

A BURES ÉS HELLINGER TÁVOLSÁG EGY PARAMÉTERES KITERJESZTÉSE ÉS TRACE KARAKTERIZÁCIÓK

KOMÁLOVICS ÁBEL

TDK DOLGOZAT

TÉMAVEZETŐ: DR. MOLNÁR LAJOS



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapest, Magyarország
2022

1. BEVEZETŐ ÉS AZ EREDMÉNYEK ÁTTEKINTÉSE

A dolgozatban szereplő összes eredmény új, valamint részét képezi egy, a témavezetővel, Molnár Lajossal közös cikknek [11], amely a J. Math. Anal. Appl. egy különszámába került felkérésre, és elbírálás alatt van. Lejebb a cikkben szereplő állítások szerepelnek, viszont csak a jelen dolgozat szerzőjének eredményeire szerepel bizonyítás. Nevezetesen, az 1. állítás és a 3. tétel minden $p \geq 0$ -ra mond ki eredményt, utánuk azonban csak a $p = 0$ esetek bizonyítása található, mivel a $p > 0$ esetet a témavezető bizonyítja [11]-ban.

A Hellinger távolság kvantumos változatai (valószínűségi eloszlásokon) fontos szerepet játszanak a kvantum-információelméletben. Az $n \times n$ -es komplex mátrixok $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ pozitív szemidefinit kúpján a következőképpen definiáljuk a két legtöbbet tanulmányozott változatot (lásd [2]):

$$(1) \quad d_H(A, B) = \sqrt{2} \left(\text{Tr} \left((A + B)/2 - A^{1/4} B^{1/2} A^{1/4} \right) \right)^{1/2}, \quad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$$

és

$$(2) \quad d_B(A, B) = \sqrt{2} \left(\text{Tr} \left((A + B)/2 - (A^{1/2} B A^{1/2})^{1/2} \right) \right)^{1/2}, \quad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+.$$

Ez a két függvény valódi metrika $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ -on. Az utóbbit Bures vagy Bures-Wasserstein távolságnak nevezzük, az előbbi pedig, ami a klasszikus Hellinger távolság legtriviálisabb kiterjesztése a kvantumos környezetre, szintén Hellinger távolságnak nevezzük, lásd pl. [18]. A fenti (1) és (2) egyenletekben a trace alatt, amit Tr -rel jelölünk, megjelenik a számtani középnek és a geometriai közép két variánsának különbsége. Látható, hogy az utóbbi két operáció valójában egy természetes paraméteres család tagjai, amely geometriai-közép-szerű műveletekből áll, és kiterjeszthető általános C^* -algebák környezetébe a következőképpen.

Legyen $\mathcal{A}$ egy C^* -algebra. Az elkövetkezőkben végig feltesszük, hogy $\mathcal{A}$ egységelemes. Jelölje $\mathcal{A}^+$ az $\mathcal{A}$ pozitív szemidefinit kúpját ($\mathcal{A}$ összes önadjungált, nemnegatív spektrummal rendelkező elemének halmazát), $\mathcal{A}^{++}$ pedig $\mathcal{A}$ pozitív definit kúpját ($\mathcal{A}$ összes önadjungált, szigorúan pozitív spektrumú elemének halmazát). A következőképpen vezethetjük be az előbbi operációk paraméteres családját. Tetszőleges $p > 0$ pozitív valós számra legyen

$$A\kappa_p B = (A^{p/4} B^{p/2} A^{p/4})^{1/p}, \quad A, B \in \mathcal{A}^+.$$

Az úgynevezett szimmetrizált Lie-Trotter formula alapján minden $X, Y \in \mathcal{A}$ -ra

$$\left(e^{(p/2)X} e^{pY} e^{(p/2)X} \right)^{1/p} \xrightarrow{p \rightarrow 0} e^{X+Y}$$

teljesül, ahol a határérték a normában értendő. Ebből következik, hogy minden $A, B \in \mathcal{A}^{++}$ -ra

$$A\kappa_p B \xrightarrow{p \rightarrow 0} \exp((\log A + \log B)/2).$$

Ezen határértéket A és B log-Euklideszi közepének szokás nevezni.

Ezek alapján tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}^{++}$ -ra bevezetjük a következő jelölést:

$$A\kappa_0 B = \exp((\log A + \log B)/2).$$

Minden κ_p egy variánsa a klasszikus Kubo-Ando (vagy eredetileg Pusz-Horowitz) geometriai középnek, ami a következőképpen van definiálva:

$$A\#B = A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^{1/2} A^{1/2}, \quad A, B \in \mathcal{A}^{++}.$$

Valóban, ha A és B felcserélhető, akkor a fenti operációink mind egybeesnek. Megjegyezzük, hogy a κ_p operációk a kvantum Rényi-divergencia egyes változatainak kontextusában is fellépnek. Lásd, például [14] és hivatkozásai.

A következőkben használni fogjuk a számtani középére elterjedt jelölést, ami

$$A \nabla B = \frac{A + B}{2}, \quad A, B \in \mathcal{A}^+.$$

Látható, hogy minden $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ -ra

$$d_H(A, B) = \sqrt{2} (\text{Tr}(A \nabla B - A \kappa_1 B))^{1/2}$$

és

$$d_B(A, B) = \sqrt{2} (\text{Tr}(A \nabla B - A \kappa_2 B))^{1/2}.$$

Ezek a kifejezések könnyen definiálhatók C^* -algebrákra vonatkozólag. Tegyük fel, hogy τ egy pozitív lineáris funkcionál $\mathcal{A}$ -n, amely hűséges és trace-szerű. Az előbbi azt jelenti, hogy minden $A \in \mathcal{A}^+$ -ra $\tau(A) = 0$ -ból következik $A = 0$, az utóbbi pedig azt, hogy $\tau(XY) = \tau(YX)$ teljesül minden $X, Y \in \mathcal{A}$ -ra.

Ezen dolgozatban minden p nemnegatív valós számra szeretnénk bevezetni a

$$d_p^\tau(A, B) = (\tau(A \nabla B - A \kappa_p B))^{1/2}, \quad A, B \in \mathcal{A}^+,$$

kifejezést, és vizsgálni, mint lehetséges távolság mértéket.

Ha d_p^τ -t szeretnénk tanulmányozni, akkor először azt kell meggondolnunk, hogy jóldefiniált-e, azaz a négyzetgyök alatt nemnegatív kifejezés áll-e. Elsőként egy erősebb kérdést vizsgálunk: mikor teljesül $A \nabla B - A \kappa_p B$ nemnegativitása minden $A, B \in \mathcal{A}^{++}$ esetén? A 1. állítás következménye, hogy ez csak kommutatív algebrákban lehetséges. Ezek után megmutatjuk, hogy $d_p = d_p^{\text{Tr}}$ jóldefiniált $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}$ -on minden $p \geq 0$ esetén, valamint d_p^τ is jóldefiniált tetszőleges C^* -algebra pozitív kúpján, ha $p \leq 2$.

Ezek után természetes módon vetődik fel d_p^τ metrikusságának kérdése. A $p = 1$ és $p = 2$ esetben ismert eredmény, hogy d_1^τ és d_2^τ valódi metrika, amire [11]-ben egy új, elemibb és transzparenssebb érvelés is szerepel. Az általános, d_p^τ , $p \geq 0$ eset azonban igen nehéznek tűnik, csak részleges eredményünk van. Nevezetesen, megmutatjuk, hogy $d_p = d_p^{\text{Tr}}$ pontosan akkor valódi metrika tetszőleges Hilbert-tér egyrangú vetítéseinek (a tiszta állapotainak) halmazán, ha $p \leq 2$.

A 3. állítás egy másik nézőpontból közelíti meg $\tau(A \nabla B - A \kappa_p B)$ pozitivitását, ugyanis azt mondja, hogy ha egy pozitív lineáris funkcionál minden $A \nabla B - A \kappa_p B$, $A, B \in \mathcal{A}^{++}$ alakú elem nemnegatív értéket vesz fel, akkor szükségképpen trace-szerű. Ez azt jelenti, hogy ha φ olyan pozitív lineáris funkcionál $\mathcal{A}$ -n, amelyre d_p^φ jóldefiniált, akkor φ -nek trace-szerűnek kell lennie. Ez a trace-szerű pozitív lineáris funkcionálok egy új trace karakterizációjára ad lehetőséget.

A dolgozat utolsó részében Sra egyik eredményét [19] tekintjük, amely szerint a szimmetrikus Stein-divergencia négyzetgyöke valódi metrika mátrixalgebrák pozitív definit kúpjain. Észrevesszük, hogy ez az érték megegyezik a számtani közép logaritmusának és a paraméteres családunk bármely κ_p tagja logaritmusának különbségéből vett trace négyzetgyökével. Valóban, mátrixalgebrákon κ_p logaritmusa nem függ a p paramétertől a determináns multiplikatívitásának köszönhetően. Megmutatjuk, hogy ez a függetlenség kitünteti a trace-t a korlátos lineáris funkcionálok közül. Pontosabban, a 4. tételben megmutatjuk hogy Neumann algebrákon, ha egy φ korlátos lineáris funkcionálra két adott különböző p, q nemnegatív valós szám esetén $\varphi(\log A \kappa_p B) = \varphi(\log A \kappa_q B)$ teljesül minden $A, B \in \mathcal{A}^{++}$ elemre, akkor φ trace-szerű. Ezt az eredményt úgy is lehet értelmezni, mint a determináns egyfajta karakterizációját (pozitív definit mátrixokon a logaritmus trace-e megegyezik a determináns logaritmusával).

Ezek után rátérünk az eredmények precíz bemutatására.

2. EGY CENTRALITÁS KARAKTERIZÁCIÓ d_p^τ SEGÍTSÉGÉVEL

Ha pozitív kúpokon szereték vizsgálni d_p^τ -t, akkor meg kell vizsgálnunk a

$$\tau(A \nabla B - A \kappa_p B) \geq 0$$

egyenlőtlenség érvényességét, ami bizonyítaná d_p^T jóldefiniáltságát. A következő eredményben ezzel a problémával kapcsolatban tekintünk egy erősebb kérdést: mikor pozitív elem $A \nabla B - A \kappa_p B$? Az alábbi eredményünk a centrális pozitív definit elemek egy karakterizációjának is tekinthető.

1. Állítás. Legyen $\mathcal{A}$ egy C^* -algebra és p egy nemnegatív valós szám. Ha $B \in \mathcal{A}^{++}$ rögzített, és

$$A \kappa_p B \leq A \nabla B$$

teljesül minden $A \in \mathcal{A}^{++}$ esetén, akkor B szükségképpen centrális elem $\mathcal{A}$ -ban ($\mathcal{A}$ minden elemével felcserélhető). Ha pedig $A \in \mathcal{A}^{++}$ rögzített, és a fenti egyenlőtlenség teljesül minden $B \in \mathcal{A}^{++}$ -re, akkor A centrális.

Bizonyítás: Mint a [16] cikkben található Proposition 4 bizonyításában, Kadison nevezetes tranzitivitási tételéből következő a meglepő tény, hogy a fenti általános állítás bizonyítható, ha igazolni tudjuk azt az $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ speciális algebrára. A következőekben erre az algebrára bizonyítjuk az állítást.

A $p > 0$ esetet lásd [11]. Az alábbiakban feltesszük, hogy $p = 0$. Ehhez az esethez két eszközre lesz szükségünk. Az első a következő. A [16] cikkben szereplő Proposition 8 bizonyításában kiderült, hogy bármely $T \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ önadjungált mátrixra és $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ egyrangú projekcióra

$$(3) \quad e^{(T-n(I-P))} \rightarrow e^{\text{Tr } TP} P,$$

amint $n \rightarrow \infty$. A második eszköz, amit használni fogunk, a következő. Tegyük fel, hogy P egy egyrangú projekció, t egy pozitív szám és A egy pozitív definit mátrix, amire

$$tP \leq A.$$

Szorozzuk be mindkét oldalról $A^{-1/2}$ -nel, így az egyenlőtlenségünk már a $tA^{-1/2}PA^{-1/2} \leq I$ alakot ölti. Könnyű belátni, hogy $tA^{-1/2}PA^{-1/2}$ egyetlen pozitív sajátértéke $t \text{Tr } A^{-1}P$, amiből következik, hogy

$$(4) \quad t \leq \frac{1}{\text{Tr } A^{-1}P}.$$

Ezek után a $p = 0$ eset bizonyítása következik. Tegyük fel, hogy

$$\exp\left(\frac{\log A + \log B}{2}\right) \leq \frac{A+B}{2}$$

teljesül valamely rögzített $B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^+$ -ra és minden $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^+$ -ra. Ekkor A és B felírható e^C és e^D alakba valamilyen önadjungált $C, D \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ elemekre (D rögzített, C változó). Legyen $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ egy egyrangú projekció, és legyen $C_n = D - n(I - P)$. Ekkor

$$\exp\left(\frac{2D - n(I - P)}{2}\right) \leq \frac{e^{D-n(I-P)} + e^D}{2}.$$

Ha határértéket veszünk, akkor (3) alapján láthatjuk, hogy

$$(5) \quad e^{\text{Tr } DP} P \leq \frac{e^{\text{Tr } DP} P + e^D}{2}.$$

Ha mindkét oldalt beszorozzuk 2-vel, és átrendezzük az egyenletet, akkor a következőt kapjuk:

$$(6) \quad e^{\text{Tr } DP} P \leq e^D.$$

A (4) egyenlőtlenséghez vezető gondolatmenet alapján ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(7) \quad e^{\text{Tr } DP} \leq \frac{1}{\text{Tr } e^{-D} P}.$$

Legyen e^D spektrálfelbontása a következő:

$$(8) \quad e^D = d_1 R + d_2 (I - R),$$

ahol $d_1, d_2 > 0$ pozitív valós szám, és R egyrangú projekció. A (7) egyenlőtlenség azt mutatja, hogy

$$e^{\log(d_1) \operatorname{Tr} RP + \log(d_2)(1 - \operatorname{Tr} RP)} \leq \frac{1}{d_1^{-1} \operatorname{Tr} RP + d_2^{-1} (1 - \operatorname{Tr} RP)}.$$

Ha bevezetjük a $t = \operatorname{Tr} RP$ jelölést, akkor a következőt kapjuk,

$$d_1^t d_2^{1-t} \leq \frac{1}{t d_1^{-1} + (1-t) d_2^{-1}}.$$

Azonban t bármilyen 0 és 1 közötti szám lehet (emlékezzünk rá, hogy P tetszőleges egyrangú projekció), tehát az egyenlőtlenség $t = 1/2$ -re is igaz, azaz

$$\sqrt{d_1 d_2} \leq \frac{2}{d_1^{-1} + d_2^{-1}}.$$

Ez azt jelenti, hogy d_1 és d_2 geometriai közepe nem több, mint a harmonikus közepük, amiből következik, hogy $d_1 = d_2$, tehát $B = e^D = d_1 I$. Ezzel az állítás bizonyítása teljes. ■

Kiemeljük az érdekességet, hogy mind az 1. állítás és a 3. tétel is bizonyítható C^* -algebrákra úgy, hogy csak az $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ speciális algebrán igazoljuk. Ennek az oka a két állítás esetében azonban különböző.

Visszatérünk az eredeti problémára, azaz a d_p -k és a d_p^T -k jóldefiniáltságának kérdésére. A híres Araki-Lieb-Thirring egyenlőtlenség szerint minden $r \geq 1$ -re és $p > 0$ -ra

$$(9) \quad \operatorname{Tr}(A^{1/2} B A^{1/2})^r p \leq \operatorname{Tr}(A^{r/2} B^r A^{r/2})^p$$

teljesül bármely $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ esetén (lásd a (6.36) egyenlőtlenséget a [10] cikkben, vagy az eredeti forrást [1]). Ha két tetszőleges $0 < p \leq q$ pozitív számot tekintünk, és a (9) egyenlőtlenségbe p helyére $1/q$ -t írunk, rögzítjük $r = q/p$ -t, majd A -t A^p -vel, B -t pedig B^p -vel helyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$(10) \quad \operatorname{Tr}(A^{p/2} B^p A^{p/2})^{1/p} \leq \operatorname{Tr}(A^{q/2} B^q A^{q/2})^{1/q}$$

teljesül minden $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ esetén. Ebből következik, hogy

$$0 \leq \operatorname{Tr}(A \nabla B - A \kappa_2 B) \leq \operatorname{Tr}(A \nabla B - A \kappa_p B), \quad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$$

minden $0 \leq p \leq 2$ -re. (Megjegyezzük, hogy az $1 \leq p \leq 2$ esetben a [8] cikkben bizonyításra került, hogy d_p úgynevezett kvantum-divergencia, lásd Definition 2.1 és Theorem 3 a cikkben). De mi a helyzet $\operatorname{Tr}(A \nabla B - A \kappa_p B)$ nemnegativitásával akkor, amikor $p > 2$? A [11] cikkben ebben az esetben is igazolást nyert a nemnegativitás. Ennek következményeképp d_p minden $p \geq 0$ -ra jóldefiniált $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ -on.

A fenti megállapítások közül melyek azok, amelyek a C^* -algebrák sokkal általánosabb környezetében is igazak maradnak? A [11] cikk kezeli a $p \leq 2$ esetet, ott teljesül a nemnegativitás, azonban a $p > 2$ eset megoldatlan maradt, ezzel kapcsolatban a következő problémát fogalmazzuk meg.

1. Probléma. Igaz-e, hogy egy tetszőleges, τ hűséges pozitív trace-szerű lineáris funkcionállal rendelkező $\mathcal{A}$ C^* -algebrára $\tau(A \nabla B - A \kappa_p B) \geq 0$ teljesül minden $A, B \in \mathcal{A}^+$ és $p > 2$ esetén?

3. d_p AZ EGYRANGÚ VETÍTÉSEK HALMAZÁN

Tudjuk, hogy $d_1 = d_H$ és $d_2 = d_B$ valódi metrika $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}$ -on. Természetesen adódik a kérdés, hogy mi történik a $p \neq 1, 2$ esetében. A következő állításunkban bebizonyítjuk, hogy d_p egyik $p > 2$ -re sem teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget már a 2×2 -es mátrixok esetében sem.

Az eredmény kimondása előtt megjegyezzük a következőt: legyen H egy (tetszőleges dimenziójú) Hilbert-tér, és jelölje H összes egyrangú vetítésének halmazát $P_1(H)$. Ha p egy pozitív valós szám, akkor bármely $P, Q \in P_1(H)$ esetén a $d_p(P, Q) = (1 - \text{Tr}(PQP)^{1/p})^{1/2}$ mennyiség jóldefiniált, valamint $d_p(P, Q) = \sqrt{1 - \cos^{2/p} \alpha}$ teljesül, ahol $\alpha \in [0, \pi/2]$ a szög P és Q képtere között.

Az állításunk a következő:

2. Állítás. *Legyen H egy Hilbert-tér, melyre $\dim H > 1$. Ekkor d_p akkor, és csak akkor metrika $P_1(H)$ -n, ha $p \leq 2$.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $p > 2$. Nyilvánvalóan elegendő belátni az állítást $H = \mathbb{C}^2$ esetre. Legyen P, Q két egymásra merőleges egyrangú projekció, és legyen R egy egyrangú projekció úgy, hogy P és R képtere közti szög $\alpha \in [0, \pi/2]$. Azt állítjuk, hogy létezik olyan α , amire

$$1 = d_p(P, Q) > d_p(P, R) + d_p(R, Q) = \sqrt{1 - \cos^{2/p} \alpha} + \sqrt{1 - \sin^{2/p} \alpha}$$

teljesül. Ha itt négyzetre emelünk, és átrendezünk, akkor az egyenlőtlenség ezt az ekvivalens alakot ölti:

$$\cos^{2/p} \alpha + \sin^{2/p} \alpha - 1 > 2\sqrt{1 - \cos^{2/p} \alpha}\sqrt{1 - \sin^{2/p} \alpha}.$$

Ha még egyszer négyzetre emelünk, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \cos^{4/p} \alpha + \sin^{4/p} \alpha + 1 - 2\cos^{2/p} \alpha - 2\sin^{2/p} \alpha + 2\cos^{2/p} \alpha \sin^{2/p} \alpha \\ > 4 - 4\cos^{2/p} \alpha - 4\sin^{2/p} \alpha + 4\cos^{2/p} \alpha \sin^{2/p} \alpha. \end{aligned}$$

Átrendezés után láthatjuk, hogy

$$0 > 3 - 2(\cos^{2/p} \alpha + \sin^{2/p} \alpha) - (\cos^{2/p} \alpha - \sin^{2/p} \alpha)^2$$

A $t = \cos^2 \alpha$ helyettesítés bevezetése után azt kell bebizonyítanunk, hogy valamely $t \in [0, 1]$ -re

$$0 > 3 - 2(t^{1/p} + (1-t)^{1/p}) - (t^{1/p} - (1-t)^{1/p})^2.$$

Legyen

$$f(t) = 3 - 2(t^{1/p} + (1-t)^{1/p}) - (t^{1/p} - (1-t)^{1/p})^2, \quad t \in [0, 1].$$

Ekkor $f(0) = 0$. Az f deriváltja bármely $0 < t < 1$ pontban

$$f'(t) = -(2/p) \left((t^{1/p-1} - (1-t)^{1/p-1}) + (t^{1/p} - (1-t)^{1/p})(t^{1/p-1} + (1-t)^{1/p-1}) \right).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} -(p/2)f'(t) &= (t^{1/p-1} - (1-t)^{1/p-1}) + (t^{1/p} - (1-t)^{1/p})(t^{1/p-1} + (1-t)^{1/p-1}) \\ &= t^{2/p-1} + t^{1/p-1}(1 - (1-t)^{1/p}) - (1-t)^{1/p-1}(1 - t^{1/p} + (1-t)^{1/p}) \\ &\geq t^{2/p-1} - (1-t)^{1/p-1}(1 - t^{1/p} + (1-t)^{1/p}). \end{aligned}$$

Ahogy $t \rightarrow 0$, az utóbbi kifejezés a végtelenbe tart, ezért elég kis pozitív t -re a derivált $f'(t)$ negatív. Mivel $f(0) = 0$, azt kapjuk, hogy $f(t) < 0$ elég kicsi pozitív t -re. Ezzel kész a bizonyítás abban az esetben, amikor $p > 2$.

Most tegyük fel, hogy $0 < p < 2$. Legyen $P, Q \in P_1(H)$ projekció, melyek képterének szöge α . Korábban már említettük, hogy ekkor $d_p(P, Q) = \sqrt{1 - \cos^{2/p} \alpha}$. Jelöljük f -fel α -nak ezt a függvényét, amit a $[0, \pi/2]$ intervallumon értelmezzünk.

Válasszunk tetszőleges $P, Q, R \in P_1(H)$ vetítést. Legyen P és R képterének szöge α , az R és Q képtere közötti szög pedig legyen β .

Tegyük fel, hogy a

$$(11) \quad f(\alpha + \beta) \leq f(\alpha) + f(\beta)$$

egyenlőtlenség igaz minden $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$ -re, amire $\alpha + \beta \in [0, \pi/2]$.

Legyen γ a szög P és Q képtere között. Ekkor nyilván $\gamma \leq \alpha + \beta$, tehát ha $\alpha + \beta \leq \pi/2$, akkor (11) és f monotonitása alapján teljesül a háromszög egyenlőtlenség:

$$d_p(P, Q) = f(\gamma) \leq f(\alpha + \beta) \leq f(\alpha) + f(\beta) = d_p(P, R) + d_p(R, Q).$$

Az $\alpha + \beta > \pi/2$ eset is egyszerű. Ismét (11) és f monotonitásának alkalmazásával láthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} d_p(P, Q) = f(\gamma) &\leq f(\pi/2) \leq f(\pi/2 - \beta) + f(\beta) \\ &\leq f(\alpha) + f(\beta) = d_p(P, R) + d_p(R, Q). \end{aligned}$$

Tehát csak a (11) egyenlőtlenséget kell igazolnunk, ami ekvivalens a következővel:

$$f(s) + f(t - s) - f(t) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq t \leq \pi/2.$$

Rögzítsünk egy $t_0 \in [0, \pi/2]$ számot, és tekintsük az előbbi egyenlőtlenség bal oldalát, mint s egy függvényét. Látható, hogy $s = 0$ és $s = t_0$ esetén teljesül a kívánt egyenlőtlenség. Bebizonyítjuk, hogy s -nek ez a függvénye konkáv $[0, t_0]$ -on, ami bizonyítja az állításunkat. A kérdéses függvény második deriváltja f második deriváltjának a kétszerese. Számoljuk ki f második deriváltját. Az f függvény első deriváltja

$$\begin{aligned} f'(t) &= (1/2)(1 - \cos^{2/p} t)^{-1/2}(-2/p) \cos^{2/p-1} t (-\sin t) \\ &= (1/p)(1 - \cos^{2/p} t)^{-1/2} \cos^{2/p-1} t \sin t \\ &= (1/p) \frac{\cos^{2/p-1} t \sin t}{f(t)}. \end{aligned}$$

Ez alapján kiszámoljuk a második deriváltat,

$$\begin{aligned} f''(t) &= (1/p) \frac{((2/p - 1) \cos^{2/p-2} t (-\sin t) \sin t + \cos^{2/p-1} t \cos t) f(t) - \cos^{2/p-1} t \sin t (1/p) \frac{\cos^{2/p-1} t \sin t}{f(t)}}{f(t)^2} \\ &= \frac{\cos^{2/p} t}{p f(t)^2} \left(-((2/p - 1) \cos^{-2} t \sin^2 t f(t) + f(t) - (1/p) \frac{\cos^{2/p} t \cos^{-2} t \sin^2 t}{f(t)}) \right) \\ &= \frac{\cos^{2/p} t}{p f(t)^3} \left(-(2/p) \tan^2 t f(t)^2 + \tan^2 t f(t)^2 + f(t)^2 - (1/p) \cos^{2/p} t \tan^2 t \right) \\ &= \frac{\cos^{2/p} t}{p f(t)^3} \left(-(2/p) \tan^2 t f(t)^2 + \tan^2 t f(t)^2 + f(t)^2 - (1/p)(1 - f(t)^2) \tan^2 t \right) \\ &= \frac{\cos^{2/p} t}{p f(t)^3} \left((1 + \tan^2 t) f(t)^2 - (1/p)(1 + f(t)^2) \tan^2 t \right). \end{aligned}$$

Belátjuk, hogy

$$(1 + \tan^2 t) f(t)^2 - (1/p)(1 + f(t)^2) \tan^2 t \leq 0,$$

vagy ami ezzel ekvivalens,

$$\frac{f(t)^2}{1+f(t)^2} \leq \frac{1}{p} \frac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t} = \frac{1}{p} \sin^2 t.$$

Ezt f definíciója alapján a következőképpen tudjuk átírni:

$$\frac{1 - \cos^{2/p} t}{2 - \cos^{2/p} t} \leq \frac{1}{p} (1 - \cos^2 t).$$

Változócsere után így néz ki az előző egyenlőtlenség:

$$\frac{1-t}{2-t} \leq \frac{1}{p} (1-t^p).$$

Azt állítjuk, hogy minden $t \in [0, 1]$ -re

$$(12) \quad \frac{1-t}{2-t} \leq \frac{1}{2} (1-t^2) \leq \frac{1}{p} (1-t^p).$$

Az első egyenlőtlenséget könnyű közvetlenül belátni, így csak a másodikkal foglalkozunk. Tekintsük a

$$t \mapsto \frac{t^p}{p} - \frac{t^2}{2}$$

függvény deriváltját. Láthatjuk, hogy a derivált eltűnik a 0-ban, $]0, 1[$ -en pozitív, és 1-ben újra 0. Ebből következik, hogy a fenti függvény az 1-ben veszi fel a maximális értékét, tehát

$$\frac{t^p}{p} - \frac{t^2}{2} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{2}, \quad t \in [0, 1].$$

Átrendezés után megkapjuk a (12)-ben szereplő második egyenlőtlenséget. Ezzel a $0 < p < 2$ eset bizonyítása teljes. A $p = 0$ esetet a $p \rightarrow 0$ határérték vételével kapjuk meg. ■

Ami d_p és d_p^T metrikus tulajdonságainak kérdését illeti, a következő, minden bizonnyal nehéz kérdéseket foglalmazzuk meg.

2. Probléma. Igaz, hogy $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ -on ($n \geq 2$) d_p metrika minden $1 < p < 2$ -re, és egyik $0 < p < 1$ -re sem metrika? Mi a helyzet általános C^* -algebrák esetén? Igaz, hogy d_p^T metrika, ha $1 < p < 2$?

Ami a mátrixalgebrákat illeti, megjegyezzük, hogy matematikai szoftveres tesztek alapján úgy hisszük, az első két kérdésre pozitív a válasz.

Azt is megemlíthetjük, hogy ha $0 < p < 1$ -re d_p valóban nem metrika $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ -on ($n \geq 2$), akkor egy, a [11] cikkben szereplő módszerrel bizonyítani lehet, hogy ha tetszőleges $\mathcal{A}$ C^* -algebrára d_p^T valódi metrika $\mathcal{A}^+$ pozitív kúpján valamely $0 < p < 1$ -re, akkor $\mathcal{A}$ szükségképpen kommutatív.

4. EGY TRACE KARAKTERIZÁCIÓ d_p^T SEGÍTSÉGÉVEL

Az 1. állítás alapján d_p^T jóldefiniáltsága nem teljesül a legtriviálisabb módon, nevezetesen egy $A \nabla B - A \kappa_p B$ alakú elem pozitivitása csak speciális esetekben igaz. Az előbb láttuk, hogy bizonyos p paraméterekre minden ilyen alakú elem képe nemnegatív egy trace-szerű pozitív lineáris funkcionál szerint. Következő eredményünk megmutatja, hogy nem is létezhet más típusú pozitív lineáris funkcionál, amely ezzel a tulajdonsággal rendelkezne.

3. Tétel. Legyen $\mathcal{A}$ egy C^* -algebra és p egy tetszőleges nemnegatív valós szám. Ha φ egy pozitív lineáris funkcionál $\mathcal{A}$ -n, amire

$$(13) \quad \varphi(A \kappa_p B) \leq \varphi(A \nabla B), \quad A, B \in \mathcal{A}^{++},$$

akkor φ szükségképpen trace-szerű.

A bizonyítás előtt teszünk néhány rövid megjegyzést.

Először is, az első állításra visszautalva, a fenti eredményt úgy is lehet értelmezni, hogy az $A\kappa_p B \leq A\vee B$ egyenlőtlenség annyira nem igaz, ha egy φ pozitív lineáris funkcionálra $\varphi(A\kappa_p B) \leq \varphi(A\vee B)$ teljesül minden $A, B \in \mathcal{A}^{++}$ esetén, akkor φ trace-szerű. Valóban, véges faktor Neumann algebrákban φ csak a normalizált trace skalárszorosa lehet.

Másodjára, Bikchentaev számos, a 3. állításunkhoz hasonló eredményt mutatott be cikkeiben. A megfigyeléseit Gardner [9] munkája motiválta, amiben bizonyítást nyert, hogy ha egy $\mathcal{A}$ C^* -algebrán értelmezett φ pozitív lineáris funkcionál teljesíti a $|\varphi(A)| \leq \varphi(|A|)$ egyenlőtlenséget minden $A \in \mathcal{A}$ -ra, akkor φ trace-szerű. Bikchentaev eredményei közül a miénkhez legközelebbi a [4] cikkben szereplő Theorem 2. Ebben megmutatja, hogy ha a (9) Araki-Lieb-Thirring egyenlőtlenség teljesül egy C^* -algebrán értelmezett φ pozitív lineáris funkcionálra egy adott $r > 1, p > 0$ párra, akkor φ trace-szerű. Bár a mi eredményünk hasonló, a feltételünk bizonyos értelemben jelentősen gyengébb: mi csak annyit várunk el φ -től, hogy valamilyen számtani-mértani egyenlőtlenséget teljesítsen, míg [4] egy geometriai típusú közép két variánsa közti egyenlőtlenséget feltételez.

Bizonyítás: Ahogy Bikchentaev tette, mi is Gardner bizonyításának gondolatát követjük azzal, hogy redukáljuk a problémát arra a speciális esetre, amikor $\mathcal{A}$ a 2×2 -es mátrixok algebrája.

Először is, feltehetjük, hogy φ normája 1, azaz egy állapot. Tekintsük $\mathcal{A}$ képét az ω univerzális reprezentációja szerint. A kép második kommutánsa, $\omega(\mathcal{A})'' = \mathcal{M}$ egy Neumann algebra. Ekkor a φ állapot egy vektorállapot $\omega(\mathcal{A})$ -n, tehát kiterjeszthető egy $\tilde{\varphi}$ normális állapottá $\mathcal{M}$ -en, lásd például III.5.2.6 Proposition-t az [5] cikkben. Mivel a normális állapotok gyengén/erősen folytonosak $\mathcal{M}$ egységömbjén (lásd például III.2.1.4 Theorem-et az [5] cikkben), a Kaplansky sűrűségi tétel alapján (valamint a korlátos folytonos függvények erős folytonosságát felhasználva, lásd például 4.3.2. Theorem-et a [17] cikkben) tudjuk, hogy $\tilde{\varphi}$ kielégíti a (13) egyenlőtlenséget $\mathcal{M}$ pozitív definit kúpján. Ebből következik, hogy elég abban az esetben bizonyítanunk az állításunkat, amikor $\mathcal{A}$ egy Neumann algebra, és a φ pozitív lineáris funkcionálunk normális.

Emlékeztetünk arra, hogy a [20] cikkben szereplő Lemma 2 azt mondja ki, hogy egy Neumann algebra normális pozitív lineáris funkcionálja akkor (és csak akkor) trace-szerű, ha azonos értéket vesz fel egymásra merőleges ekvivalens vetítéseken.

Legyen $P, Q \in \mathcal{A}$ két egymásra merőleges ekvivalens vetítés. Mint a [15] cikkben található Theorem 7 bizonyításában, válasszunk egy $V \in \mathcal{A}$ parciális izometriát, amire $VV^* = P, V^*V = Q$, és tekintsük a

$$\Phi: \begin{bmatrix} u & v & 0 \\ z & w & 0 \\ 0 & 0 & w' \end{bmatrix} \mapsto uP + vV + zV^* + wQ + w'(I - (P + Q))$$

leképezést $M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \subset M_3(\mathbb{C})$ -ből $\mathcal{A}$ -ba. Könnyű látni, hogy Φ injektív egységelemtartó $*$ -algebra homomorfizmus, amely indukál egy

$$X \mapsto \varphi(\Phi(X \oplus 0))$$

pozitív lineáris funkcionált $M_2(\mathbb{C})$ -n, ami kielégíti a (13) egyenlőtlenséget $M_2(\mathbb{C})^{++}$ -on. Azt kell bebizonyítanunk, hogy ez azonos értéket vesz fel az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ és a } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elemeken, amit azzal bizonyítunk, hogy igazoljuk az állítást az $M_2(\mathbb{C})$ mátrixalgebrára.

A $p > 0$ eset bizonyítását [11] tartalmazza. Itt a $p = 0$ esettel foglalkozunk (ami jelentősen komplikáltabb, mint a $p > 0$ eset). Tegyük fel hogy az $M_2(\mathbb{C})$ -n értelmezett φ pozitív lineáris funkcionál kielégíti a

$$\varphi(\exp((\log A + \log B)/2)) \leq \varphi((A + B)/2)$$

egyenlőtlenséget minden pozitív definit A és B mátrixra. Ekkor A és B felírható $A = e^C$ és $B = e^D$ alakban valamilyen $C, D \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ önadjungáltra. Ha veszünk egy $r \in \mathbb{R}$ valós számot, és e^C helyett $e^{(C+2rI)}$ -t írunk, majd átrendezzük az egyenlőtlenséget, akkor a következőt kapjuk:

$$0 \leq e^{2r} \frac{\varphi(e^C)}{2} - e^r \varphi\left(e^{\frac{C+D}{2}}\right) + \frac{\varphi(e^D)}{2}.$$

Mint azt láthatjuk, ez e^r egy másodfokú polinomja, tehát a diszkrimináns nempozitív, ami azt jelenti, hogy

$$(14) \quad \left(\varphi\left(e^{\frac{C+D}{2}}\right)\right)^2 \leq \varphi(e^C) \varphi(e^D).$$

Legyen $t \in [0, 1]$, és válasszunk

$$x = \begin{bmatrix} \sqrt{1-t} \\ \sqrt{t} \end{bmatrix}$$

és

$$y = \begin{bmatrix} \sqrt{t} \\ \sqrt{1-t} \end{bmatrix}$$

egységvektorokat. Rögzítsük a $P = x \otimes x$ és $Q = y \otimes y$ vetítéseket, és legyen $C = c_1 Q + c_2(I - Q)$ valamilyen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ valós számra, és $D_n = -n(I - P)$. A (3) határérték formulából levezethető, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{C+D_n}{2}} = e^{\frac{\text{Tr} PC}{2}} P.$$

Ebből következik, hogy ha (14) mindkét oldalán határértékét veszünk, akkor a következőt kapjuk:

$$e^{\text{Tr} PC} \varphi(P)^2 \leq \varphi(e^C) \varphi(P).$$

Mivel φ egy pozitív lineáris funkcionál $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ -n, létezik egy olyan $T \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^+$, amire $\varphi(X) = \text{Tr}(XT)$, $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy T diagonális, és a legnagyobb sajátértéke 1, a másik pedig valamilyen $\alpha \leq 1$, azaz

$$(15) \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

A célunk az, hogy bebizonyítsuk, $\alpha = 1$. Mivel

$$\text{Tr} PC = c_1 \text{Tr} PQ + c_2(1 - \text{Tr} PQ) = (c_1 - c_2)4t(1 - t) + c_2,$$

tudjuk, hogy

$$e^{(c_1 - c_2)4t(1-t) + c_2} \varphi(P) \leq (e^{c_1} - e^{c_2})\varphi(Q) + e^{c_2}\varphi(I).$$

Ha leosztunk e^{c_2} -vel, és rögzítjük $c = c_1 - c_2 \in \mathbb{R}$ -t, akkor a következőt kapjuk:

$$e^{c4t(1-t)} \varphi(P) \leq (e^c - 1)\varphi(Q) + \varphi(I).$$

Ebből következik, hogy

$$e^{c4t(1-t)}(1 - t + \alpha t) \leq (e^c - 1)(t + \alpha(1 - t)) + (1 + \alpha).$$

Ha átrendezzük ezt az egyenlőtlenséget, akkor a következőt kapjuk:

$$e^{c4t(1-t)}(1 - t) + (1 - e^c)t - 1 \leq \alpha(1 - e^{c4t(1-t)}t - (1 - e^c)(1 - t)).$$

Bevezetjük a következő segédfüggvényeket:

$$\begin{aligned} f(t, c) &= (1 - e^c - e^{c4t(1-t)})t + e^{c4t(1-t)} - 1, \\ g(t, c) &= (1 - e^c - e^{c4t(1-t)})t + e^c. \end{aligned}$$

Ezek értelmezve vannak minden $t \in [0, 1]$ -re és $c \in \mathbb{R}$ -re. Azt kell bizonyítanunk, hogy ha valamilyen $\alpha \in [0, 1]$ teljesíti az $f \leq \alpha g$ egyenlőtlenséget, akkor $\alpha = 1$.

Hogy ezt igazoljuk, először is vegyük észre, hogy f felvesz pozitív értékeket (például $f(1/4, 2) > 0$), tehát α pozitív. Ennek a következménye, hogy elég megmutatnunk, hogy az f/g függvény tetszőlegesen megközelíti az 1-et úgy, hogy közben g pozitív.

Ehhez a $q: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt fogunk vizsgálni, melyet a következőképp definiálunk:

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{f\left(t, -\frac{\log(1-4t(1-t))}{4t(1-t)}\right)}{g\left(t, -\frac{\log(1-4t(1-t))}{4t(1-t)}\right)} \\ &= \frac{\left(1 - (1-4t(1-t))^{\frac{-1}{4t(1-t)}} - (1-4t(1-t))^{-1}\right)t + (1-4t(1-t))^{-1} - 1}{\left(1 - (1-4t(1-t))^{\frac{-1}{4t(1-t)}} - (1-4t(1-t))^{-1}\right)t + (1-4t(1-t))^{\frac{-1}{4t(1-t)}}}. \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy $q(t) \rightarrow 1$, amint $t \nearrow 1/2$. Hajtsunk végre egy változócsereét. Tetszőleges $0 \leq t < 1/2$ esetén legyen $s = 1 - 4t(1-t)$, ami végigfut a $]0, 1]$ intervallumon, valamint $t = (1 - \sqrt{s})/2$. Ennek a segítségével bevezetünk egy új $\tilde{q}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt:

$$\tilde{q}(s) = q\left(\frac{1 - \sqrt{s}}{2}\right) = \frac{-1 - s^{\frac{-1}{1-s}} + s^{-1} + \sqrt{s}(s^{\frac{-1}{1-s}} + s^{-1} - 1)}{1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1} + \sqrt{s}(s^{\frac{-1}{1-s}} + s^{-1} - 1)}.$$

Ebből a felírásból látszik, hogy ha $s \searrow 0$, akkor a nevező, ami g új paraméterezésének kétszerese, pozitív. Bebizonyítjuk, hogy $\tilde{q}(s) - 1 \rightarrow 0$ ha $s \searrow 0$. Láthatjuk, hogy

$$\tilde{q}(s) - 1 = \frac{-2(1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1})}{1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1} + \sqrt{s}(s^{\frac{-1}{1-s}} + s^{-1} - 1)}, \quad s \in [0, 1].$$

Mivel a nevező első kifejezése a számláló konstansszorosa, csak azt kell megmutatnunk, hogy

$$\frac{1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1}}{\sqrt{s}(s^{\frac{-1}{1-s}} + s^{-1} - 1)} \rightarrow 0, \quad \text{ahogy } s \searrow 0.$$

Bármely $s \in]0, 1]$ -re

$$0 \leq \frac{1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1}}{\sqrt{s}(s^{\frac{-1}{1-s}} + s^{-1} - 1)} \leq \frac{1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1}}{\sqrt{s}(2s^{-1} - 1)} = \frac{1 + s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1}}{2s^{-\frac{1}{2}} - s^{\frac{1}{2}}}.$$

Mivel a nevező a végtelenbe tart, a határérték vételekor eltekinthetünk az 1-estől a számlálóban. Ezután bővítjük a törtet s -sel, és a következőt kapjuk:

$$\frac{s^{\frac{-1}{1-s}} - s^{-1}}{2s^{-\frac{1}{2}} - s^{\frac{1}{2}}} = \frac{s^{\frac{-s}{1-s}} - 1}{2s^{\frac{1}{2}} - s^{\frac{3}{2}}}.$$

A nevező nullához tart, és felhasználva a $s \log(s) \rightarrow 0$ határértéket, láthatjuk, hogy a számláló is a nullához tart. Alkalmazzuk a L'Hospital szabályt:

$$\begin{aligned} \lim_{s \searrow 0} \frac{s^{\frac{-s}{1-s}} - 1}{2s^{\frac{1}{2}} - s^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{s \searrow 0} \frac{-s^{\frac{-s}{1-s}} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{(1-s)^2} \log(s) \right)}{\frac{1}{2}(2s^{-\frac{1}{2}} - 3s^{\frac{1}{2}})} \\ &= \lim_{s \searrow 0} -2 \frac{s^{\frac{-s}{1-s}} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{(1-s)^2} \log(s) \right)}{2s^{-\frac{1}{2}} - 3s^{\frac{1}{2}}} = \lim_{s \searrow 0} -2 \frac{s^{\frac{-s}{1-s}} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{(1-s)^2} \log(s) \right)}{s^{-\frac{1}{2}}(2 - 3s)} \\ &= \lim_{s \searrow 0} -2s^{\frac{-s}{1-s} + \frac{1}{2}} \frac{1 - s + \log(s)}{2(1-s)^2 - 3s(1-s)^2} = \lim_{s \searrow 0} -2 \frac{s^{\frac{1-3s}{2(1-s)}} - s^{\frac{3-5s}{2(1-s)}} + s^{\frac{1-3s}{2(1-s)}} \log(s)}{2(1-s)^2 - 3s(1-s)^2}. \end{aligned}$$

A számláló első két kifejezésének határértéke 0, míg a nevezőé 2, tehát csak a számláló utolsó tagját kell vizsgálnunk. Ha $s > 0$ elég kicsi, akkor

$$0 \geq s^{\frac{1-3s}{2(1-s)}} \log(s) \geq s^{\frac{1}{3}} \log(s) \rightarrow 0.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy

$$\lim_{s \searrow 0} \tilde{q}(s) - 1 = 0.$$

Ebből már következik, hogy $\alpha = 1$, és ezzel az állítás $p = 0$ részének bizonyítása teljes. ■

Megfigyelhetjük, hogy a $p = 0$ esetből következik, hogy ha egy φ pozitív lineáris funkcionál "konvexsége teszt" az exponenciális függvényt olyan értelemben, hogy $\varphi \circ \exp$ konvex $\mathcal{A}^{++}$ -on, akkor φ szükségképpen trace-szerű. Tehát az exponenciális függvény annyira nem operátor konvex, hogy csak egyféle lineáris funkcionál létezik, amely "konvexsége teszt".

5. EGY TRACE KARAKTERIZÁCIÓ A STEIN-DIVERGENCIA SEGÍTSÉGÉVEL

Fentebb bizonyos távolság mértékeket vizsgáltunk. A mátrixalgebrák környezetében mind-egyiket a számtani közép és egyfajta geometriai közép különbségéből vett trace négyzetgyöke definiálta. Bizonyos esetekben tudjuk, hogy ezek valójában igazi metrikák C^* -algebrák általános kontextusában, más esetekben tudjuk, hogy nem, illetve több esetben csak sejtjük, hogy azok-e.

Ismeretes, hogy tetszőleges $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}$ pozitív definit mátrixnak a szimmetrikus Stein-divergenciáját a

$$S(A, B) = \log \det \left(\frac{A+B}{2} \right) - \frac{1}{2} \log \det(AB)$$

kifejezés definiálja. Valójában ez az úgy nevezett Jensen-Shannon szimmetrizációja annak a divergenciának, amit Stein veszteségnek (Stein's loss) nevezünk (lásd a [19] első két fejezetét). A [7] cikk szerzői azt állították, hogy

$$\delta_S(A, B) = \sqrt{S(A, B)}, \quad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}$$

nem valódi metrika, míg [6] szerzői az ellenkezőjét sejtették. A problémát az utóbbinak egyik szerzője, Sra oldotta meg. Nevezetesen, a [19] cikkben Theorem 5 azt mondja ki, hogy δ_S valódi metrika $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}$ -on, továbbá δ_S számos érdekes tulajdonságáról szóló eredmény szerepelt a munkában.

Vegyük észre, hogy mivel $\text{Tr} \circ \log$ megegyezik $\log \circ \det$ -tel $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}$ -on, $S(A, B)$ -t átírhatjuk, mint

$$S(A, B) = \text{Tr}(\log(A \nabla B) - \log(A \kappa_p B)), \quad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{++}.$$

Ez minden $p \geq 0$ valós számra igaz. Ez alapján láthatjuk, hogy a számtani közép és κ_p különbségének Tr szerinti képével ellentétben (amely valóban függ a p paraméter értékétől), a számtani közép logaritmusának és κ_p logaritmusának különbségéből vett trace nem függ p -től. Az utóbbi négyzetgyöke ráadásul valódi metrika

Egy természetes kérdés, hogy hasonló észrevétel tehető-e a C^* -algebrák általános esetében. Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges C^* -algebra egy τ hűséges trace-szerű pozitív lineáris funkcionállal. Ekkor valóban teljesül, hogy bármely p, q nemnegatív valós számokra

$$(16) \quad \tau(\log(A\kappa_p B)) = \tau(\log(A\kappa_q B)), \quad A, B \in \mathcal{A}^{++}.$$

Hogy ezt lássuk, megjegyezzük a következőt. Egy a [12] cikkben szereplő Theorem 2 bizonyításából nyert ötletet alkalmazva a [13] cikkben található Lemma 17 során bebizonyítottuk, hogy tetszőleges Neumann algebrán értelmezett φ korlátos lineáris funkcionál akkor, és csak akkor trace-szerű, ha

$$(17) \quad \varphi(\log(ABA)) = 2\varphi(\log A) + \varphi(\log B)$$

teljesül minden pozitív invertálható A, B -re. (Igazából [13] önadjungált lineáris funkcionálokra bizonyította az eredményt, de ismerve az ilyen funkcionálok karakterizációját, az állítást általános lineáris funkcionálokra is be lehet bizonyítani.)

A [11] cikkben bizonyítást nyert, hogy egy τ hűséges trace-szerű pozitív lineáris funkcionállal ellátott $\mathcal{A}$ tekinthető egy Neumann algebra gyengén/erősen sűrű részalgebrájának, amelyre τ normális hűséges trace-szerű pozitív lineáris funkcionálként terjed ki. Belátható, hogy ez a kiterjesztés kielégíti a (17) egyenlőséget. Ebből már egyszerűen következik, hogy

$$\tau(\log(A\kappa_p B)) = (1/2)\tau(\log A + \log B) = \tau(\log(A\kappa_q B)), \quad A, B \in \mathcal{A}^{++}.$$

Tehát a

$$(18) \quad \delta_S^\tau(A, B) = (\tau(\log(A \nabla B) - \log(A\kappa_p B)))^{1/2}, \quad A, B \in \mathcal{A}^{++}$$

érték független p -től, azonban nem tudjuk a választ a következő valószínűleg nehéz kérdésre.

3. Probléma. Igaz-e, hogy a (18) által definiált δ_S^τ valódi metrika egy általános, τ hűséges trace-szerű pozitív lineáris funkcionállal rendelkező C^* -algebra esetében?

Ezzel kapcsolatban megemlítenénk, hogy

$$\tau(\log(A\kappa_p B)) = \tau(\log(A \# B)), \quad A, B \in \mathcal{A}^{++}.$$

Ez is abból következik, hogy (17) teljesül τ -ra. Ezt, és a logaritmus függvény operátor monotonitását felhasználva láthatjuk, hogy $\delta_S^\tau(A, B)$ mindig nemnegatív. A τ hűségességének következménye, hogy pontosan akkor 0, amikor $A = B$, valamint szimmetrikus a két változójában. Tehát δ_S^τ metrikussága csak azon múlik, hogy teljesíti-e a háromszög egyenlőtlenséget. Mint azt korábban említettük, úgy hisszük, hogy ez egy nehéz kérdés, amit alátámaszt a bizonyítás összetettsége mátrix algebrák esetében, lásd [19].

A következő eredménnyel zárjuk a munkánkat, amely a (16) egyenlőséghez kapcsolódik. Azt mutatja, hogy bármely két különböző p, q nemnegatív szám esetében ezen egyenlőségnek teljesülése valójában karakterizálja egy tetszőleges Neumann algebrán értelmezett korlátos lineáris funkcionál trace-szerűségét. Kiemeljük, hogy a 3. tétellel elentétben nem feltételezzük a lineáris funkcionálról, hogy pozitív, ennek azonban az az ára, hogy az eredmény Neumann algebrákról szól, és nem általános C^* -algebrákról.

4. Tétel. Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann algebra. Tegyük fel, hogy φ korlátos lineáris funkcionál $\mathcal{A}$ -n. Legyen p, q két különböző nemnegatív valós szám. Ekkor

$$(19) \quad \varphi(\log A\kappa_p B) = \varphi(\log A\kappa_q B), \quad A, B \in \mathcal{A}^{++}$$

akkor, és csak akkor teljesül, ha φ trace-szerű.

Bizonyítás: A fenti diszkusszió miatt csak a szükségességet kell igazolnunk.

Először tegyük fel, hogy $p = 0$ és $q > 0$. Ebben az esetben (19) a következő alakot ölti:

$$\varphi(\log A\kappa_0 B) = \varphi(\log A\kappa_q B).$$

Ha A helyére $A^{4/q}$ -t, B helyére pedig $B^{2/q}$ -t írunk, akkor láthatjuk, hogy

$$(20) \quad \varphi(2\log A + \log B) = \varphi(\log ABA), \quad A, B \in \mathcal{A}^{++}.$$

Ekkor a [13] cikkben szereplő Lemma 17 alapján teljesül a trace-szerűség. Emlékeztetünk ezen lemmának a bizonyítására. Ebben tetszőleges adott P, Q projekciókra, $I + tP$ -t írtunk A , és $I + tQ$ -t írtunk B helyére ($t > -1$), és a

$$(21) \quad \log(I + X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{X^n}{n},$$

hatványsor előállítását használtuk, amely teljesül minden $X \in \mathcal{A}$ -ra, amire $\|X\| < 1$. Ezzel a módszerrel (20) egy olyan egyenlőséggé alakult át, melynek mindkét oldalán t egy-egy hatványsora található a nulla egy környezetében. A t^3 tagok együtthatóit vizsgálva kaptuk a

$$\varphi(PQP) = \varphi(QPQ)$$

egyenlőséget. Végül, a [3] cikkben található Lemma 1 bizonyításából alkalmazva egy ötletet, levezettük, hogy ha ez az egyenlőség teljesül minden $P, Q \in \mathcal{A}$ projekcióra, akkor φ trace-szerű.

Jelen állításunkhoz visszatérve tegyük fel, hogy $0 < p < q$. Egy hasonló érvelést fogunk használni, ami viszont ebben az esetben technikai szempontból jóval összetettebb lesz. A (19) egyenlőségbe helyettesítsük A -t és B -t $A^{p/4}$ -nel és $B^{q/2}$ -nel, valamint hozzuk ki a gyököket a logaritmus alól, hogy a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{q} \varphi(\log(ABA)) = \frac{1}{p} \varphi\left(\log\left(A^{\frac{q}{p}} B^{\frac{q}{p}} A^{\frac{q}{q}}\right)\right).$$

Ebből láthatjuk, hogy ha q -t írunk q/p helyére, akkor (19) ekvivalens a következővel:

$$(22) \quad \varphi(\log(ABA)) = \frac{1}{q} \varphi(\log(A^q B^q A^q)), \quad A, B \in \mathcal{A}^{++}.$$

Legyen P és Q két vetítés, valamint $A = I + tP$ és $B = I + tQ$ tetszőleges $t > -1$ valós számra. Hatványsor előállítás segítségével a következő egyenlőségekre jutunk:

$$\frac{1}{q} \varphi(\log(A^q B^q A^q)) = \frac{1}{q} \varphi\left(\log\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n\right)\right) = \frac{1}{q} \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \Upsilon_n t^n\right)$$

és

$$\varphi(\log(ABA)) = \varphi\left(\log\left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n t^n\right)\right) = \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n t^n\right).$$

Az $v_n, \Upsilon_n, \omega_n, \Omega_n$ együtthatók $\mathcal{A}$ elemei. Mivel a két hatványsor azonos függvényt definiál a $t = 0$ egy környezetében, az együtthatóknak meg kell egyeznie. Speciálisan,

$$(23) \quad \varphi\left(\Omega_3 - \frac{\Upsilon_3}{q}\right) = 0.$$

Megmutatjuk, hogy ebből következik $\varphi(PQP) = \varphi(QPQ)$. Ahogy már korábban említettük, ha ez a egyenlőség teljesül minden $P, Q \in \mathcal{A}$ projekcióra, akkor φ trace-szerű.

Az $(1+t)^q$ hatványsorát alkalmazva megkapjuk a következőt:

$$\begin{aligned} A^q B^q A^q &= (I + ((1+t)^q - 1)P)(I + ((1+t)^q - 1)Q)(I + ((1+t)^q - 1)P) \\ &= \left(I + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{q}{i} t^i P \right) \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{q}{k} t^k Q \right) \left(I + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{q}{j} t^j P \right) \\ &= \log(I + \sum_{n=1}^{\infty} v_n t^n), \end{aligned}$$

valamint (21)-ből következik, hogy

$$\log(I + \sum_{n=1}^{\infty} v_n t^n) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(\sum_{n=1}^{\infty} v_n t^n)^m}{m}.$$

Ebből könnyű látni, hogy

$$(24) \quad Y_3 = v_3 - \frac{v_1 v_2 + v_2 v_1}{2} + \frac{v_1^3}{3},$$

ezért csak a v_1, v_2 és v_3 együtthatókat kell tekintenünk. Egyszerű számolás mutatja, hogy

$$v_1 = q(2P + Q),$$

és

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{q(q-1)}{2} 2P + q^2 P + q^2 (PQ + QP) + \frac{q(q-1)}{2} Q \\ &= (q^2 - q)P + q^2 P + q^2 (PQ + QP) + \frac{q^2 - q}{2} Q \\ &= q^2 \left(PQ + QP + 2P + \frac{1}{2} Q \right) - q \left(P + \frac{1}{2} Q \right) \\ &= \frac{1}{2} q^2 (2P + Q)^2 - \frac{1}{2} q (2P + Q). \end{aligned}$$

Ami v_3 -at illeti,

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{q(q-1)(q-2)}{6} 2P + \frac{q^2(q-1)}{2} 2P + \frac{q^2(q-1)}{2} (PQ + QP) \\ &\quad + q^3 PQP + \frac{q^2(q-1)}{2} (PQ + QP) + \frac{q(q-1)(q-2)}{6} Q \\ &= \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{3} P + (q^3 - q^2)P + \frac{q^3 - q^2}{2} (PQ + QP) + q^3 PQP \\ &\quad + \frac{q^3 - q^2}{2} (PQ + QP) + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6} Q \\ &= q^3 \left(PQP + PQ + QP + \frac{4}{3} P + \frac{1}{6} Q \right) \\ &\quad - q^2 \left(PQ + QP + 2P + \frac{1}{2} Q \right) + q \left(\frac{2}{3} P + \frac{1}{3} Q \right). \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} v_1 v_2 + v_2 v_1 &= \frac{1}{2} q^3 \left((2P + Q)(2P + Q)^2 + (2P + Q)^2(2P + Q) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} q^2 \left((2P + Q)(2P + Q) + (2P + Q)(2P + Q) \right) \\ &= q^3 (4PQP + 2QPQ + 6(PQ + QP) + 8P + Q) \\ &\quad - q^2 (2(PQ + QP) + 4P + Q) \end{aligned}$$

és

$$v_1^3 = q^3(2P + Q)^3 = q^3(4PQP + 2QPQ + 6(PQ + QP) + 8P + Q).$$

Ezek segítségével (24) alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned} \Upsilon_3 &= v_3 - \frac{v_1 v_2 + v_2 v_1}{2} + \frac{v_1^3}{3} = q^3 \left(PQP + PQ + QP + \frac{4}{3}P + \frac{1}{6}Q - 2PQP - QPQ \right. \\ &\quad \left. - 3(PQ + QP) - 4P - \frac{1}{2}Q + \frac{4}{3}PQP + \frac{2}{3}QPQ + 2(PQ + QP) + \frac{8}{3}P + \frac{1}{3}Q \right) \\ &\quad + q^2 \left(PQ + QP + 2P + \frac{1}{2}Q - (PQ + QP) - 2P - \frac{1}{2}Q \right) + q \left(\frac{2}{3}P + \frac{1}{3}Q \right) \\ &= q^3 \left(\frac{1}{3}PQP - \frac{1}{3}QPQ \right) + q \left(\frac{2}{3}P + \frac{1}{3}Q \right). \end{aligned}$$

Észrevesszük, hogy Ω_3 megegyezik Υ_3 -mal, ha $q = 1$, tehát

$$\Omega_3 = \frac{1}{3}PQP - \frac{1}{3}QPQ + \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}Q.$$

Ezek segítségével láthatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Omega_3 - \frac{\Upsilon_3}{q} &= \left(\frac{1}{3}PQP - \frac{1}{3}QPQ + \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}Q \right) - \left(\frac{2}{3} + P \frac{1}{3}Q \right) - q^2 \left(\frac{1}{3}PQP - \frac{1}{3}QPQ + \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}Q \right) \\ &= (1 - q^2) \left(\frac{1}{3}PQP - \frac{1}{3}QPQ \right). \end{aligned}$$

Ezek tudatában, (23) alapján

$$\varphi \left(\frac{1}{3}PQP - \frac{1}{3}QPQ \right) = 0,$$

amiből már látszik, hogy $\varphi(PQP) = \varphi(QPQ)$ bármely $P, Q \in \mathcal{A}$ vetítésre. Ahogy korábban már említettük, ebből következik, hogy φ trace-szerű. Ezzel az állításunk bizonyítása teljes. ■

6. A TÁRGYALT EREDMÉNYEK KONKLÚZIÓJA

Munkánkat az eredmények összefoglalásával zárjuk. Először azt tanulmányoztuk, hogy C^* -algebrákon fennáll-e valamilyen egyenlőtlenség a számtani közép és az általunk definiált κ_p operációk között (nemnegatív-e a számtani közép és κ_p különbsége), amely triviálisan biztosítaná d_p^T jóldefiniáltságát. Az 1. állítás következtében láttuk azonban, hogy ez csak speciális esetekben, kommutatív algebrákban fordul elő. Ezt követően utaltunk a [11] cikkre, ahol a szerző megmutatja, hogy d_p jóldefiniált $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ -on minden $p \geq 0$ esetén, valamint d_p^T is jóldefiniált tetszőleges általános C^* -algebra pozitív kúpján, ha $p \leq 2$. (A $p > 2$ eset kifejezetten nehéznek mutatkozik.) Ezek után d_p metrikusságát vizsgáltuk. A 2. állításban megmutattuk, hogy d_p pontosan akkor valódi metrika egy Hilbert-tér egyrangú projekcióinak $P_1(H)$ halmazán, ha $p \leq 2$. Ebből következik, hogy tetszőleges $p > 2$ esetén d_p nem metrika már a 2×2 -es mátrixok algebráján sem. A kérdés, hogy d_p^T valódi metrika-e ezekben az esetekben, azonban meglehetősen nehéz problémának tűnik, aminek vizsgálata indokolt, további kutatás tárgyát képezi. A 3. tételben megmutattuk, hogy ha lehet olyan φ korlátos lineáris funkcionál egy $\mathcal{A}$ Neumann algebrán, melyre d_p^φ jóldefiniált, az csak trace-szerű lehet. Megjegyezzük hogy ennek eredménynek és az 1. állításnak a $p = 0$ esetei is azt mutatják, hogy mennyire nem operátor konvex az exponenciális függvény. A szimmetrikus Stein-divergencia formulája által motiválva vizsgáltuk a számtani közép logaritmusának és valamely κ_p logaritmusa különbségének képét egy hűséges trace-szerű pozitív lineáris funkcionál szerint tetszőleges C^* -algebra pozitív definit kúpján. Természetesen merül fel a kérdés, hogy

egybeesnek-e ezek a függvények, az $M_n(\mathbb{C})^{++}$ esethez hasonlóan. Az utolsó eredményünk azt mutatja, hogy ez pontosan akkor történik meg egy Neumann algebra korlátos lineáris funkcionálja esetében, ha az trace-szerű. Megjegyezzük, hogy hasonló eredmény bizonyítható egy C^* -algebra és egy pozitív lineáris funkcionál esetén is. A kérdés, hogy az utóbbi kontextusban δ_ζ^τ négyzetgyöke valódi metrika-e, ugyancsak mély probléma, a jövőben szeretnénk ezzel is foglalkozni.

HIVATKOZÁSOK

- [1] H. Araki, *On an inequality of Lieb and Thirring*, Lett. Math. Phys. **19** (1990), 167-170.
- [2] R. Bhatia, S. Gaubert and T. Jain, *Matrix versions of the Hellinger distance*, Lett. Math. Phys. **109** (2019), 1777-1804.
- [3] A.M. Bikchentaev, *On a property of L_p -spaces on semifinite von Neumann algebras*, Math. Notes **64** (1998), 159-163.
- [4] A.M. Bikchentaev, *The Peierls-Bogoliubov inequality in C^* -algebras and characterization of tracial functionals*, Lobachevskii J. Math. **32** (2011), 175-179.
- [5] B. Blackadar, *Operator algebras. Theory of C^* -algebras and von Neumann algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 122. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III. Springer-Verlag, Berlin, 2006. xx+517 pp.
- [6] Z. Chebbi and M. Moahker, *Means of hermitian positive-definite matrices based on the log-determinant α -divergence function*, Linear Algebra Appl. **436** (2012), 1872-1889.
- [7] A. Cherian, S. Sra, A. Banerjee, and N. Papanikolopoulos, *Efficient similarity search for covariance matrices via the Jensen-Bregman LogDet divergence*, In International Conference on Computer Vision (ICCV), Nov. 2011.
- [8] T.H. Dinh, C.T. Le, B.K. Vo, T.D. Vuong, *The $\alpha - z$ -Bures Wasserstein divergence*, Linear Algebra Appl. **624** (2021), 267-280.
- [9] L.T. Gardner, *An inequality characterizes the trace*, Canadian J. Math. **31** (1979), 1322-1328.
- [10] F. Hiai and D. Petz, *Introduction to matrix analysis and applications*, Universitext. Springer, Cham; Hindustan Book Agency, New Delhi, 2014. viii+332 pp.
- [11] Á. Komálovics and L. Molnár, *On the difference of the arithmetic mean and a sort of geometric mean and on related distance measures*, submitted to J. Math. Anal. Appl.
- [12] L. Molnár, *A remark to the Kochen-Specker theorem and some characterizations of the determinant on sets of Hermitian matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006) 2839-2848.
- [13] L. Molnár, *General Mazur-Ulam type theorems and some applications*, in Operator Semigroups Meet Complex Analysis, Harmonic Analysis and Mathematical Physics, W. Arendt, R. Chill, Y. Tomilov (Eds.), Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 250, pp. 311-342, Birkhäuser, 2015.
- [14] L. Molnár, *Quantum Rényi relative entropies: their symmetries and their essential difference*, J. Funct. Anal. **277** (2019), 3098-3130.
- [15] L. Molnár, *On dissimilarities of the conventional and Kubo-Ando power means in operator algebras*, J. Math. Anal. Appl. **504** (2021) 125356.
- [16] L. Molnár, *On certain order properties of non Kubo-Ando means in operator algebras*, Integral Equations Operator Theory **94** Article number: 25 (2022).
- [17] G. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, Boston, 1990.
- [18] D. Spehner, F. Illuminati, M. Orszag and W. Roga, *Geometric Measures of Quantum Correlations with Bures and Hellinger Distances*, In: Fanchini, F., Soares Pinto, D., Adesso, G. (eds) Lectures on General Quantum Correlations and their Applications. Quantum Science and Technology. Springer, Cham, 2017.
- [19] S. Sra, *Positive definite matrices and the S-divergence*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), 2787-2797.
- [20] O.E. Tikhonov, *Subadditivity inequalities in von Neumann algebras and characterization of tracial functionals*, Positivity **9** (2005), 259-264.