feltesszük, hogy $p_1 \cdot p_4 < 0$. A szegmens pontjait az úgynevezett interpolációs ansatz [7] határozza meg:

$$X(\sigma^-, \sigma^+) = \frac{L^2 + \sigma^- \sigma^+ \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4}{L^2 - \sigma^- \sigma^+ \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4} V_1 + L^2 \frac{\sigma^- p_1 + \sigma^+ p_4}{L^2 - \sigma^- \sigma^+ \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4} \quad (41)$$

Könnyen megmutatható, hogy $X(\sigma^-, \sigma^+)$ kielégíti az (31) mozgásegyenletet. A szegmens csúcsai ekkor:

$$V_2 = X(1,0) = V_1 + p_1 \quad (42)$$

$$V_4 = X(0,1) = V_1 + p_4 \quad (43)$$

$$V_3 = X(1,1) = \frac{L^2 + \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4}{L^2 - \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4} V_1 + \frac{L^2}{L^2 - \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4} (p_1 + p_4) \quad (44)$$

Valamint a p_2, p_3 vektorok:

$$p_2 = V_3 - V_2 = \frac{\frac{1}{2} p_1 \cdot p_4}{L^2 - \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4} \left(2V_1 + p_1 + \frac{2L^2}{p_1 \cdot p_4} p_4 \right) \quad (45)$$

$$p_3 = V_3 - V_4 = \frac{\frac{1}{2} p_1 \cdot p_4}{L^2 - \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4} \left(2V_1 + \frac{2L^2}{p_1 \cdot p_4} p_1 + p_4 \right) \quad (46)$$

Látható a $p_1 + p_2 = p_4 + p_3$ momentum megmaradás teljesül.

Fontos megjegyezni, hogy a szegmentált húr kifejezés megtévesztő, ugyanis a p_1, p_2, p_3, p_4 null vektorok segítségével valójában a világlepedőt daraboltuk fel. A világlepedőt besöprő húr szempontjából ez a szegmentálás úgy képzelhető el, mintha fénysebességgel haladó részecskék ütköznének a húron, miközben az mozog a téridőben. Ezen részecskék pályája fogja a világlepedőn azt a négyzetrácsos mintázatot megadni, ami az 5. ábrán látható.

3.2. Kauzalitási feltételek

A dolgozat további részében húr szegmensek egy speciális családját vizsgálom. Ebben az elrendezésben a húr csúcsait meghatározó $V_1, V_2, V_3, V_4 \in AdS_3$ és az oldalak mentén haladó p_1, p_2, p_3, p_4 null vektoroknak a következő feltételeket kell teljesíteniük:

1. $V_i^- > 0$ minden $i = 1, 2, 3, 4$ esetén. Ezen feltételt azért kötöm ki, hogy a csúcsok vektorai reprezentálhatók legyenek a Poincaré felső térrész modellben.

2. $p_i \cdot p_j < 0$ és $p_i^- p_j^- < 0$ minden szomszédos élre, hogy a szomszédos null vektorok által meghatározott Minkowski-tér beli pontok időszerűen szeparáltak legyenek.
3. $p_i \cdot p_j > 0$ és $p_i^- p_j^- > 0$ minden szemközti élre, hogy a szemközti null vektorok által meghatározott Minkowski-tér beli pontok időszerűen szeparáltak legyenek. Az előző feltétellel együtt ez azt jelenti, hogy a húr szegmens a felső térrész modellben időszerű.
4. Végül $p_1^0/p_1^- < p_3^0/p_3^- < p_4^0/p_4^- < p_2^0/p_2^-$, hogy a húr szegmens konvex legyen.

Fontos megjegyezni, hogy az (41) interpolációs ansatz miatt a feltételek nem mindegyike független. Például, ha $p_1 \cdot p_4 < 0$, akkor $p_1 \cdot p_2, p_4 \cdot p_3, p_2 \cdot p_3 < 0$ és $p_2 \cdot p_4, p_1 \cdot p_3 > 0$ automatikusan teljesül. Az A függelékben adok egy példát egy olyan húr szegmensre, amely teljesíti mind a négy feltételt. Ezen szegmensből az AdS_3 tér izometriáinak segítségével az összes hasonló elrendezés előállítható. Egy, a kauzalitási feltételeknek megfelelő szegmens látható a 6. ábrán.

3.3. Húr szegmensek területe

Egy V_1, p_1, p_4 vektorok által kifeszített húr szegmens területét a felület mentén indukált $g_{ab} = \partial_a X \cdot \partial_b X$ metrika meghatározásával számíthatjuk ki, ahol $a, b = \sigma^-, \sigma^+$. A szegmens pontjait a (41) interpolációs ansatz adja meg, amely alapján az indukált metrika komponensei:

$$g_{ab} = L^2 \frac{p_1 \cdot p_4}{(L^2 - \sigma^- \sigma^+ \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4)^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

A húr területét a következő felületi integrál kiszámításával kaphatjuk meg:

$$A = L^2 \int_0^1 d\sigma^- \int_0^1 d\sigma^+ \sqrt{-g} \quad (48)$$

Ahol $g = \det g_{ab}$. Rövid számítással megmutatható, hogy a szegmens területe ekkor:

$$A = L^2 \log \left(\frac{L^2 - \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4}{L^2} \right)^2 \quad (49)$$

Definiáljuk ekkor a $p_2 = V_3 - (V_1 + p_1)$ és $p_3 = V_3 - (V_1 + p_4)$ null vektorokat, ahol $V_3 = X(1,1)$. (45)-t és a $p_1 \cdot V_1 = p_4 \cdot V_1$, $V_1 \cdot V_1 = -L^2$ feltételeket felhasználva egyszerűen

megmutatható, hogy:

$$p_1 \cdot p_2 = L^2 \frac{p_1 \cdot p_4}{L^2 - \frac{1}{2}p_1 \cdot p_4} \quad (50)$$

Mivel $p_1 \cdot p_1 = p_2 \cdot p_2 = p_4 \cdot p_4 = 0$ ez a formula átírható a következő alakra:

$$\frac{L^2 - \frac{1}{2}p_1 \cdot p_4}{L^2} = -\frac{(p_1 - p_4)^2}{(p_1 + p_2)^2} \quad (51)$$

Vagyis a húr szegmens területe globális koordinátákban:

$$A = L^2 \log \left(\frac{(p_1 - p_4)^2}{(p_1 + p_2)^2} \right)^2 \quad (52)$$

Végül a $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ momentum megmaradást felhasználva kapjuk, hogy:

$$A = L^2 \log \frac{(p_1 - p_4)^2 (p_3 - p_2)^2}{(p_1 + p_2)^2 (p_3 + p_4)^2} = L^2 \log \frac{(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)}{(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)} \quad (53)$$

Amely formula tehát megadja a p_1, p_2, p_3, p_4 null vektorok által kifeszített húr szegmens területét AdS_3 globális koordinátákban.

3.4. Statikus szegmensek a Poincaré modellben

A szegmentált húrok területeire kapott eredményeket tovább vizsgálhatjuk a Poincaré felső térrész modellben. Ebben a fejezetben továbbra is az $x = 0$ esetet vizsgáljuk, amely a konstans, $N = (0,0,0,1)$ normál vektorú húr megoldást adja. Ekkor bevezetve a (4) Poincaré koordinátákat egy AdS_3 belüli $X = (X^{-1}, X^0, X^1, 0)$ pont felső térrész belüli z és t koordinátái:

$$z = L \frac{L}{X^-}, \quad t = L \frac{X^0}{X^-} \quad (54)$$

A következőkben egy szemléletes geometriai módszerrel megmutatom, hogy egy szegmens területe hogyan fejezhető ki a definiáló null vektorok Poincaré koordinátái segítségével. Definiáljuk azokat az $e_i : z = \alpha_i t + \beta_i$ egyeneseket, amelyek áthaladnak azon V_a és V_b pontok felső térrész belüli megfelelőjén, amelyekre $p_i = V_b - V_a$. Például az $e_1 : z = \alpha_1 t + \beta_1$ egyenes α_1 és β_1 paramétereit úgy határozhatjuk meg, hogy az egyenes

áthalad a következő pontokon:

$$(z_1, t_1) = L \left(\frac{L}{V_1^-}, \frac{V_1^0}{V_1^-} \right) \quad \text{és} \quad (z_2, t_2) = L \left(\frac{L}{V_2^-}, \frac{V_2^0}{V_2^-} \right) \quad (55)$$

Hosszas algebrai átalakítások után belátható, hogy α_1 és β_1 :

$$\alpha_1 = L \frac{V_2^- - V_1^-}{V_1^0 V_2^- - V_2^0 V_1^-} \quad (56)$$

$$\beta_1 = L^2 \frac{V_1^0 - V_2^0}{V_1^0 V_2^- - V_2^0 V_1^-} \quad (57)$$

Definiáljuk ekkor a t_i mennyiséget, amely az e_i egyenes t tengellyel való metszéspontjának t koordinátája (6. ábra). Az egyenes egyenlete alapján $t_i = -\beta_i/\alpha_i$. Az a_1 koordinátára például azt kapjuk, hogy:

$$t_1 = L \frac{V_2^0 - V_1^0}{V_2^- - V_1^-} = L \frac{p_1^0}{p_1^-} \quad (58)$$

Hasonlóan a többire:

$$t_i = L \frac{p_i^0}{p_i^-} \quad (59)$$

Vagyis t_i valójában a p_i null vektor időszerű Poincaré koordinátája. Kihasználva, hogy $t_i \cdot t_i = 0$ és, hogy $t_i^2 = 0$ kifejezhetjük a t_i vektorok koordinátáit az t_i mennyiségekkel:

$$\frac{p_i^0}{p_i^-} = \frac{t_i}{L}, \quad \frac{p_i^{-1}}{p_i^-} = -\frac{L^2 - t_i^2}{2L^2}, \quad \frac{p_i^1}{p_i^-} = \frac{L^2 + t_i^2}{2L^2} \quad (60)$$

Mostmár kifejezhetők a szegmens területére kapott (53) formulában szereplő $(p_i \pm p_j)^2$ kombinációk az t_i metszéspontok segítségével. Kihasználva ismét, hogy $p_i \cdot p_i = 0$ és $p_i^2 = 0$:

$$\frac{(p_i \pm p_j)^2}{p_i^- p_j^-} = \pm \frac{1}{L^2} (t_i - t_j)^2 \quad (61)$$

Az (53) logaritmusának argumentumát bővítve $(p_1^1 - p_1^{-1})(p_2^1 - p_2^{-1})(p_3^1 - p_3^{-1})(p_4^1 - p_4^{-1})$ -tel kapjuk, hogy a szegmens területe Poincaré koordinátákban [1]:

$$A = 2L^2 \log \left| \frac{(t_4 - t_1)(t_3 - t_2)}{(t_4 - t_3)(t_2 - t_1)} \right| \quad (62)$$

Vegyük észre, hogy ez a kifejezés a következő alakú tagok összegének és különbségének a kombinációjaként áll elő:

$$A(ij) = 2L^2 \log \left| \frac{p_i^0}{p_i^-} - \frac{p_j^0}{p_j^-} \right| \quad (63)$$

3.5. Ryu-Takayanagi összefüggés szegmentált húrokra

Láttuk, hogy a statikus, AdS_3 belüli, U és V null vektorok által meghatározott egydimenziós minimális felületeket felületek felszíne a következőképpen számítható ki:

$$A_{\min}(U, V) = 2L \log \frac{L}{\delta} \left| \frac{U^0}{U^-} - \frac{V^0}{V^-} \right| \quad (64)$$

A (25) Ryu-Takayanagi formula alapján ez arányos a tér határán élő, konform térelmélet belüli, a minimális felülettel homológ részrendszer összefonódottsági entrópiájával, vagyis:

$$S(U, V) = \frac{A_{\min}}{4G^{(3)}} = \frac{L}{2G^{(3)}} \log \frac{L}{2\delta} \left| \frac{U^0}{U^-} - \frac{V^0}{V^-} \right| \quad (65)$$

Láttuk azt is, hogy egy p_1, p_2, p_3, p_4 null vektorok által kifeszített, $N = (0, 0, 0, 1)$ normál vektorral rendelkező húr szegmens területe a következő:

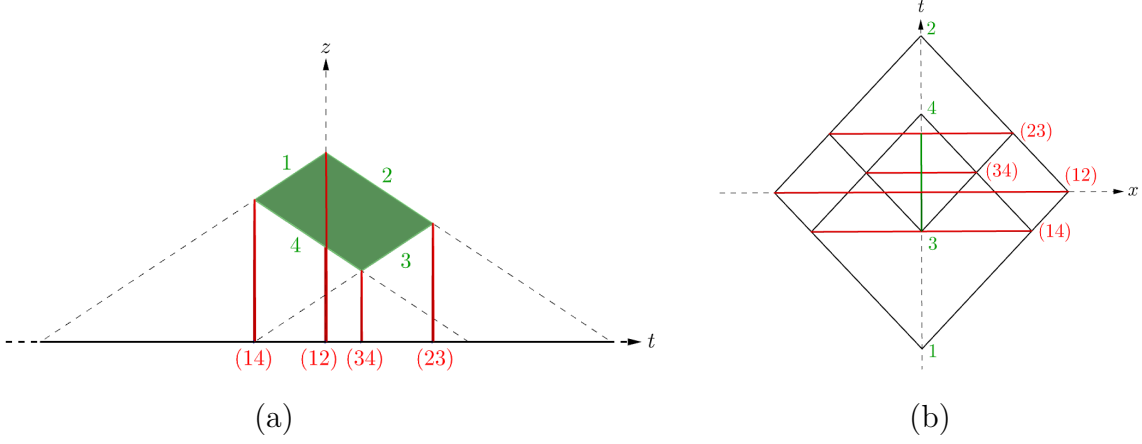
$$A = A(14) + A(23) - A(34) - A(12) \quad (66)$$

Ahol:

$$A(ij) = 2L^2 \log \left| \frac{p_i^0}{p_i^-} - \frac{p_j^0}{p_j^-} \right| \quad (67)$$

Hasonlítsuk össze ezt a kifejezést a (65) egyenlettel. Látható, hogy a szegmens területe hasonló, logaritmikus tagok összegeként áll elő, mint amit a határ vákuum állapotú CFT részrendszerének összefonódottságára kaptunk. Ennek köszönhetően a felírható egy, a Ryu-Takayanagi összefüggéshez hasonló formula, ebben az esetben azonban az AdS_3 -ban terjedő statikus, időszerű húr szegmens területe és a határ bizonyos részrendszereinek összefonódottsági entrópiája között.

A kapcsolat precízen a következő: Tekintsünk egy AdS_3 belüli statikus ($X^2 = 0$) húr szegmenst, amelynek csúcsait a $V_1, V_2, V_3, V_4 \in AdS_3$ vektorok határozzák meg. A húr éleit



7. ábra. Egy AdS_3 beli statikus húr szegmens (zöld téglalap) 1,2,3,4 élei a Poincaré modellben kúpokat határoznak meg. Ezek az (a) ábrán szürke, szaggatott vonalak, a (b) ábrán pedig fekete vonalak. A (b) ábrán a kúpok középpontjait a megfelelő számok jelölik. A kúpok metszetei statikus, térszerű minimális felületeket jelölnek ki (piros szakaszok). Ezeket a definiáló kúpoknak megfelelően az (12),(14),(23),(34) számpárosok jelölik. A szegmens csúcsai ezeken a minimális felületeken helyezkednek el.

meghatározó null vektorok:

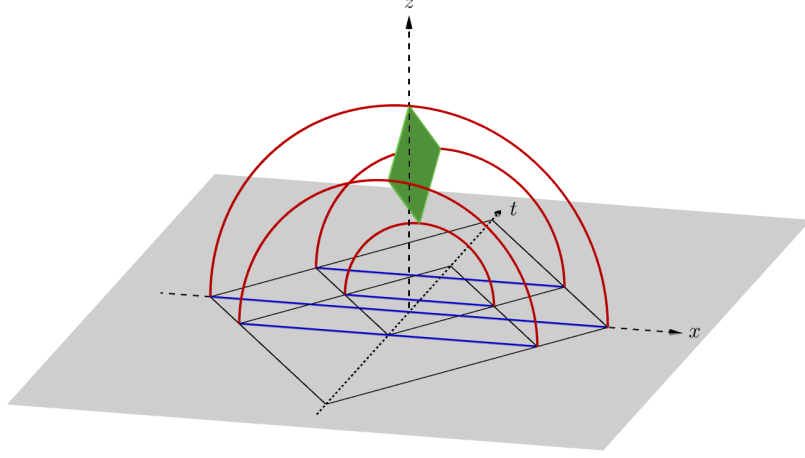
$$p_1 = V_2 - V_1 \qquad p_2 = V_3 - V_2 \qquad (68)$$

$$p_3 = V_3 - V_4 \qquad p_4 = V_4 - V_1 \qquad (69)$$

Tekintsük ekkor azokat az $X \in AdS_3$ vektorokat, amelyekre $p_i \cdot X = 0$ (7. ábra). Ez a négy kényszer négy darab kúpot határoz meg a felső térrész modellben. Mivel $X^{-1} = 0$ (így $x = 0$), ezért ezen kúpok egyenletei a következő alakúak:

$$z^2 - \left(t - L \frac{p_i^0}{p_i^-} \right)^2 + (x - x_0)^2 = 0 \qquad (70)$$

Ezek középpontjai az AdS tér $z = 0$ határán helyezkednek el, Minkowski tér beli koordinátáik pedig $t_i = L \frac{p_i^0}{p_i^-}$, $x_i = 0$. A p_i null vektorok definíciója és a $p_i \cdot X = 0$ kényszerek alapján egyszerűen látszik, hogy a húr csúcsai ezeken a kúpon fekszenek. A definí-



8. ábra. A húr szegmensek és az összefonódottság közötti kapcsolat szemléltetése statikus esetben. Ez a 7. (a) és (b) ábra háromdimenziós változata. A statikus húr szegmens (zöld téglalap) csúcsai az éleit jellemző p_i null vektorok által meghatározott minimális felületeken (piros körívek) helyezkednek el. Ezen minimális felületek képei a határon (szürke sík) részrendszereket jelölnék ki (kék intervallumok). A részrendszerek kauzális gyémántjait (fekete gyémántok, amelyek a $p_i \cdot X$ kúpok határai) szintén a szegmens éleit jellemző p_i null vektorok határozzák meg. A szegmens területe arányos a kék részrendszerek összefonódottsági entrópiáinak (73) kombinációjával.

ció alapján látszik, hogy mindegyik csúcs pontosan két különböző kúpon helyezkedik el, vagyis rajta van a két kúp metszete által meghatározott minimális felületen!

Ha feltesszük a 3.2. fejezetben említett feltételeket, akkor a p_i vektorok által meghatározott kúpok metszetei térszerű minimális felületeket definálnak, amelyek a duális CFT képben részrendszereket jelölnék ki (7. és 8. ábra). A minimális felületek egyenletei:

$$z^2 + x^2 = \frac{L^2}{4} \left(\frac{p_i^0}{p_i^-} - \frac{p_j^0}{p_j^-} \right)^2 \quad (71)$$

Amelyek félkörívek a felső térrész modellben. Statikus esetben a V_i csúcsok ezen félkörívek legfelső pontjai. A félkörívek területei (hossza) a Ryu-Takayanagi összefüggésen keresztül megadják a minimális felülettel homológ CFT részrendszerek (intervallumok) összefonódottsági entrópiáját. A p_i és p_j vektrok által meghatározott minimális felülettel

homológ CFT részrendszer összefonódottsági entrópiája:

$$S(ij) = \frac{c}{3} \log \frac{L}{2\delta} \left| \frac{p_i^0}{p_i^-} - \frac{p_j^0}{p_j^-} \right| \quad (72)$$

Innen már könnyen látható, hogy a húr szegmens területe előállítható az $p_1, p_4, p_2, p_3, p_3, p_4$ és p_1, p_2 null vektor párosok által definiált minimális felületek felszíneinek, valamint CFT részrendszerek összefonódottsági entrópiáinak kombinációjaként, vagyis:

$$\begin{aligned} A &= L(A_{\min}(14) + A_{\min}(23) - A_{\min}(34) - A_{\min}(12)) = \\ &= 4G^{(3)}L(S(14) + S(23) - S(34) - S(12)) \end{aligned} \quad (73)$$

Ez a dolgozat legfontosabb eredménye, amely azt fejezi ki, hogy térszerű CFT részrendszerek vákuum állapot összefonódottsága az AdS/CFT elrendezésben kapcsolatban áll az AdS térben terjedő időszerű, szegmentált húrok geometriájával. A kapcsolat két oldalát geometriailag a Ryu-Takayanagi összefüggésen keresztül az AdS tér minimális felületei kötik össze (7. és 8. ábra).

3.5.1. Kölcsönös feltételes információ

A (73) egyenlet jobb oldalának $S(14) + S(23) - S(34) - S(12)$ kombinációja egy jól ismert információelméleti mennyiségként fogható föl, mégpedig úgynevezett kölcsönös feltételes információként. A 3.2. fejezet 2. és 3. feltétele alapján a húr szegmens oldalait meghatározó p_1, p_2, p_3, p_4 null vektorok közül az 1-es és 4-es null vektorhoz tartozó kúpok határai, illetve a 2-eshez és 3-ashoz tartozó kúpok határai két, időszerűen szeparált kauzális gyémántot határoznak meg a CFT képben. Jelöljük az 1,4 kúpok által kifestített gyémántban található részrendszert A -val, a 2,3 által kifestítettet pedig B -vel. A 3.2. fejezet 4. feltétele alapján:

$$p_1^0/p_1^- < p_3^0/p_3^- < p_4^0/p_4^- < p_2^0/p_2^- \quad (74)$$

Vagyis A és B metszik egymást. Az $S(ij)$ összefonódottsági entrópiákat így átcímkezhettük a következő módon:

$$S(14) = S(A), \quad S(23) = S(B), \quad S(12) = S(A \cup B), \quad S(34) = S(A \cap B) \quad (75)$$

Ahol A és B az 14 és 23 részrendszereket jelölik, $A \cup B$ azt a részrendszert, amelyet A és B kauzális gyémántjainak közös kiterjesztése határoz meg, míg $A \cap B$ a metszetük által meghatározott tartomány. Ekkor tehát felírhatjuk a következőt:

$$S(14) + S(23) - S(34) - S(12) = S(A) + S(B) - S(A \cup B) - S(A \cap B) \quad (76)$$

Ez a mennyiség az úgynevezett kölcsönös feltételes információ, amely az A és B részrendszerekből kinyerhető közös információról ad számot. [13] alapján bevezetve az $F(14,23) = F(A,B) = S(A) + S(B) - S(A \cup B) - S(A \cap B)$ jelölést a húr szegmens területére kapjuk, hogy:

$$A = 4G^{(3)}LF(14,23) \quad (77)$$

Vagyis a szegmentált húr területe a duális CFT képben egy kölcsönös feltételes információt határoz meg.

4. fejezet

Ryu-Takayanagi formula általános helyzetű AdS_3 húr szegmensekre

Ebben a fejezetben tovább vizsgálom az AdS_3/CFT_2 esetet tetszőleges, nem statikus szegmentált húrokkal és megmutatom, hogy az előző fejezetben levezetett összefüggés általános esetben is fennáll.

4.1. Minimális felületek

Válasszunk két p_i és p_j null vektort, amelyek a Poincaré modellben egy-egy kúpot határoznak meg a $p_i \cdot X = p_j \cdot X = 0$ kényszereken keresztül. A kúpok egyenlete Poincaré koordinátákkal kifejezve:

$$z^2 - \left(t - L \frac{p_i^0}{p_i^-}\right)^2 + \left(x - L \frac{p_i^2}{p_i^-}\right)^2 = 0 \quad (78)$$

$$z^2 - \left(t - L \frac{p_j^0}{p_j^-}\right)^2 + \left(x - L \frac{p_j^2}{p_j^-}\right)^2 = 0 \quad (79)$$

Ezen kúpok metszete egy AdS_3 belüli egydimenziós minimális felületet határoz meg. Defináljuk a következő vektort:

$$(\Delta^0, \Delta^1) := L \left(\frac{p_i^0}{p_i^-} - \frac{p_j^0}{p_j^-}, \frac{p_i^2}{p_i^-} - \frac{p_j^2}{p_j^-} \right) \quad (80)$$

Amely a két kúp középpontjának különbség vektora. Hosszas algebrai átalakításokkal megmutatható, hogy a (78) egyenleteket összeadva és kivonva a minimális felület mentén

a z és x , valamint a t és x koordináták között a következő összefüggések írhatók fel:

$$z^2 + \frac{4R^2}{(\Delta^0)^2}(x - x_0)^2 = R^2, \quad t = \frac{\Delta^1}{\Delta^0}x + t_0 \quad (81)$$

Ahol:

$$R^2 = \frac{1}{4}((\Delta^0)^2 - (\Delta^1)^2) = \frac{L^2}{4} \left\{ \left(\frac{p_i^0}{p_i^-} - \frac{p_j^0}{p_j^-} \right)^2 - \left(\frac{p_i^2}{p_i^-} - \frac{p_j^2}{p_j^-} \right)^2 \right\} \quad (82)$$

Valamint:

$$x_0 = \frac{L}{2} \left(\frac{p_i^2}{p_i^-} + \frac{p_j^2}{p_j^-} \right), \quad t_0 = \frac{L}{2} \left(\frac{p_i^0}{p_i^-} + \frac{p_j^0}{p_j^-} \right) \quad (83)$$

A két egyenlet egy (t_0, x_0) középpontú ellipszist határoz meg a $t(x)$ összefüggés által meghatározott síkban. A minimális felületet tehát a következőképpen paraméterezhetjük:

$$\left. \begin{aligned} z &= R \cos \Theta \\ x &= \frac{1}{2} \Delta^0 \sin \Theta + x_0 \\ t &= \frac{1}{2} \Delta^1 \sin \Theta + t_0 \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Az indukált metrika kiszámításával és egy $z > \delta$, $\delta \gg R$ cutoff bevezetésével a minimális felület felszínére a következő adódik:

$$A_{\min}(ij) = 2L \log \frac{2R}{\delta} = L \log \frac{L^2}{\delta^2} \left\{ \left(\frac{p_i^0}{p_i^-} - \frac{p_j^0}{p_j^-} \right)^2 - \left(\frac{p_i^2}{p_i^-} - \frac{p_j^2}{p_j^-} \right)^2 \right\} \quad (85)$$

Amely $x = 0$ esetben visszaadja a területre kapott korábbi formulát.

A kapott eredményt tovább alakíthatjuk az úgynevezett spinor formalizmus felhasználásával [1]. Definiáljuk a $\sigma^\mu = (i\sigma_2, -1, \sigma_1, \sigma_3)$ vektort (ahol $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ a Pauli-mátrixok) és tetszőleges p null vektor spinor reprezentációját $P^{a\dot{a}} = \sigma_{a\dot{a}}^\mu p_\mu$, amely mátrix alakban kifejtve:

$$P = \begin{pmatrix} p^0 + p^2 & p^1 + p^{-1} \\ p^1 - p^{-1} & p^0 - p^2 \end{pmatrix} \quad (86)$$

Mivel $\det(P) = p \cdot p = 0$, P felírható két vektor diadikus szorzataként, vagyis:

$$P^{a\dot{a}} = L \lambda^a \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \quad (87)$$

4. FEJEZET. RYU-TAKAYANAGI FORMULA ÁLTALÁNOS HELYZETŰ AdS_3 HÚR SZEGMENSEKRE

Ahol a felső index a vektor komponensét jelöli. λ^a -t balra haladó, $\tilde{\lambda}^{\dot{a}}$ -t jobbra haladó spinornak hívjuk. Megmutatható, hogy a spinor komponensek arányaira fennáll, hogy:

$$\frac{\lambda^1}{\lambda^2} = \frac{p^0 + p^2}{p^-}, \quad \frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\lambda}^1} = \frac{p^0 - p^2}{p^-} \quad (88)$$

A továbbiakban az első hányadosra bevezetem az a/L , a másodikra pedig az $\tilde{a}/L$ jelölést.

A spinor formalizmust felhasználva tehát egy p_i és p_j null vektorok által meghatározott minimális felület méretét jellemző R mennyiségre kapjuk, hogy:

$$R^2 = \frac{L^2}{4} \left(\frac{\lambda_i^1}{\lambda_i^2} - \frac{\lambda_j^1}{\lambda_j^2} \right) \left(\frac{\tilde{\lambda}_i^2}{\tilde{\lambda}_i^1} - \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{\tilde{\lambda}_j^1} \right) \quad (89)$$

Így a felület felszíne:

$$\begin{aligned} A_{\min}(ij) &= L \log \frac{L}{\delta} \left(\frac{\lambda_i^1}{\lambda_i^2} - \frac{\lambda_j^1}{\lambda_j^2} \right) + L \log \frac{L}{\delta} \left(\frac{\tilde{\lambda}_i^2}{\tilde{\lambda}_i^1} - \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{\tilde{\lambda}_j^1} \right) = \\ &= L \log \frac{1}{\delta} |a_i - a_j| + L \log \frac{1}{\delta} |\tilde{a}_i - \tilde{a}_j| \end{aligned} \quad (90)$$

Vegyük észre, hogy a balra és a jobbra mozgó komponensek szeparálódnak, vagyis: $A_{\min} = A_{\min}^L + A_{\min}^R$.

A Ryu-Takayanagi összefüggést felhasználva, a minimális felület nagyságából kiindulva meghatározhatjuk a felülettel homológ, vákuum állapotú CFT részrendszer összefonódottsági entrópiáját, amelyre a következő adódik:

$$S(ij) = \frac{L}{4G^{(3)}} \log \frac{|a_i - a_j|}{\delta} + \frac{L}{4G^{(3)}} \log \frac{|\tilde{a}_i - \tilde{a}_j|}{\delta} \quad (91)$$

Amely ismét szétesik balra- és jobbra-mozgó komponensekre.

Fontos megjegyezni, hogy az AdS_3 tér $SO(2,2)$ szimmetria csoportja a spinor formalizmusban felbomlik $SL(2)_L \times SL(2)_R$ szimmetriára [14], ahol az $SL_L(2)$ csoport a balra-mozgó λ , az $SL_R(2)$ csoport pedig a jobbra-mozgó $\tilde{\lambda}$ spinorokon hat külön-külön. Egy $SL(2)$ transzformáció egy λ vektoron a következő módon hat:

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad (92)$$

Vagyis a a következőképpen transzformálódik:

$$a' = L \frac{\frac{\alpha}{L}a + \beta}{\frac{\gamma}{L}a + \delta} \quad (93)$$

Amely egy Möbius transzformáció. Ez hasonlóan igaz az $\tilde{a}$ mennyiségekre is. a és $\tilde{a}$ null koordinátákat határoznak meg a $\partial_\infty AdS_3$ Minkowski térben. Megmutatható, hogy a Minkowski tér globális konform transzformációi az a és $\tilde{a}$ mennyiségeken Möbius transzformációkként hatnak. Mivel az AdS tér minimális felületei csak az a -tól, $\tilde{a}$ -tól függenek, ezért a határ konform transzformációi kapcsolatba hozhatók a duális minimális felületek deformációival. Közvetlen térelméleti számításokkal megmutatható [8], hogy az entrópia tetszőleges (globális és nem globális) $a \rightarrow f(a)$ és $\tilde{a} \rightarrow \tilde{f}(\tilde{a})$ konform transzformációk alatt a következőképpen változik [8]:

$$S(ij) = \frac{L}{8G^{(3)}} \log \frac{(f(a_i) - f(a_j))^2}{\delta^2 f'(a_i) f'(a_j)} + \frac{L}{8G^{(3)}} \log \frac{(\tilde{f}(\tilde{a}_i) - \tilde{f}(\tilde{a}_j))^2}{\delta^2 \tilde{f}'(\tilde{a}_i) \tilde{f}'(\tilde{a}_j)} \quad (94)$$

A lokális konform transzformációk a CFT nyelvén a vákuum állapot gerjesztéseivel állnak kapcsolatban. A spinor formalizmusnak köszönhetően tehát a későbbiekben lehetőség nyílik a minimális felületek transzformációinak és a CFT vákuum gerjesztéseinek összekapcsolására.

4.2. Húr szegmensek és a Ryu-Takayanagi megfelelés

Láttuk, hogy egy p_1, p_2, p_3, p_4 null vektorok által kifeszített húr szegmens területét általános esetben a következő formula határozza meg:

$$A = L^2 \log \left[\frac{(p_1 - p_4)^2}{(p_1 + p_2)^2} \right]^2 = L^2 \log \frac{(p_1 - p_4)^2 (p_2 - p_3)^2}{(p_1 + p_2)^2 (p_3 + p_4)^2} \quad (95)$$

Mivel az (41) felhasználásával vezettük le a kifejezést, valamint a formula $SO(2,2)$ invariáns, így tetszőleges $x \neq \text{const.}$ elrendezés esetén teljesül. A spinor formalizmust ismét használhatjuk a kifejezés tovább alakítására [1]. Definiáljuk egy tetszőleges p null vektorhoz a következő mátrixot:

$$P = \begin{pmatrix} p^0 + p^2 & p^1 + p^{-1} \\ p^1 - p^{-1} & p^0 - p^2 \end{pmatrix} \quad (96)$$

4. FEJEZET. RYU-TAKAYANAGI FORMULA ÁLTALÁNOS HELYZETŰ AdS_3 HÚR SZEGMENSEKRE

Mivel $\det(P) = p \cdot p = 0$, így a mátrix felírható két vektor diadikus szorzataként:

$$P^{a\dot{a}} = L\lambda^a \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \quad (97)$$

Definiáljuk a következő $SO(2,2)$ invariáns spinor belső szorzatokat a balra-, illetve jobbra-mozgó vektorokra:

$$\langle \lambda, \chi \rangle := \lambda^T \epsilon \chi, \quad [\tilde{\lambda}, \tilde{\chi}] := \tilde{\lambda}^T \epsilon \tilde{\chi} \quad (98)$$

Könnyű belátni, hogy ekkor a húr szegmens területe a következő alakba írható:

$$A = L^2 \log \left(\frac{\langle \lambda_1, \lambda_4 \rangle [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_4]}{\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2]} \right)^2 \quad (99)$$

Felhasználhatjuk ekkor a $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ momentum megmaradást, amely spinor alakban a következő [1]:

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} = 0 \quad (100)$$

Ahol az alsó index a null vektorok címkéjét, a felső pedig a spinor komponensét jelölik. Ekkor tehát:

$$A = L^2 \log \left| \frac{\langle \lambda_1, \lambda_4 \rangle \langle \lambda_2, \lambda_3 \rangle}{\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \langle \lambda_3, \lambda_4 \rangle} \right| + L^2 \log \left| \frac{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_4] [\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3]}{[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2] [\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_4]} \right| \quad (101)$$

A spinor belső szorzatok definícióját felhasználva és a logaritmusban szereplő hányadosokat rendre $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \lambda_4^2$ -vel és $\tilde{\lambda}_1^1 \tilde{\lambda}_2^1 \tilde{\lambda}_3^1 \tilde{\lambda}_4^1$ -gyel bővítve a szegmens területe [1]:

$$A = L^2 \log \left| \frac{(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)} \right| + L^2 \log \left| \frac{(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_4)(\tilde{a}_2 - \tilde{a}_3)}{(\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2)(\tilde{a}_3 - \tilde{a}_4)} \right| \quad (102)$$

Ahol:

$$a_i = L \frac{\lambda_i^1}{\lambda_i^2} = \frac{p_i^0 + p_i^2}{p_i^-}, \quad \tilde{a}_i = L \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{\tilde{\lambda}_i^1} = \frac{p_i^0 - p_i^2}{p_i^-} \quad (103)$$

Vegyük észre, hogy a szegmens területe is szétesik egy balra- és egy jobbra-mozgó részre.

Mostmár könnyű látni, hogy az általános AdS_3 esetben is teljesül a húr szegmens területe és a megfelelő minimális felületek nagysága közötti összefüggés:

$$A = L(A_{\min}(14) + A_{\min}(23) - A_{\min}(34) - A_{\min}(12)) \quad (104)$$

Ahol a szegmens csúcsait jellemző V_i vektorok ismét a minimális felületeken helyezkednek el a következő kényszerek miatt:

$$p_1 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1 = 0 \qquad p_2 \cdot V_3 = p_2 \cdot V_2 = 0 \qquad (105)$$

$$p_3 \cdot V_3 = p_3 \cdot V_4 = 0 \qquad p_4 \cdot V_4 = p_4 \cdot V_1 = 0 \qquad (106)$$

A Ryu-Takayanagi összefüggést felhasználva a kapcsolat továbbra sem csak a húr szegmens és a minimális felületek között áll fenn, hanem a határ részrendszereinek összefonódottságára is:

$$A = 4G^{(3)}L(S(14) + S(23) - S(34) - S(12)) \qquad (107)$$

Vagyis a levezetett összefüggéseink az általános AdS_3 esetben teljesülnek (9. ábra). Ismét bevezethetjük a $F(14,23) = S(14) + S(23) - S(34) - S(12)$ kölcsönös feltételes információt. Ekkor tehát általános elhelyezkedésű esetben is a szegmens területe:

$$A = 4G^{(3)}LF(14,23) \qquad (108)$$

Megegyezik a megfelelő részrendszerek kölcsönös feltételes információival.

A balra- és jobbra-mozgó tagok szeparálása miatt a dualitás a két komonensre külön külön fennáll, vagyis:

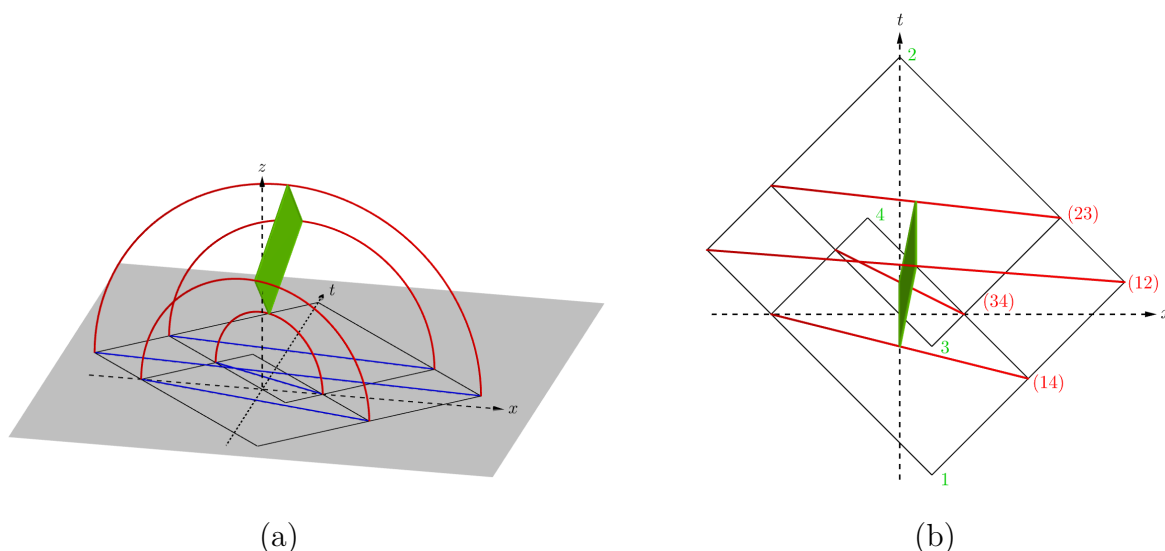
$$\begin{aligned} A^{L/R} &= L(A_{\min}^{L/R}(14) + A_{\min}^{L/R}(23) - A_{\min}^{L/R}(34) - A_{\min}^{L/R}(12)) = \\ &= 4G^{(3)}L(S^{L/R}(14) + S^{L/R}(23) - S^{L/R}(34) - S^{L/R}(12)) \end{aligned} \qquad (109)$$

Fontos megjegyezni, hogy mivel a szegmens területe is csak az a és $\tilde{a}$ mennyiségektől függ, amelyek a határ konform transzformációinak megfelelően transzformálódnak, így a későbbiekben lehetőség nyílhat a szegmentált húrok és az összefonódottság kapcsolatának vizsgálatára a CFT vákuum gerjesztése esetén.

Végül egy táblázatban összefoglaltam, hogy a dolgozat eredményei az AdS_3/CFT_2 megfelelésben melyik elmélet melyik mennyiségei állnak kapcsolatban: Az első oszlop

	Elmélet	Objektum	Mennyiség
	AdS	Szegmentált húr	Felszín: A
	AdS	Minimális felületek	Felszínek: $A_{\min}$
	CFT	Részrendszerek	Kölcsönös feltételes információ: G

színei a 7., 8. és 9. ábrákon látható különböző objektumok színeit reprezentálják.



9. ábra. A 7. és 8. ábra nem statikus megfelelője. Egy AdS_3 beli tetszőleges helyzetű húr szegmens (zöld téglalap) 1,2,3,4 élei a Poincaré modellben kúpokat határoznak meg. A (b) ábrán a kúpok középpontjait a megfelelő számok jelölik. A kúpok metszetei, térszerű minimális felületeket jelölnek ki ((a) ábra piros körívei és (b) ábra piros szakaszai). Ezeket a definiáló kúpoknak megfelelően az (12),(14),(23),(34) számpárosok jelölik. A szegmens csúcsai ezeken a minimális felületeken helyezkednek el. A felületek képei a határon ((a) ábra szürke sík) részrendszereket jelölnek ki ((a) ábra kék intervallumok). A részrendszerek kauzális gyémántjait ((a) és (b) ábra fekete gyémántok, amelyek a $p_i \cdot X$ kúpok határai) szintén a szegmens éleit jellemző p_i null vektorok határozzák meg. A szegmens területe arányos a kék részrendszerek összefonódottsági entrópiáinak (107) kombinációjával.

5. fejezet

Dualitás a húrok és az összefonódás között

Ebben a fejezetben tovább vizsgálom az előző fejezetekben levezetett kapcsolatot és mutatok néhány példát, hogy az összefüggés hogyan alkalmazható, hogy egy szótárat állítsunk fel az AdS beli szegmentált húrok és a határ összefonódottsága között.

5.1. Pozitivitás és az erős szubadditivitás

Az első és legfontosabb ilyen példa az erős szubadditivitás, amely a szegmens területének pozitivitásából (és vissza) egyértelműen következik.

Tegyük fel, hogy egy húr szegmenst a p_1, p_2, p_3, p_4 null vektorok határolják. Ekkor a területe:

$$A = L^2 \log \frac{(p_1 - p_4)^2 (p_3 - p_2)^2}{(p_1 + p_2)^2 (p_3 + p_4)^2} = L^2 \log \left[\frac{(p_1 - p_4)^2}{(p_1 + p_2)^2} \right]^2 \quad (110)$$

Láttuk, hogy amennyiben a 3.2. fejezetben említett megkötések teljesülnek, akkor a Ryu-Takayanagi összefüggés miatt a határ részrendszereinek entrópiái és a szegmens területei között a következő összefüggés áll fenn:

$$A = 4G^{(3)} L (S(14) + S(23) - S(34) - S(12)) \quad (111)$$

Ahol $S(ij)$ azon részrendszer összefonódottsági entrópiája, amelyet a p_i és p_j null vektorok által definiált kúpok metszetének határon vett képe határoz meg. A szegmens területére

azonban ki kell kötnünk, hogy pozití legyen, vagyis:

$$A \geq 0 \iff |p_1 - p_4| \geq |p_1 + p_2| \quad (112)$$

Az összefonódottsági entrópiák nyelvén ez a következő megkötést vonzza magával:

$$S(14) + S(23) - S(34) - S(12) \geq 0 \quad (113)$$

A 3.6. fejezetben láttuk, hogy amennyiben:

$$p_1^0/p_1^- < p_3^0/p_3^- < p_4^0/p_4^- < p_2^0/p_2^- \quad (114)$$

Akkor bevezethetjük a következő jelöléseket:

$$S(14) = S(A), \quad S(23) = S(B), \quad S(12) = S(A \cup B), \quad S(34) = S(A \cap B) \quad (115)$$

Ahol A és B az 14 és 23 részrendszereket jelölik, $A \cup B$ azt a részrendszert, amelyet A és B kauzális gyémántjainak közös kiterjesztése határoz meg, míg $A \cap B$ a metszetük által meghatározott tartomány. Ekkor tehát felírhatjuk a következőt:

$$S(14) + S(23) - S(34) - S(12) = S(A) + S(B) - S(A \cup B) - S(A \cap B) \quad (116)$$

Amely éppen az úgynevezett $F(A,B)$ kölcsönös feltételes információt adja. A terület pozitivitása miatt elvárjuk, hogy:

$$F(A,B) = S(A) + S(B) - S(A \cup B) - S(A \cap B) \geq 0 \quad (117)$$

Ez éppen az információelméletből jól ismert erős szubadditivitás [16], amely szemléletesen azt fejezi ki, hogy ha nagyobb részrendszeren végzünk mérést, akkor azzal csökkentjük a részrendszerekkel kapcsolatos bizonytalanságunkat.

Látható tehát, hogy a szegmentált húrok területeinek pozitivitása és az erős szubadditivitás kölcsönösen következnek egymásból.

5.2. Az interpolációs ansatz következményei

Ahogy korábban láttuk a egy húr szegmens pontjainak ki kell elégíteniük a (31) mozgás egyenletet. Ez azt jelenti, hogy a szegmenst egyértelműen meghatározza három adat: az egyik csúcsának $V_1 \in AdS_3$ vektora, valamint két, p_1 és p_4 null vektor. Ekkor a maradék három csúcsának vektorai kifejezhetők a kezdeti adatok segítségével, vagyis $V_2 = V_1 + p_1$, $V_4 = V_1 + p_4$, valamint az (41) interpolációs ansatz miatt:

$$V_3 = \frac{L^2 + \frac{1}{2}p_1 \cdot p_4}{L^2 - \frac{1}{2}p_1 \cdot p_4} V_1 + \frac{L^2}{L^2 - \frac{1}{2}p_1 \cdot p_4} (p_1 + p_4) \quad (118)$$

A maradék két null vektor:

$$p_2 = \frac{\frac{1}{2}p_1 \cdot p_4}{L^2 - \frac{1}{2}p_1 \cdot p_4} \left(2V_1 + p_1 + \frac{2L^2}{p_1 \cdot p_4} p_4 \right) \quad (119)$$

$$p_3 = \frac{\frac{1}{2}p_1 \cdot p_4}{L^2 - \frac{1}{2}p_1 \cdot p_4} \left(2V_1 + \frac{2L^2}{p_1 \cdot p_4} p_1 + p_4 \right) \quad (120)$$

Mivel a p_2 és p_3 vektorokat egyértelműen meghatározza p_1, p_4 és V_1 , ezért a mozgás egyenletből adódóan mind a négy 14,23,34 és 12 minimális felület, így a határ részrendszerek helyzete egyértelmű. A mozgásegyenlet és a kezdő adatok tehát a duális képben csak bizonyos CFT részrendszer elrendezéseket engednek meg.

Ez az érvelés fordítva is igaz. Tekintsünk egy térszerű CFT részrendszert, amely egy olyan kauzális gyémántot határoz meg, amelyek múlt és jövőbeli csúcsainak (t, x) koordinátái (a_1, b_1) és (a_4, b_4) (legyen $-(a_1 - a_4)^2 + (b_1 - b_4)^2 < 0$, hogy a két csúcs időszerűen szeparált legyen, valamint válasszuk $a_1 < a_4$). Válasszunk továbbá két, Λ_1 and Λ_4 skálafaktort. Ekkor az $\mathbb{R}^{2,2}$ -beli p_1 és p_4 null vektorok legyenek:

$$p_1 = \frac{\Lambda_1}{2L^2} (a_1^2 - b_1^2 - L^2, 2La_1, a_1^2 - b_1^2 + L^2, 2Lb_1) \quad (121)$$

$$p_4 = \frac{\Lambda_4}{2L^2} (a_4^2 - b_4^2 - L^2, 2La_4, a_4^2 - b_4^2 + L^2, 2Lb_4) \quad (122)$$

Könnyen látható, hogy ezen definíciókkal p_1 és p_4 valóban null vektorok. Ezek a Poincaré modellben egy-egy kúpot határoznak meg a $p_1 \cdot X = 0$ és $p_4 \cdot X = 0$ kényszereken keresztül, amelyek határa éppen a CFT beli kauzális gyémántot feszítik ki.

Az utolsó kezdeti adatnak a határbeli részrendszeren választhatunk egy pontot. Precízen szólva ez a pont akkor helyezkedik el a részrendszeren, ha (t, x) koordinátái kielégítik

a (14) egyenletet, vagyis:

$$2t(a_1 - a_4) - 2x(b_1 - b_4) = (a_1^2 - b_1^2) - (a_2^2 - b_2^2) \quad (123)$$

Ezt a pontot AdS térbe egyértelműen rávetíthetjük a $p_1 \cdot X = 0$ és $p_4 \cdot X = 0$ kúpok metszetére (a minimális felületre). Legyen az így meghatározott pont V_1 . Így tehát sikeresen meghatároztuk egy húr szegmens kezdeti adatait. A többi AdS beli pont, kúp, minimális felület és CFT intervallum helyzete a mozgásegyenletből az interpolációs ansatzon keresztül egyértelműen következik.

5.3. Mérték szabadság

A dualitás további fontos kérdése a mérték szabadság. Ahogy korábban láttuk a minimális felületek definíciójánál jelen van egy mérték szabadság, ugyanis a minimális felületek a p_i null vektorok $p_i \rightarrow \Lambda_i p_i$ átskálázásaira invariánsak.

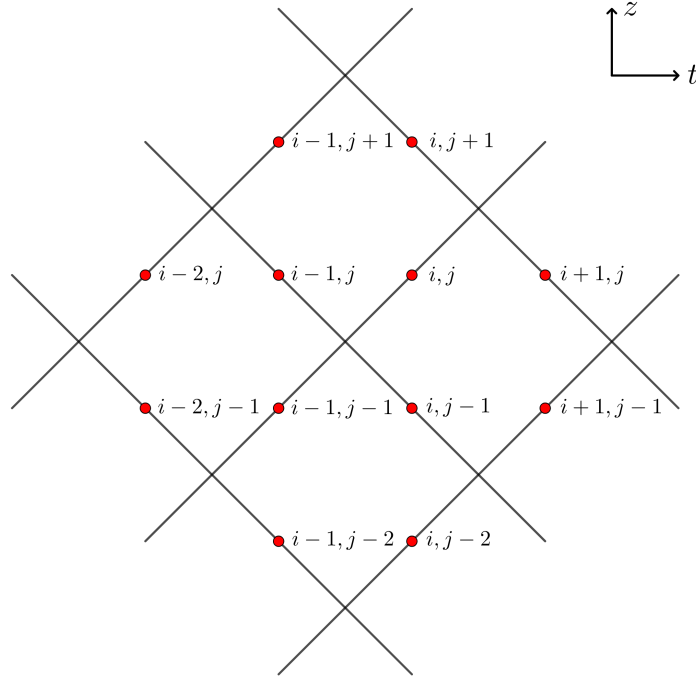
A húr szegmenseket a (41) interpolációs ansatzon keresztül definiáltuk, amely alapján a szegmens meghatározásához három adat kellett: két p_1 és p_4 null vektor, valamint egy $V_1 \in AdS_3$ vektor. Mivel ez a három adat egyértelműen meghatározza a p_2 és p_3 vektorokat, ezért a $p_1 \rightarrow \Lambda_1 p_1$ és $p_4 \rightarrow \Lambda_4 p_4$, $\Lambda_1 \Lambda_4 > 0$ transzformációk különböző p_2, p_3 (illetve V_2, V_3, V_4) vektorokat definiálnak. Vegyük észre azonban, hogy a szegmens normál vektora:

$$N_a = \frac{\epsilon_{abcd} V_1^b p_1^c p_4^d}{p_1 \cdot p_4} \quad (124)$$

Invariáns marad ezekre a transzformációkra. Vagyis a $p_i \rightarrow \Lambda_i p_i$ mérték szabadság a szegmentált húrok nyelvén elveszik, azonban a $p_1 \rightarrow \Lambda_1 p_1$ és $p_4 \rightarrow \Lambda_4 p_4$ transzformációk azonos normálvektorú húrokat szolgáltatnak.

5.4. Toda-egyenlet

Előzőleg láttuk tehát, hogy a húr mozgásegyenlete bizonyos kényszerek közé szorítja az AdS beli minimális felületeinek és a határ részrendszereinek kölcsönös helyzetét. A mozgásegyenletnek tehát az összefonódottság nyelvén is meg kell jelennie.



10. ábra. Egy szegmentált húrokból felépített világledő. A szegmensek oldalait a $p_{ij}, p_{i+1j}, p_{i+1,j-1}$ és p_{ij-1} null vektorok határozzák meg.

Ennek vizsgálatához tekintsünk egy húr szegmensekből álló rácsot. A határolják a $p_{ij}, p_{i-1j}, p_{i-1,j+1}$ és p_{ij+1} null vektorok (10. ábra). Egy adott szegmens területe ekkor:

$$A = L^2 \log \left| \frac{(a_{i-1j} - a_{i-1,j+1})(a_{ij} - a_{ij+1})}{(a_{i-1j} - a_{ij})(a_{ij+1} - a_{i-1,j+1})} \right| + L^2 \log \left| \frac{(\tilde{a}_{i-1j} - \tilde{a}_{i-1,j+1})(\tilde{a}_{ij} - \tilde{a}_{ij+1})}{(\tilde{a}_{i-1j} - \tilde{a}_{ij})(\tilde{a}_{ij+1} - \tilde{a}_{i-1,j+1})} \right| \quad (125)$$

Ahol $a_{ij} = L \frac{p_{ij}^0 + p_{ij}^2}{p_{ij}^-}$ és $\tilde{a}_{ij} = L \frac{p_{ij}^0 - p_{ij}^2}{p_{ij}^-}$. A szegmensek területe felbontható egy balra- és egy jobbra-mozgó tagra. Innentől kezdve csak a balra-mozgót vizsgálom (vagyis amelyik a tilde nélküli a változókat tartalmazza), a másik tagra a következő levezetések hasonlóan elvégezhetők. A szegmensekből álló húr teljes területe:

$$A_{\text{tot}} = L^2 \sum_{i,j} \log \left| \frac{a_{i,j} - a_{i+1,j}}{a_{i,j} - a_{i,j+1}} \right| + L^2 \sum_{i,j} \log \left| \frac{\tilde{a}_{i,j} - \tilde{a}_{i+1,j}}{\tilde{a}_{i,j} - \tilde{a}_{i,j+1}} \right| \quad (126)$$

Válogassuk ki a kifejezésből azokat a tagokat, amelyek az a_{ij} változót tartalmazzák, vagyis:

$$A_{\text{tot}}^L = \dots + L^2 \log |a_{ij} - a_{i+1j}| + L^2 \log |a_{i-1j} - a_{ij}| - L^2 \log |a_{ij} - a_{ij+1}| - L^2 \log |a_{ij-1} - a_{ij}| \dots \quad (127)$$

A húr felülete arányos a Nambu-Goto hatással (ugyanis a legkisebb hatás elve szerint a felületet kell minimalizálnunk), vagyis ami kifejezést kaptunk az a Nambu-Goto hatás diszkretizált változata. A diszkretizált mozgásegyenletet ekkor a $\delta A_{\text{tot}}/\delta a_{ij} = 0$ variáció szolgáltatja, amelyből azt kapjuk, hogy [1]:

$$\frac{1}{a_{ij} - a_{ij+1}} + \frac{1}{a_{ij} - a_{ij-1}} = \frac{1}{a_{ij} - a_{i+1j}} + \frac{1}{a_{ij} - a_{i-1j}} \quad (128)$$

Amely egy Toda típusú egyenletek egyik fajtája [17].

Tegyük fel ekkor, hogy a szegmenst definiáló null vektorokra teljesülnek a 3.2. fejezetben említett megszorítások. Ekkor teljesül, hogy $a_{ij} < a_{ij+1}, a_{ij-1}, a_{i-1j}, a_{i+1j}$ pozitív irányítású ij élekre, illetve $a_{ij} > a_{ij+1}, a_{ij-1}, a_{i-1j}, a_{i+1j}$ negatív irányítású ij élekre (és hasonlóan az $\tilde{a}_{ij}$ változókra). Ez szemléletesen azt jelenti, hogy például a pozitív irányítású élek esetén a p_{ij} által meghatározott kúp jövőbeli része metszi a $p_{ij+1}, p_{ij-1}, p_{i+1j}, p_{i-1j}$ által meghatározott kúpok múltbeli részét. Összefoglalva tehát a (128) egyenlet a következő alakra írható:

$$\frac{1}{|a_{ij} - a_{ij+1}|} + \frac{1}{|a_{ij} - a_{ij-1}|} = \frac{1}{|a_{ij} - a_{i+1j}|} + \frac{1}{|a_{ij} - a_{i-1j}|} \quad (129)$$

A duális CFT képen a p_{ij} és p_{kl} null vektorok által meghatározott részrendszer összefonódottsági entrópiája a következő:

$$S^L(ij, kl) = \frac{c}{6} \log \frac{|a_{ij} - a_{kl}|}{\delta} \quad (130)$$

Ezt felhasználva a (128) egyenlet átfogalmazható az összefonódottság nyelvére:

$$e^{-\frac{c}{6} S^L(ij, ij+1)} + e^{-\frac{c}{6} S^L(ij, ij-1)} = e^{-\frac{c}{6} S^L(ij, i+1j)} + e^{-\frac{c}{6} S^L(ij, i-1j)} \quad (131)$$

Vagyis szegmentált húr esetén a húr mozgásegyenlete egy összefüggést generál a határ összefonódottsági entrópiáira.

A jobbra-mozgó S^R komponensekre egy ezzel megegyező összefüggés vezethető le. Fontos megjegyezni azonban, hogy a két egyenlet nem független egymástól a $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ momentum megmaradás miatt [15].

6. fejezet

A megfelelés páros dimenzióban

A következőkben a magasabb dimenziós esetet vizsgálom és általánosítom az eredményeimet az AdS_{d+1}/CFT_d megfelelésre $d = \text{páros}$ esetben.

6.1. AdS_{d+1} tér és a Poincaré felső térrész modell

A $d + 1$ dimenziós anti-de Sitter teret az $\mathbb{R}^{2,d}$ tér azon $X = (X^{-1}, X^0, X^1, \dots, X^d)$ pontjai alkotják, amelyekre teljesül a következő kényszer:

$$\begin{aligned} X \cdot X &:= -(X^{-1})^2 - (X^0)^2 + (X^1)^2 + \dots + (X^d)^2 = \\ &= -(X^0)^2 + (X^2)^2 + \dots + (X^d)^2 + X^+ X^- = -L^2 \end{aligned} \tag{132}$$

Ahol:

$$X^\pm = X^1 \pm X^{-1} \tag{133}$$

Továbbá L az AdS sugár. Az AdS_{d+1} tér d dimenziós aszimptotikus határát a háromdimenziós esethez hasonlóan a következő halmaz határozza meg:

$$\partial_\infty AdS_{d+1} := \mathbb{P}\{U \in \mathbb{R}^{2,d} | U \cdot U = 0\} \tag{134}$$

Ahol $\mathbb{P}$ projektivizálást jelent.

A korábbi jelölésrendszeremet használva definiálom a $d + 1$ dimenziós Poincaré felső térrészt:

$$(X^{-1}, X^0, X^1, X^2, \dots, X^d) = \left(\frac{-z^2 - x \bullet x - L^2}{2z}, L \frac{t}{z}, \frac{-z^2 - x \bullet x + L^2}{2z}, L \frac{x^1}{z}, \dots, L \frac{x^{d-1}}{z} \right) \quad (135)$$

Ahol $z > 0$. Bevezettem továbbá az $x^\mu = (t, x^1, \dots, x^{d-1})$, $\mu = 0, 1, \dots, d-1$ Minkowski vektorokat és az $x \bullet x = -t^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^{d-1})^2$ belső szorzatot. A Poincaré ívelemnégyzet a z és x^μ koordinátákban:

$$ds^2 = L^2 \frac{dz^2 + dx \bullet dx}{z^2} \quad (136)$$

Az AdS tér határa a Poincaré modellben a $z \rightarrow 0$ határeset. Ismét látható, hogy ebben a határesetben az ívelemnégyzet konform ekvivalens lesz a d dimenziós Minkowski metrikájával.

Az x^μ és z Poincaré koordináták az X globális változók segítségével a következőképpen fejezhetők ki:

$$z = \frac{L^2}{X^-}, \quad t = L \frac{X^0}{X^-}, \quad x^1 = L \frac{X^1}{X^-}, \quad \dots, \quad x^{d-1} = L \frac{X^{d-1}}{X^-} \quad (137)$$

Fontos megjegyezni, hogy az általam definiált Poincaré modellben azon AdS beli pontok reprezentálhatók, amelyekre teljesül, hogy $X^- > 0$. Végül az AdS tér határát definiáló null vektorok felső térrész beli reprezentációi:

$$x_u^\mu = (t_u, x_u^1, \dots, x_u^{d-1}) = \frac{L}{U^-} (U^0, U^1, \dots, U^{d-1}) \quad (138)$$

Fontos megjegyezni, hogy két, U és V null vektor esetén a vektorok x_u és x_v felső térrész beli reprezentációjának Minkowski távolsága a globális vektorok segítségével a következőképpen fejezhető ki:

$$(x_u - x_v) \bullet (x_u - x_v) = -2L^2 \frac{U \cdot V}{U^- V^-} \quad (139)$$

Ez azt jelenti, hogy x_u és x_v pontosan akkor időszerűen szeparált, ha $U \cdot V < 0$ és $U^- V^- < 0$, vagy $U \cdot V > 0$ és $U^- V^- > 0$.

6.2. AdS_{d+1} minimális felületek

A korábbi eredmények általánosításához bevezetem az AdS_{d+1} tér kettő kodimenziójú ($d-1$ dimenziós) minimális felületeit és kiszámítom azok felszínét. A háromdimenziós esethez hasonlóan ezeket a felületeket két, $U, V \in \mathbb{R}^{2,2}$ null vektor segítségével definiálhatjuk. Tegyük fel, hogy:

$$U \cdot V < 0 \quad \text{and} \quad U^- V^- < 0 \quad (140)$$

Ekkor a minimális felület a következő két kényszer által meghatározott halmaz metszete [8]:

$$U \cdot X = 0, \quad V \cdot X = 0 \quad (141)$$

Ahol $X \in AdS_{d+1}$. A (135) Poincaré koordináták használatával ezek az egyenletek a következő alakúak:

$$z^2 + (x - x_u) \bullet (x - x_u) = 0 \quad (142)$$

$$z^2 + (x - x_v) \bullet (x - x_v) = 0 \quad (143)$$

Ahol:

$$x_u^\mu = \frac{L}{U^-}(U^0, U^2, \dots, U^d), \quad x_v^\mu = \frac{L}{V^-}(V^0, V^2, \dots, V^d) \quad (144)$$

Ezek az egyenletek olyan kúpokat határoznak meg a Poincaré modellben, amelyek középpontjai a határ x_u és x_v pontjai. Az általunk keresett ε_A minimális felületet ezen kúpok metszete adja.

A kúpok egyenletét kivonva egymásból azt kapjuk, hogy a minimális felület azon síkban helyezkedik el, amelyre teljesül, hogy:

$$2x \bullet (x_v - x_u) + x_u \bullet x_u - x_v \bullet x_v = 0 \quad (145)$$

Bevezetve a következő mennyiségeket:

$$\Delta = x_u - x_v, \quad x_0 = \frac{1}{2}(x_u + x_v) \quad (146)$$

A sík egyenlete:

$$\Delta \bullet (x - x_0) = 0 \quad (147)$$

A kúpok egyenletéből látszik, hogy:

$$(x - x_u) \bullet (x - x_u) < 0, \quad (x - x_v) \bullet (x - x_v) < 0 \quad (148)$$

Vagyis a minimális felület határra vetített pontjai időszerűen szeparáltak a kúpok középpontjaitól. A (140) feltételek alapján a (139) összefüggést felhasználva látható, hogy x_u és x_v időszerűen szeparáltak, ugyanis ebben az esetben $\Delta \bullet \Delta < 0$. Megmutatható, hogy ekkor a minimális felület egy ellipszoid. Ekkor tehát a ∂A határa egy S^{d-2} gömböt jelöl ki az AdS tér határán [8] (valójában általános, nem statikus esetben ezek ellipszoidok). Az AdS_{d+1}/CFT_d megfelelésben az általunk vizsgált ε_A minimális felület nagysága arányos az így definiált ∂A gömb által határolt A CFT részrendszer vákuum állapotú összefonódottsági entrópiájával. A minimális felületet definiáló kúpok határa a részrendszert határoló kauzális gyémánt. A kúpok középpontjai a kauzális gyémánt múlt és jövő beli csúcsait határozzák meg.

Írjuk fel most a következő azonosságokat:

$$x - x_u = x - x_0 - \frac{\Delta}{2}, \quad x - x_v = x - x_0 + \frac{\Delta}{2} \quad (149)$$

Ekkor a kúpok mind a két (142) és (143) egyenlete a következő alakra hozható:

$$z^2 + (x - x_0) \bullet (x - x_0) = -\frac{\Delta \bullet \Delta}{4} \equiv R^2 \quad (150)$$

Ahol R^2 egy pozitív mennyiség, ugyanis x_u és x_v időszerűen szeparáltak. Az egyenletet részletesen kiírva:

$$z^2 - (t - t_0)^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 = R^2, \quad 4R^2 = -\|\Delta\|^2 + (\Delta^0)^2 \quad (151)$$

A kúpok metszete által kijelölt minimális felületet ez, valamint a (147) egyenlet határozzák meg, amely részletesen kiírva:

$$\Delta^0(t - t_0) = \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (152)$$

Ahol a jobb oldalon a szokásos $\mathbb{R}^{d-1}$ norma szerepel.

Vegyük észre ismét, hogy az U és V vektorok megválasztásában van egy mérték szabadság, ugyanis a:

$$U \mapsto \Lambda_u U, \quad V \mapsto \Lambda_v V, \quad \Lambda_u \Lambda_v > 0 \quad (153)$$

transzformációk ugyanazokat a kúpot, így az $U \cdot X = 0$ és $V \cdot X = 0$ kényszereken keresztül ugyan azt a minimális felületet határozzák meg.

(151) és (152) egyenletek segítségével kiszámítható a minimális felület nagysága. Algebrai átalakítások és a felület megfelelő paraméterezése után azt kapjuk, hogy a felszín a következő integrál kiértékelésével számítható ki:

$$A_{\min} = L^{d-1} \Omega_{d-2} \int_{\delta/R}^1 dy \frac{(1-y^2)^{\frac{d-3}{2}}}{y^{d-1}} \quad (154)$$

Ahol ismét bevezettem egy $z > \delta$, $\delta \gg R$ cutoffot. Az integrál részletes kiszámítását nem tartalmazza a dolgozat¹. A számítás során azonban kiderül, hogy az integrál jelentősen eltérő kifejezéseket ad, ha d páros, valamint ha páratlan. $d =$ páratlan esetben a felszínre kapott végtelen sorban csak olyan tagok fordulnak elő, amelyekben az R/δ hányados különböző hatványai szerepelnek. Azonban $d =$ páros esetben részletesen kiírva a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} A_{\min} = & L^{d-1} \Omega_{d-2} \frac{1}{d-2} \frac{R^{d-2}}{\delta^{d-2}} + \\ & + L^{d-1} \Omega_{d-2} \frac{(-1)^{(d-2)/2}}{2} \frac{(d-3)!!}{(d-2)!!} \log \left(\frac{R^2}{\delta^2} \right) + \\ & + L^{d-1} \Omega_{d-2} F_d(1) + \\ & + L^{d-1} \Omega_{d-2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq (d-2)/2}}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k!} \frac{1}{(2k-d+2)} \frac{(d-3)!!}{(d-(2k+3))!!} \left(\frac{R}{\delta} \right)^{d-(2k+2)} \end{aligned} \quad (155)$$

Ahol tehát:

$$R^2 = -\frac{1}{4}(x_u - x_v) \bullet (x_u - x_v) \quad (156)$$

A kifejezés első tagja arányos a felület ∂A határának méretével, vagyis $R^{d-2} \Omega_{d-2}$ -vel. A második tagban a $d = 2$ dimenziós esettel megegyező logaritmikus járulék szerepel. A harmadik tag egy konstans, amelyben az (154) kifejezésben szereplő integrál felső határon

¹A részletes számolás megtalálható az intézményi TDK-ra nevezett dolgozat függelékében.

vett kiértékelése szerepel. Ennek explicit értéke a következő:

$$F_d(1) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq (d-2)/2}}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k!} \frac{1}{(2k - d + 2)} \frac{(d-3)!!}{(d - (2k + 3))!!} \quad (157)$$

Végül az összeg utolsó tagja R/δ különböző hatványait tartalmazza. Amennyiben az összegzésben $k < (d-2)/2$, akkor azok a tagok $\delta \rightarrow 0$ határesetben nullába tartanak. Ha pedig $k > (d-2)/2$, akkor R/δ pozitív hatványai szerinti divergens tagokat kapunk.

Meghatároztam tehát az AdS_{d+1} tér belüli kettő kodimenziós minimális felületeinek a nagyságát és azt kaptam, hogy minden $d =$ páros esetben a terület formulájában megjelenik egy R/δ -t tartalmazó logaritmikus tag.

6.3. Szegmentált húrok

A 3. fejezetben elhangzottakhoz hasonlóan magasabb dimenziós AdS_{d+1} térben is definiálhatunk kétdimenziós húrokat. A kétdimenziós húrokra vonatkozó mozgásegyenlet azonos a $d = 2$ esettel, vagyis a húr pontjainak a következő egyenletet kell teljesíteniük [12].

$$\partial_+ \partial_- X - (\partial_- X \cdot \partial_+ X) X = 0 \quad (158)$$

A paraméterek ismét σ^+ és σ^- . A húrra vonatkozó Virasoro kényszerek ismét:

$$\partial_- X \cdot \partial_- X = \partial_+ X \cdot \partial_+ X = 0 \quad (159)$$

A korábbiakhoz hasonlóan definiáljuk az AdS_{d+1} belüli húr szegmenseket a csúcsaikat jellemző $V_i \in AdS_{d+1}$ és az éleiket jellemző:

$$p_1 = V_2 - V_1 \quad p_2 = V_3 - V_2 \quad (160)$$

$$p_3 = V_3 - V_4 \quad p_4 = V_4 - V_1 \quad (161)$$

null vektorokkal. A szegmenst egyértelműen meghatározó kezdeti adatoknak ismét válasszuk a V_1, p_1, p_4 vektorokat és a parametrizációra vonatkozó következő feltételeket:

$$X(\sigma^-, 0) = V_1 + \sigma^- p_1 \quad (162)$$

$$X(0, \sigma^+) = V_1 + \sigma^+ p_4 \quad (163)$$

A húr pontjai ekkor meghatározhatók az interpolációs ansatz segítségével [7]

$$X(\sigma^-, \sigma^+) = \frac{L^2 + \sigma^- \sigma^+ \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4}{L^2 - \sigma^- \sigma^+ \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4} V_1 + L^2 \frac{\sigma^- p_1 + \sigma^+ p_4}{L^2 - \sigma^- \sigma^+ \frac{1}{2} p_1 \cdot p_4} \quad (164)$$

Amely pontok kielégítik a (158) mozgásegyenletet. A továbbiakban tegyük fel, hogy a V_i és p_i vektorokra továbbra is teljesülnek a 3.2 említett kauzalitási feltételek.

A szegmens területe a 3. fejezettel azonos módon számítható. Így tehát az AdS_{d+1} ben terjedő kétdimenziós hurok területére is teljesül, hogy:

$$A = L^2 \log \left[\frac{(p_1 - p_4)^2}{(p_1 + p_2)^2} \right]^2 = L^2 \log \frac{(p_1 - p_4)^2 (p_3 - p_2)^2}{(p_1 + p_2)^2 (p_3 + p_4)^2} \quad (165)$$

Ismét használva a korábban bevezetett Poincaré koordinátákat:

$$(X^{-1}, X^0, X^1, X^2, \dots, X^d) = \left(\frac{-z^2 - x \bullet x - L^2}{2z}, L \frac{t}{z}, \frac{-z^2 - x \bullet x + L^2}{2z}, L \frac{x^1}{z}, \dots, L \frac{x^{d-1}}{z} \right) \quad (166)$$

A p_i vektorok felső térrészmodell beli reprezentációi:

$$x_i^\mu = \frac{L}{p_i^-} (p_i^0, p_i^1, \dots, p_i^d) \quad (167)$$

Mivel $p_i \cdot p_i = 0$, ezért ahogy korábban is láttuk a null vektorok AdS beli és Poincaré modell beli belsőszorzata között fenn áll a következő azonosság:

$$\frac{p_i \cdot p_j}{p_i^- p_j^-} = -\frac{1}{2L^2} (x_i - x_j) \bullet (x_i - x_j) \quad (168)$$

Így tehát definiálva a következő mennyiséget:

$$R_{ij}^2 = -\frac{1}{4} (x_i - x_j) \bullet (x_i - x_j) = \frac{L^2}{2} \frac{p_i \cdot p_j}{p_i^- p_j^-} \quad (169)$$

A szegmens területét átírhatjuk a következő alakra:

$$A = L^2 \log \frac{R_{14}^2 R_{23}^2}{R_{34}^2 R_{12}^2} \quad (170)$$

Ez tehát a $d + 1$ dimenziós AdS térben terjedő kétdimenziós húr területe, amelyet a p_1, p_2, p_3 és p_4 null vektorok definiálnak.

6.4. Szegmentált húrok és az összefonódottság kapcsolata páros dimenzióban

Végül a dolgozat korábbi eredményeit szeretném általánosítani a magasabb dimenziós AdS_{d+1}/CFT_d megfelelésre abban az esetben, ha $d =$ páros. Ehhez tekintsük a Ryu-Takayanagi összefüggést magasabb dimenzióban, amely a $d = 2$ dimenziós esettel megegyezően, összekapcsolja az AdS_{d+1} tér minimális felületeinek felszínét a határon élő d dimenziós konform térelmélet megfelelő részrendszereinek összefonódottsági entrópiájával. A korábbiakhoz hasonlóan, tekintsünk egy $A \subset CFT_d$ részrendszert, amelynek határa ∂A , valamint ε_A a vele homológ, kettő kodimenziójú, minimális AdS_{d+1} felület. Az A részrendszer összefonódottsági entrópiája $S(A)$, ε_A felszíne pedig $A_{\min}$. Ekkor a Ryu-Takayanagi összefüggés d dimeznióban:

$$S(A) = \frac{A_{\min}}{4G^{(d+1)}} \quad (171)$$

Ahol $G^{(d+1)}$ a $d + 1$ dimenziós gravitációs állandó. [4] alapján egy vákuumállapotú CFT_d részrendszer összefonódottsági entrópiája $d =$ páros esetben a következő alakban írható fel:

$$S = S^\partial + S^{\text{uni}} + S^{\text{többi}} = \gamma_1 \frac{A(\partial A)}{\delta^{d-2}} + \gamma_2 \log \frac{R}{\delta} + S^{\text{többi}} \quad (172)$$

Az kifejezés első S^∂ tagja arányos a ∂A felület $A(\partial A)$ méretével. Esetünkben, ellipszoid alakú tartományra $A(\partial A) \sim R^{d-2} \Omega_{d-2}$. A második S tag egy logaritmikus korrekció, amelynek γ_2 együtthatója univerzális, vagyis nem függ a δ cutofftól. [18] alapján az első és második tag γ_1 és γ_2 együtthatója arányos a magasabb dimenziós a_d^* trace anomáliával. $S^{\text{többi}}$ olyan nem univerzális, fizikailag irreleváns tagokat tartalmaz, amelyek R/δ alacsonyabb kitevőjű hatványait tartalmazzák.

A (155) eredményt felhasználva, a (171) Ryu-Takayanagi összefüggésen keresztül látható, hogy egy p_i és p_j null vektorok által meghatározott A CFT_d részrendszer (amelynek ∂A egy S^{d-2} ellipszoid) összefonódottsági entrópiájának univerzális tagja a következőkép-

pen kapható meg:

$$S^{\text{uni}}(ij) = \frac{(-1)^{(d-2)/2} \pi^{\frac{d-1}{2}} L^{d-1} (d-3)!!}{4G^{(d+1)} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \log\left(\frac{R_{ij}^2}{\delta^2}\right) \quad (173)$$

Ahol az A részrendszerrel homológ ε_A minimális felületet a $p_i \cdot X = p_j \cdot X = 0$ által definiált kúpok metszete adja. A felület méretét jellemző R_{ij}^2 ekkor:

$$R_{ij}^2 = -\frac{1}{4}(x_i - x_j) \bullet (x_i - x_j) \quad (174)$$

Ahol:

$$x_i^\mu = (t_i, x_i^1, \dots, x_i^{d-1}) = \frac{L}{p_i} (p_i^0, p_i^2, \dots, p_i^d) \quad (175)$$

Válasszunk ekkor ismét két $\mathbb{R}^{2,d}$ beli p_1 és p_4 null, valamint egy $V_1 \in AdS_{d+1}$ vektort, ahol $d = \text{páros}$. Ezek az előző alfejezet alapján egy AdS_{d+1} -be ágyazott kétdimenziós húr szegmenst határoznak meg. A szegmens éleit a p_1, p_2, p_3, p_4 null, csúcsait pedig a V_1, V_2, V_3, V_4 vektorok határozzák meg, ahol p_2, p_3, V_2, V_3, V_4 a p_1, p_4 és V_1 vektorokból származhatók ki a (164) interpolációs ansatz segítségével. A szegmens területe ekkor:

$$A = L^2 \log \frac{R_{14}^2 R_{23}^2}{R_{34}^2 R_{12}^2} \quad (176)$$

Tegyük fel továbbá, hogy a szegmenst definiáló vektorokra teljesülnek a 3.2. fejezet feltételei, vagyis ekkor egy időszerű szegmensről beszélünk. A szegmens V_1, V_2, V_3, V_4 csúcsai továbbra is a $p_i \cdot X = 0$ kúpokon helyezkednek el. Ezeknek a kúpoknak a metszetei minimális felületeket határoznak meg, amelyek homológok a határ S^{d-2} részrendszereivel. Ezen részrendszerek összefonódottsági entrópiája vákuum állapotban (173) alakú. Innen könnyen látható, hogy $d = \text{páros}$ a szegmens területe és az összefonódottsági entrópiák között a következő kapcsolat áll fenn:

$$A = \frac{4G^{(d+1)} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{(-1)^{(d-2)/2} \pi^{\frac{d-1}{2}} L^{d-3}} \frac{(d-2)!!}{(d-3)!!} (S^{\text{uni}}(14) + S^{\text{uni}}(23) - S^{\text{uni}}(34) - S^{\text{uni}}(12)) \quad (177)$$

Ez a dolgozatomban legáltalánosabb eredménye, amely $d = \text{páros}$ esetén, az AdS_{d+1}/CFT_d elméletben összekapcsolja az időszerű szegmentált húrok geometriáját a határon élő, vákuumállapotú CFT térszerű részrendszereinek összefonódottságával. A kapcsolatot az AdS tér minimális felületei adják, amelyeket a $p_i \cdot V_j = 0$ kényszerek definiálnak. A CFT

6.4. SZEGMENTÁLT HÚROK ÉS AZ ÖSSZEFONÓDOTTSÁG KAPCSOLATA PÁROS DIMENZIÓBAN

részrendszerek ezekkel a minimális felülettel homológok, a húr szegmens csúcsai pedig ezeken a felületeken helyezkednek el.

7. fejezet

Összefoglalás

Dolgozatomban tehát az AdS térben terjedő húrok, az AdS tér minimális felületei és a határon élő CFT vákuumállapotának összefonódottsága között állítottam fel kapcsolatot, amely egy egyszerű példát arra, hogy bizonyos esetekben a téridő geometriája valóban kapcsolatba hozható a kvantumos összefonódottsággal. A kapcsolat szerint az AdS térben terjedő kétdimenziós húrok területe arányos az AdS tér határán élő vákuum állapotú CFT részrendszerek összefonódottsági entrópiáinak bizonyos kombinációjával. Ez a kombináció az információelméletből jól ismert kölcsönös feltételes információt adja. Megmutattam, hogy az összefüggések fennállnak a statikus és nem statikus AdS_3/CFT_2 , valamint az AdS_{d+1}/CFT_d megfelelésben is abban az esetben, ha $d = \text{páros}$.

Mutattam továbbá példákat arra vonatkozóan, hogy a dolgozatban levezetett kapcsolat hogyan alkalmazható a szegmentált húrok és az összefonódottság nyelvén. Ilyen volt például a szegmensek területének pozitivitása és az erős szubadditivitás, valamint a húr hatás variálásából adódó összefüggés az összefonódottsági entrópiákra.

Dolgozatom eredményeit témavezetőmmel tovább szeretnénk általánosítani. A húr szegmenseket null vektorok definiálják, amelyek szoros kapcsolatban állnak a határ kauzális gyémántjainak terével, az úgynevezett kinematikus térrel [19, 8]. Jelenleg a kinematikus tér újrainterpretálásán dolgozunk a twisztor geometria segítségével. Ennek a nézőpontnak a segítségével lehetőség nyílik a húr szegmensek geometriája és az összefonódottság kapcsolatának mélyebb megértésére.

Az AdS/CFT megfelelésben a határon élő CFT vákuumállapotának gerjesztéseit a határ konform transzformációi tartják kézben. A dolgozatom eredményei alapján lehetőség nyílik megvizsgálni, hogy ezen gerjesztések hogyan hatnak az AdS tér belső szegmentált húrokra. [6] cikkben olyan szegmentált húrokat vizsgáltak, amelyek egy külső B térben

mozognak. Ez a hatásban egy plusz tagként jelenik meg. Lehetséges, hogy a határtranszformációi a duális képben kapcsolatba hozhatók a húr hatásban szereplő további járulékokkal.

Az entrópiára vonatkozó egyenlőtlenségeket is érdemes lehet továbbá megvizsgálni. Információelméletben különböző rendszerek összefonódottsági entrópiáinak bizonyos egyenlőtlenségeket kell teljesíteniük. Ilyen például a szubadditivitás, erős szubadditivitás, vagy az Araki-Lieb egyenlőtlenség [16]. Érdemes lehet megvizsgálni, hogy az egy szegmens pozitivitásával kapcsolatban álló erős szubadditivitáson kívül milyen egyenlőtlenségek állíthatók kapcsolatba a szegmentált húrokkal.

Dolgozatom eredményeit a kari TDK után publikálni szeretnénk. Továbbá az eredményeit a [1, 6, 15] cikkek szerzőjével, Végh Dáviddal szeretnénk közösen általánosítani.

Függelék

A. Példa egy húr szegmensre

A következőkben ismertetek egy példát egy AdS_3 belüli húrszegmensre, amely teljesíti a 3.2. fejezet kauzalitási feltételeit. Legyenek a kezdeti adatok:

$$\begin{aligned} V_1 &= L(-1, 0, 0, 0) \\ p_1 &= L(0, c, -c, 0) \\ p_4 &= L(0, \tilde{c}, \tilde{c}, 0) \end{aligned} \tag{178}$$

Ahol $c \in (0, 1)$ és $\tilde{c} > 0$. Ezek a vektorok kielégítik a $V_1^- > 0$, $p_1 \cdot p_4$ és $p_1^- p_4^- < 0$ feltételeket. Az (41) interpolációs ansatzot felhasználva a maradék két null vektor a következő:

$$p_2 = -L \frac{c\tilde{c}}{1+c\tilde{c}} \left(-2, -\frac{1}{c} + c, -\frac{1}{c} - c, 0 \right) \tag{179}$$

$$p_3 = -L \frac{c\tilde{c}}{1+c\tilde{c}} \left(-2, -\frac{1}{\tilde{c}} + \tilde{c}, \frac{1}{\tilde{c}} + \tilde{c}, 0 \right) \tag{180}$$

A p_2^-, p_3^- koordináták:

$$p_2^- = L \frac{\tilde{c}}{1+c\tilde{c}} (c-1)^2, \quad p_3^- = -L \frac{c}{1+c\tilde{c}} (\tilde{c}+1)^2 \tag{181}$$

Ezek teljesítik a következő feltételeket:

$$p_1^- p_2^- = -L^2 \frac{c\tilde{c}}{1+c\tilde{c}} (c-1)^2 < 0, \quad p_3^- p_4^- = -L^2 \frac{c\tilde{c}}{1+c\tilde{c}} (\tilde{c}+1)^2 < 0, \tag{182}$$

$$p_1^- p_3^- = L^2 \frac{c^2}{1+c\tilde{c}} (\tilde{c}c+1)^2 > 0, \quad p_2^- p_4^- = L^2 \frac{\tilde{c}^2}{1+c\tilde{c}} (c-1)^2 > 0 \tag{183}$$

Továbbá a V_2, V_3, V_4 csúcsok:

$$V_2 = L(-1, c, -c, 0) \quad (184)$$

$$V_3 = L \frac{1}{1 + c\tilde{c}}(c, \tilde{c} + c, \tilde{c} - c, 0) \quad (185)$$

$$V_4 = L(1, \tilde{c}, \tilde{c}, 0) \quad (186)$$

Amelyekre hasonlóan:

$$V_2^- = L(1 - c) > 0, \quad V_3^- = \frac{L}{1 + c\tilde{c}}(1 + \tilde{c})(1 - c) > 0, \quad V_4^- = L(\tilde{c} + 1) > 0 \quad (187)$$

A null vektorok felső térrész beli időszerű koordinátái:

$$L \frac{p_1^0}{p_1} = -L, \quad L \frac{p_2^0}{p_2} = -L \frac{c + 1}{c - 1}, \quad L \frac{p_3^0}{p_3} = L \frac{\tilde{c} - 1}{\tilde{c} + 1}, \quad L \frac{p_4^0}{p_4} = L \quad (188)$$

Amelyek pedig kielégítik az utolsó feltételt, vagyis $p_1^0/p_1^- < p_3^0/p_3^- < p_4^0/p_4^- < p_2^0/p_2^-$.

Erre a példára egyszerűen meghatározhatjuk a p_i vektorok által, a $p_i \cdot X = 0$ kényszeren keresztül definiált felső térrészbeli kúpok középpontjait is. Ezeket éppen a p_i^0/p_i^- hányadosok adják meg, vagyis a középpontok koordinátái:

$$a_1 = -L, \quad a_2 = -L \frac{c + 1}{c - 1}, \quad a_3 = L \frac{\tilde{c} - 1}{\tilde{c} + 1}, \quad a_4 = L \quad (189)$$

Ekkor a kúpok által meghatározott 14,23,12,34 minimális felületek időbeli elhelyezkedése a $t_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$ képlet alapján a következő:

$$t_{14} = 0, \quad t_{23} = \frac{1}{2}L \left(\frac{\tilde{c} - 1}{\tilde{c} + 1} - \frac{c + 1}{c - 1} \right), \quad t_{12} = -L \frac{c}{c - 1}, \quad t_{34} = L \frac{\tilde{c}}{\tilde{c} + 1} \quad (190)$$

Hasonlóan meghatározhatók a minimális felületek $R_{ij} = \frac{1}{2}|a_i - a_j|$ sugarai is:

$$R_{14} = L, \quad R_{23} = \frac{1}{2}L \left| \frac{\tilde{c} - 1}{\tilde{c} + 1} + \frac{c + 1}{c - 1} \right|, \quad R_{12} = L \frac{1}{|c - 1|}, \quad R_{34} = L \frac{1}{|\tilde{c} + 1|} \quad (191)$$

Ez a példa jól szemlélteti azt, hogy mind a szegmentált húrok, mind a minimális felületek, mind pedig a határ nyelvén elegendő megadni három kezdeti adatot (például a V_1, p_1, p_4 vektorokat) az általunk vázolt megfeleltetésben. A maradék adatot pedig egyértelműen meghatározza a húr mozgásegyenlete a (41) interpolációs ansatzon keresztül.

A fejezetben említett példa a [6] cikk alapján született, azonban a cikkben olvasható kezdeti feltételek alapján meghatározott szegmensnek a V_1 csúcsa más (az itteni példa (-1) -szerese), így az nem teljesíti a kauzalitási feltételeket.

Irodalomjegyzék

- [1] D. Vegh, arXiv:1601.07571
- [2] M. Van Raamsdonk, Gen. Relativ. Gravit. **42**, 2323–2329 (2010).
- [3] S. Ryu and T. Takayanagi, Phys. Rev. Lett. **96** 181602 (2006).
- [4] S. Ryu, T. Takayanagi, JHEP **0608**, 045 (2006).
- [5] V.E. Hubeny, M. Rangamani, T. Takayanagi, JHEP **0707**, 062 (2007).
- [6] D. Vegh, JHEP **2018**, 88 (2018).
- [7] S.S. Gubser, S. Parikh and P. Witaszczyk, JHEP **07**, 122 (2016).
- [8] J. de Boer, M. P. Heller, R. C. Myers, Y. Neiman, Phys. Rev. Lett. **116** 061602 (2016).
- [9] P. Calabrese, J. L. Cardy, J.Stat.Mech. **0406** P06002 (2004).
- [10] M. Rangamani and T. Takayanagi, Holographic Entanglement Entropy, Springer (2017).
- [11] B. Zwiebach, A First Course in String Theory, Cambridge University Press (2004).
- [12] L. F. Alday and J. Maldacena, JHEP 0911, 082 (2009).
- [13] H. Casini and M. Huerta, Phys. Lett. **B600**, 142 (2004).
- [14] K. Skenderis, B. C. van Rees, Commun.Math.Phys. **301** 583 (2011).
- [15] D. Vegh, JHEP **2021**, 50 (2021).
- [16] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information Cambridge University Press (2000).

- [17] Y. B. Suris, The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach (Birkhäuser Verlag, Basel, 2003).
- [18] R. C. Myers, A. Sinha, JHEP **2011**, 125 (2011).
- [19] B. Czech, L. Lamprou, S. McCandlish, B. Mosk and J. Sully, JHEP **10** 175 (2015).