

Ferde feloldás rétegezett algebrák fölött

TDK dolgozat

Szabó Csaba

Témavezető: Lukács Erzsébet

Algebra Tanszék

Matematika Intézet

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2022



Tartalomjegyzék

Bevezető	2
1. Előismeretek	4
1.1. CPS-rétegezett algebrák	4
2. Ferde feloldás	9
2.1. Előzmények	9
2.2. Ferde feloldás	10
2.3. Ferde feloldás alkalmazása CPS-rétegezett algebrákra	14

Bevezető

Jelölések, konvenciók

A továbbiakban k egy algebrailag zárt testet jelöl, A pedig egy véges dimenziós k -algebrát (azaz egy egységelemes, asszociatív algebrát a k test fölött). Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy A bázisalgebra, vagyis reguláris modulusának direkt felbonthatatlan direkt összeadandói páronként nem izomorfak. A végesen generált jobb, ill. bal A -modulusokat $\text{mod-}A$ ill. $A\text{-mod}$ jelöli, és a továbbiakban modulusokon végesen generált jobbmodulusokat értünk, hacsak máshogy nem rendelkezünk. A későbbiekben a homomorfizmusokat jobbról hattatjuk, és kompozíciójukat balról jobbra írjuk: $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$, akkor $fg : X \rightarrow Z$ az f és g kompozíciója.

Részkategória alatt mindig teljes, izomorfiára zárt részkategóriát értünk.

Motiváció

A véges dimenziós algebráknak (vagy általánosabban: Artin-algebráknak) egy fontos, sokat vizsgált osztálya a kváziöröklődő algebrák, és azok természetes általánosításai. Ezen algebrák megjelennek az algebrai csoportok, ill. féligegyszerű Lie-algebrák reprezentációelméletében. Az általunk vizsgált témakör az ún. CPS-rétegezett algebrák (E. Cline, B. Parschall és L. Scott után) témakörébe tartozik.

Az algebrák rétegezettsége lehetővé teszi, hogy sok homologikus jellegű kérdést az egyszerű modulusok számára vonatkozó indukcióval oldjunk meg. Ezt használták például néhány speciális CPS-rétegezett algebra (ld. [4], [6]) esetén a finitisztikus dimenzió végességének bizonyítására, azaz hogy a végesen generált véges projektív dimenziójú modulusok projektív dimenziója korlátos.

Ebben a dolgozatban a CPS-rétegezett algebrák finitisztikus dimenziójának kiszámításához vezetünk be egy segédeszközt, a modulusok ferde feloldását, illetve egy ebből származtatható ekvivalenciát, amely lehetőséget ad arra, hogy kevesebb modulus projektív feloldásának vizsgálatával a faktoralgebra finitisztikus dimenziójából az eredeti algebraéra korlátot tudjunk adni.

Egy $X \in \text{mod-}A$ modulusra $\text{projdim } X$, (ill. $\text{injdim } X$) jelöli az X modulus projektív (ill. injektív) dimenzióját. Általánosan $\mathcal{S}$ részkategóriára $\text{projdim } \mathcal{S} = \sup\{\text{projdim } X \mid X \in \mathcal{S}\}$, hasonlóan az injektív dimenzióra. Egy $\mathcal{S}$ részkategória finitisztikus dimenziója

$$\text{findim } \mathcal{S} = \sup\{\text{projdim } X \mid X \in \mathcal{S}, \text{projdim } X < \infty\}.$$

Speciálisan, ha $\mathcal{S} = \text{mod-}A$, akkor $\text{findim mod-}A$ -t, egyszerűen $\text{findim } A$ -val jelöljük. Hosszú ideje megválaszolatlan az a kérdés, hogy egy tetszőleges véges dimenziós k -algebrának véges-e a finitisztikus dimenziója. A Finitisztikusdimenzió-sejtés igazolása egy sor további algebrai sejtést válaszolna meg ([2]). A sejtést eddig csupán speciális algebraosztályokra igazolták (ld. pl. [4], [5]). Az állítás igazolásának nehézségét például az okozza, hogy nehéz „ránézésre” megmondani, melyek a véges projektív dimenziós modulusok, és milyen tulajdonságokkal rendelkeznek.

1. fejezet

Előismeretek

1.1. CPS-rétegezett algebrák

Definíció. Az $e \in A$ idempotens elemet **erős idempotensnek** nevezzük, illetve AeA **erős idempotens ideál**, ha

$$\mathrm{Ext}_A^t(X, Y) \cong \mathrm{Ext}_{\bar{A}}^t(X, Y)$$

minden $t \geq 0$ és $X, Y \in \mathrm{mod}\text{-}\bar{A}$ esetén, ahol $\bar{A} = A/AeA$.

Rögzítsük az A primitív ortogonális idempotenseinek egy teljes $(e_1, \dots, e_n)$ rendszerét, ekvivalensen az A feletti egyszerű modulusok (izomorfia-osztályainak) $(S(1), \dots, S(n))$ rendezését. Legyen továbbá $\varepsilon_t = e_t + e_{t+1} + \dots + e_n$ és $\varepsilon_{n+1} = 0$.

Definíció. Az A algebrát **CPS-rétegezett algebrának** nevezzük az $(e_1, \dots, e_n)$ rendezésre nézve, ha e_i képe az $A/A\varepsilon_{i+1}A$ faktorban erős idempotens minden i -re.

Definíció. Ha $\mathcal{X}$ modulusoknak egy halmaza, valamint M egy modulus, akkor az $\mathcal{X}$ **nyoma** M -ben az $\mathcal{X}$ -beliek homomorf képei által generált $\tau_{\mathcal{X}}(M)$ részmodulus, azaz

$$\tau_{\mathcal{X}}(M) = \sum_{\substack{f \in \mathrm{Hom}(X, M) \\ X \in \mathcal{X}}} \mathrm{Im} f$$

Ha $\mathcal{X} = \{X\}$, akkor $\tau_{\{X\}}$ -et egyszerűen τ_X -szel jelöljük.

Speciálisan, ha $e \in A$ idempotens, akkor $\tau_{eA}X = XeA$.

Jelölje $S(e)$ az $e \in A$ idempotenshez tartozó féligegyszerű modulust, azaz $S(e) = eA/\text{rad } eA$.

Definíció. Legyen $e \in A$ idempotens. Ekkor bevezetjük a következő jelöléseket.

$$\mathcal{M}_e = \{X \in \text{mod-}A \mid \text{Hom}(X, S(1-e)) = 0\} = \{X \in \text{mod-}A \mid X = XeA\}$$

$$\mathcal{P}_e = \{X \in \text{mod-}A \mid \text{Ext}_A^t(X, S(1-e)) = 0 \ \forall t \geq 0\}$$

1.1. Lemma. $\mathcal{P}_e$ zárt a bővítésekre, epimorfizmusok magjára, monomorfizmusok komagjára, direkt összegre és direkt összeadandókra.

Bizonyítás. Az első három állítás könnyen látszik a $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ egzakt sorozaton alkalmazott $\text{Hom}(-, S(1-e))$ funktor által indukált hosszú egzakt sorozatból.

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Ext}_A^i(Z, S(1-e)) \rightarrow \text{Ext}_A^i(Y, S(1-e)) \rightarrow \text{Ext}_A^i(X, S(1-e)) \\ \rightarrow \text{Ext}_A^{i+1}(Z, S(1-e)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Mivel legalább két modulus $\mathcal{P}_e$ -beli, a fenti hosszú egzakt sorozatban szükségszerűen minden elem 0, azaz a harmadik modulus is eleme $\mathcal{P}_e$ -nek. A másik két állítás pedig következik abból, hogy az Ext funktor felcserélhető a direkt összeggel. ■

A $\mathcal{P}_e$ részkategória jellemezhető a következővel: $X \in \mathcal{P}_e$ akkor és csak akkor, ha az X minimális projektív feloldásában szereplő projektívek $\text{Add}(eA)$ -beliek.

1.2. Állítás. (ld. [1]) Egy AeA idempotens ideál akkor, és csak akkor erős idempotens ideál, ha $AeA \in \mathcal{P}_e$.

Következmény. Egy A algebra pontosan akkor CPS-rétegezett az $(e_1, \dots, e_n)$ rendezésre nézve, ha $Ae_nA \in \mathcal{P}_{e_n}$, és A/Ae_nA CPS-rétegezett az $(e_1, \dots, e_{n-1})$ rendezésre nézve.

Az 1.1 lemma és az 1.2. állítás következménye, hogy ha $P \in \text{mod-}A$ projektív, akkor $PeA \in \mathcal{P}_e$.

Egy adott $(e_1, \dots, e_n)$ rendezésre jelölje $P(i) = e_i A$ az $S(i) = e_i A / \text{rad } e_i A$ egyszerű modulus projektív fedőjét. A $P(i)$ legnagyobb $\Delta(i)$ faktort, amely nem tartalmaz nagyobb indexű egyszerű moduluszt kompozíciófaktorként, *i. standard modulusnak* nevezzük. A $\Delta(i)$ legnagyobb $\overline{\Delta}(i)$ faktora, amelyben $S(i)$ pontosan egyszer szerepel kompozíciófaktorként, **az *i. valódi standard modulus***. Látható, hogy $\Delta(i) \cong e_i A / e_i A \varepsilon_{i+1} A$, illetve $\overline{\Delta}(i) \cong e_i A / e_i (\text{rad } A) \varepsilon_i A$. Vegyük észre, hogy $\Delta(n) = P(n)$.

Legyen $\mathcal{S}$ egy részhalmaza $\text{mod-}A$ -nak. Ekkor $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ jelöli az **$\mathcal{S}$ -filtrált modulusok** rész Kategóriáját, azaz azon X modulusok rész Kategóriáját, melyekre létezik részmodulusoknak olyan

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_t \subset X_{t+1} = X$$

lánca, hogy X_{i+1}/X_i izomorf egy $\mathcal{S}$ -beli modulussal minden i -re. Legyen $\Delta = \{\Delta(1), \dots, \Delta(n)\}$.

Definíció. Az A algebra **standardul rétegezett**, ha $A_A \in \mathcal{F}(\Delta)$. Egy A algebra **kváziöröklődő**, ha standardul rétegezett, továbbá $\text{End } \Delta(i)$ egyszerű minden i -re (ekvivalensen, ha $\Delta(i) = \overline{\Delta}(i)$).

Ismert, hogy $A_A \in \mathcal{F}(\Delta)$, akkor és csak akkor, ha $A_{A^{opp}}^{opp} \in \mathcal{F}(\overline{\Delta})$.

1.3. Példa. Legyen $A = kQ/I$ gráfalgebra, ahol Q az alábbi

$$\alpha \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} 1 \xrightleftharpoons[\beta]{\gamma} 2 \xrightarrow{\delta} 3$$

gráf, és $I = (\alpha^2, \alpha\beta, \beta\delta, \gamma\alpha, \gamma\beta)$. Az A reguláris modulusának Loewy-diagramja

$$A_A = \begin{array}{c} \triangle \\ \text{1} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \triangle \\ \text{2} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \triangle \\ \text{3} \end{array}$$

Ekkor a pirossal bekeretezett részek a Δ modulusok. Jól látható, hogy $A_A \in \mathcal{F}(\Delta)$, de A nem kváziöröklődő, mert $\text{End}(\Delta(1))$ nem egyszerű.

A Δ -filtrált és $\overline{\Delta}$ -filtrált algebrák közös általánosításai a szigorúan rétegezett algebrák ([3]). A $\Lambda(1), \dots, \Lambda(n)$ modulusokat **rétegező modulusoknak** nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek:

1. $\Lambda(i)$ homomorf képe $\Delta(i)$ -nek;
2. $P(i) \in \mathcal{F}(\Lambda(i), \Lambda(i+1), \dots, \Lambda(n))$.

Azt mondjuk, hogy az A algebra **szigorúan rétegezett**, ha léteznek ilyen $\Lambda(1), \dots, \Lambda(n)$ rétegező modulusok.

Ismert (ld. [6]), hogy ha A szigorúan rétegezett, akkor A^{opp} finitisztikus dimenziója véges.

1.4. Állítás. ([3]) *Ha A szigorúan rétegezett algebra a $(\Lambda(1), \dots, \Lambda(n))$ rétegező modulusokra nézve, akkor A CPS-rétegezett algebra az $(e_1, \dots, e_n)$ rendezésre nézve.*

Bizonyítás. Mivel $P = P(n) \in \mathcal{F}(\Lambda(n))$, van egy $0 \rightarrow X \rightarrow P \rightarrow \Lambda(n) \rightarrow 0$ egzakt sorozat, ahol $X \in \mathcal{F}(\Lambda(n))$. Ebből adódik az alábbi hosszú egzakt sorozat.

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow & \underbrace{\text{Hom}(\Lambda(n), S(1 - e_n))}_0 \rightarrow \underbrace{\text{Hom}(P, S(1 - e_n))}_0 \rightarrow \text{Hom}(X, S(1 - e_n)) \rightarrow \\
& \rightarrow \text{Ext}_A^1(\Lambda(n), S(1 - e_n)) \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_A^1(P, S(1 - e_n))}_0 \rightarrow \text{Ext}_A^1(X, S(1 - e_n)) \rightarrow \\
& \rightarrow \text{Ext}_A^2(\Lambda(n), S(1 - e_n)) \rightarrow \underbrace{\text{Ext}_A^2(P, S(1 - e_n))}_0 \rightarrow \text{Ext}_A^2(X, S(1 - e_n)) \rightarrow \\
& \rightarrow \dots
\end{aligned}$$

Az $X \in \mathcal{F}(\Lambda(n))$ feltételből következik, hogy $\text{Hom}(X, S(1 - e_n)) = 0$. Továbbá, ha $\text{Ext}_A^t(\Lambda(n), S(1 - e_n)) = 0$ teljesül valamely t -re, akkor $X \in$

$\mathcal{F}(\Lambda(n))$ miatt $\text{Ext}_A^t(X, S(1 - e_n)) = 0$, vagyis a hosszú egzakt sorozatból: $\text{Ext}_A^{t+1}(\Lambda(n), S(1 - e_n)) = 0$. Azaz $\Lambda(n) \in \mathcal{P}_{e_n}$, és általánosabban a $\Lambda(i)$ modulok $A/A\varepsilon_{i+1}A$ felett $\mathcal{P}_{e_i}$ -beliek.

Mivel $Ae_nA \in \mathcal{F}(\Lambda(n))$, és $\Lambda(n) \in \mathcal{P}_{e_n}$, azt kapjuk, hogy $Ae_nA \in \mathcal{P}_{e_n}$. Indukcióval n -re következik az állítás, mert az A/Ae_nA faktoralgebrára is teljesülnek az állítás feltételei. ■

1.5. Példa. Legyen A reguláris modulusának Loewy-diagramja

$$A_A = \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \\ \downarrow \\ 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \quad (1.1)$$

Ez az algebra CPS-rétegezett, sőt szigorúan rétegezett, de nem standardul rétegezett. (Viszont A^{opp} nem szigorúan rétegezett.)

1.6. Példa. Legyen A reguláris modulusának Loewy-diagramja

$$A_A = \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 3 \\ \downarrow \\ 1 \\ \downarrow \\ 3 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \\ 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 3 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 3 \\ \downarrow \\ 3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 3 \end{array} .$$

Ez az algebra CPS-rétegezett, de nem szigorúan rétegezett.

1.7. Példa. Legyen A reguláris modulusának Loewy-diagramja $A_A = \frac{1}{2} \oplus 1 \frac{2}{2}$. Ekkor A nem CPS-rétegezett az egyszerűk semelyik rendezésére sem, mert $Ae_2A \notin \mathcal{P}_{e_2}$, és $Ae_1A \notin \mathcal{P}_{e_1}$.

2. fejezet

Ferde feloldás

2.1. Előzmények

Rétegezett algebrák körében számos homologikus kérdés megválaszolatlan. Mint említettük, a standardul rétegezett algebrák mindkét oldali finitisztikus dimenziója véges, de pl. már szigorúan rétegezett esetben is csak az egyik oldali finitisztikus dimenzió végeessége ismert (a „rétegezett” oldallal ellentétes oldalon).

Standardul rétegezett algebrák (illetve a másik oldalon szigorúan rétegezett algebrák) esetében egy $X \in \text{mod-}A$ véges projektív dimenziós modulus első szizigijében az $e_n A$ nyoma mindig $\mathcal{P}_{e_n}$ -beli. Ez tette lehetővé azt, hogy becslést lehessen adni az A finitisztikus dimenziójára az $A/Ae_n A$ finitisztikus dimenziójának ismeretében. Ez CPS-rétegezett algebrákra általában nem teljesül.

Tekintsük az 1.5. példaalgebráját. Itt az $X = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \in \text{mod-}A$ modulusra $\text{projdim } X = 2$, és $\Omega(X)e_2 A = \Omega(X) = \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \notin \mathcal{P}_{e_2}$. Az $\Omega^2(X) = P(1)$ modulusra viszont $P(1)e_2 A \in \mathcal{P}_{e_2}$.

Az indukciós lépéshez az is elegendő lenne, ha tudnánk egy algebrától függő korlátot, hogy az azon túl vett szizigikben a $P(n)$ nyoma már $\mathcal{P}_{e_n}$ -beli legyen. Ezért a továbbiakban a szizigiknek erre a részére koncentrálnunk.

2.2. Ferde feloldás

Definíció. Legyen $e \in A$ erős idempotens. Az X modulus **ferde szizigije** (az e -re nézve) az a K modulus, melyre létezik $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow XeA \rightarrow 0$ egzakt sorozat, ahol $P \in \mathcal{P}_e$.

Definíció. Legyenek X és Y modulusok. Bevezetjük a következő jelölést: $X \not\rightarrowtail Y$, ha létezik egy

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

egzakt sorozat, hogy $Z \in \mathcal{P}_e$. Vegyük az $\not\rightarrowtail$ szimmetrikus, tranzitív lezártját, amit $\approx$ -mal jelölünk. Ha az X és Y modulusokra $X \approx Y$ teljesül, akkor az X és Y modulusokat **erősen ekvivalensnek nevezzük**.

Világos, hogy „ $\approx$ ” ekvivalencia reláció. Érdemes észrevenni, hogy $X \not\rightarrowtail Y$ és $Y \not\rightarrowtail Z$ esetén $X \not\rightarrowtail Z$ automatikusan teljesül.

2.1. Lemma. Ha $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ egzakt, valamint $Y \in \mathcal{M}_e, Z \in \mathcal{P}_e$, akkor $X \in \mathcal{M}_e$.

Bizonyítás. Alkalmazva a $\text{Hom}(-, S(1-e))$ funktort, az alábbi egzakt sorozatot kapjuk.

$$\dots \rightarrow \text{Hom}(Y, S(1-e)) \rightarrow \text{Hom}(X, S(1-e)) \rightarrow \text{Ext}_A^1(Z, S(1-e)) \rightarrow \dots,$$

ahol az első és utolsó tag 0. ■

2.2. Lemma. Ha $X \not\rightarrowtail Y$, akkor $XeA \not\rightarrowtail YeA$.

Bizonyítás. A feltétel szerint létezik egy $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ egzakt sorozat, ahol $Z \in \mathcal{P}_e$. Ebből az eA nyomaira az alábbi

$$0 \rightarrow X \cap (YeA) \rightarrow YeA \rightarrow Z \rightarrow 0$$

egzakt sorozatot kapjuk. Mivel $Z \in \mathcal{P}_e$, és $YeA \in \mathcal{M}_e$, az előző lemma szerint $X \cap (YeA) \in \mathcal{M}_e$, vagyis $X \cap (YeA) = (X \cap (YeA))eA = XeA$. ■

2.3. Állítás. *Legyen*

$$0 \rightarrow K_1 \rightarrow P \rightarrow XeA \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

az XeA minimális projektív feloldásának első lépése (azaz $P = P(XeA)$ az XeA projektív fedője, valamint $K_1 = \Omega(XeA)$ az XeA első szizigije). Valamint legyen

$$0 \rightarrow K_2 \rightarrow Y \rightarrow XeA \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

egzakt, ahol $Y \in \mathcal{P}_e$. Ekkor $K_1 \approx K_2$.

Bizonyítás. Vegyük a

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & XeA \end{array}$$

pullback diagramot. Mivel $P \rightarrow XeA$, valamint $Y \rightarrow XeA$ epimorfizmusok, így a visszahúzottjaik, $Z \rightarrow P$ és $Z \rightarrow Y$ is azok, valamint $\text{Ker}(Z \rightarrow P) = K_2$, és $\text{Ker}(Z \rightarrow Y) = K_1$, azaz adódik az alábbi két

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow K_1 \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow K_2 \rightarrow Z \rightarrow P \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

egzakt sorozat, ahol a második a P modulus projektivitása miatt felhasad, azaz $Z \cong K_2 \oplus P$. Mivel $Y \in \mathcal{P}_e$, így $K_1 \not\approx K_2 \oplus P$, és $K_2 \not\approx K_2 \oplus P$, tehát $K_1 \approx K_2$ teljesül. ■

Következmény. A ferde szizigi erős ekvivalencia erejéig egyértelmű, sőt tetszőleges

$$0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$$

projektív feloldás első lépésére $K \cap (PeA)$ az X ferde szizigije.

Több is következik a bizonyításból. A 2.3 egzakt sorozatokra alkalmazva a $\text{Hom}(-, S(1-e))$ funktort az alábbi

$$\text{Ext}^t(K_1, S(1-e)) \cong \text{Ext}^t(Z, S(1-e)) \cong \text{Ext}^t(K_2, S(1-e))$$

izomorfizmusokat kapjuk minden $t \geq 0$ -ra, amiből speciálisan

$$\text{Hom}(K_1, S(1-e)) \cong \text{Hom}(K_2, S(1-e))$$

adódik.

Definíció. Egy $X \in \text{mod-}A$ modulus **ferde feloldása** (az e idempotensre nézve) egy olyan

$$\cdots \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

komplexus, ahol $Y_i e A \in \mathcal{P}_e$ és a komplexus homológiáit e annullálja. Az X *i. ferde szizigije* a fenti ferde feloldásban a $\text{Ker}(Y_i \rightarrow Y_{i-1})$ modulus.

2.4. Állítás. Ha $X \approx Y$, akkor $K_X \approx K_Y$, ahol K_X , ill. K_Y az X ill. Y ferde szizigije.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $X \not\approx Y$. Legyenek P' , ill. P'' az XeA , ill. ZeA projektív fedői, és Ω' ill. Ω'' a szizigijeik. Ekkor a patkó lemma szerint adódik egy P projektív modulus és $P \rightarrow YeA$ epimorfizmus, aminek a magja K , hogy az

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & XeA & \longrightarrow & YeA & \longrightarrow & ZeA \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & P'' \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \Omega' & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \Omega'' \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array} \tag{2.4}$$

diagram kommutatív, egzakt sorokkal és oszlopokkal, és mivel $ZeA \in \mathcal{P}_e$, ezért $\Omega'' \in \mathcal{P}_e$, azaz $\Omega' \not\rightarrow K$. ■

Következmény. Erős ekvivalencia erejéig egy X modulus ferde feloldása megkapható a minimális projektív feloldás $\tau_{eA}(-)$ képével.

Az i . ferde szizigi megkapható a ferdeszizigi-képzés i -szeres alkalmazásával. Azaz az i . ferde szizigi erős ekvivalencia erejéig szintén egyértelmű.

Definíció. $X \in \text{mod-}A$ esetén legyen $v_i(X) = \dim_k \text{Hom}(K_i, S(1-e))$, ahol K_i az X i . ferde szizigije, továbbá $v(X) = (v_i(X))_{i \geq 1}$. Ha $X, Y \in \text{mod-}A$ olyanok, hogy $v(X) = v(Y)$, akkor az X és Y modulusokat **ekvivalensnek** nevezzük és ezt $X \sim Y$ -nal jelöljük.

Világos, hogy „ $\sim$ ” ekvivalencia reláció.

2.5. Állítás. $X \approx Y$ esetén $X \sim Y$.

Bizonyítás. $X \rightarrowtail Y$ esetén $\text{Hom}(X, S(1-e)) \cong \text{Hom}(Y, S(1-e))$. A 2.4 állítás szerint $X \approx Y$ esetén $K_i(X) \approx K_i(Y)$ minden i -re, ahol $K_i(X)$, ill. $K_i(Y)$ az X , ill. az Y ferde szizigije. Ekkor

$$\text{Hom}(K_i(X), S(1-e)) \cong \text{Hom}(K_i(Y), S(1-e))$$

minden i -re, azaz $v_i(X) = v_i(Y)$ teljesül minden i -re. ■

2.6. Lemma. Ha $v(X) = (v_1, v_2, v_3, \dots)$, akkor $v(\Omega(X)) = (v_2, v_3, \dots)$.

Bizonyítás. Az előző állításokból következik. ■

2.7. Állítás. $v(X) = (0, 0, \dots)$ pontosan akkor teljesül, ha $XeA \in \mathcal{P}_e$.

Bizonyítás. Ha $XeA \in \mathcal{P}_e$, akkor nyilván $v(X) = (0, 0, \dots)$. Vegyük X -nek egy ferde feloldását. A $v(X) = (0, 0, \dots)$ feltétel miatt ez egzakt, és a magjai (a K_i ferde szizigik) $\mathcal{M}_e$ -beliek. Ennek tetszőleges

$$0 \rightarrow K_{i+1} \rightarrow P_i \rightarrow K_i \rightarrow 0$$

rövid egzakt összetevőjéből azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{Ext}^t(K_{i+1}, S(1-e)) \cong \mathrm{Ext}^{t+1}(K_i, S(1-e))$$

minden t -re. De akkor

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^t(XeA, S(1-e)) &\cong \mathrm{Ext}^{t-1}(K_1, S(1-e)) \cong \\ &\cong \dots \cong \mathrm{Ext}^1(K_{t-1}, S(1-e)) \cong \mathrm{Hom}(K_t, S(1-e)) = 0 \end{aligned}$$

■

Bevezetjük még a következő jelölést. $Y \searrow_e Z$, ha létezik egy

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

egzakt sorozat, ahol $X \in \mathcal{P}_e$.

2.8. Lemma. *Ha $Y \searrow_e Z$, akkor $Y \sim Z$.*

Bizonyítás. A 2.4 állítás mintájára a patkólemma segítségével látható, hogy $K(Y) \searrow_e K(Z)$, azaz $\mathrm{Hom}(K(Y), S(1-e)) \cong \mathrm{Hom}(K(Z), S(1-e))$, amiből $v_1(Y) = v_1(Z)$ következik, és indukcióval $v_i(Y) = v_i(Z)$ minden i -re.

■

Definíció. Az X modulus **ferde feloldásának hossza** az a legkisebb $N \geq 0$, hogy $v_t(X) = 0$ minden $t > N$ -re.

Következmény. Az X modulus ferde feloldásának hossza az a legkisebb N index, amelyre $\Omega^N(X)eA \in \mathcal{P}_e$.

2.3. Ferde feloldás alkalmazása CPS-rétegezett algebrákra

2.9. Lemma. *Ha $e \in A$ primitív idempotens, akkor*

$$\mathrm{findim} \mathcal{P}_e = 0, \text{ és } \mathrm{findim} eAe = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $X \in \mathcal{P}_e$. Ekkor X minimális projektív feloldásában a modulusok $\text{Add}(eA)$ -beliek, következésképpen azonos Loewy-magasságúak, így nem fordulhat elő, hogy a feloldás egy $0 \rightarrow P_{d+1} \hookrightarrow \text{rad } P_d$ beágyazással érjen véget, vagyis $\text{projdim } X$ vagy 0 vagy ∞ .

Mivel $e \in A$ primitív idempotens, így eAe lokális algebra, tehát ugyanaz a gondolatmenet érvényes, mint feljebb, azaz $\text{findim } eAe = 0$. ■

2.10. Állítás. Legyen $e \in A$ erős idempotens $X \in \text{mod-}A$ véges projektív dimenziós, és $XeA \in \mathcal{P}_e$. Ekkor $\text{projdim}_{A/AeA} X/XeA < \infty$ és $\text{projdim } X \leq 1 + \text{findim } A/AeA$.

Bizonyítás. Legyen

$$0 \rightarrow P_d \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

az X minimális projektív feloldása. Ekkor

$$0 \rightarrow \Omega_{i+1} \cap (P_i eA) \rightarrow P_i eA \rightarrow \Omega_i eA \rightarrow 0$$

is egzakt, de a feltétel és az 1.1. lemma szerint $\Omega_{i+1} \cap (P_i eA) = \Omega_{i+1} eA$, ahol Ω_i az X modulus i . szizigije. Vagyis a

$$0 \rightarrow P_d e_n A \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 e_n A \rightarrow P_0 e_n A \rightarrow X e_n A \rightarrow 0$$

sorozat is egzakt. A kigyó-lemma alkalmazásával

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_{i+1} eA & \longrightarrow & P_i eA & \longrightarrow & \Omega_i eA \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_{i+1} & \longrightarrow & P_i & \longrightarrow & \Omega_i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \overline{\Omega_{i+1}} & \longrightarrow & \overline{P_i} & \longrightarrow & \overline{\Omega_i} \longrightarrow 0 \end{array}$$

kommutatív diagramot kapunk egzakt sorokkal, így a

$$0 \rightarrow \overline{P_d} \rightarrow \overline{P_{d-1}} \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{P_0} \rightarrow \overline{X} \rightarrow 0$$

sorozat is egzakt, ahol $\overline{P}_i = P_i/P_i eA$, és $\overline{X} = X/XeA$, ami valójában $\overline{X}$ minimális projektív feloldása $\overline{A} = A/Ae_nA$ fölött, azaz $\text{projdim}_{\overline{A}} \overline{X} < \infty$. Mivel $\text{findim } \overline{A}$ véges, mondjuk N , így $N \geq d$, azaz $\overline{P}_t = 0$ minden $t \geq N + 1$ esetén. Ez azt jelenti, hogy $\Omega_{N+1}(X) \in \mathcal{P}_e$, de a 2.9. lemma értelmében projektív is, vagyis $\text{projdim } X \leq N + 1$. $\blacksquare$

Ebből közvetlenül adódik a következő tétel.

2.11. Tétel. *Legyen A CPS-rétegezett. Ha minden $X \in \text{mod-}A$ véges projektív dimenziós modulusnak a ferde feloldása az Ae_nA -ra nézve legfeljebb N hosszú, akkor*

$$\text{findim } A \leq N + \text{findim } A/Ae_nA + 1$$

.

2.12. Példa. Előfordulhat, hogy a 2.10 állításbeli konvenciókkal $\text{projdim}_{\overline{A}} \overline{X} = \infty$, ahol $\overline{A} = A/Ae_nA$, és $\overline{X} = X/Xe_nA$. Ugyanis legyen A reguláris modulusának Loewy-diagramja $A_A = {}^1_1 2 \oplus {}^2_1$, és tekintsük az $X = {}^1_2$ modulus. Ekkor $\text{projdim } X = 2$. Világos, hogy A CPS-rétegezett (hiszen standardul rétegezett is), $A/Ae_2A \cong {}^1_1$ lokális algebra, és $X/Xe_2A = {}^1_1$, azaz A/Ae_2A felett végtelen projektív dimenziós. Ellenben $\Omega(X)/\Omega(X)e_2A$ projektív dimenziója véges!

2.13. Példa. Legyen az A az 1.5. példában szereplő algebra:

$$A_A = \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \oplus \begin{array}{c} 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \\ \downarrow \\ 2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array}.$$

Láttuk, hogy A CPS-rétegezett (sőt, szigorúan rétegezett: $\Lambda(1) = {}^1_1$, $\Lambda(2) = {}^2_1$). Mivel a szizigiként előforduló Ω modulusok szükségszerűen $\text{Add}(\text{rad } A)$ -beliek, így

$P(2)$ -vel vett nyomuk: $\Omega e_2 A \subset X \in \text{Add}({}_1^2 \oplus {}_1^2 {}_2^2)$. De mivel ${}_1^2 {}_2^2 \cong {}_1^2 \oplus {}_2^2$, így valójában $\Omega e_2 A \subset X \in \text{Add}({}_1^2 \oplus {}_1^2 \oplus {}_2^2)$.

Az X modulus a $B_B = {}_1 \oplus {}_1^2 {}_2$ algebra fölött is, ezáltal $\Omega e_2 A$ is az. De B véges reprezentáció típusú, és a direkt felbonthatatlan modulusok osztályainak reprezentánsai: ${}_1, {}_2, {}_1^2, {}_2^2, {}_1^2 {}_2$. Azaz $\Omega e_2 A \in \text{Add}({}_2 \oplus {}_2^2 \oplus {}_1^2 \oplus {}_1^2 {}_2)$.

Kiszámoljuk az $X = {}_2, Y = {}_1^2, Z = {}_2^2$ modulusokra a $v(X), v(Y), v(Z)$ értékeket.

Az X, Y, Z ferde feloldásainak első lépései rendre

$$0 \rightarrow {}_1 \oplus {}_2 \rightarrow {}_1^2 {}_2 \rightarrow {}_2 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow {}_2 \rightarrow {}_1^2 {}_2 \rightarrow {}_1^2 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow {}_1 \rightarrow {}_1^2 {}_2 \rightarrow {}_2^2 \rightarrow 0,$$

ahol ${}_1 \oplus {}_2 \sim {}_2$, és ${}_1 \sim 0$, így

$$v(X) = (1, 1, \dots),$$

$$v(Y) = (0, 1, 1, \dots),$$

$$v(Z) = (1, 0, 0, \dots).$$

Az is látható, hogy

$$0 \rightarrow {}_2 \rightarrow {}_1^2 \oplus {}_2^2 \rightarrow {}_1^2 {}_2 \rightarrow 0$$

egzakt, vagyis ${}_2 \sim {}_1^2 \oplus {}_2^2$, továbbá ${}_1^2 {}_2 \in \mathcal{P}_{e_2}$, ezért ${}_1^2 {}_2 \sim 0$, így $\Omega e_2 A$ ekvivalens az $\text{Add}(X \oplus Y \oplus Z)$ -nek egy olyan elemével, amelyben Y és Z közül legfeljebb az egyik szerepel.

Tehát a szizigiket tartalmazó ekvivalencia osztályoknak teljes reprezentáns rendszerét megkapjuk $0, X^n, Y^n \oplus X^m, Z^n \oplus X^m$ alakban, ahol $n \geq 1, m \geq 0$, ugyanis

$$\begin{aligned}
v(X^n) &= (n, n, \dots), \\
v(Y^n \oplus X^m) &= (m, n + m, n + m, \dots), \\
v(Z^n \oplus X^m) &= (n + m, m, m, \dots)
\end{aligned}$$

mind különbözőek.

Ezek közül csak a Z^n (és a 0) rendelkezik véges hosszú ferde feloldással (éppenséggel véges hosszú minimális projektív feloldással), aminek hossza 1, szóval az összes modulusra legfeljebb 2 a ferde feloldás hossza. $\overline{A} = A/Ae_2A$ lokális algebra, azaz $\text{findim } \overline{A} = 0$, így $\text{findim } A \leq 3$ adódik.

Megjegyzés. A dolgozat témájául szolgáló ferde feloldás, illetve az ebből származtatott v függvény egy másik motivációja a K. Igusa és G. Todorov által [5]-ben definiált ϕ függvény, amely azt méri, hogy a $\text{mod-}A$ direkt felbonthatatlan nem projektív modulusainak izomorfiaosztályai által generált K_0 szabad Abel-csoportban egy X modulusra $\text{Add}(X)$ -en mikor stabilizálódik a szizigiképzés hatványainak a magja. Ez a $\phi(X)$ minden végesen generált modulusra véges, nemcsak a véges projektív dimenziósokra, azaz ezen értékek szuprénuma felülről becsüli a finitisztikus dimenziót.

Ez az eredmény és alkalmazásai harminc éve nagy visszhangot keltettek, és máig is aktívan vizsgálják az Igusa–Todorov-függvényeket (ld. pl. [7, 8]).

Mivel a dolgozatban definiált v leképezés is szizigi-invariáns homomorfizmus K_0 -ból $\mathbb{Z}^\infty$ -be, az ennek magjával vett faktorcsoporton is hatnak az Igusa–Todorov-függvények, és ebben a formában hasznos eszközök lehetnek a CPS-rétegezett algebrák finitisztikus dimenziójának vizsgálatában.

Irodalom

- [1] M Auslander, M Platzeck és Gordana Todorov. “Homological Theory of Idempotent Ideals”. **Transactions of the American Mathematical Society** 332 (1992. febr.). DOI: 10.2307/2154190.
- [2] Birge Huisgen-Zimmermann. “The finitistic dimension conjectures – a tale of 3.5 decades”. **Abelian groups and modules**. 1994, 501–517. old.
- [3] I. Ágoston, V. Dlab, E. Lukács. “Stratified algebras”. **Mathematical Reports of the Academy of Science, Canada** 20 (1998), 20–25. old.
- [4] I. Ágoston, D. Happel, E. Lukács, L. Unger. “Finitistic Dimension of Standardly Stratified Algebras”. **Comm. Algebra** 28 (2000), 2745–2752. old.
- [5] Kiyoshi Igusa és Gordana Todorov. “On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras”. **Representations of algebras and related topics** 45 (2005), 201–204. old.
- [6] Charles Paquette. “Strictly Stratified Algebras Revisited”. **Communications in Algebra** 37 (2009), 2591–2600. old.
- [7] Sônia Fernandes, Marcelo Lanzilotta és Octavio Mendoza. “The ϕ -Dimension: A New Homological Measure”. **Algebras and Representation Theory** 18 (2013. ápr.). DOI: 10.1007/s10468-014-9504-9.

- [8] Eric Hanson és Kiyoshi Igusa. “A counterexample to the ϕ -dimension conjecture”. **Mathematische Zeitschrift** 300 (2022. jan.), 1–20. old. DOI: 10.1007/s00209-021-02795-7.