

Integrálhatóságsértés vizsgálata önkölcsonható skalármező-elméletekben

TDK dolgozat

Fitos Bence

Témavezető: Dr. Takács Gábor
egyetemi tanár
BME Fizikai Intézet
Elméleti Fizika Tanszék



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
2022

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni korábbi témavezetőmnek, Hódsági Kristófnak a rengeteg időt és energiát, amit nekem szentelt, az ő támogatása, iránymutatása és hasznos tanácsai nélkül ezen dolgozat nem valósulhatott volna meg.

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Takács Gábornak a téma feldolgozásában nyújtott sok segítségért, iránymutatásért és a szemléletformáló konzultációkért, oktatói munkája komoly hatással volt a kvantumfizikához kötődő viszonyomra és fizikai szemléletemre.

A dolgozat a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatással készült. Fitos Bence munkáját a Kulturális és Innovációs Minisztérium Új Nemzeti Kiválóság Programjának keretében az ÚNKP-22-2-II-BME-24 számú ösztöndíj támogatta, a kutatás feltételeihez pedig az NKFIH K138606 OTKA pályázata, valamint a Kvantuminformatika Nemzeti Laboratórium járult hozzá.



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI
ÉS INNOVÁCIÓS HIVATAL



Új Nemzeti
Kiválóság Program

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Spektrumstatisztika	3
2.1. Kvantumos integrálhatóság és káosz	3
2.2. A spektrumstatisztika vizsgálata	4
2.2.1. Brody-eloszlás	4
2.2.2. Az η paraméter	5
2.2.3. Egymást követő szintarányok	5
3. Csonkolt Hamiltoni módszer	6
3.1. Szabad bozonikus bázis és csonkolás	6
3.2. Numerikus megvalósítás	8
4. THA konvergenciájának vizsgálata és fejlesztése	9
4.1. Renormálhatóság	9
4.2. Vezető rendű korrekciók a ϕ^4 és ϕ^6 elméletben	10
4.3. Az ellentagok numerikus ellenőrzése	12
5. Spektrumstatisztika numerikus vizsgálata	14
5.1. Módszertan	14
5.2. Eredmények	20
6. Összefoglalás és kitekintés	23
A. Perturbatív korrekciók a ϕ^6 elméletben	24

1. Bevezetés

Napjaink fontos kutatási területét képezi az alacsonydimenziós kvantummező-elméletek statisztikus vizsgálata, melyekben a kvantumos integrálhatóság sokrétű következményei tanulmányozhatók. Az integrálhatóság számos megkötést ad a rendszer egyensúlyi és nemegyensúlyi dinamikájára, melyek az integrálhatóság megsértésével megszűnnek, és kaotikus viselkedés lesz megfigyelhető. Gyengén perturbált rendszerek kaotikus dinamikájának megértéséhez célszerű az adott perturbáció integrálhatóságsértő tulajdonságait megvizsgálni és karakterizálni.

Egy kvantumos rendszer integrálhatóságának lenyomatai megjelennek az energiaspektrum statisztikus tulajdonságaiban. Az energiaspektrum integrálható esetben Poisson [1, 2], nem-integrálható esetben (időtükrozésre invariáns Hamilton-operátort feltételezve) Wigner–Dyson eloszlást követ [2, 3].

Véges térfogatban (L) egy integrálhatóságsértő perturbációt bekapcsolva a Poisson és Wigner–Dyson statisztikák közti átmenet folytonosan valósul meg, azaz arra számítunk, hogy van egy folytonos *crossover* a két statisztika között. A térfogatot növelve a crossover egyre élesebb lesz, végtelen rendszerméret esetén akármilyen kis nem-integrálható perturbációt bekapcsolva az átmenet hirtelen megtörténik. Véges térfogatban a statisztikus átmenethez tartozik egy crossover csatolás. Ezen statisztikus átmenetet rácsmodellek esetén már tanulmányozták, mely során megvizsgálták a crossover csatolásokat a térfogat függvényében. Általános vizsgálatok mutatják, hogy gap nélküli rendszerre tipikusan L^{-3} -as térfogatskálázás adódik [4, 5], azonban új kutatások során találtak olyan perturbációkat is, ahol ennél gyengébb, L^{-2} illetve L^{-1} -es skálázást tapasztaltak [6, 7]. A [6] cikkben ezen felül a gap-es esetet is megvizsgálták, ahol szintén találtak különbséget bizonyos perturbációkhoz tartozó crossover csatolás véges-méret skálázásai között. Mindez motiválja, hogy az adott elmélethez tartozó perturbációk integrálhatóságsértésének erősségét jellemezzük. Ezen dolgozat hasonló megfontolások útján halad, újdonsága azonban, hogy rácsmodell helyett térelméletet vizsgálunk.

Alacsonydimenziós kvantumtérelméletek paradigmaticus példája az 1+1 dimenziós tömeges bozonikus mezőelmélet, mely egyszerű megfogalmazhatósága ellenére mély betekintést enged a kvantumtérelméletek komplex egyensúlyi és nemegyensúlyi dinamikájába. A vizsgálataim alapjául két nem-integrálható perturbáció, a ϕ^4 és ϕ^6 kölcsönhatások szolgálnak, melyek mind numerikus, mind analitikus eszközökkel eredményesen kezelhetők. A vizsgált térelméletek spektrumának kiszámításához az úgynevezett csonkolt Hamiltoni módszert (Truncated Hamiltonian Approach, THA) használok, mely egy, a Hilbert-tér csonkolásán alapuló nemperturbatív numerikus eljárás. A renormálási csoport elgondolásait követve a THA pontossága javítható, az erre vonatkozó számítások ϕ^4 -elmélet esetén a [8, 9] szakirodalmakban megtalálhatók. Ezen számítások kiterjesztése a ϕ^6 -elméletre fontos részét képezte a kutatásomnak [10].

A dolgozat célja a ϕ^4 és ϕ^6 perturbációk integrálhatóságsértésének összehasonlítása [11] a crossover csatolás véges-méret skálázása alapján. Ehhez először a 2. fejezetben összefoglaljuk az integrálható és nem-integrálható spektrumstatisztikákra vonatkozó főbb gondolatokat, illetve kitérünk azok numerikus karakterizálására is. Ezt követően a 3. fejezetben bemutatom a csonkolt Hamiltoni módszert és röviden szót ejtek annak megvalósításáról. A THA konvergenciájáról és fejlesztéséről a 4. fejezetben lesz szó, ahol többek közt bemutatom a renormálási csoport megközelítéssel meghatározott ellentagokat és numerikusan demonstráljuk azok hatékonyságát. Végül az 5. fejezetben végigjárjuk

az integrálhatóságsértés karakterizációjára irányuló módszertan lépéseit, és ezeket megvalósítva bemutatom és diszkutálom a kapott eredményeket.

2. Spektrumstatisztika

A kvantumos integrálhatóság és káosz vizsgálata egy aktívan kutatott, de, a klasszikussal ellentétben, kevésbé kiforrott terület, és bár számos megközelítése létezik [12], nincs egységes, általánosan elfogadott definíciója. Dolgozatomban, Michael Berry elgondolásait követve, az integrálhatóságot az energiaspektrum statisztikus tulajdonságai alapján jellemzem. Ebben a fejezetben bemutatom az integrálható elméletek esetén jellemző Berry–Tabor sejtést, valamint a kaotikus rendszerek statisztikus leírására alkalmas random mátrix elmélet alapjait. A fejezet második részében szó lesz három olyan mérőszámról, melyekkel a kvantumos integrálhatóság karakterizálható, és melyek később a numerikus vizsgálatok alapjait fogják képezni.

2.1. Kvantumos integrálhatóság és káosz

A spektrumstatisztika vizsgálata érdekében mindenekelőtt külön kell választanunk a modellre jellemző szimmetriákhoz tartozó szimmetriaszektorokat. A vizsgálataink alapjául egy, a „triviális” szimmetriáktól (transzláció-invariancia, diszkrét szimmetriák) mentes szimmetriaszektor szolgál.

A kvantumos integrálhatóság - a klasszikushoz hasonlóan - összefüggésbe hozható megfelelő mennyiségű mozgásállandó jelenlétével. Ezek megléte miatt a spektrum egyes energiaszintjei - mint valószínűségi változók - nem csatolódhatnak, tehát statisztikus értelemben függetlenek. Kis energiaablakban vizsgálódva, ahol közel állandó az állapotsűrűség, az egymástól függetlenül, véletlenszerűen elhelyezett energiaszintek Poisson eloszlást mutatnak - ez a Berry–Tabor sejtés [1, 2]. Ekkor a szomszédos energiaszintek távolsága (ΔE) exponenciális eloszlású

$$P_{\text{Poi}}(\Delta E) \propto e^{-\omega \Delta E}, \quad (2.1)$$

ahol ω az állapotsűrűség. Megjegyezzük, hogy bár a Berry–Tabor sejtés nem bizonyított, mégis a legtöbb sok szabadsági fokú kvantumrendszerre jó statisztikus leírást ad.

Nem-integrálható modellek vizsgálatához Wigner és Dyson megközelítését követjük. Tekintsünk egy kis energiaablakot, ahol az állapotsűrűség jó közelítéssel állandó. Ekkor, egy általánosan választott bázisban felírva (tipikusan pozíció, vagy impulzus bázist választva) a Hamilton-operátor egy random mátrixként modellezhető. Más szavakkal, azt várjuk, hogy a spektrum statisztikus tulajdonságai leírhatók random mátrix elmélet segítségével.

Az általam vizsgált tömeges bozonikus térelmélet Hamilton-operátora impulzus bázisban felírva egy valós szimmetrikus mátrix (időtükrozésre invariáns). Kézenfekvő (széles körben használt, a bázisvektorokra nézve rotáció-invariáns és numerikusan is jól kezelhető) választás a mátrix (H) elemeinek, mint valószínűségi változóknak együttes eloszlására az úgynevezett *normális ortogonális sokaság* (Gaussian Orthogonality Ensemble, GOE)

$$P(H) \propto \exp \left[-\frac{1}{2a^2} \text{Tr} (H^2) \right], \quad (2.2)$$

ahol egy a konstans, mely karakterizálja az energiaspektrum skáláját [2, 3]. Ekkor kiszámítható az energiaspektrum elemeinek ($\{E_j\}$) együttes eloszlása

$$P(\{E_j\}) \propto \prod_{i < j} |E_i - E_j| \prod_k e^{-E_k^2/2}, \quad (2.3)$$

melyet Wigner-Dyson eloszlásnak nevezünk. Ennek ismeretében a szomszédos energiaszintek távolságának ($s = \omega \Delta E$) eloszlására az alábbi közelítő képletet írhatjuk fel

$$P_{\text{GOE}}(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right), \quad (2.4)$$

mely formulát *Wigner-surmise*-nak (*Wigner-feltevés*nek) hívunk.

Megjegyezzük, hogy a (2.3) eloszlás számos kvantum rendszerben megfigyelhető. A legismertebb, természetben is fellelhető példája a nehéz atommagok spektrumai. Emellett számos olyan kvantum rendszerre, melynek klasszikus megfelelője kaotikus, megmutatták, hogy szintén Wigner-Dyson spektrumstatisztikát mutatnak. Mindezek alapján jól motivált, hogy (valós Hamilton-operátorokkal leírható rendszerekre) ezen spektrumstatisztikát azonosítsuk a nem-integrálható viselkedéssel.

A leírtak alapján világos, hogy lényeges különbséget várunk integrálható és nem-integrálható elméletek spektrumainak statisztikus tulajdonságai közt. Érdekes külön megemlíteni a (2.1) és (2.4) eloszlások $\Delta E \rightarrow 0$ határesetét, ahol előbbi 1-hez, utóbbi 0-hoz tart. Integrálható esetben ugyanis az energiaszinteket egy, a rendszerre jellemző paraméter (például a térfogat) függvényében ábrázolva - mivel egymástól függetlenek - szint-kereszteződéseket (level-crossings) kapunk. Azonban, nem-integrálható perturbációt bekapcsolva ezen degenerált pontok felhasadnak, és szint-elkerülések lesznek megfigyelhetők.

Végezetül szót kell ejtenünk a (2.2) eloszlás, mint közelítés helyességéről és teljesítőképességéről. A vizsgált kvantumtérelméletben a Hamilton-operátor lokális operátorok integráljaként áll elő. A lokalitás miatt tehát - legalábbis koordináta bázisban - a Hamilton-operátort egy *ritka mátrixként* (sparse matrix) reprezentálhatjuk, azaz az elemei túlnyomó többsége nulla értéket vesz fel. A [3] cikkben megmutatták, hogy ezen feltétel mellett a (2.3) eloszlás csak a spektrum „közepén” használható, a spektrum szélei ettől eltérnek. Ezen megkötés ugyanakkor világos, hiszen lokális elméletek legalacsonyabb gerjesztései kvázirészecskék formájában valósulnak meg, melyek struktúrája nem a GOE-eloszlást követi. A spektrum felső határát - mint azt később látni fogjuk - egy, a numerikus számításokhoz szükséges levágási energia fogja meghatározni, melyhez közeli energiaszintek a pontatlanságuk miatt nem megbízhatók. Így ezek tudatában kell a vizsgálandó energiaablakot megválasztani.

2.2. A spektrumstatisztika vizsgálata

Az előző fejezetben láthattuk az integrálható és nem-integrálható rendszerekre elvárt spektrumstatisztikát. A vizsgáldásunk középpontjában az integrálhatóság megsértése áll, melyre a spektrumstatisztikák nyelvén egy Poisson és Wigner-Dyson közti *crossover*-t várunk. Ezen crossover karakterizálására olyan mérőszámokra van szükség, melyek egy spektrumhoz hozzárendelnek egy, az adott rendszer integrálhatóságára jellemző számot. Ezen mérőszám definiálása nem egyértelmű, ezért a kiértékelés során három különbözőt is alkalmazok, melyeket most röviden ismertetek.

2.2.1. Brody-eloszlás

A probléma egyik kézenfekvő megközelítése a szomszédos energiaszintek közti távolság eloszlásának vizsgálata. Ehhez a spektrum szinttávolságaiból hisztogramot készítünk, melyet (2.1) és (2.4) eloszlásokkal vetünk össze.

A hisztogram értékelésének egy módja lehet az úgynevezett Brody-eloszlás illesztése [4], mely alakja a következő:

$$P_\beta(s) = (\beta + 1)bs^\beta \exp(-bs^{\beta+1}), \quad (2.5)$$

ahol

$$b = \Gamma\left(\frac{\beta + 2}{\beta + 1}\right)^{\beta+1}. \quad (2.6)$$

A Brody-eloszlás a β paraméter függvényében interpolál a Poisson és a Wigner-surmise között (előbbi $\beta = 0$, utóbbi $\beta = 1$ -nek felel meg), mely paraméter függvényillesztéssel meghatározható.

2.2.2. Az η paraméter

Az előző gondolatmenethez hasonló módon itt is a szinttávolságok eloszlását vesszük alapul, melyet jelöljünk $P(s)$ -sel. Ekkor vezessük be következő paramétert [1, 13]

$$\eta = \frac{\int_0^\infty ds |P(s) - P_{\text{Poi}}(s)|}{\int_0^\infty ds |P_{\text{GOE}}(s) - P_{\text{Poi}}(s)|}. \quad (2.7)$$

A Brody-eloszlás β paraméteréhez hasonló módon, $\eta = 0$ a Poisson, míg $\eta = 1$ a Wigner-surmise-nak felel meg.

2.2.3. Egymást követő szintarányok

Az egymást követő szintarányok (consecutive level ratios) vizsgálata egy másik megközelítés, melyet a [14] cikk motivál. Jelölje az egyes (normált) szinttávolságokat $s_n = \omega(E_n)\Delta E_n$, ekkor bevezetjük a következő mennyiségeket

$$r_n := \frac{s_n}{s_{n-1}}, \quad \tilde{r}_n := \min(r_n, 1/r_n). \quad (2.8)$$

Az $\tilde{r}$ paramétert az összes energiaszintre kiátlagoljuk, és az így kapott $\langle \tilde{r} \rangle$ paraméterrel jellemezzük a spektrumot; világos, hogy $0 \leq \langle \tilde{r} \rangle \leq 1$.

Integrálható esetben, exponenciális eloszlást feltételezve, $\langle \tilde{r} \rangle$ érték könnyen számolható

$$\langle \tilde{r}_{\text{Poi}} \rangle = 2 \log(2) - 1 \approx 0.386. \quad (2.9)$$

Nem-integrálható esetben a számítások kevésbé triviálisak, (2.3)-ból levezethető [15]

$$\langle \tilde{r}_{\text{GOE}} \rangle = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.534. \quad (2.10)$$

Ezen mérőszám tehát szintén karakterizálja az integrálható - nem-integrálható átmenetet, mely határesetek az $\langle \tilde{r}_{\text{Poi}} \rangle$ illetve $\langle \tilde{r}_{\text{GOE}} \rangle$ értékeknek felelek meg. Az $[\langle \tilde{r}_{\text{Poi}} \rangle, \langle \tilde{r}_{\text{GOE}} \rangle]$ tartományt a $[0,1]$ intervallumra affin módon leképezhetjük, az így kapott $\langle \tilde{r}' \rangle$ értékek az előző két paraméterrel jól összehasonlíthatók. Megjegyezzük, hogy $\langle \tilde{r}' \rangle$ a spektrumból direkt módon számolható, előnye, hogy nem kell hisztogramot készíteni (melyből számolt mennyiségek függhetnek a bin-szélességtől).

3. Csonkolt Hamiltoni módszer

Ebben a fejezetben röviden ismertetem az általam használt kvantumtérelméleti modellt, illetve azt a numerikus eljárást, mellyel az számításokat végeztem. Először bemutatom a szabad tömeges skalármező-elméletet és a hozzá tartozó, a numerikus számításokhoz is használt bozonikus bázist. Szó lesz a csonkolási eljárásról, illetve a szimmetriaszektorok megfelelő megválasztásáról. Végezetül röviden összefoglalom a numerikus eljárás főbb elemeit és sarokköveit. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban természetes mértékegységekben dolgozunk: $c = \hbar = 1$.

3.1. Szabad bozonikus bázis és csonkolás

A szabad tömeges skalármező-elmélet Hamilton-operátora

$$H_0 = \frac{1}{2} \int dx : ((\partial\phi)^2 + m^2\phi^2) : . \quad (3.1)$$

Annak érdekében, hogy diszkrét spektrumot kapjunk, az elméletet véges térfogatban (L) tekintjük, ekkor az előbbi kifejezésben szereplő integrált a $[0, L]$ intervallumon értjük. A térfogatra periodikus határfeltételeket szabunk ki, mellyel az egyrészecske sajátállapotok $e^{ipx}/\sqrt{L}$ alakúak lesznek, ahol $p_k = 2\pi k/L$ és $k \in \mathbb{Z}$. Véges térfogatban a kvantummező-operátor a következő alakba írható

$$\phi(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_{p_k}L}} (a_k e^{ip_k x} + a_k^\dagger e^{-ip_k x}), \quad (3.2)$$

ahol $\omega_p = \sqrt{m^2 + p^2}$, valamint az $a_k^\dagger$ és a_k a szokásos bozonikus keltő és eltüntető operátorok:

$$[a_k, a_l] = 0, \quad [a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}. \quad (3.3)$$

A (3.1) kifejezésben a $: \cdot :$ ezen a_k és $a_k^\dagger$ operátorokra vonatkozó normálrendezést jelöli, mellyel a szabad elmélet Hamilton-operátora átírható $H_0 = \sum_k \omega_{p_k} a_k^\dagger a_k$ alakba. Az $a_k^\dagger$ illetve a_k operátorra tekinthetünk úgy, mint amely egy p_k impulzusú részecskét kelt illetve eltüntet. Ekkor a Hamilton-operátor sajátállapotai felírhatók a betöltési szám reprezentáció segítségével

$$|\dots, n_{-1}, n_0, n_1, \dots\rangle, \quad (3.4)$$

ahol $n_k \in \mathbb{N}$ (és $k \in \mathbb{Z}$). Egy ilyen állapoton a keltő és eltüntető operátorok hatása a következő

$$a_k |\dots, n_k, \dots\rangle = \begin{cases} \sqrt{n_k} |\dots, n_k - 1, \dots\rangle & , \text{ ha } n_k > 0, \\ 0 & , \text{ ha } n_k = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

illetve

$$a_k^\dagger |\dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_k + 1} |\dots, n_k + 1, \dots\rangle. \quad (3.6)$$

A numerikus megközelítés alapvető elgondolása, hogy a Hamilton-operátort a H_0 sajátbázisában, mint mátrix kezeljük. Hogy a mátrix numerikusan kezelhető legyen, a

bázisból csak véges sok elemet tartunk meg. Ehhez kijelölünk egy úgynevezett levágási energiát (Λ), és csak azon báziselemeket tartjuk meg, melyek H_0 sajátenergiájuk kisebb, mint Λ , azaz (3.4) alakú vektorok esetén

$$E_0 = \sum_k n_k \omega_{p_k} < \Lambda. \quad (3.7)$$

Tehát ezen levágási energia alapján csonkoljuk a Hilbert-teret. A csonkolt bázisban a Hamilton-operátort egy (véges) mátrixként reprezentálhatjuk, melyet diagonalizálva megkapjuk az energiaspektrumot. Megjegyezzük, hogy a csonkolás értelemszerűen valamelyest befolyásolja a spektrumot, ennek pontosságával és fejlesztésével az 5. fejezetben foglalkozunk.

A rendszer rendelkezik bizonyos szimmetriákkal, melyek felosztják az állapotteret szimmetriaszektorokra. Ezen szimmetriaszektorok közt a Hamilton-operátor nem közvetít, azaz a szektorokra nézve blokk-diagonális. A diagonalizálást célszerű egyetlen ilyen blokkra elvégezni, ezért a továbbiakban kiválasztunk egy szimmetriaszektor, melyben vizsgálódunk. Megjegyezzük, hogy az előző fejezet spektrumstatisztikával kapcsolatos megfontolásai is csupán egy, teljesen redukált szimmetriaszektorra állják meg a helyüket. A továbbiakban azon szimmetriaszektor vizsgálgjuk, melynek a szabad vákuum $|0\rangle = |\dots, 0, 0, 0, \dots\rangle$ is eleme.

Az általunk vizsgált Hamilton-operátorok felírhatók a következő alakba

$$H_0 + \sum_n g_n V_n, \quad (3.8)$$

ahol n páros (egész) szám (a numerikus vizsgálatok során $0 \leq n \leq 6$), a g_n -ek az úgynevezett *csatolások* (couplings), melyek karakterizálják a V_n kölcsönhatások erősségét, mely kölcsönhatásokat a következőképpen definiáljuk

$$V_n = \int dx : (\phi(x))^n :. \quad (3.9)$$

Az így kapott teljes Hamilton-operátorhoz három különböző szimmetria tartozik.

Az első az impulzusmegmaradás, mely felosztja a szabad bázist a

$$P = \sum_k n_k p_k \quad (3.10)$$

sajátértékekhez tartozó impulzusszektorokra. A számolások során a $P = 0$ -ás szektorban dolgozunk.

A második szimmetria a paritás, mely az $x \rightarrow -x$ szimmetriából adódik, és melyhez tartozó reprezentáns operátor a báziselemeken

$$\mathbb{P}|\dots, n_{-1}, n_0, n_1, \dots\rangle = |\dots, n_1, n_0, n_{-1}, \dots\rangle \quad (3.11)$$

módon hat. Ezen operátor két sajátértéke a ± 1 , melynek megfelelően az állapotteret két részre, egy szimmetrikus (+1) és egy antiszimmetrikus (−1) részre osztja. A számolások során a szimmetrikus altérben dolgozunk.

Az utolsó szimmetria a $\phi \rightarrow -\phi$, az úgynevezett Z_2 szimmetria, mely abból adódik, hogy a ϕ mezőnek csak páros hatványai jelennek meg a Hamilton-operátorban. Ehhez a szimmetriához is két sajátaltér tartozik: a páros és páratlan részecskeszámú szimmetriaszektor. A számítások során a páros részecskeszámú altérben dolgozunk, kivéve a 4.3.

fejezetben, ahol a fizikai tömeg korrekciójának számításához mindkét szektort figyelembe kell vennünk.

Végül megjegyezzük, hogy a végtelen térfogatú elmélet fizikai szempontból ekvivalens megszorítása véges térfogatra maga után von bizonyos véges-méret korrekciókat, melyek hozzáadódnak a (naiv) Hamilton-operátorhoz [8, 10]. Ezen korrekciók azonban a rendszerméret növelésével exponenciálisan lecsengenek, az általunk vizsgált térfogatokon a járulékuk elhanyagolható.

3.2. Numerikus megvalósítás

A numerikus implementáció első lépése a szabad bozonikus bázis generálása. Adott rendszerméret (L) és levágási energia (Λ) mellett a megfelelő szimmetriaszektor csunkolt bázisának meghatározása egy kombinatorikai feladat. A 3.1. táblázatban összefoglaltuk a szabad bozonikus bázis méretét néhány levágási energián és térfogaton. Látható, hogy mind a térfogattal, mind a levágási energiával a bázis számossága jelentősen (közel exponenciálisan) nő.

$mL \setminus \Lambda/m$	6	9	12	16	20
8	10	40	152	792	3 774
12	19	112	617	5 267	38 617
16	30	263	2 031	25 484	259 434
24	69	1 076	13 846	314 359	5 406 267
30	116	2 550	44 817	1 449 230	34 289 883

3.1. táblázat. A szimmetrizált szabad bozon bázis számossága különböző levágási energiákon és térfogatokon.

A következő lépés a H_0 és a V_n operátorok mátrixainak meghatározása. A H_0 mátrix a sajátbázisában - értelemszerűen - diagonális, így annak inicializálása triviális. A futásidő optimalizálása érdekében V_n kölcsönhatások mátrixelemeinek meghatározásához először a

$$\hat{V}_n = L \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{l} \sum_{k_1 \leq \dots \leq k_l} \sum_{k_{l+1} \leq \dots \leq k_n} \alpha_l \delta_{0, \sum k} \frac{f(k_1, \dots, k_l) f(k_{l+1}, \dots, k_n)}{\prod_i \sqrt{2L\omega_{p_{k_i}}}} \prod_{j'=1}^l a_{-k_{j'}}^\dagger \prod_{j=l+1}^n a_{k_j} \quad (3.12)$$

kifejezés mátrixelemeit határozzuk meg, ahol $f(k_1, \dots, k_q)$ a $k_1, \dots, k_q$ indexek lehetséges permutációinak száma, valamint $\alpha_l = 1/2$, ha $l = n/2$, és $\alpha = 1$ egyébként. Ekkor

$$V_n = \hat{V}_n + \hat{V}_n^\dagger \quad (3.13)$$

alapján a V_n mátrix már egyszerűen adódik. Megjegyezzük, hogy ezek úgynevezett *ritka* (sparse) mátrixok, vagyis elemeinek túlnyomó része 0.

A bázisgenerálásra és a H_0 valamint az általános V_n mátrixelemek inicializálására `c++`-ben kódot írtam. A kapott mátrixok diagonalizálásához `Matlab`-ot használtam. Megjegyezzük, hogy a számítások időigény szempontjából domináns része a diagonalizálás (még a V_6 mátrix inicializálása mellett is).

4. THA konvergenciájának vizsgálata és fejlesztése

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a csonkolt Hamiltoni módszer pontosságát a levágási energia függvényében. Először szót ejtünk a ϕ^n -típusú elméletek szuperrenormálhatóságáról és a divergenciák elkerüléséről. Ezt követően a renormálási csoport elgondolásait követve megvizsgáljuk, hogyan lehet az eredmények levágási energiától való függését csökkenteni a Hamilton-operátorhoz hozzáadott ellentagok segítségével. Végezetül a módszert numerikus tesztelésnek vetjük alá, mely során megvizsgáljuk a vákuumenergia-sűrűség és a fizikai tömeg korrekciójának pontosságát a levágási energia függvényében.

4.1. Renormálhatóság

A 3. fejezetben bemutattuk a szabad elméletet és azt a bozonikus bázist, mellyel a numerikus számítások során dolgozunk. A vizsgálatunk célja feltérképezni a szabad Hamilton-operátorhoz (H_0) hozzáadott nem-integrálható perturbációk (V) hatását az energiaspektrumra. Ezen a ponton azonban érdemes rámutatni, hogy számos kvantumtérelméleti modell esetében naivan összeadva a H_0 és V operátorokat bizonyos fizikai mennyiségekre az elmélet divergens értéket jósol. Ezen divergenciák kiküszöbölésére számos eszköz és módszertan létezik melyeket összefoglalva renormálásnak nevezünk. A modell renormálhatóságának megértése tehát alapvető fontosságú, hogy a számítások során értelmes eredményre juthassunk.

Tekintsük a következő kölcsönhatást n pozitív egész szám esetén

$$V_n = \int dx : (\phi(x))^n : . \quad (4.1)$$

Ezen operátorral perturbált bozonikus térelméletet ϕ^n -elméletnek nevezzük. A numerikus számítások során az $n = 4$ és $n = 6$ esetekkel foglalkozunk, egyelőre azonban vizsgálódjunk általánosan. Perturbatív megközelítést alkalmazva, a modell renormálhatóságát karakterizálhatjuk a divergens Feynman diagrammok klasszifikálásával [16]. A diagrammokban a divergencia abból adódik, hogy a d^2p integrálok járuléka az UV ($|p| \rightarrow \infty$) tartományban nem konvergens. (Tömeges mezőelméletben IR divergenciák nem lépnek fel.) Tekintsünk egy általános Feynman-diagrammot, jelölje V a csúcsok, P pedig a propagátorok számát. Ekkor a diagramban lévő hurkok száma (azaz a kényszerfeltételek mellett megmaradt d^2p integrálok száma)

$$L = P - V + 1. \quad (4.2)$$

Az integrálok az impulzus második (azaz a téridő dimenziójával), míg a propagátorok az impulzus -2 . hatványával skálázódnak (a csúcsok és külső lábak járuléka nem befolyásolja a konvergenciát). Adott diagram esetén definiáljuk az úgynevezett divergencia-mértéket (D) (degree of divergence) az integrálokra és propagátorokra összegezve a skálázó hatványokat:

$$D = 2L - 2P = 2 - 2V. \quad (4.3)$$

Egy Feynman diagram pontosan akkor konvergens, ha a rá és minden al-diagramjára jellemző divergencia-mérték kisebb, mint nulla. Láthatjuk tehát, hogy azon diagrammok, melyekben a csúcsok száma legalább kettő, konvergensnek maradnak. Egyedül azokban fordul elő divergencia, melyekben egy csúcs van és legalább egy hurok. Ez azt jelenti, hogy csak azon diagrammok lesznek divergensnek, melyekben van olyan propagátor, amely

önmagával köt össze egy csúcsot. Vegyük észre azonban, hogy éppen ezen diagrammokat zárjuk ki, ha, (4.1)-nek megfelelően, normálrendezést írunk elő a ϕ^n operátorra. Ez esetben tehát nincs divergens diagram, így joggal várhatjuk, hogy a V_n kölcsönhatások véges korrekcióval járulnak hozzá a kiszámítani kívánt fizikai mennyiségekhez.

Azon kvantumtérelméleti modelleket, melyekben a divergenciák csak a perturbációszámítás véges rendjéig fordulnak elő, és így a ϕ tetszőleges hatványát, szuperrenormálhatónak nevezzük. Megjegyezzük, hogy ezen tulajdonságban fontos szerepet játszik, hogy 1+1 dimenziós mezőelmélettel dolgozunk.

A ϕ^n -elméletek szuperrenormálhatósága ekvivalens azzal, hogy az adott V_n a renormálási csoport értelmezésében egy *releváns* operátor. A levágási energia növelése, az elmélet fizikai tulajdonságait megtartva, korrekciókat ad a kölcsönhatáshoz; ezen procedúra a csatolások terében egy folyamatot indukál (renormalization group flow). A levágási energia változtatása tehát a csatolások átskálázásával ekvivalens, melyek vezető rendjéről megmutatható, hogy független a kiszámítására alkalmazott sémától. A továbbiakban a végtelen levágási energiához tartozó elméletet tekintjük egzaktnak. A véges levágásból adódó vezető rendű korrekciókat a következő fejezet részben mutatjuk be.

4.2. Vezető rendű korrekciók a ϕ^4 és ϕ^6 elméletben

Térjünk most rá tehát a THA levágásfüggésének vizsgálatára. A csonkolt Hamilton-operátor spektruma általában (ha van csatolás az alacsony- és nagyenergiás báziselemek között) eltér az egzakt spektrum alacsonyenergiás részétől. Az előző fejezet részben azonban láthattuk, hogy a számítások konvergensek az UV tartományban, így arra számítunk, hogy, a levágási energiát (Λ) növelve, a kapott sajátenergiák valamilyen véges értékekhez tartanak. Ebben a fejezet részben megvizsgáljuk ezen konvergencia sebességét, és bemutatok egy eljárást annak fejlesztésére.

Jelölje $\mathcal{H}$ a teljes Hilbert-teret, melyet a csonkolással két részre, egy alacsony- ($\mathcal{H}_l$) és nagyenergiás ($\mathcal{H}_h$) részre osztunk: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_l \oplus \mathcal{H}_h$. Jelölje továbbá H a teljes Hilbert-téren ható Hamilton-operátort. Ekkor a

$$H\psi_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\psi_{\mathcal{E}} \quad (4.4)$$

alakú sajátértékegyenletet a $\mathcal{H}_l$ és $\mathcal{H}_h$ alterekre felbontva a következő alakba írhatjuk

$$\begin{pmatrix} H_{ll} & H_{lh} \\ H_{hl} & H_{hh} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\mathcal{E},l} \\ \psi_{\mathcal{E},h} \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} \psi_{\mathcal{E},l} \\ \psi_{\mathcal{E},h} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Világos, hogy H_{ll} nem más, mint a csonkolt Hamilton-operátor (H_{trun}). Most tegyük fel, hogy H -t felírhatjuk $H_0 + V$ alakba, ahol H_0 diagonális. Ekkor, az előző egyenletrendszer az alacsonyenergiás spektrumra rendezve, a következőt kapjuk

$$(H_{\text{trun}} + \Delta H)\psi_{\mathcal{E},l} = \mathcal{E}\psi_{\mathcal{E},l}, \quad \text{ahol} \quad (4.6)$$

$$\Delta H = -V_{lh}(H_0 + V_{hh} - \mathcal{E})^{-1}V_{hl} = -V_{lh}(H_0 - \mathcal{E})^{-1}V_{hl} + \mathcal{O}(V^3). \quad (4.7)$$

Tehát, hogy visszakapjuk az eredeti $\mathcal{E}$ sajátértéket, a csonkolt Hamilton-operátorhoz hozzá kell adnunk egy korrekciós tagot (ΔH).

Tegyük fel, hogy a kölcsönhatás

$$V = \sum_n g_n V_n \quad (4.8)$$

alakú, ahol a V_n operátorokat a (4.1) egyenlet definiálja. Ekkor a ΔH operátor vezető rendű járuléka a következő

$$\Delta H = - \sum_k \kappa_k V_k, \quad \text{ahol} \quad (4.9)$$

$$\kappa_k = \sum_{n \geq m} g_n g_m \int_{\Lambda}^{\infty} dE \frac{\mu_{nmk}(E)}{E - \mathcal{E}}.$$

A ϕ^2 , ϕ^4 és ϕ^6 kölcsönhatáshoz tartozó μ_{nmk} függvényeket (4.10)-ben foglaltuk össze ([10]-nak megfelelően). A részletes számítások és a μ_{nmk} függvények általános definíciója megtalálható [8] és [10]-ben.

$$\begin{aligned} \mu_{220}(E) &= \frac{1}{\pi E^2}, \\ \mu_{440}(E) &= \frac{3}{\pi^3 E^2} \left[6(\log E/m)^2 - \frac{\pi^2}{2} \right], \\ \mu_{660}(E) &= \frac{675}{2\pi^5 E^2} \left[(\log E/m)^4 - \frac{\pi^2}{2} (\log E/m)^2 + 2\zeta(3) \log E/m + \frac{\pi^4}{80} \right], \\ \mu_{422}(E) &= \frac{12}{\pi E^2}, \\ \mu_{442}(E) &= \frac{72 \log E/m}{\pi^2 E^2}, \\ \mu_{642}(E) &= \frac{90}{\pi^3 E^2} \left[6(\log E/m)^2 - \frac{\pi^2}{2} \right], \\ \mu_{662}(E) &= \frac{1350}{\pi^4 E^2} \left[2(\log E/m)^3 - \frac{\pi^2}{2} \log E/m + \zeta(3) \right], \\ \mu_{624}(E) &= \frac{30}{\pi E^2}, \\ \mu_{444}(E) &= \frac{36}{\pi E^2}, \\ \mu_{644}(E) &= \frac{720 \log E/m}{\pi^2 E^2}, \\ \mu_{664}(E) &= \frac{675}{\pi^3 E^2} \left[6(\log E/m)^2 - \frac{\pi^2}{2} \right], \\ \mu_{646}(E) &= \frac{180}{\pi E^2}, \\ \mu_{666}(E) &= \frac{1800 \log E/m}{\pi^2 E^2}, \\ \mu_{668}(E) &= \frac{225}{\pi E^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Vegyük észre, hogy ΔH függ $\mathcal{E}$ -től. Egyetlen sajátérték kiszámítása esetén $\mathcal{E}$ -t (iteratív módon) meghatározhatjuk, azonban nincs direkt analógia abban az esetben, ha több sajátértéket szeretnénk egyszerre kiszámolni. Azonban az eljárás azon sajátértékek meghatározásához is jól használható, melyek $\mathcal{E}$ közelében vannak, ezért, amikor a számítások során egy vékony energiaablakban lévő sajátértékeket szeretnénk meghatározni, $\mathcal{E}$ -t az energiaablak közepének választjuk.

Láthatjuk, hogy a ΔH vezető rendű járuléka $\mathcal{O}(g^2/\Lambda^2)$ szerint skálázódik. Megjegyezzük azonban, hogy a (4.9)-ben megadott kifejezés nem a teljes $\mathcal{O}(g^2)$ -es korrekció. A csonkolás sérti a lokalitást, így ez a tulajdonság ($\mathcal{E}$ -n túl is) megjelenik az ellentagokban is: esetünkben a vezető rendű taghoz képest egy m/Λ rendű járulékként. Azonban ezen extra korrekciók a levágási energiához közeli tartományon komplikációkat okoznak (Λ közelében divergálnak, lásd: [10]), ezért a számításaim során ezeket nem vettem figyelembe.

4.3. Az ellentagok numerikus ellenőrzése

Az előzőekben láthattuk a csonkolt Hamiltoni módszert és annak fejlesztési lehetőségeit. Ebben a fejezet részben a THA-t numerikus vizsgálatnak vetjük alá demonstrálva annak pontosságát és az ellentagok szükségességét. A ϕ^4 -elmélet esetén a csonkolt Hamiltoni módszert már részletesen megvizsgálták [8, 10, 17], ezért most a ϕ^6 perturbációval foglalkozunk.

A ϕ^6 elmélet Hamilton operátora

$$H = H_0 + g_6 \int dx : (\phi(x))^6 : . \quad (4.11)$$

A csonkolt Hamiltoni módszerrel kiszámoltam $mL = 10$ -es térfogatban a vákuumenergiát (a spektrum legkisebb eleme, E_0) és a fizikai tömeget (a vákuumenergia és a legkisebb gerjesztett állapot közötti gap, M) a g_6 csatolási állandó függvényében. A számításokat elvégeztem az ellentagok nélküli, „csupasz” (*bare*), illetve az ellentagokkal javított Hamilton-operátorral is. Az eredményeket a 4.1. ábrán szemléltettem. A vákuumenergia és fizikai tömeg korrekcióját analitikus módon, perturbációs számítás segítségével is megkaphatjuk. Az A. függelékben bemutatom a vezető rendű korrekciók kiszámítására vonatkozó számolásokat, az így kapott eredmények szintén szerepelnek az ábrán. A perturbációs számítást elvégezhetjük továbbá numerikusan is, a $g_6 V_6$ és az ellentagokat tekintve perturbáló operátornak (V). Ekkor V -t numerikusan inicializáljuk, de $H_0 + V$ egzakt diagonalizálása helyett az

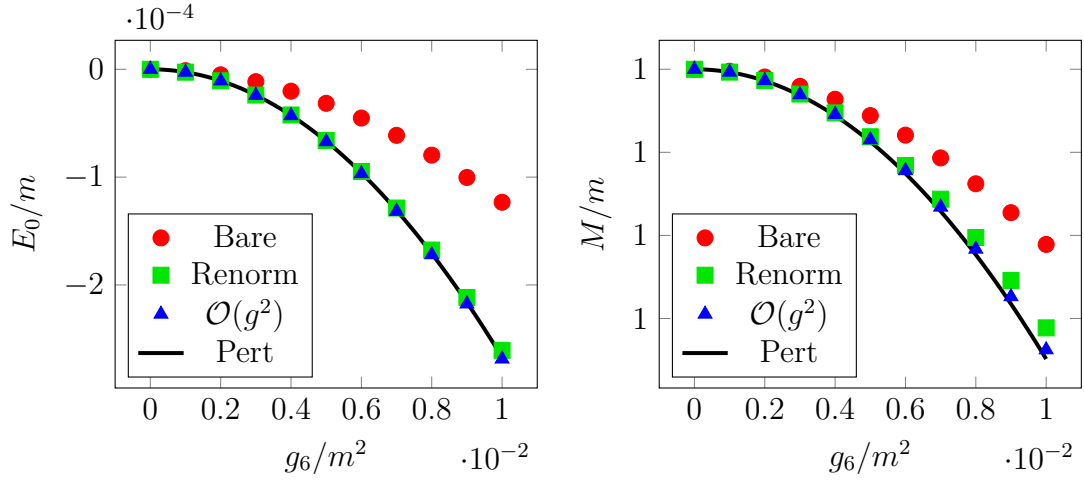
$$E_j^{(2)} = E_j^{(0)} + \langle \varphi_j | V | \varphi_j \rangle + \sum_{k: E_k^{(0)} < \Lambda} \frac{|\langle \varphi_k | V | \varphi_j \rangle|^2}{E_j^{(0)} - E_k^{(0)}} \quad (4.12)$$

másodrendű perturbációs számítás szerint számoljuk ki az energiakorrekciókat (ahol Λ a levágási energia, $E_j^{(0)}$ a j -edik H_0 sajátérték és $|\varphi_j\rangle$ a hozzá tartozó sajátvektor). Az így kapott vákuumenergia és tömegkorrekciót szintén feltüntettük az ábrán ($\mathcal{O}(g^2)$).

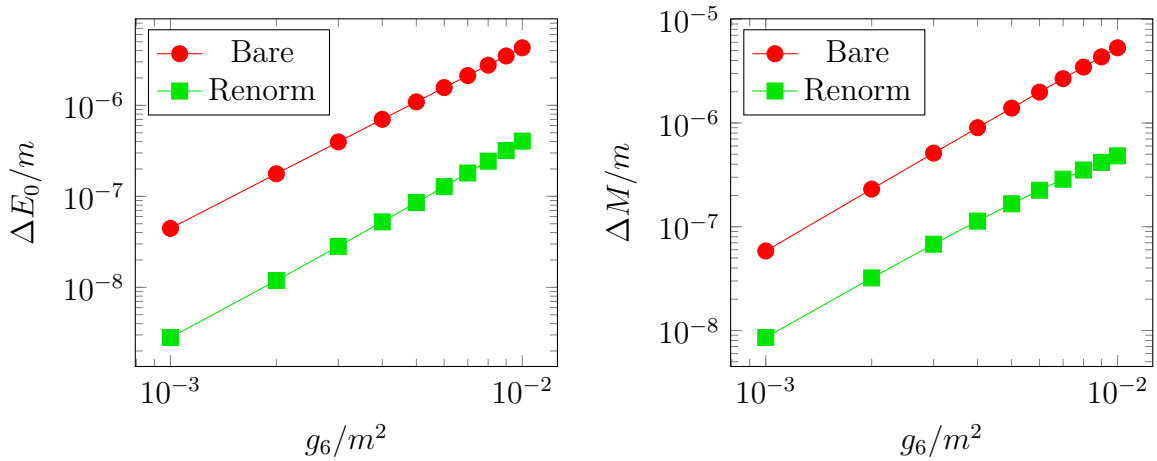
Láthatjuk, hogy a renormált THA, illetve az analitikus és numerikus perturbációs számítás eredményei jó egyezést mutatnak, mely megerősíti a számításaink helyességét. A nem-renormált eset azonban jelentős eltérést mutat, mely indokoltá teszi az ellentagok használatát, illetve jelzi azok teljesítőképességét.

Végezetül összehasonlítjuk két közeli levágási energián ($\Lambda_1 = 24m$ és $\Lambda_2 = 25m$) kapott vákuumenergiák és tömegkorrekciók közötti különbségeket renormált és nem-renormált THA mellett. Az $mL = 10$ -es térfogaton számolt különbséget a kölcsönhatás erőssége függvényében a 4.2. ábrán szemléltettem. Láthatjuk mindkét esetben, hogy a renormált THA-ból kapott eredmények körülbelül egy nagyságrenddel kevésbé érzékenyek a levágási energia változtatására, mint a nem renormáltak.

Tehát numerikusan is megerősíthetjük, hogy, az előző fejezet részben leírtakkal összhangban, a renormálási csoport megközelítéssel kapott ellentagok javítják a levágási energia függvényében vett konvergenciát és így növelik a kapott eredmények pontosságát.



4.1. ábra. A vákuumenergia (E_0) és a fizikai tömeg (M) renormált (*Renorm*) és nem renormált (*Bare*) THA-val, illetve analitikus (*Pert*) valamint numerikus ($\mathcal{O}(g^2)$) perturbációszámítással a g_6 csatolás függvényében. Rendszerméret: $mL = 10$, THA levágási energia: $\Lambda = 25m$, numerikus perturbációszámításnál használt levágási energia: $\Lambda = 7.5m$; $\mathcal{E}$ paramétert $0.0m$ és $1.0m$ -nek választottuk a megfelelő sajátértékek számításához.



4.2. ábra. $\Lambda_1 = 24m$ és $\Lambda_2 = 25m$ levágási energiák mellett számolt vákuumenergia és tömegkorrekció különbségek ($\Delta E_0 = |E_0^{\Lambda_2} - E_0^{\Lambda_1}|$ és $\Delta M = |M^{\Lambda_2} - M^{\Lambda_1}|$) renormált (*Renorm*) és nem renormált (*Bare*) THA-val számolva a g_6 csatolás függvényében.

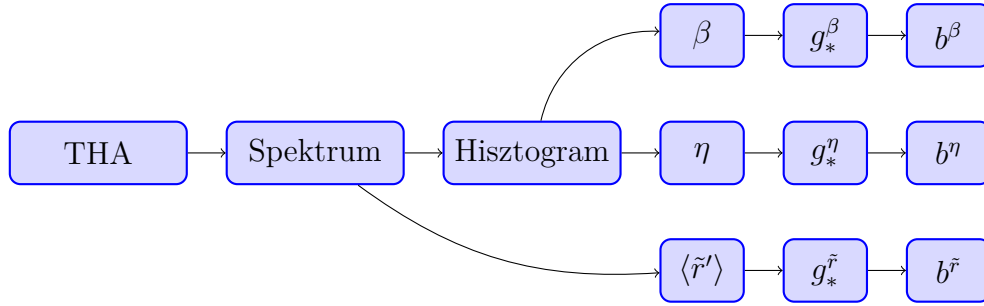
5. Spektrumstatisztika numerikus vizsgálata

A 2. fejezetben tárgyaltuk az integrálhatóság és a spektrumstatisztika kapcsolatát, mely megfontolásokra alapozva most megvizsgáljuk az integrálhatóság sérülését. A numerikus számításokhoz az előző fejezetekben tárgyalt csonkolt Hamiltoni módszert használom. Először ismertetem az integrálhatóságsértés kvantitatív leírására vonatkozó megfontolásokat, alkalmazva a 2.2. fejezetben bevezetett mérőszámokat. A központi kérdés az integrálhatóságsértő viselkedés rendszerméret-függése, mely karakterizálásához több lépésben jutunk el. Ezt követően bemutatom a kapott eredményeket, melyek segítségével összehasonlítjuk a ϕ^4 és ϕ^6 perturbációk integrálhatóságsértésének erősségét. Végezetül diszkutálom a módszer hatékonyságát és teljesítőképességét ezen problémakör vizsgálatára vonatkozóan.

5.1. Módszertan

A 2. fejezetben láthattuk, hogy integrálható elméletek spektruma Poisson, míg nem integrálható elméleteké Wigner–Dyson statisztikát követ. Véges rendszerekben, nem-integrálható perturbációt bekapcsolva, a két statisztika közötti átmenet folytonosan valószínű. A [6] cikk motiválja, hogy ezen perturbációk integrálhatóságsértésének erősségét karakterizáljuk, melyet a Poisson és Wigner-Dyson statisztikák közti átmenetek rendszermérettel való skálázása alapján teszünk meg.

Ezen átmenet térfogatfüggésének karakterizálása többlépéses folyamat, melyet az 5.1. folyamatábra szemléltet. Először a spektrumból kiszámoljuk a 2.2. fejezetben bevezetett β , η és $\langle \tilde{r}' \rangle$ paramétereket. Ezt követően meghatározzuk az adott térfogathoz tartozó crossover csatolást (g_*), melynek a térfogatfüggését vizsgálva megkapjuk a térfogat-skálázást karakterizáló b paramétert (melyet az (5.2) egyenletben definiálunk).

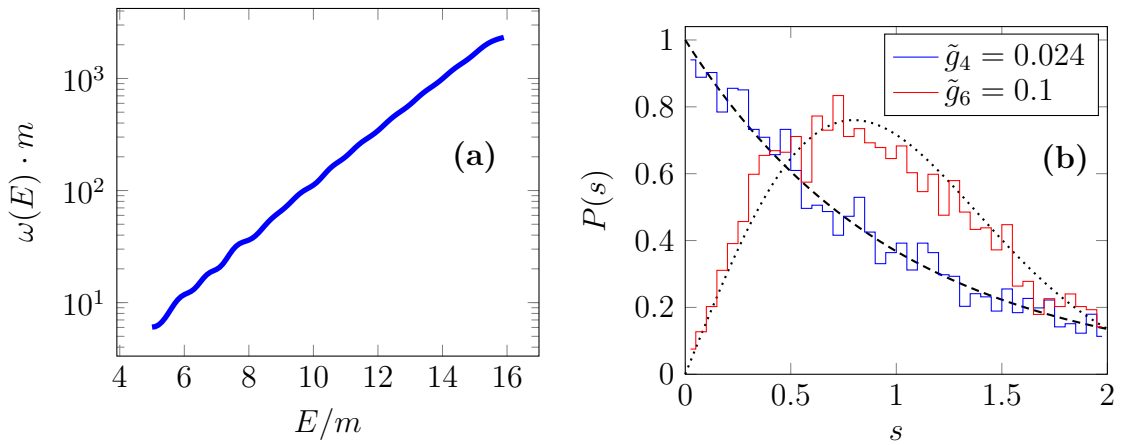


5.1. ábra. A b skálázási paraméter meghatározásának folyamatábrája.

Első lépésként tehát a THA segítségével kiszámoljuk a spektrumot egy adott energiaablakban. Az ellentagokhoz használt $\mathcal{E}$ paramétert az energiaablak közepének választjuk, így maximalizálva a pontosságot. Láthatjuk, hogy egy vizsgálandó spektrum a következő paraméterektől függ: a rendszermérettől (mL), a csatolási állandótól (g_4/m^2 illetve g_6/m^2), a levágási energiától (Λ/m) és a választott energiaablaktól ($[E_1/m, E_2/m]$). Megjegyezzük, hogy a spektrum számolásánál első lépésként a vákuumenergiát határozzuk meg, a továbbiakban ezt tekintjük a 0 szintnek. Tehát a definiált energiaablak határai a vákuumenergiához viszonyítva értendők.

Elevenítsük fel a 2.2. fejezetben bevezetett mérőszámokat. A Brody-eloszlás és az η paraméterek kiszámításához először egy hisztogramot kell készítenünk a szomszédos energiaszintek távolságából. Megjegyezzük, hogy az energiaablakra vonatkozó homogén

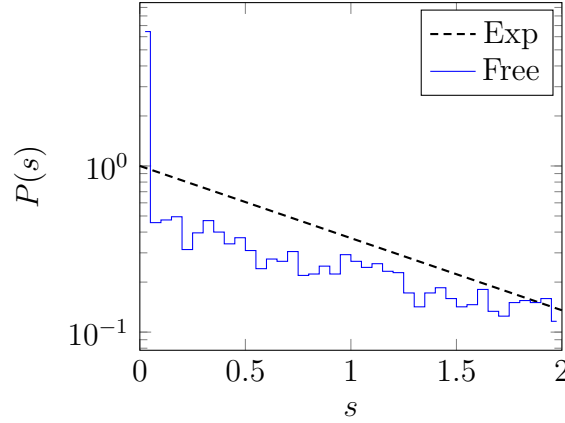
állapotsűrűség közelítés nem lesz tartható. Ennek oka, hogy ellenkező esetben vagy olyan szűk tartományt kéne választanunk, melyben nincs elegendő állapot a statisztikus vizsgálatokhoz, vagy olyan magas energiaszinten kéne vizsgáldni, amely numerikusan nem kivitelezhető. Mindazonáltal szélesebb energiaablak esetén is elkészíthető a statisztika, ekkor azonban a hisztogramot a $\omega(E_j)\Delta E_j$ értékekből kell készíteni, azaz az egyes szinttávolságokat (ΔE_j) normálni kell a lokális állapotossűrűséggel ($\omega(E_j)$). Az állapotossűrűség kiszámításához a diszkrét spektrumot egy Gauss függvénnyel kisimítjuk. A Gauss függvény szélességét ($\sigma = 0.3m$) úgy választjuk meg, hogy annak kis változtatására a kapott hisztogram és az abból számolt értékek ne változzanak. Az 5.2.a ábrán $mL = 10$ -es rendszerméret mellett szemléltettük a szabad elmélet simított állapotossűrűségét. Látható, hogy az állapotossűrűség a nagyenergiás limeszben közel exponenciális karakterisztikát mutat. Az 5.2.b ábrán két hisztogram látható, egyik egy közel integrálható, a másik egy kaotikus spektrumot szemléltet. Az ábrán feltüntettük továbbá az integrálható és kaotikus spektrumstatisztikákhoz tartozó exponenciális és a Wigner-surmise függvényeket is, melyekkel az előbbi szintstatisztikák jó egyezést mutatnak.



5.2. ábra. (a) A szabad elmélet állapotossűrűsége $mL = 12$ rendszerméret mellett $0.3m$ szórású Gauss függvénnyel simítva. Jól látható a nagyenergiás limitben az exponenciális skálázás. (b) Normált szintstatisztika ($s_n = \omega(E_n)\Delta E_n$), kékkkel a szabad térelmélet gyenge ϕ^4 perturbációval (közel integrálható), pirossal az erősen perturbált (nem integrálható) ϕ^6 elmélet ($\tilde{g}_i = g_i/m^2$). Mindkét esetben $mL = 12$ -es rendszerméretet, $\Lambda = 20m$ -es levágási energiát és $[E_1/m, E_2/m] = [12.0, 16.0]$ -os energiaablakot használtunk. Feltüntettük továbbá az exponenciális (szaggatott vonal) és a Wigner-surmise (pontozott vonal) eloszlásokat is.

Az 5.3. ábra a szabad elmélet szintstatisztikáját szemlélteti $mL = 12$ -es rendszerméret és $[E_1/m, E_2/m] = [12, 16]$ -os energiaablak mellett. Látható, hogy a kapott statisztika nem exponenciális eloszlást követ, a hisztogramot a 0-ban lévő csúcs dominálja. Ennek oka, hogy a szabad elméletnek vannak extra szimmetriái ($E_p = E_{-p}$, ahol $E_p = \sqrt{m^2 + p^2}$), melyek többlet degenerációt okoznak. Azonban, az 5.2.b ábrán látható módon, már kis perturbáció hatására ezek a szimmetriák felhasadnak, és, a Berry–Tabor sejtésnek megfelelően, tényleges exponenciális eloszlást látunk (az integrálhatóságsértő szintstatisztika a csatolás függvényében sokkal lassabban jelenik meg).

Az állapotossűrűséggel normált spektrumstatisztikából az η paramétert (2.7) alapján direkt módon, a Brody-eloszlás β paraméterét pedig a (2.5) függvény illesztésével kapjuk. Az illesztett Brody-eloszlásokat az 5.4. ábrával szemléltetjük, ahol a ϕ^6 elmélet

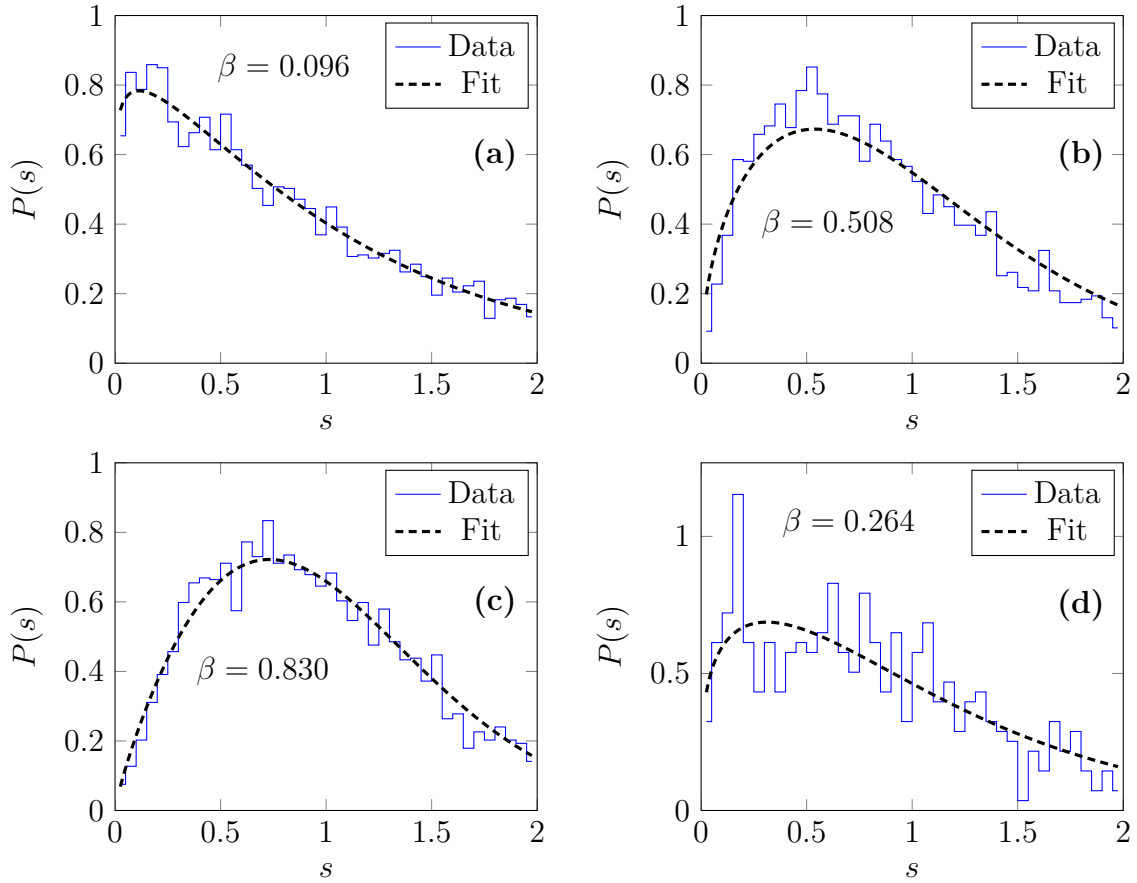


5.3. ábra. A szabad térelmélet szintstatisztikája (*Free*) $mL = 12$ -es rendszer méret és $[E_1/m, E_2/m] = [12, 16]$ -os energiaablak mellett. Viszonyítás képpen feltüntettük a Berry–Tabor sejtésnek megfelelő exponenciális eloszlást is (*Exp*).

különböző spektrumaiból kapott adatok láthatók. Az 5.4.a, b és c ábrák illusztrálják az integrálhatóságsértő perturbáció bekapcsolását követő Poisson - GOE átmenet folyamatát, látható, hogy a Brody-eloszlás jól illeszkedik az átmeneti hisztogramokra. Az 5.4.d ábrán egy alacsonyabb térfogathoz kapott, és így kisebb elemszámból ($N \approx 650$) készített spektrumstatisztikát szemléltetünk, mely láthatóan ingadozóbb az előbbieknél (melyekhez tartozó elemszám: $N \approx 4600$). Itt megjegyezzük, hogy a Brody-eloszlás közel érzéketlen a hisztogram volatilitására és így a bin-szélességre, hiszen az illesztést δ -csúcsok esetén is meg lehet tenni. Ezzel szemben hangsúlyozzuk, hogy az η paraméter érzékeny a hisztogram ingadozására (különösen az exponenciálisához közeli eloszlások esetén), ezért az η számítása során igyekeztem széles bin-eket választani ($\Delta s \approx 0.2$). Ennek további következménye, hogy a szabad elméletre a η paraméter tipikusan GOE-közeli értéket ad, ugyanis az eloszlás jelentősen eltér az exponenciálistól. A β paraméterre azt a konvenciót alkalmazzuk, hogy csak a $[0, 1]$ intervallum értékeiből válogatunk az illesztés során, így a szabad elméletre (minden vizsgált térfogaton) 0-át kapunk, a megszorítás nélkül azonban negatív értéke adódna.

Eddig láthattuk a spektrumból készített hisztogram használatának sarokköveit, valamint szót ejtettünk a β és η paraméterek meghatározásának folyamatáról. Az $\langle \tilde{r}' \rangle$ mérőszám a spektrumból (2.8) alapján direkt módon számolható, így annak meghatározásához nem kell hisztogramot készítenünk.

Megjegyezzük, hogy a spektrumot jellemző β , η és $\langle \tilde{r}' \rangle$ paraméterek rendelkeznek valamekkora hibával, mely alapvetően két okból adódhat: egyrészt a véges levágás miatt a kapott spektrum valamelyest eltér az egzakttól, másrészt a spektrumot jellemző mennyiségek statisztikus jellegűek, így rendelkeznek valamekkora statisztikus hibával. A statisztikus hibát mérsékelhetjük a vizsgált energiaszintek számának növelésével. Láthattuk azonban (5.2.a ábra), hogy az állapotsűrűség az energiával közel exponenciálisan skálázódik, így az állapotszám növelése szükségszerűen azzal jár, hogy a spektrum nagyenergiás részében kell vizsgálnunk. Világos továbbá, hogy a csonkolt állapotter bázisának számossága is (közel) exponenciálisan függ a levágási energiától, mely, a véges számítási kapacitás miatt, egy éles felső határt szab a vizsgálható tartománynak. Tehát, adott számítási kapacitás mellett, a levágási hiba és a statisztikus hiba csak egymás rovására változtatható, ezért a megfelelő energiaablak megválasztása nem triviális



5.4. ábra. ϕ^6 -elmélet esetén kapott spektrumokból készített hisztogramok (*Data*), illetve az illesztett Brody-eloszlások (*Fit*). Paraméterek: az energiaablak $[E_1/m, E_2/m] = [12, 16]$ és a levágási energia $\Lambda = 20m$ minden esetben; (a) $mL = 12, g_6 = 0.004, \beta = 0.096$; (b) $mL = 12, g_6 = 0.032, \beta = 0.508$; (c) $mL = 12, g_6 = 0.1, \beta = 0.830$; (d) $mL = 8, g_6 = 0.032, \beta = 0.264$.

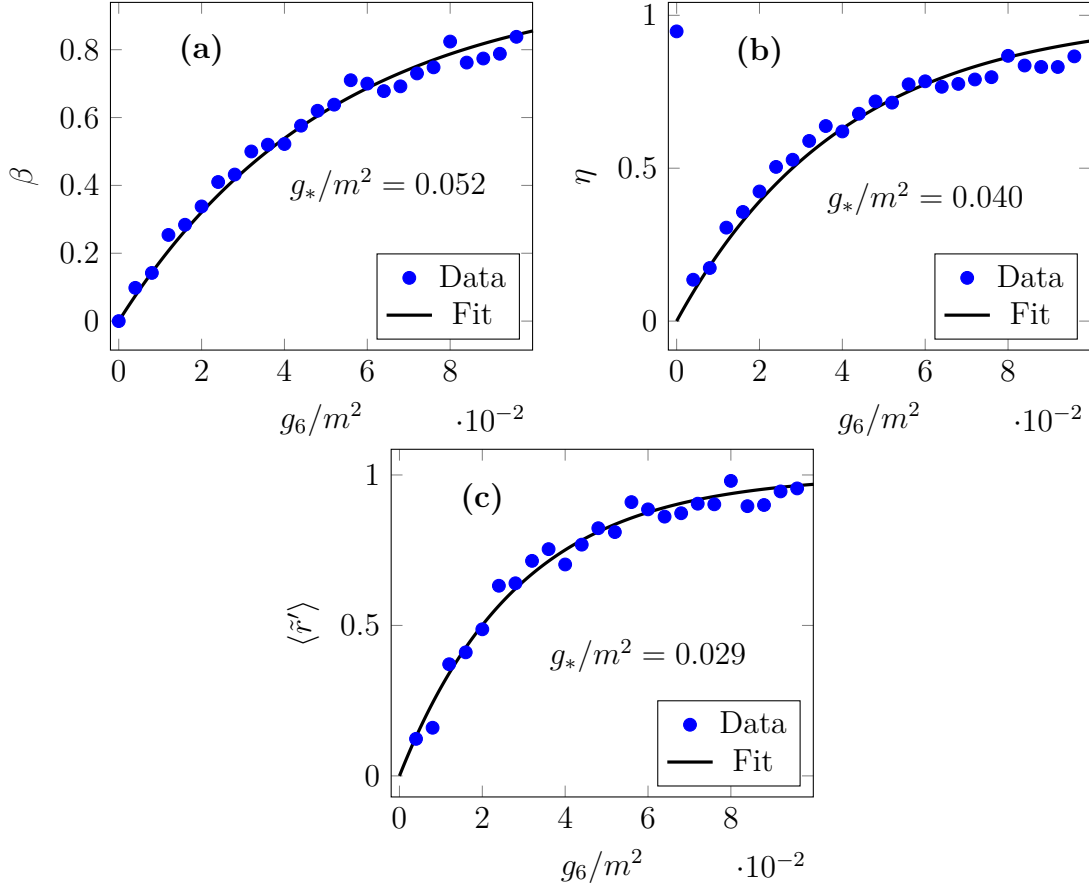
feladat. Irányelvként, érdemes olyan ablakot választani, hogy a kivett állapotok száma ezres nagyságrendbe essen.

Adott (véges) térfogatban egy nem-integrálható perturbációt (például ϕ^4 vagy ϕ^6 kölcsönhatást) bekapcsolva a spektrumstatistika folytonos átmenetet mutat a Poisson és Wigner–Dyson eloszlások között (szemléltetésként: 5.4.a, b és c ábrák). Most rátérünk ezen átmenet karakterizálására. Ehhez az előbb tárgyalt β , η és $\langle \tilde{r}' \rangle$ paraméterek változását vizsgáljuk a csatolás állandó függvényében; egy erre vonatkozó számítás eredményeit szemlélteti az 5.5. ábra ϕ^6 perturbáció mellett $mL = 12$ térfogaton. Világos, hogy ezen mérőszámok egy spektrumhoz egy, várhatóan 0 és 1 közötti számot rendelnek, ahol 0 a Poisson, 1 pedig a GOE eloszlásnak felel meg. Empirikus megfontolások alapján a kapott adatsorokra

$$f(g) = 1 - e^{-g/g_*} \quad (5.1)$$

függvényeket illesztünk, melyekből kapott g_* értékek karakterizálják az adott térfogathoz tartozó integrálható - nem-integrálható crossover skáláját. A választást indokolja, hogy tömeges elméletek számos aszimptotikus viselkedése exponenciális karakterisztikát mutat. Láthatjuk, hogy az illesztett görbék jó egyezést mutatnak a számított értékekkel, amit számos másik paraméterválasztás mellett is leellenőriztem. Általánosságban elmondható,

hogy ezen illesztés minden vizsgált tartományban kielégítően működik, egyedül egy-két alacsony elemszámú spektrumstatisztikához tartozó $\eta - g$ illesztésben látható eltérés, de még ott is alkalmasnak mondható az átmenet karakterizálására. Megjegyezzük végül, hogy ezen függvény érzéketlen a $g = 0$ -hoz tartozó adatpontra, így a szabad elméletben fellépő degeneranciák nem befolyásolják a kapott g_* értékeket.



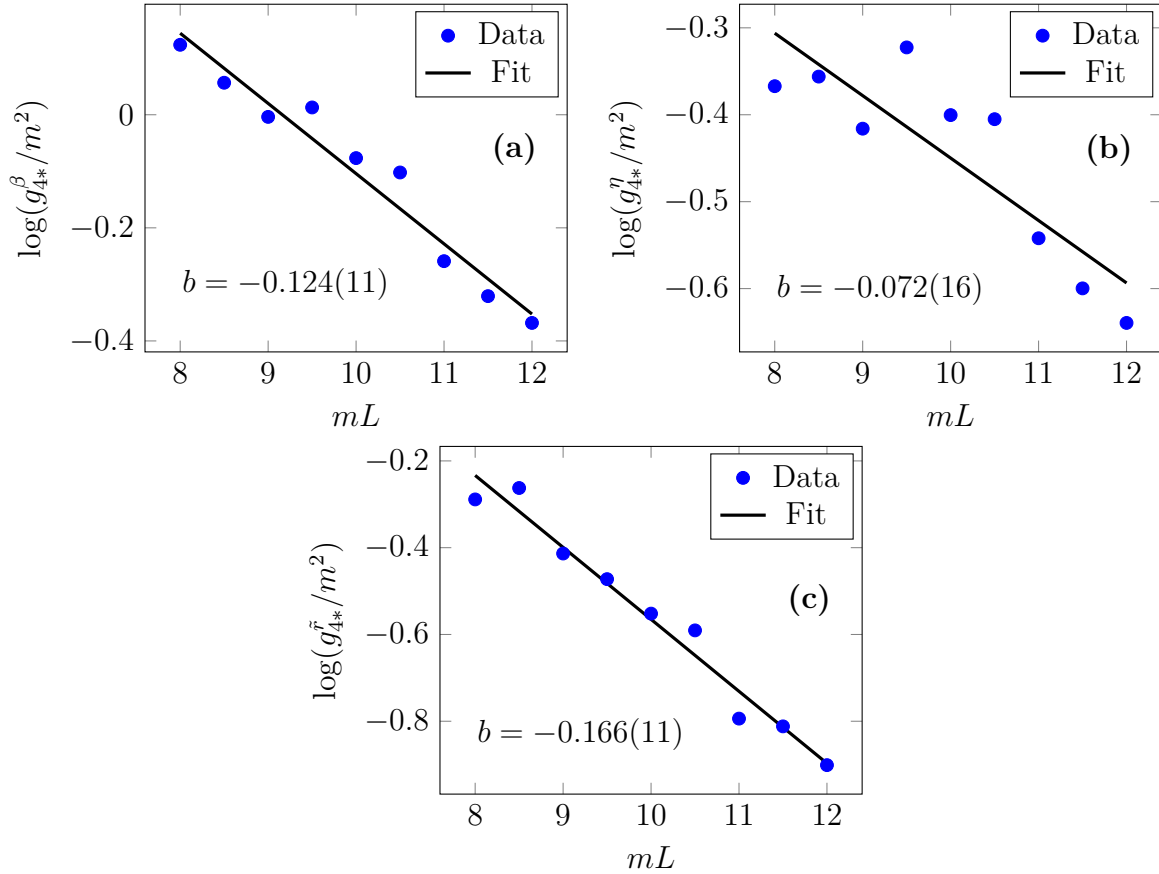
5.5. ábra. Spektrumstatisztikát jellemző β (a), η (b) és $\langle \tilde{r}' \rangle$ (c) paraméterek a ϕ^6 perturbáció g_6 csatolása függvényében $mL = 12$ térfogaton és $\Lambda = 20m$ -es levágási energián. Az ábrákon feltüntettük az (5.1)-nek megfelelő illesztéseket (*Fit*) és az ebből adódó g_* értékeket. Megjegyezzük, hogy a (c) ábrán nem látható az adatsor a 0-hoz tartozó pontja, mely $\langle \tilde{r}' \rangle = -1.35$ értéket vesz fel.

Végezetül térjünk rá a térfogatfüggés kvantitatív tárgyalására. Ismeretes, hogy tömeges elméletek véges-méret skálázása exponenciális karakterisztikát mutat a térfogat (mL) függvényében [6, 18]. Ennek megfelelően az $L - g_*$ adatsorokra

$$\log(g_*/m^2) = a + b \cdot (mL) \quad (5.2)$$

alakú egyenest illesztünk, melyből az a és b paramétereket meghatározzuk. Itt megjegyezzük, hogy a csatolási állandókat egy konstans szorzó erejéig átparaméterezhetjük, például számos esetben a $g_4 = \lambda_4/4!$ és $g_6 = \lambda_6/6!$ konvenciót használják. Világos, hogy az a paraméter függ, a b paraméter független ezen konvenciótól, ezért a ϕ^4 és ϕ^6 kölcsönhatásokat ésszerű a b paraméter alapján összevetni. Másképp fogalmazva, a b paraméter jellemzi a véges méret skálázását a crossovernek, amely független attól, hogy milyen konvenció szerint definiáljuk a csatolásokat.

Az 5.6. ábra a β , η és $\langle \tilde{r}' \rangle$ paraméterekből számolt $L - g_{4*}$ grafikonokat ábrázolja a ϕ^4 -elmélet esetén $\Lambda = 20m$ levágási energia és $[E_1/m, E_2/m] = [12, 16]$ energiaablak mellett. Az adatsorokra (5.2)-nek megfelelően egyeneseket illesztettem, melyekből a b értékeket kiszámoltam. Látható, hogy a β és $\langle \tilde{r}' \rangle$ mérőszámokból kapott g_{4*} értékek jól illeszkednek egy egyenesre, azonban az η alapján számolt értékek kevésbé meggyőzőek (5.6.b ábra). Ennek oka, hogy az η értékek erősen függnek a szinttávolságokból készített hisztogram ingadozásától. Ez az állapotszám növekedtével mérséklődik, viszont az alacsonyabb térfogatokon kapott, kisebb statisztikából számolt értékek kevésbé megbízhatók, ami az η mérőszám használatának jelentős hátránya.



5.6. ábra. A ϕ^4 -elmélet esetén számolt $L - g_{4*}$ grafikonok és az illesztett egyenesek $\Lambda = 20m$ és $[E_1/m, E_2/m] = [12, 16]$ energiaablak mellett a (a) β , (b) η és (c) $\langle \tilde{r}' \rangle$ paraméterek alapján. (A b paraméter hibája az egyenesillesztésből adódik.)

A számolt b értékeknél feltüntetjük az egyenesillesztésből számolt hibát is (zárójelben az utolsó tizedesjegy hibája (1σ)). Megjegyezzük, hogy ezen naiv hiba csupán irányadó érték, a pontos statisztikus hiba meghatározásához végig kell követnünk a teljes hibaterjedést a hisztogram egyes oszlopainak szórásától kezdődően. A kutatás további megvalósítandó feladatai közé tartozik a pontos hibaterjedés számolása és ezáltal a b értékek és azok hibáinak pontosítása.

Végezetül essen szó a levágásból adódó hibáról. Ezen hibát nem lehet statisztikus megfontolások alapján meghatározni, ezért nehéz numerikus becslést adni rá. A véges levágás vezető rendben a csatolásnak ad korrekciót, ez lényegében egy átskálázása a csatolásnak, így erre a b érték érzéketlen. A spektrumstatisztikát a lokalitást sértő korrekciók változtatják meg releváns módon. Ezen korrekciók egy további m/Λ faktorial el vannak

nyomva, azonban a levágás közelében járulékok jelentőssé válik. A csonkolt Hamiltoni módszer a spektrum alján különösen pontos, azonban a levágási energiához közeledve a lokalitás sértő korrekciók dominánssá válnak. Ezért törekedni kell a minél nagyobb távolságra a levágási energia és az energiaablak teteje között (azonban ez éppen az állapotszám csökkenésével, és a statisztikus hiba növekedésével jár).

5.2. Eredmények

Az előző fejezet részben bemutattuk, hogy a 2.2. fejezetben bevezetett mérőszámokból hogyan határozzuk meg a b skálázási paramétert. Most térjünk rá a ϕ^4 és ϕ^6 kölcsönhatások összehasonlítására ezen b érték alapján.

Először jegyezzük meg, hogy a választott energiaablak behatárolja a vizsgálható térfogattartományt. Túlságosan alacsony térfogat esetén nincsen elegendő állapot a kiválasztott ablakban, túl nagy térfogat esetén a numerikus feladat meghaladja a számítási kapacitást (ugyanis a térfogat növelésével az állapotszám megközelítőleg exponenciálisan nő). Hasonlóképpen behatárolt a releváns levágási energia is: alacsony Λ esetén a kapott spektrum pontatlan, túl nagy Λ esetén nem tudunk elegendően széles térfogattartományt vizsgálni (ugyanis a térfogat növelésével hamar elérjük a számítási kapacitásunk határait). Természetesen a futásidőt növelve valamelyest növelhető a levágási energia és/vagy a vizsgált térfogattartomány, de az exponenciális karakterisztika miatt korlátosak a lehetőségek.

Az 5.1. illetve 5.2. táblázat a ϕ^4 - illetve ϕ^6 -elmélettel számolt b skálázási paramétereket foglalja össze különböző energiaablakok és levágási energiák mellett.

$[E_1/m, E_2/m]$	Λ/m	b^β	$b^{\tilde{r}}$	b^η
[12.0, 16.0]	20.0	-0.124(11)	-0.166(11)	-0.072(16)
[8.0, 10.7]	14.0	-0.050(7)	-0.053(6)	-0.020(8)
[8.0, 10.7]	13.0	-0.055(10)	-0.061(10)	-0.034(6)
[6.5, 9.1]	11.5	-0.039(4)	-0.039(4)	-0.020(2)
[6.5, 9.1]	10.5	-0.045(3)	-0.063(6)	-0.042(4)

5.1. táblázat. A ϕ^4 -elmélet véges-méret skálázási paraméterei a β , η és $\langle \tilde{r}' \rangle$ mérőszámokkal számolva különböző energiaablakok és levágási energiák mellett. Az egyes energiaablakoknál vizsgált térfogattartományok: [12.0, 16.0] : $mL = 8, 8.5, \dots, 12$; [8.0.0, 10.7] : $mL = 16, 17, \dots, 23$; [6.5, 9.1] : $mL = 24, 24.5, \dots, 30$.

$[E_1/m, E_2/m]$	Λ/m	b^β	$b^{\tilde{r}}$	b^η
[12.0, 16.0]	20.0	-0.212(10)	-0.231(14)	-0.195(10)
[8.0, 10.7]	14.0	-0.078(5)	-0.101(13)	-0.067(4)
[8.0, 10.7]	13.0	-0.077(4)	-0.094(13)	-0.068(4)
[6.5, 9.1]	11.5	-0.046(3)	-0.049(6)	-0.041(4)
[6.5, 9.1]	10.5	-0.049(5)	-0.050(8)	-0.037(4)

5.2. táblázat. A ϕ^6 -elmélet véges-méret skálázási paraméterei a β , η és $\langle \tilde{r}' \rangle$ mérőszámokkal számolva különböző energiaablakok és levágási energiák mellett. Az egyes energiaablakoknál vizsgált térfogattartományok: [12.0, 16.0] : $mL = 8, 8.5, \dots, 12$; [8.0.0, 10.7] : $mL = 16, 17, \dots, 23$; [6.5, 9.1] : $mL = 24, 24.5, \dots, 30$.

A számításokat a kutatócsoport¹ által üzemeltetett klaszteren végeztem. A legtöbb adatsor (adott energiaablakhoz és levágási energiához tartozó véges-méret skálázás meghatározása) egyetlen napig, de a leghosszabb számítások (5.2. táblázat első két sora) is legfeljebb három napig futottak.

Összehasonlítva a β , η és $\langle \tilde{r}' \rangle$ mérőszámokból kapott eredményeket, azt láthatjuk, hogy amíg b^β és $b^{\tilde{r}}$ nagyjából együtt mozog, addig η - különösen ϕ^4 esetén - időnként komoly eltéréseket mutat. Ennek oka, hogy az η paraméter kevésbé megbízható alacsony állapotszám, és így (relatíven) alacsony térfogat esetén. Az η mérőszám a statisztikus fluktuációkat a Wigner–Dyson statisztika irányába tett elmozdulásként interpretálja, ennek következtében kisebb térfogatokon hamarabb látja a crossovert, és így a véges-méret skálázást karakterizáló b paramétert (tévesen) csökkenti. Megjegyezzük továbbá, hogy a ϕ^4 -elméletben a csatolást növelve az energiaablakban lévő állapotok száma jelentősen csökken (a kölcsönhatás „felfelé söpri” az állapotokat), a vizsgált (legnagyobb) $g_4 = 0.6$ csatolás esetén (alacsony térfogat és magas energiaablak mellett) akár közel 40%-os állapotszám-csökkenés is tapasztalható (5.1. táblázat első sorához tartozó adatok), ezzel ellentétben a ϕ^6 perturbáció esetén ilyen mértékű csökkenést nem figyelhetünk meg. Ennek következménye, hogy a ϕ^6 -elméletből kapott paraméterek statisztikus bizonytalansága tipikusan kisebb (és b^η is konzisztensebbnek tűnik), mint a ϕ^4 -elmélet esetén.

Végül hasonlítsuk össze a ϕ^4 - és ϕ^6 -elméletekre kapott értékeket. Azt látjuk, hogy a legmagasabb energiaablak mellett, a legmagasabb levágási energián (és így a legkisebb térfogatokon) kapott b értékek közt jelentős különbség mutatkozik. Azonban az energiaablakot valamint a levágási energiát csökkentve és a térfogatot növelve kezd közeledni egymáshoz a két perturbációhoz tartozó véges-méret skálázás értéke. Hogy értelmezzük a kapott eredményeket, elevenítsük fel (a 2.1. fejezetben és [3]-ban leírtaknak megfelelően), hogy az elméletek lokalitása miatt (nem-integrálható esetben) a Wigner-Dyson eloszlást csak a spektrum *közepén* várjuk, a spektrum széleire nem lesznek igazak a random mátrix elmélet jóslatai. Ugyan nem egyértelmű, hogy mit tekinthetünk még a spektrum közepének, arra azonban számíthatunk, hogy a levágási energiához közelítve a crossover elromlik. Ennélfogva feltételezhetjük, hogy a legalacsonyabb levágási energiához tartozó eredmények (5.1. és 5.2. táblázat utolsó sora) nem relevánsak. Ezen megfontolás alapján a két leginkább megbízható adatsor az 5.1. és 5.2. táblázat első két sora (ezek a legmagasabb levágási energiák és alacsonyabb térfogatok, valamint itt van a legnagyobb távolság a levágási energia és az energiaablak teteje közt). Ezen adatsorok - egymással konzisztens módon - azt mutatják, hogy *van* különbség a ϕ^4 - és ϕ^6 -elmélet integrálhatóságsértése közt, melyek közül előbbi gyengébben, utóbbi erősebben sérti az integrálhatóságot.

Feltételezésünk, hogy a két elmülethez tartozó b értékek hányadosa (kellően nagy levágási energián) egy konstans értékhez tart. Perturbatív megfontolásokra alapozott sejtésünk, hogy a ϕ^4 és ϕ^6 perturbációkhoz tartozó véges-méret skálázási paraméterek aránya $b_{\phi^4}/b_{\phi^6} \approx 1/2$. Ezt motiválja, hogy egy Feynman-diagrammban egy ϕ^6 -os csúcs helyettesíthető két ϕ^4 -es csúccsal (összeadva az összes permutációt) [19], vagyis egy megfelelő $g_6 \propto g_4^2$ átskálázással a ϕ^6 -elmélet összes diagrammja megkapható ϕ^4 -es csúcsokból összerakva. (Megjegyzendő azonban, hogy fordított irányban nem működik a gondolatmenet, nem minden ϕ^4 -elméletből kapott diagramm rekonstruálható ϕ^6 -os csúcsokból.) Hasonlóképpen motiválja az $1/2$ -es arányszámot a szórási amplitúdók vizsgálata. A vezető nemtriviális szórások a $2 \rightarrow 4$ és $3 \rightarrow 3$ folyamatok, melyeknek g_6 -ban elsőrendű, g_4 -ben viszont másodrendű a vezető járuléka.

¹BME Lendület Statisztikus Térelmélet Kutatócsoport

A kapott eredmények ugyan jeleznek bizonyos mértékű kvalitatív különbséget a két perturbáció között, azonban jelenleg a kvantitatív feltételezésünk ellenőrzésére nem alkalmasak. Pontos konklúzió levonásához és a sejtés ellenőrzéséhez illetve pontosításához további vizsgálatok és számítások szükségesek. Egyik fejlesztési lehetőség (a már említett) precíz statisztikus hibaterjedés számítása, és ezáltal a b értékének és hibájának pontosítása. Megvalósítandó tervek között szerepel további, nagy levágási energián - és így szükségszerűen alacsony térfogatokban - végzett számítások, ugyanis, tapasztalataink szerint, ott kevésbé feszített a paraméterválasztás és pontosabb a THA. Arra számítunk, hogy ezen pontosítások és eredmények tükrében a jelenlegi kép tisztulni fog, és várhatóan kvantitatív kijelentéseket is tehetünk.

6. Összefoglalás és kitekintés

Ezen dolgozatban az integrálhatóság megsértését vizsgáltam két önkölcsönható kvantum-mező-elméletben a spektrumstatisztikák nyelvén. Először szót ejtettünk a kvantumos integrálhatóságról és káoszról, és ezek lenyomatairól a spektrumstatisztikában. Érveltünk a Poisson és Wigner–Dyson eloszlások mellett, valamint bevezettünk olyan paramétereket, melyekkel a két statisztika közti átmenet folytonosan mérhető. Ezt követően rátértünk a csonkolt Hamiltoni módszer tárgyalására, bemutattuk a módszer alapvető elgondolásait és szót ejtettünk a numerikus megvalósításról is. Külön tárgyaltuk a THA levágásfüggését és annak javítását az ellentagok bevezetésével, melyek szükségességét és hatékonyságát numerikusan is igazoltuk. Végezetül rátértünk a crossover numerikus vizsgálatára és bemutattuk azt az eljárást, mellyel az adott perturbáció integrálhatóságsértését karakterizáljuk, azaz a Poisson - GOE statisztikák közti átmenet véges-méret slálázási paraméterének meghatározását. Legvégül összefoglaltuk az eredményeket és összevetettük a ϕ^4 és ϕ^6 perturbációkat.

Azt találtuk, hogy bizonyos adatsorok különbségre, bizonyos adatsorok azonosságra utalnak a ϕ^4 és ϕ^6 perturbációk integrálhatóságsértésének erőssége között. Érveltünk amellet, hogy mely adatsorokat tekinthetjük elfogadhatónak, és azokra alapozva világos különbség látszott a két perturbáció közt. Megjegyeztük ugyanakkor, hogy ezen különbség kvantitatív jellemzésére további pontosításokra és számításokra van szükség, ide tartozik többek közt a precíz hibaterjedés végigkövetése illetve az alacsony térfogatok további numerikus vizsgálata.

Végül megjegyezzük, hogy más utakon is megközelíthetjük az integrálhatóságsértés problémakörét. Egyik érdekes lehetőség a tömeg nélküli skalármező vizsgálata. Kérdés, hogy a gap nélküli rácsmodellekhez [4, 5, 6, 7] hasonlóan itt is hatványfüggvény-típusú térfogatfüggés jelenik-e meg, és ha igen, akkor mi a kitevő. Megjegyezzük azonban, hogy a tömegtelen elmélet megfogalmazása az IR divergenciák miatt nehézségekbe ütközik. Megoldás lehet például Dirichlet-határfeltétel előírása, mellyel a degenerált alapállapot kiküszöbölhető. További, széles körben alkalmazott módszer a nem-egyensúlyi dinamika vizsgálata, melyben a relaxációs idő alapján következtethetünk az integrálhatóság sérülésére. A kvantum kvencsek relaxációjának vizsgálatára a THA egy hatékony módszer [17], a számítások pontos megvalósítása és kidolgozása a további kutatásom részét képezi.

A. Perturbatív korrekciók a ϕ^6 elméletben

Ebben a fejezetben meghatározzuk a vezető rendű tömeg- és vákuumenergia-sűrűség korrekciót a ϕ^6 elméletben. Ehhez először, a Feynman paraméterezés felhasználásával, egy általános formulát vezetünk le (lásd: (A.10)), mely segítségével az említett korrekciókra adódó kifejezéseket hatékonyan le tudjuk egyszerűsíteni és numerikusan meghatározni.

A ϕ^6 elmélet Hamilton-operátora

$$H = H_0 + \frac{\lambda_6}{6!} \int dx : (\phi(x))^6 : . \quad (\text{A.1})$$

A perturbációs számítást Feynman diagrammok segítségével tehetjük szemléletessé, melyekre vonatkozó szabályok a következők:

$$\overline{p} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (\text{A.2})$$

$$\text{X} = -i\lambda. \quad (\text{A.3})$$

A perturbatív megközelítés során kapott integrálok kiszámításához hasznos formula az ún. Feynman paraméterezés. Legyenek $A_1, \dots, A_n$ tetszőleges nem nulla komplex számok, ekkor igaz, hogy

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{A_i} = \prod_{i=1}^n \left(\int_0^1 dx_i \right) \delta \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i A_i \right)^{-n}, \quad (\text{A.4})$$

speciálisan, $A, B \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ számokra

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2}. \quad (\text{A.5})$$

Ezen összefüggést alkalmazva átírhatjuk a következő integrált

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{c(p-k)^2 - m^2} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int_0^1 dx \frac{1}{\alpha^2(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^2}, \quad (\text{A.6})$$

ahol $\alpha = 1 - x(1-c)$, $l^\mu = k^\mu - \frac{xc}{\alpha}p^\mu$ és $\Delta = m^2 \frac{1}{\alpha} - p^2 \frac{xc}{\alpha} \left(1 - \frac{xc}{\alpha}\right)$. Ekkor kiszámolhatjuk a d^2k integrált, felhasználva egy Wick-forgatást az l^0 komponensre

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2l}{(2\pi)^2} \frac{1}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} &= \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^2l_E \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\ &= \frac{i}{4\pi\Delta}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

amiből a következő összefüggést kapjuk

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{c(p-k)^2 - m^2} &= \frac{i}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{\alpha^2 \Delta} \\ &= -\frac{i}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\frac{cx(1-x)}{1-x(1-c)} p^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Vegyük észre, hogy a kapott eredmény (A.6)-ban szereplő kifejezéshez hasonló alakú: az integrandust felírhatjuk $1/(c'p^2 - m^2)$ formában, ahol

$$c' = \frac{cx(1-x)}{1-x(1-c)}. \quad (\text{A.9})$$

Az eddigieket rekurzív módon felhasználva a következő összefüggéshez jutunk

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \left(\int \frac{d^2k_i}{(2\pi)^2} \right) (2\pi)^2 \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^n k_i - p \right) \prod_{i=1}^n \frac{1}{k_i^2 - m^2 + i\varepsilon} &= \\ &= \left(-\frac{i}{4\pi} \right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\int_0^1 \frac{dx_i}{\alpha_i} \right) \frac{1}{c_{n-1} p^2 - m^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

ahol

$$\alpha_i = 1 - x_i(1 - c_{i-1}), \quad (\text{A.11})$$

és $\{c_i\}$ szimbólumokat a következő rekurzív kifejezés definiálja

$$c_0 = 1 \quad \text{és} \quad c_i = \frac{c_{i-1}x_i(1-x_i)}{\alpha_i}. \quad (\text{A.12})$$

Az első néhány c_i a következő:

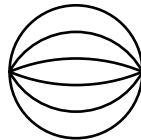
$$c_0 = 1, \quad (\text{A.13})$$

$$c_1 = x_1(1-x_1), \quad (\text{A.14})$$

$$c_2 = \frac{x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)}{1-x_2(1-x_1(1-x_1))}, \quad (\text{A.15})$$

$$c_3 = \frac{x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)}{1-x_2(1-x_1(1-x_1))} \frac{x_3(1-x_3)}{1-x_3 \left(1 - \frac{x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)}{1-x_2(1-x_1(1-x_1))} \right)}. \quad (\text{A.16})$$

A vákuumenergia-sűrűség vezető rendű korrekciójának meghatározásához a következő diagramot kell kiszámolnunk,



amely nem más, mint

$$\frac{(-i\lambda_6)^2}{2 \cdot 6!} \prod_{i=1}^6 \left(\int \frac{d^2k_i}{(2\pi)^2} \right) (2\pi)^2 \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^6 k_i \right) \prod_{i=1}^6 \frac{i}{k_i^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (\text{A.17})$$

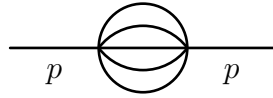
A (A.10) összefüggés segítségével az előbbi kifejezés a következő alakra egyszerűsödik

$$-\frac{\lambda_6^2/m^2}{2 \cdot 6!(4\pi)^5} \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5}, \quad (\text{A.18})$$

ahol az α_i szimbólumokat a (A.11) és (A.12) egyenletek definiálják. A megmaradt öt-dimenziós integrált a **Wolfram Mathematica** segítségével végeztem el. Végeredményül a vákuumenergia-sűrűség

$$\varepsilon_0 = -0.267002266958 \frac{(\lambda_6/6!)^2}{m^2} + \mathcal{O}(\lambda_6^3). \quad (\text{A.19})$$

A vezető rendű tömegkorrekciót az alábbi diagram hordozza $p^2 = m^2$ esetén,



mely a következő alakba írható

$$\frac{(-i\lambda_6)^2}{5!} \prod_{i=1}^5 \left(\int \frac{d^2 k_i}{(2\pi)^2} \right) (2\pi)^2 \delta^{(2)} \left(\sum_{i=1}^5 k_i - p \right) \prod_{i=1}^5 \frac{i}{k_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \Big|_{p^2=m^2}. \quad (\text{A.20})$$

A (A.10) összefüggés segítségével - az előzőekhez hasonló módon - leegyszerűsíthetjük a vizsgálni kívánt kifejezést, így a (fizikai) tömeg a vezető rendű korrekcióval

$$M^2 = m^2 - \frac{\lambda_6^2/m^2}{5!(4\pi)^4} \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 (c_4 - 1)} + \mathcal{O}(\lambda_6^3). \quad (\text{A.21})$$

Az integrált a **Wolfram Mathematica** segítségével számoltam ki, melyre

$$M^2 = m^2 - 6.63(5) \frac{(\lambda_6/6!)^2}{m^2} + \mathcal{O}(\lambda_6^3) \quad (\text{A.22})$$

adódik.

Hivatkozások

- [1] G. P. Brandino, R. M. Konik, and G. Mussardo, „Energy level distribution of perturbed conformal field theories,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2010** (2010) 07013, [arXiv:1004.4844 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [2] L. D’Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and M. Rigol, „From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics,” *Advances in Physics* **65** (2016) 239–362, [arXiv:1509.06411 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [3] G. P. Brandino, A. De Luca, R. M. Konik, and G. Mussardo, „Quench dynamics in randomly generated extended quantum models,” *Physical Review B* **85** (2012) 214435, [arXiv:1111.6119 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [4] R. Modak, S. Mukerjee, and S. Ramaswamy, „Universal power law in crossover from integrability to quantum chaos,” *Physical Review B* **90** (2014) 075152, [arXiv:1309.1865 \[cond-mat.str-el\]](#).
- [5] R. Modak and S. Mukerjee, „Finite size scaling in crossover among different random matrix ensembles in microscopic lattice models,” *New Journal of Physics* **16** no. 9, (Sept., 2014) 093016, [arXiv:1310.1443 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [6] D. Szász-Schagrin, B. Pozsgay, and G. Takács, „Weak integrability breaking and level spacing distribution,” *SciPost Physics* **11** (2021) 037, [arXiv:2103.06308 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [7] T. McLoughlin and A. Spiering, „Chaotic spin chains in AdS/CFT,” *Journal of High Energy Physics* **2022** no. 9, (Sept., 2022) 240, [arXiv:2202.12075 \[hep-th\]](#).
- [8] S. Rychkov and L. G. Vitale, „Hamiltonian truncation study of the φ^4 theory in two dimensions,” *Physical Review D* **91** (2015) 085011, [arXiv:1412.3460 \[hep-th\]](#).
- [9] Z. Bajnok and M. Lajer, „Truncated Hilbert space approach to the 2d ϕ^4 theory,” *Journal of High Energy Physics* **2016** (2016) 50, [arXiv:1512.06901 \[hep-th\]](#).
- [10] B. Fitos, „Integrability breaking in the 1+1 dimensional free boson field theory,” *Szakkdolgozat* (2022) .
- [11] J. Durnin, M. J. Bhaseen, and B. Doyon, „Nonequilibrium Dynamics and Weakly Broken Integrability,” *Physical Review Letters* **127** no. 13, (Sept., 2021) 130601, [arXiv:2004.11030 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [12] J.-S. Caux and J. Mossel, „Remarks on the notion of quantum integrability,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2011** (2011) 02023, [arXiv:1012.3587 \[cond-mat.str-el\]](#).
- [13] L. V. Delacretaz, A. L. Fitzpatrick, E. Katz, and M. T. Walters, „Thermalization and chaos in a 1+1d QFT,” *arXiv e-prints* (2022) [arXiv:2207.11261, arXiv:2207.11261 \[hep-th\]](#).
- [14] M. Srdinšek, T. Prosen, and S. Sotiriadis, „Signatures of Chaos in Nonintegrable Models of Quantum Field Theories,” *Physical Review Letters* **126** (2021) 121602, [arXiv:2012.08505 \[cond-mat.stat-mech\]](#).

- [15] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux, „Distribution of the Ratio of Consecutive Level Spacings in Random Matrix Ensembles,” *Physical Review Letters* **110** (2013) 084101, [arXiv:1212.5611 \[math-ph\]](#).
- [16] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. 1995.
- [17] D. Szász-Schagrin, I. Lovas, and G. Takács, „Quantum quenches in an interacting field theory: Full quantum evolution versus semiclassical approximations,” *Physical Review B* **105** (2022) 014305, [arXiv:2110.01636 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [18] M. Lüscher, „Volume dependence of the energy spectrum in massive quantum field theories: I. Stable particle states,” *Communications in Mathematical Physics* **104** (1986) 177–206.
- [19] P. Dorey, „Exact S-matrices,” *arXiv e-prints* (1998) hep-th/9810026, [arXiv:hep-th/9810026 \[hep-th\]](#).