

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
EGYETEM

Gépészmérnöki kar

Algoritmus fejlesztése hibrid periodikus pályák követésére

TDK dolgozat

Horváth Roland

Konzulens: Iklódi Zsolt

Műszaki Mechanika Tanszék



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

2022

Absztrakt

A szakaszosan sima rendszerek alkalmazása a mérnöki gyakorlatban igen széles körben elterjedt. Legyen szó akár egy harang és harangnyelv mozgásáról, vagy akár egy fogaskerék összeállításnak a modellezéséről, mind szakaszosan sima differenciálegyletek segítségével írható le. Ilyen rendszer segítségével lehet leszimulálni egy lábakon közlekedő robotot is [1], ugyanis nem ugyanaz az egyenlet vonatkozik egy láb mozgására, amikor a talajon van, mint amikor a levegőben. Továbbá az elektronikában is találkozhatunk ilyen típusú rendszerekkel, ilyen például egy DC-DC Buck konverter [2].

Ha egy szakaszosan sima rendszerben impulzus szerű hirtelen ugrásokat (pl.: ütközést) is modellezünk, úgynevezett hibrid dinamikai rendszerre jutunk. Az általam fejlesztett algoritmus, ezen hibrid rendszerekhez keres periodikus megoldásokat a belövéses módszer (shooting method) segítségével, majd ezeket a periodikus pályákat követi egy, illetve akár két paraméter függvényében, a pszeudo-ív hossz módszerrel. A paraméter követés eredményeként a hibrid rendszerekre jellemző „grazing” és „sliding” bifurkációkat is identifikálni lehet, valamint a pályák stabilitása is egyszerűen meghatározható.

Az algoritmus implementálása MATLAB környezetben történt, és a rendszerek numerikus szimulációja a beépített eseménydetektáló rutinok segítségével lett megvalósítva.

Az algoritmus, tetszőleges számú kapcsolófelületet megenged, amelyek mindegyikén értelmezhető egy ugrás szerű leképzés, illetve egy vektormező váltás is.

Ennek az algoritmusnak a működését két egyszerű példán keresztül mutatom be. Egy ütközéses oszcillátoron, ahol jellemzően „grazing” bifurkációkat várhatunk. Illetve egy súrlódásos oszcillátoron, ahol „sliding” bifurkációkra számíthatunk.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	1
2. Matematikai összefoglaló.....	2
2.1. Szakaszosan sima rendszerekkel kapcsolatos összefüggések és jelölések	2
2.2. Szakaszosan sima rendszerekben fellépő speciális bifurkációk (Grazing, Sliding).....	3
2.3. Felhasznált numerikus módszerek.....	4
3. Az algoritmus felépítése.....	5
3.1. A hibrid periodikus pályák peremérték feladatként való megfogalmazása	5
3.2. Belövéses módszerrel történő megoldás.....	6
3.3. Paraméterben való lekövetése a hibrid periodikus pályának pszeudo-ívhossz módszerrel ..	7
3.4. Grazing bifurkáció megtalálása.....	8
3.5. Paraméterben való követése a grazing bifurkációnak.....	10
3.6. Sliding bifurkáció megtalálása	11
3.7. Paraméterben való követése a sliding bifurkációnak.....	12
4. Az algoritmus működésének bemutatása két egyszerű példán.....	13
4.1. Az ütközéses oszcillátor modellje	13
4.1.1. A mozgást leíró egyenletek	13
4.1.2. A szakaszosan sima rendszert leíró egyenletek, az ütközés modellezése	14

4.1.3. Belövéses módszer, illetve pszeudo-ív hossz módszer prezentálása, adott ütközés számú periodikus pályákon.....	15
4.1.4. Adott nT periódus idejű pályák keresése.....	19
4.1.5. Grazing bifurkáció keresése	22
4.1.6. Paraméterben való követése a Grazing bifurkációnak.....	26
4.2. A súrlódásos oszcillátor modellje.....	30
4.2.1. A mozgást leíró egyenletek	30
4.2.2. A szakaszosan sima rendszert leíró egyenletek, a súrlódás modellezése	30
4.2.3. A belövéses módszer bemutatása adott n gerjesztési periódus hosszú pályákon.....	31
4.2.4. Pszeudo-ív hossz módszer bemutatása adott nT periódus idejű pályákon	33
4.2.5. Sliding bifurkáció határának megtalálása	35
4.2.6. A sliding bifurkáció határának követése	37
 5. Összegzés és jövőbeli kitekintés.....	 38
Irodalom.....	39

1. Bevezetés

A szakaszosan sima rendszerek kulcsfontosságú szerepet játszanak a mérnöki gyakorlatban előforduló rendszerek modellezésében. Ha egy szakaszosan sima rendszerben ugrásszerű, hirtelen fellépő hatásokat is figyelembe veszünk (pl.: ütközést) akkor beszélhetünk hibrid dinamikai rendszerről. Ezen hibrid dinamikai rendszerek segítségével lehet leszimulálni lábakon közlekedő robotot [1], DC-DC Buck konvertert [2], harang és harangnyelv mozgását vagy a függőleges ugrálást is [3]. Így egy lehetőleg minél általánosabb algoritmus, amely megenged tetszőleges számú kapcsolófelületet és vektormezőt, nagy segítség lenne ezen hibrid rendszerek periodikus pályáinak feltérképezésében, illetve a specifikus bifurkációinak (ún. grazing és sliding) lekövetésében. Thota, P. és Dankowicz, H. [4] munkássága szolgál alapjául a következőkben bemutatott algoritmus elméleti hátterének. Az algoritmus kettő, a szakirodalomban jól ismert, rendszeren lesz prezentálva. Az egyik az ütközéses oszcillátor, amelyről számos analitikus ([5]), numerikus ([6]) és kísérleti eredmény ([7],[8]) áll a rendelkezésre, a másik rendszer pedig egy surlódásos oszcillátor, ami szintén igen széles körben kutatott téma ([9],[10],[11]). A későbbiekben bemutatott periodikus pályákon jól láthatóak lesznek a bifurkációk speciális tulajdonságai, és látható lesz példa is a megszűnésükre. Maga az algoritmus implementálása MATLAB környezetben történt, ahol beépített eseménydetektáló rutinok segítségével lettek a hibrid rendszerek leszimulálva.

2. Matematikai összefoglaló

2.1. Szakaszosan sima rendszerekkel kapcsolatos összefüggések és jelölések

Jelölje $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, az állapotváltozók vektorát, illetve $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t)): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ az i -edik módban lévő vektorteret, $i = 1, \dots, m$, véges számú mód lehetséges. Az i -edik módban a rendszert leíró autonóm differenciálegyenlet a következő:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t)), \quad (1)$$

ahol, a kezdeti feltétel mindig $\mathbf{x}_{ki} = \mathbf{x}(t_{0,i})$ az i -edik módba való belépés állapota.

A különböző módok között értelmezhető $j = 1, \dots, l$ típusú esemény függvény $\mathbf{g}_j(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és mindegyikhez egy hozzá tartozó kapcsolófelület $h_j(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ami a j -edik módból való kilépést egy új módba való belépéssel köti össze. Ha $h_j(\mathbf{x})$ előjelet vált akkor átlépünk a következő módba, illetve ekkor az adott eseményfüggvény által definiált leképezést is el kell végeznünk, ami megadja az új módba való belépés kezdő állapotát. Ha h_j az j -edik és az $j + 1$ -edik módot köti össze, akkor az $j + 1$ -edik módban a kezdő (kilépő) állapot a belépő állapot függvényében a következő lesz

$$\mathbf{x}_{ki} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{be}). \quad (2)$$

A kapcsolófelületen való áthaladás nem feltétlenül jelent mód váltást, jelenthet csak egy leképezést például ütközést (vagy úgy is értelmezhetjük, hogy az esemény ugyanabba a módba vált át).

Jelölje $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az adott eseményhez tartozó leképezés $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t))$ linearizált alakjához tartozó mátrixot. Ebben az esetben a korrekciót az adott kapcsolófelületen következő módon számolhatjuk ki [4]:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_{be}) \partial h_i(\mathbf{x}_{be})}{\partial h_i(\mathbf{x}_{be}) \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_{be})}, \quad (3)$$

ahol $\mathbf{I}$ az $n \times n$ -es egység mátrix, $\partial h_i(\mathbf{x}_{be})$ pedig a kapcsolófelület deriváltja $\mathbf{x}$ szerint $\mathbf{x}_{be}$ helyen. Az utóbbi formula egy nála bonyolultabb összefüggés egyszerűsítése [4], ami akkor használható, ha a megoldás nem garantált, hogy kapcsolófelületen fog véget érni, de mivel a későbbiekben bemutatott algoritmus biztosítja, hogy a megoldás vége kapcsolófelületen lesz, így elég használni a (3)-t.

Tekintsünk egy tetszőleges megoldás szakaszt $\mathbf{x}_{\text{vég}}$ a valamely kapcsolófelületen $h(\mathbf{x}_{\text{vég}}) = 0$ található utolsó állapot és $\mathbf{x}_0$ a rendszer kezdeti állapota között. Ezen a szakaszon történjen n pillanatszerű esemény ahogy a megoldás pályája keresztezi a kapcsolófelületeket. Ekkor [4] szerint

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{\text{vég}}}{\partial \mathbf{x}_0} = \prod_{k=1}^n \mathbf{R}_{n+1-k} \mathbf{P}_{n+1-k} \mathbf{J}_{n+1-k}, \quad (4)$$

ahol a k index nem az események típusát jelöli, hanem azok sorszámát. (pl.: $\mathbf{R}_2$ a második eseményhez tartozó leképzési mátrix, nem a második típusú eseményhez tartozó), $\mathbf{J}_k = \frac{\partial \mathbf{x}_{\text{be},k}}{\partial \mathbf{x}_{\text{ki},k}}$.

Ha nem egy kapcsolófelületen szeretnénk kiszámolni a deriváltat, hanem valamilyen két esemény közt, akkor az előző egyenlet alakja így fog módosulni [4]:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{\text{közbülső}}}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{J}_{m+1} \prod_{k=1}^m \mathbf{R}_{m+1-k} \mathbf{P}_{m+1-k} \mathbf{J}_{m+1-k}, \quad (5)$$

ahol, m a közbülső pontig elért események száma, $\mathbf{J}_{m+1}$ az utolsó elért kapcsolófelület utáni szakasz végső pontjában a Jacobi-mátrix ($\mathbf{J}_{m+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{\text{közbülső}}}{\partial \mathbf{x}_{\text{ki},m}}$).

2.2. Szakaszosan sima rendszerekben fellépő speciális bifurkációk (Grazing, Sliding)

Grazing bifurkációról akkor beszélhetünk, ha $\mathbf{x}(t)$ megoldás pont érinti valamely kapcsolófelületet [4], tehát

$$h(\mathbf{x}_{\text{be}}) = 0 \text{ és } \dot{h}(\mathbf{x}_{\text{be}}) = 0. \quad (6)$$

Sliding bifurkáció pedig, akkor fordulhat elő, ha van két olyan vektormező, amelyek a kettő közötti kapcsolófelület mentén egymás felé mutatnak, és ekkor a kettő határán egy harmadik vektormezőbe „beragadhat” a megoldás. Ennek a bifurkációnak külön kapcsolófelülete van [4]:

$$-1 \leq h_{\text{sl}}(\mathbf{x}_{\text{be}}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\text{be}}) \mathbf{f}_{\text{be}}(\mathbf{x}_{\text{be}}) + \partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\text{be}}) \mathbf{f}_{\text{ki}}(\mathbf{x}_{\text{be}})}{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\text{be}}) \mathbf{f}_{\text{ki}}(\mathbf{x}_{\text{be}}) - \partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\text{be}}) \mathbf{f}_{\text{be}}(\mathbf{x}_{\text{be}})} \leq 1, \quad (7)$$

ahol $h(\mathbf{x}_{\text{be}})$ az $\mathbf{f}_{\text{be}}$ és az $\mathbf{f}_{\text{ki}}$ vektormezőket összekötő kapcsolófelület.

Ha mindkét egyenlőtlenség teljesül, akkor lép fel sliding bifurkáció.

2.3. Felhasznált numerikus módszerek

2.3.1. Newton-Rhapson módszer

Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{F}(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy megoldani kívánt nemlineáris egyenletrendszer ahol

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Egy megfelelően pontos becslésből $\mathbf{x}_0$ kiindulva a következő iterációs eljárás egy megoldásához fog konvergálni

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_i)\mathbf{F}(\mathbf{x}_i), \quad (9)$$

ahol $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}$, a nemlineáris egyenletrendszer Jacobi mátrixa.

2.3.2. Pszeudo-ív hossz módszer:

Legyen ismét $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{F}(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (10)$$

a megoldani kívánt implicit nemlineáris egyenletrendszerünk. A módszer segítségével a következő megoldást ($\mathbf{x}_{i+1}$) az előző megoldásból ($\mathbf{x}_i$) kiindulva keressük $\mathbf{v}$ irányba, ahol $\mathbf{v}$ (10) szintvonalának érintőjével párhuzamos egység hosszú oszlopvektor. Ennek a vektornak a meghatározása, az ún. prediktor lépés a következő egyenletrendszer megoldásával kapható:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$\|\mathbf{v}\| = 1,$$

ahol $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}$. Ezután $\mathbf{v}$ segítségével a következő egyenletrendszert kell szimultán megoldani:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_{i+1}) = \mathbf{0} \quad (12)$$

$$(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{v} - \Delta s = 0,$$

ahol, Δs a lépés hossza, a második egyenlet pedig azt fejezi ki, hogy a következő megoldást az érintő vektorra merőlegesen keressük.

3. Az algoritmus felépítése

3.1. A hibrid periodikus pályák peremérték feladatként való megfogalmazása

Álljon a rendszerünk (1) és (2) alapján m módból és l kapcsolófelületből és legyen T a vektormezőkből eredő periodicitás periódus ideje, ekkor a következő egyenletnek keressük a megoldását, ami nT periódus idejű:

$$\mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t_0 + nT, \mathbf{x}_0), \quad (13)$$

ahol $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ (n_x arra utal, hogy az állapotvektor dimenziója független a pálya hosszúságát jelző n -től) a kezdeti állapot $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0)$, ahol $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ a hibrid rendszer megoldása.

(13)-hoz tartozó differenciálegyenlet rendszert autonómmá tehetjük (ha nem volt már eleve autonóm) egy új változó bevezetésével: $x_t = t$, valamint a differenciálegyenleteket is kiegészíthetjük egy $\dot{x}_t(t) = 1$, sorral. Ekkor a következő lesz a peremérték feladat az x_t állapottal kiegészítve (kerüljön x_t a kiegészített állapotvektor utolsó sorába):

$$\mathbf{x}_{\text{vég}}(nT, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ nT \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

ahol $\mathbf{x}_{\text{vég}}(nT, \mathbf{x}_0)$ a pálya végső pontja, $\mathbf{x}_0$ a kezdeti állapot függvényében (itt már az állapot vektorok $n_x + 1$ dimenziósak)

Ha nT hosszúságú pályát keresünk, nem pedig valamely esemény n -szer való bekövetkezését (ez utóbbi esetben (14)-ben nT helyett szerepelhet bármilyen $m \in \mathbb{N} mT$). És megkötjük, hogy egy $x_t(0) = 0$ síkról induló megoldást keresünk (valamelyik állapot változót mindenképp meg kell kötni), akkor definiálhatunk egy olyan eseményt, amely T -nél visszaképezi x_t -t 0-ba, de a többi állapot változót önmagába képezi, illetve vektormezőt sem vált, tehát:

$$h_T(\mathbf{x}) = x_t - T \quad (15)$$

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{x}_{\text{be}}) = \mathbf{R}_T \mathbf{x}_{\text{be}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{be}},$$

ahol, $\mathbf{I}$ az $n_x \times n_x$ -es egység mátrix, $\mathbf{0}$ pedig $n_x \times 1$ -es csupa 0-ból álló mátrix

Így (14)-t átírhatjuk egy vele ekvivalens alakra, ahol $h_T(\mathbf{x})$ n -szer való elérését írjuk elő:

$$\mathbf{x}_{\text{vég}}(nT, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}. \quad (16)$$

3.2. Belövéses módszerrel történő megoldás

Látszik, hogy (16) egy nemlineáris egyenletrendszer $\mathbf{x}_0$ -ra, ezt megoldhatjuk Newton-Raphson módszerrel (jelen esetben ez a belövéses módszer). Ehhez azonban kell (16) deriváltja $\mathbf{x}_0$ szerint, amit (4) segítségével ki lehet számolni, viszont (4)-hez kellenek az ott definiált Jacobi mátrixok, amelyeket a következő módon lehet megkapni: vegyünk egy tetszőleges módban a rendszert leíró differenciálegyenletet (már autonóm esetben)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (17)$$

ahol a kezdeti állapot a módba való belépés állapota. Ennek a megoldása függeni fog $\mathbf{x}_0$ -tól, tehát:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \quad (18)$$

(17)-t deriválva $\mathbf{x}_0$ szerint és a láncszabályt alkalmazva:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0}, \quad (19)$$

bevezetve a $\mathbf{J}(t, \mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0}$ jelölést (19) alakja a következő lesz:

$$\dot{\mathbf{J}}(t, \mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x}_0) \quad (20)$$

Tehát $\mathbf{J}(t, \mathbf{x}_0)$ -ra egy lineáris differenciálegyenlet rendszer adódik, aminek a kezdeti értéke a megfelelő dimenziójú egység mátrix (minden kapcsolófelületen), hiszen:

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{I}. \quad (21)$$

Jelölje a (4) szerint kiszámolt mátrixot Φ , ami egyben az ún. monodrómia mátrix. Ennek segítségével lehet kiszámolni az adott periodikus pálya stabilitását [4], ami az algoritmus egyik legnagyobb előnye. Akkor stabil a pálya, ha komplex síkon minden sajátértéke Φ -nak az egység sugarú körön belül marad [4].

Így a (16)-os egyenlet kezdeti feltételek szerinti deriváltja a következőképpen fog alakulni (elhagyva az argumentumokat):

$$\frac{\partial(\mathbf{x}_{\text{vég}} - \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} = \Phi - \mathbf{I}. \quad (22)$$

Tehát a Newton-Rhapon módszer alakja a következő lesz:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - (\Phi - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{x}_{\text{vég}}(nT, \mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i). \quad (23)$$

Mindig, valamelyik kapcsolófelületről kell indítani a megoldást, hogy (4) alkalmazható legyen, és a bevetetett időváltozó lehetővé teszi azt, hogy időben bárhonnán elindítva a megoldást mindig ezen a h_T -t fog végződni a megoldás. Tetszőleges t_0 -ról úgy lehet megoldást indítani, hogy a fent definiált (15)-ben szereplő $h_T(\mathbf{x})$ -t kiegészítjük: $h_T(\mathbf{x}) = x_t - T - t_0$, a hozzátartozó leképezés önmagába képez minden állapotváltozót, kivéve x_t -t: $g_T(x_t) = x_t - T$. Így a linearizált $\mathbf{R}_T$ alakja a következő lesz: $\mathbf{R}_T = \mathbf{I}$, ahol $\mathbf{I}$ az $n_x + 1 \times n_x + 1$ -es egységmátrix, valójában $t_0 = 0$ -val visszkapjuk a fent definiáltakat.

3.3. Paraméterben való lekövetése a hibrid periodikus pályának pszeudo-ív hossz módszerrel

Miután (23) alapján van egy hibrid periodikus pályánk, aminek a kezdeti értéke $\mathbf{x}_0$ és a vektormezőkben szereplő paraméterek vektora $\mathbf{p}$, továbbá a követni kívánt paraméter p . (11) és (12) alapján le tudjuk követni ezt a pályát p -ben a következő módon.

Az állapotvektorunkhoz fűzzük hozzá ezt a p paramétert és a vektormezőkhöz pedig egy 0 sort. Illetve minden $\mathbf{R}$ mátrixot egészítsünk ki, diagonálisan egy 1-el (az új keletkezett helyekre pedig 0-k kerülnek). Ezáltal azt a formalizmust követtük el, hogy p , mint egy időben állandó állapot van jelen, amelyet mindegyik leképezés önmagába képez. Így (4) használható lesz a paraméter szerinti derivált kiszámítására is.

(10) jelöléseit követve:

$$\mathbf{x}_i^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ p \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_{i+1}(p)) = \mathbf{x}_{\text{vég}}(nT, \mathbf{x}_{i+1}(p)) - \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{0},$$

$$(\mathbf{x}_{i+1}^* - \mathbf{x}_i^*) \cdot \mathbf{v} - \Delta s = 0,$$

ahol, $*$ jelöli a paraméterrel kibővített vektort, $\mathbf{x}_{i+1}$, jelenti a paraméter nélküli állapotvektort, hiszen a paraméter konstans végig, így az a sor 0 nulla lenne amúgy is $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{i+1}(p))$ -ben.

A prediktor lépésként a következő egyenletrendszert kell megoldani (11) szerint:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{v}_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{J}_p v_p = \mathbf{0} \quad (25)$$

$$\|\mathbf{v}_{\mathbf{x}_0}\| + |v_p| = 1,$$

ahol, $\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0}$ (16)-hoz tartozó Jacobi-mátrix $\mathbf{x}_0$ szerint, amelyet (22)-szerint már ki lehet számolni,

$\mathbf{J}_p$ (16)-hoz tartozó Jacobi-mátrix p szerint, vagyis a kibővített rendszer Jacobi-mátrixának utolsó oszlopa amelyet (4)-szerint kell számolni, $\mathbf{v}_{\mathbf{x}_0}$ a $\mathbf{v}$ -ben $\mathbf{x}_0$ -hoz tartozó rész, v_p a $\mathbf{v}$ -ben p -hez tartozó rész. Mivel $\mathbf{x}_i^*$ dimenziója a kibővítés miatt 1-el nagyobb, mint $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i(p))$ dimenziója, ezért kerül bele még egy sor (a norma megszabásának feltétele) az egyenletrendszerbe, hogy véges számú megoldás legyen.

(25)-ben az első egyenlet azt fejezi ki, hogy $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i(p))$ szintvonalának érintőjével párhuzamos $\mathbf{v}$. A második egyenlet pedig azt biztosítja, hogy egység hosszú legyen a vektor.

(25)-t Newton-Rhapson módszerrel nagyon gyorsan meg lehet oldani $\mathbf{v}$ -re.

Második lépésként (24)-t kell megoldani, amelyet szintén a Newton-Rhapson módszerrel könnyedén meg lehet tenni. Hiszen a $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i+1})}{\partial \mathbf{x}_{i+1}}$ kiszámolása (22) szerint történik, míg $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i+1}(p))}{\partial p}$ a bevezetett formalizmus miatt (4) alapján. Illetve a merőlegességet biztosító feltétel deriváltja pont $\mathbf{v}$ -vel fog megegyezni, mint sorvektor:

$$\frac{\partial((\mathbf{x}_{i+1}^* - \mathbf{x}_i^*) \cdot \mathbf{v} - \Delta s)}{\partial \mathbf{x}_{i+1}^*} = \mathbf{v}^T. \quad (26)$$

3.4. Grazing bifurkáció megtalálása

3.4.1. Grazing „közeli” állapot azonosítása a hibrid periodikus pályán

Mivel eseménydetektálás rutinok segítségével van a kapcsolófelületek elérése biztosítva, ezért az a probléma merülhet fel, hogy ha a pálya nem éri el a kapcsolófelületet, de közel van egy grazing eseményhez az detektálatlanul marad. $\mathbf{x}$ akkor jár közel a grazinghez, ha a (6)-alapján képzett vektor $\mathbf{h}_{\text{gr}} = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ \dot{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$ normájára igaz, hogy:

$$\|\mathbf{h}_{\text{gr}}\| \leq \varepsilon, \quad (27)$$

ahol $\varepsilon > 0$ egy „megfelelően” kicsi szám.

Erre a problémára egy lehetséges megoldás egy új esemény létrehozása lehet, ami nem csinál semmi egyebet csak leállítja a szimulációt, kimentti az értékeket, majd folytatja a numerikus szimulációt. Ez az esemény legyen az, amikor (27) teljesül, ha teljesült akkor csökkentsük ε -t q -szorosára ($q < 1$). Így folyamatosan csökkentve a grazing esemény körüli gömb sugarát mindig elérjük azt az utolsó eseményt, amelyre már annyira kicsi lesz a sugár, hogy nincs a

pályának olyan pontja, ami elérné azt. Így a keresett grazing eseményhez legközelebbi pont $\mathbf{x}_{\text{pontos}}$ valahol az utolsó és az utolsóelőtti sugarú gömbfelületek között helyezkedik el, viszont eszerint a megoldás szerint a megtalált $\mathbf{x}_{\text{közeli}}$ pont az utolsóelőtti gömbfelületen helyezkedik el. Elég kicsi ε -al és 1-hez elég közeli q értékkel jó közelítéssel mondhatjuk, hogy $\mathbf{x}_{\text{közeli}} \approx \mathbf{x}_{\text{pontos}}$.

Ez a megoldás akkor is jó, ha a pálya eléri a $h(\mathbf{x})$ kapcsolófelületet, ugyanis addig folyamatosan vannak $\mathbf{x}$ -ek detektálva, így a sugár is folyamatosan csökken, és ha elérte a pálya a kapcsolófelületet és $\left\| \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}_{\text{be}}) \\ \dot{h}(\mathbf{x}_{\text{be}}) \end{bmatrix} \right\|$ kisebb mint az előző (nem az aktuális) sugár, akkor az új sugár ez lesz, illetve $\mathbf{x}_{\text{be}}$ lesz az új detektált vektor, majd innentől folytatódik tovább ez a megoldási módszer az új sugárral és az új kezdeti állapottal (már az $\mathbf{x}_{\text{ki}}$ -re is ellenőrizve a feltételt).

3.4.2. Kritikus grazing bifurkációs paraméter meghatározása

Hasonlóan a 3.3-hoz $*$ jelöli a kibővített kezdeti vektort: $\mathbf{x}_0^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ p \end{bmatrix}$. Miután kiegészítettünk minden vektormezőt egy 0 sorral és minden $\mathbf{R}$ mátrixot a 3.3.-al megegyező módon. A (16)-os egyenletet a

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0^*) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{vég}}(p) - \mathbf{x}_0 \\ h(\mathbf{x}_{\text{közeli}}(p)) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (28)$$

alakban kiegészítve kapunk még egy sort, ami miatt ez már megoldható lesz a nemlineáris egyenletrendszer $\mathbf{x}_0^*$ paraméterrel kiegészített állapot vektorra is. Itt $\mathbf{x}_{\text{közeli}}$ a 3.4.1.-szerint, a periodikus pálya grazing bifurkációhoz legközelebb eső pontja.

(28)-ban az utolsó sorba $\dot{h}(\mathbf{x}_{\text{közeli}})$ is kerülhetne, mivel ennek is ugyanúgy 0-nak kell lennie, mivel $\mathbf{x}_{\text{közeli}}$ biztosítja azt, hogy ha $h(\mathbf{x}_{\text{közeli}}) = 0$ akkor $\dot{h}(\mathbf{x}_{\text{közeli}}) = 0$ és fordítva.

(28)-t Newton-Rhapsonnal meg lehet oldani, hiszen (elhagyva az argumentumokat) $\frac{\partial(\mathbf{x}_{\text{vég}} - \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0}$

t (22)-szerint ki lehet számolni, illetve a $\frac{\partial(\mathbf{x}_{\text{vég}} - \mathbf{x}_0)}{\partial p}$ meghatározható (4) alapján, hasonlóan 3.3.-

hoz. A $\frac{\partial h(\mathbf{x}_{\text{közeli}})}{\partial \mathbf{x}_0^*}$ -t a láncszabály segítségével: $\frac{\partial h(\mathbf{x}_{\text{közeli}})}{\partial \mathbf{x}_0^*} = \frac{\partial h(\mathbf{x}_{\text{közeli}})}{\partial \mathbf{x}_{\text{közeli}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_{\text{közeli}}}{\partial \mathbf{x}_0^*}$ lehet kiszámolni,

ahol ha $\mathbf{x}_{\text{közeli}}$ nincs rajta kapcsolófelületen (5)-t alkalmazzuk rá:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{\text{közbülső,közeli}}}{\partial \mathbf{x}_0^*} = \mathbf{J}_{m+1} \prod_{k=1}^m \mathbf{R}_{m+1-k} \mathbf{P}_{m+1-k} \mathbf{J}_{m+1-k}, \quad (29)$$

ha rajta van akkor (4) szerint kell $\frac{\partial \mathbf{x}_{\text{közeli}}}{\partial \mathbf{x}_0^*}$ -t meghatározni.

Tehát (28) deriváltja $\mathbf{x}_0^*$ szerint a következő lesz:

$$\frac{\partial \left[\frac{\mathbf{x}_{\text{vég}}(p) - \mathbf{x}_0}{h(\mathbf{x}_{\text{közeli}}(p))} \right]}{\partial \mathbf{x}_0^*} = \left[\frac{\frac{\partial (\mathbf{x}_{\text{vég}}(p) - \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0^*}}{\frac{\partial h(\mathbf{x}_{\text{közeli}}(p))}{\partial \mathbf{x}_{\text{közeli}}(p)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_{\text{közeli}}(p)}{\partial \mathbf{x}_0^*} \right]. \quad (30)$$

Így (28) könnyen megoldható Newton-Rhapson módszerrel (30) segítségével

3.5. Paraméterben való követése a grazing bifurkációnak

Hasonlóan eljárva, ahogy 3.3.-ban, miután 3.4. alapján van egy $\mathbf{x}_0^*$ kezdeti állapotból és egy paraméterből álló vektorunk, ahonnan kiindítva a megoldást egy olyan hibrid periodikus pályát kapunk, ahol fellép grazing bifurkáció, ezt az $\mathbf{x}_0^*$ vektort is ki tudjuk egészíteni egy újabb p_2 paraméterrel, majd minden vektormezőt egy újabb 0 sorral, illetve minden $\mathbf{R}$ mátrixot a 3.3.-al megegyező módon. $\mathbf{x}_0^{**}$ jelölje a két paraméterrel kiegészített kezdeti állapotot. Így a következő egyenletrendszer írható fel a 3.3. és a 3.4. kombinálásával, illetve (12) jelöléseit használva:

$$\mathbf{x}_i^{**} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^* \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ p \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_{i+1}^{**}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{vég},i+1}(p, p_2) - \mathbf{x}_{0,i+1} \\ h(\mathbf{x}_{\text{közeli},i+1}(p, p_2)) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{x}_{i+1}^{**} - \mathbf{x}_i^{**}) \cdot \mathbf{v} - \Delta s = 0,$$

ahol, az $i + 1$ index a következő kezdeti értékből való indítást jelzi.

(31) deriváltját $\mathbf{x}_{i+1}^{**}$ szerint 3.3. és 3.4.-el analóg módon ki lehet számolni, így Newton-Rhapson módszerrel meg is lehet oldani. $\mathbf{v}$ kiszámítása (25)-el analóg módon történik. Ezáltal egy olyan $\mathbf{x}_{i+1}^{**}$ lesz a megoldás, ahol szintén fellép grazing bifurkáció, más p és p_2 mellett, így a bifurkáció 2 paraméterben lekövethető.

3.6. Sliding bifurkáció megtalálása

3.4.1.-hez hasonlóan akkor vagyunk közel sliding bifurkációhoz (a határához), ha

$$||h_{sl}(\mathbf{x}_{be})| - 1| \leq \varepsilon, \quad (32)$$

ahol: $\varepsilon > 0$ egy „megfelelően” kicsi szám.

Ekkor 3.4.2.-vel analóg módon ki tudjuk egészíteni (16)-t egy új sorral, illetve a kezdeti vektort is egy p paraméterrel, jelölje $\mathbf{x}_0^*$ a kiegészített kezdeti érték vektorát, tehát $\mathbf{x}_0^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ p \end{bmatrix}$. Ekkor a következő alakot fogja (16) öltetni:

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0^*) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{vég}(p) - \mathbf{x}_0 \\ |h_{sl}(\mathbf{x}_{be}(p))| - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (33)$$

ahol, $\mathbf{x}_{be}$ a sliding bifurkáció közelében lévő állapotváltozók vektora. A vektormezők, illetve az $\mathbf{R}$ mátrixok 3.4.2.-vel megegyező módon lettek kiegészítve.

(33)-t Newton-Rhapon módszerrel meg lehet oldani, mert $\frac{\partial(\mathbf{x}_{vég}(p) - \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0^*}$ (22) és (4)-szerint kiszámítható, illetve mivel $|h_{sl}(\mathbf{x}_{be})|$ 1 közeli értékű, így itt deriválható az abszolút érték függvény. Továbbá a láncszabály felhasználásával:

$$\frac{\partial |h_{sl}(\mathbf{x}_{be})|}{\partial \mathbf{x}_0^*} = \frac{h_{sl}(\mathbf{x}_{be})}{|h_{sl}(\mathbf{x}_{be})|} \cdot \frac{\partial h_{sl}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_0^*}. \quad (34)$$

A (34)-ben szereplő $\frac{\partial h_{sl}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_0^*}$ tagot szintén láncszabály segítségével lehet kiszámolni, mivel $h_{sl}(\mathbf{x}_{be})$ nem függ explicit $\mathbf{x}_0$ -tól, csak $\mathbf{x}_{be} = \mathbf{x}_{be}(\mathbf{x}_0^*)$ -on keresztül, így:

$$\frac{\partial h_{sl}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_0^*} = \frac{\partial h_{sl}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_{be}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_{be}}{\partial \mathbf{x}_0^*}. \quad (35)$$

Amiben $\frac{\partial h_{sl}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_{be}}$ -t ki lehet számolni analitikusan (6) alapján, illetve $\frac{\partial \mathbf{x}_{be}}{\partial \mathbf{x}_0}$ -t pedig, (5) alapján, mivel igaz, hogy $\mathbf{x}_{be}$ rajta van a kapcsoló felületen, de nincsen még leképezve, így nem kell rá korrekciót alkalmazni.

Tehát (33) deriváltja $\mathbf{x}_0^*$ szerint a következő lesz:

$$\frac{\partial \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{vég}(p) - \mathbf{x}_0 \\ |h_{sl}(\mathbf{x}_{be}(p))| - 1 \end{bmatrix}}{\partial \mathbf{x}_0^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{x}_{vég}(p) - \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0^*} \\ \frac{h_{sl}(\mathbf{x}_{be})}{|h_{sl}(\mathbf{x}_{be})|} \cdot \frac{\partial h_{sl}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_{be}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_{be}}{\partial \mathbf{x}_0^*} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Tehát (33)-t meg lehet oldani Newton-Rhapon módszerrel (36) segítségével.

3.7. Paraméterben való követése a sliding bifurkációnak

Hasonlóan eljárva, ahogy 3.3.-ban, miután 3.6. miatt van egy $\mathbf{x}_0$,kezdeti állapotból és egy paraméterből álló vektorunk, ahonnan kiindítva a megoldást egy olyan hibrid periodikus pályát kapunk, ahol fellép sliding bifurkáció, ezt az $\mathbf{x}_0$ vektort is ki tudjuk egészíteni egy újabb p_2 paraméterrel, majd minden vektormezőt egy újabb 0 sorral, illetve minden $\mathbf{R}$ mátrixot a 3.3.-al megegyező módon. $\mathbf{x}_0^{**}$ jelölje a 2 paraméterrel kiegészített kezdeti állapotot. Így a következő egyenletrendszer írható fel a 3.3. és a 3.6. kombinálásával, illetve (12) jelöléseit felhasználva:

$$\mathbf{x}_i^{**} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^* \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ p \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_{i+1}^{**}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{vég},i+1}(p, p_2) - \mathbf{x}_{0,i+1} \\ |h_{\text{sl}}(\mathbf{x}_{\text{be}}(p, p_2))| - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{x}_{i+1}^{**} - \mathbf{x}_i^{**}) \cdot \mathbf{v} - \Delta s = 0$$

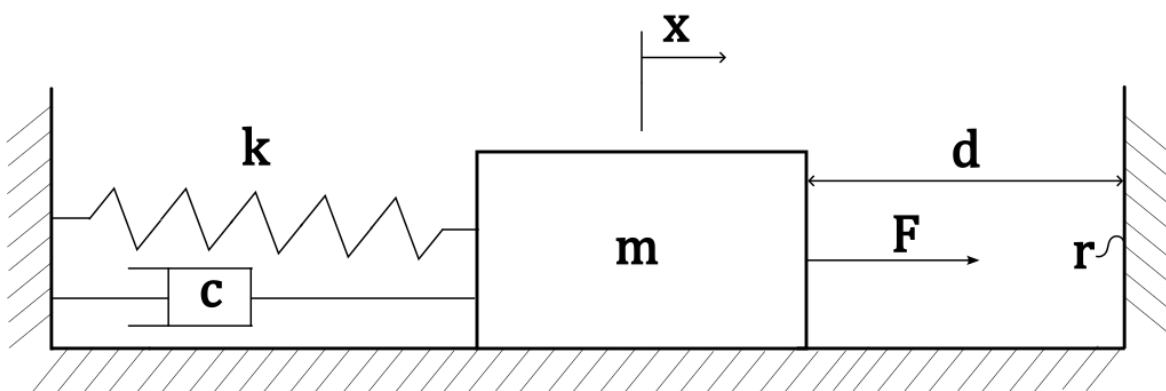
(37) deriváltját $\mathbf{x}_{i+1}^{**}$ szerint 3.3. és 3.6.-al analóg módon ki lehet számolni, így Newton-Raphson módszerrel meg is lehet oldani. $\mathbf{v}$ kiszámítása (25)-el analóg módon történik.. Ezáltal egy olyan $\mathbf{x}_{i+1}^{**}$ lesz a megoldás, ahol szintén fellép sliding bifurkáció (pontosabban a bifurkáció határán leszünk), más p és p_2 mellett, így a bifurkációt 2 paraméterben is le lehet követni.

4. Az algoritmus működésének bemutatása két egyszerű példán

4.1. Az ütközéses oszcillátor modellje

4.1.1. A mozgást leíró egyenletek

A vizsgált modell a következő ábrán látható:



1. ábra: Az ütközéses oszcillátor sematikus rajza

A pontszerűnek tekinthető test mozgását a következő jól ismert másodrendű differenciálegyenlet írja le:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t), \quad (38)$$

ahol, $x(t)$ a pozíció, m a tömeg, c a viszkozus csillapítási tényező, k a rugóállandó, $F(t) = A \cos(\omega t)$, A a gerjesztés amplitúdója, ω pedig a szögsebessége, d a faltól való távolság a 0 pozíciótól mérve, r az ütközési tényező.

Bevezetve $d\tilde{x} = x$ és $\frac{1}{\omega_n} \tilde{t} = t$ mennyiségeket (dimenziótlanítás céljából), ahol $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, illetve felhasználva azt, hogy $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(x(\tilde{t}))}{d\tilde{t}} \cdot \frac{d\tilde{t}}{dt} = \omega_n x'(\tilde{t})$, ahol ' jelenti a $\tilde{t}$ szerinti deriváltat, (36) alakja a következő lesz a $\sim$ -k elhagyása után:

$$d\omega_n^2 m x''(t) + \omega_n d c x'(t) + d k x(t) = A \cos\left(\frac{\omega}{\omega_n} t\right), \quad (39)$$

Leosztva $x''(t)$ együtthatójával és bevezetve a $\zeta = \frac{c}{2\omega_n m}$, $f = \frac{A}{\omega_n^2 m d}$, illetve a $\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}$ dimenziótlan paraméterket (39) a következőre fog egyszerűsödni:

$$x''(t) + 2\zeta x'(t) + x(t) = f \cos(\lambda t). \quad (40)$$

Cauchy átírással, illetve autonómmá téve (40)-t megkaphatjuk a vektormezőt. Legyen $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$ és $x_3(t) = \lambda t$. Látható, hogy ekkor (40) a következő alakra módosul:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ f \cos(x_3(t)) - 2\zeta x_2(t) - x_1(t) \\ \lambda \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_0). \quad (41)$$

Így (41) (1)-el megegyező formájú lett, ahol (19) alapján $\mathbf{J}$ kiszámolása végett kifejezendő

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\zeta & -f \sin(x_3(t)) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

4.1.2. A szakaszosan sima rendszert leíró egyenletek, az ütközés modellezése

(41) alapján látható, hogy itt összesen 1 mód (vektormező) lesz jelen. Illetve 1 „hagyományos értelemben vett” kapcsolófelület, ahol az ütközés történik, ami nem vált módot, viszont a sebességet módosítja, formálisan: $h(x(t)) = x(t) - d$, aminek a dimenziótlan formája:

$$h(\mathbf{x}(t)) = x_1(t) - 1. \quad (43)$$

A kapcsolófelületen a leképezés függvénye:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_{be}) = \mathbf{x}_{ki} = \begin{bmatrix} x_{1,be} \\ -r \cdot x_{2,be} \\ x_{3,be} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

(44) lineáris leképezéshez tartozó $\mathbf{R}$ mátrix (a következőkben bemutatott eredményeknél $r = 0.95$ mindenhol):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

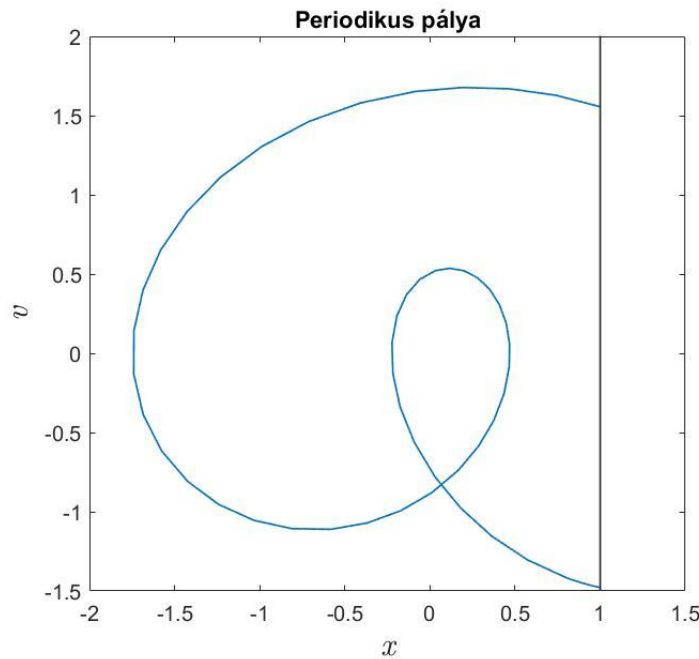
4.1.3. Belövéses módszer, illetve pszeudo-ívhossz módszer prezentálása, adott ütközés számú periodikus pályákon

Ebben a részben nem adott időtartamú pályák lesznek bemutatva, hanem adott ütközés számot elérő T hosszú pályák. [2] jelöléseivel: $(1, n)$, ahol az első szám az mutatja meg, hogy hány gerjesztési periódust tartalmaz a pálya, a második szám pedig az ütközések számát.

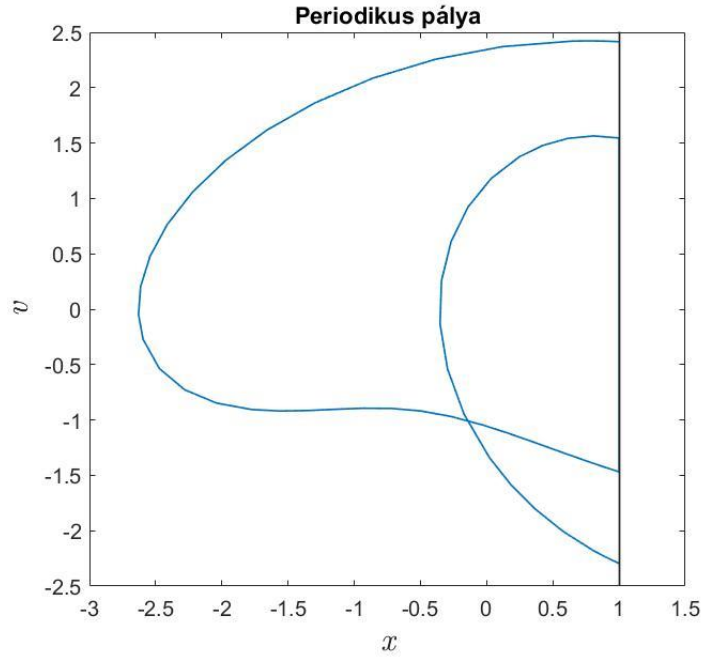
Itt most $T = 2\pi$, a cosinuszos gerjesztés miatt (persze lehetne ennek páros egész számú többszöröse is). Illetve a peremérték feladat a következő képpen fog kinézni (14) alapján:

$$\mathbf{x}_{\text{vég}}(2\pi, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (46)$$

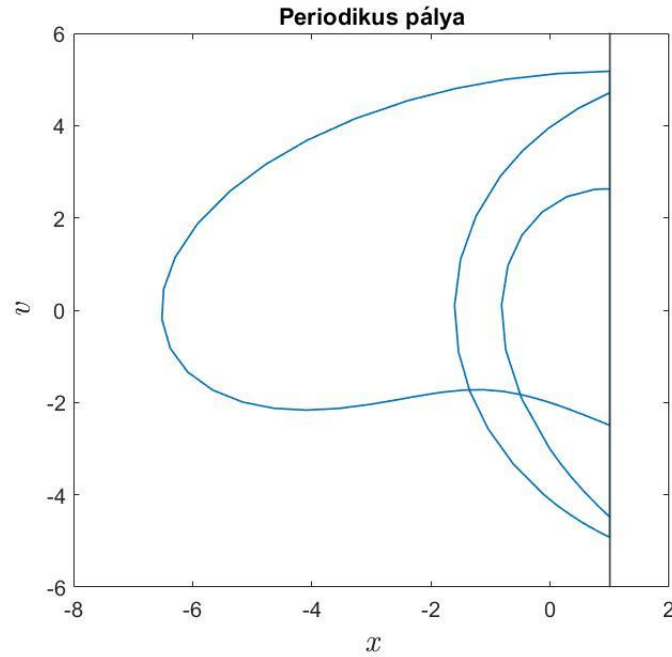
$\mathbf{x}_0$ -t a falról indítva és ott is állítva le a szimulációt n ütközés után azt fogja eredményezni, hogy olyan megoldást fog találni a belövéses módszer, ami a falról van indítva. Ilyen periodikus pályákra láthatók példák a következő ábrákon ($v = x_2(t)$ és $x = x_1(t)$):



2. ábra: (1,1) periodikus pálya ($\mathbf{x}_0 = [1, -1.4785, 12.1519]^T$, $\zeta = 0.1443$, $f = 1$, $\lambda = 0.7$)



3. ábra: (1,2) periodikus pálya ($\mathbf{x}_0 = [1, -2.2950, 5.6019]^T, \zeta = 0.1443, f = 2, \lambda = 0.7$)



4. ábra: (1,3) periodikus pálya ($\mathbf{x}_0 = [1, -4.4774, 6.4183]^T, \zeta = 0.1443, f = 5, \lambda = 0.6$)

A pszeudo-ív hossz módszerhez (a 3.3.-ban leírtak miatt) (41), (42), (44) és (45) is módosulni fognak (itt most mind 3 paraméterrel ki lesz egészítve, mert implementálás céljából egyszerűbb utána kiszélesíteni a megfelelő sorokat és oszlopokat a kibővített nemlineáris egyenletrendszer Jacobi-mátrixához):

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\text{új}}' &= \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ \zeta'(t) \\ f'(t) \\ \lambda'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ f \cos(x_3(t)) - 2\zeta x_2(t) - x_1(t) \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{új}}(t, \mathbf{x}_{0,\text{új}})) \quad (47) \\
\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{új}}(t, \mathbf{x}_{0,\text{új}}))}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2\zeta & -f \sin(x_3(t)) & -2x_2(t) & \cos(x_3(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{R}_{\text{új}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(47) felhasználásával 3.3. alkalmazható:

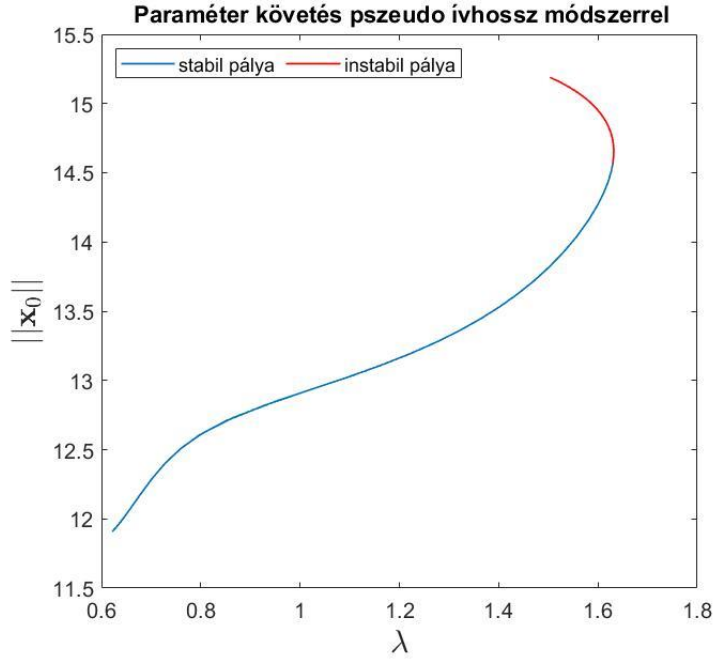
$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{v}_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{J}_p v_p &= \mathbf{0} \quad (48) \\
\|\mathbf{v}_{\mathbf{x}_0}\| + |v_p| &= 1,
\end{aligned}$$

mint prediktor lépés, majd

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_i^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ p \end{bmatrix}, \quad (49) \\
\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_{i+1}(p)) &= \mathbf{x}_{\text{vég}}(nT, \mathbf{x}_{i+1}(p)) - \mathbf{x}_{i+1} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi \end{bmatrix} = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

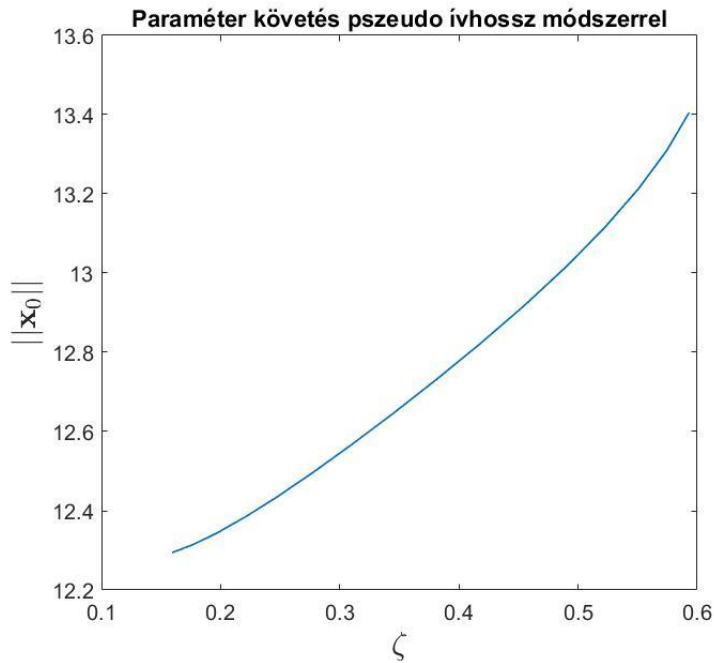
$$(\mathbf{x}_{i+1}^* - \mathbf{x}_i^*) \cdot \mathbf{v} - \Delta s = 0,$$

egyenletrendszer kell megoldani. Az eredményeket szemléltetik az alábbi ábrák:

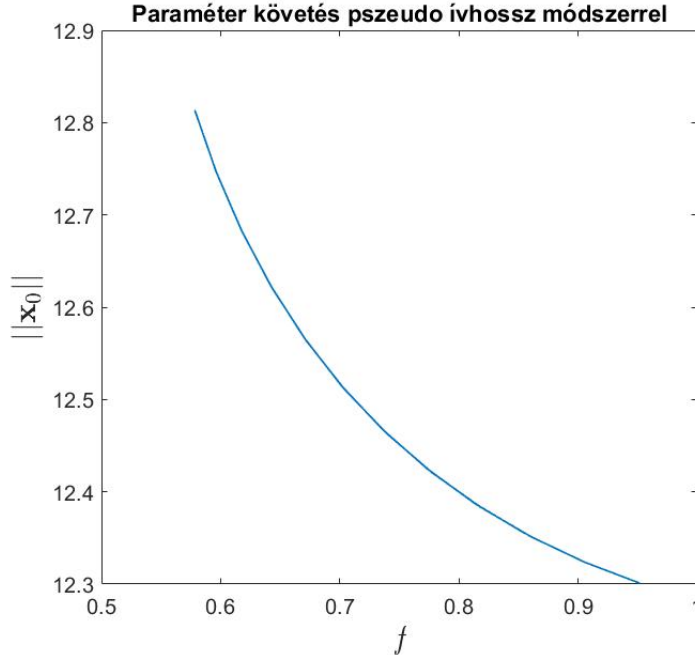


5. ábra: (1,1) periodikus pálya ($\mathbf{x}_0 = [1, -1.4785, 12.1519]^T$, $\zeta = 0.1443$, $f = 1$, $\lambda = 0.7$)
lekövetése λ -ban

Jól látható az előző ábrán, hogy görbe visszafordulásánál stabilitás vesztes történt. A stabilitás a monodrómia mátrix segítségével lett egyszerű sajátérték számítással meghatározva a 3.2.-ben leírtak szerint. Az implementált pszeudó ívhossz módszer mindig figyeli a megtalált pályák stabilitását és kijelzi, hogy ha változás történt.



6. ábra: (1,1) periodikus pálya ($\mathbf{x}_0 = [1, -1.4785, 12.1519]^T$, $\zeta = 0.1443$, $f = 1$, $\lambda = 0.7$)
lekövetése ζ -ban



7. ábra: (1,1) periodikus pálya ($\mathbf{x}_0 = [1, -1.4785, 12.1519]^T$, $\zeta = 0.1443$, $f = 1$, $\lambda = 0.7$)
lekövetése f -ben

4.1.4. Adott nT periódus idejű pályák keresése

Mivel az algoritmus bármennyi kapcsolófelületet megenged, ezért (15) alapján kiegészíthetjük a rendszert a következő kapcsolófelülettel (ahol szintén nem történik mód váltás):

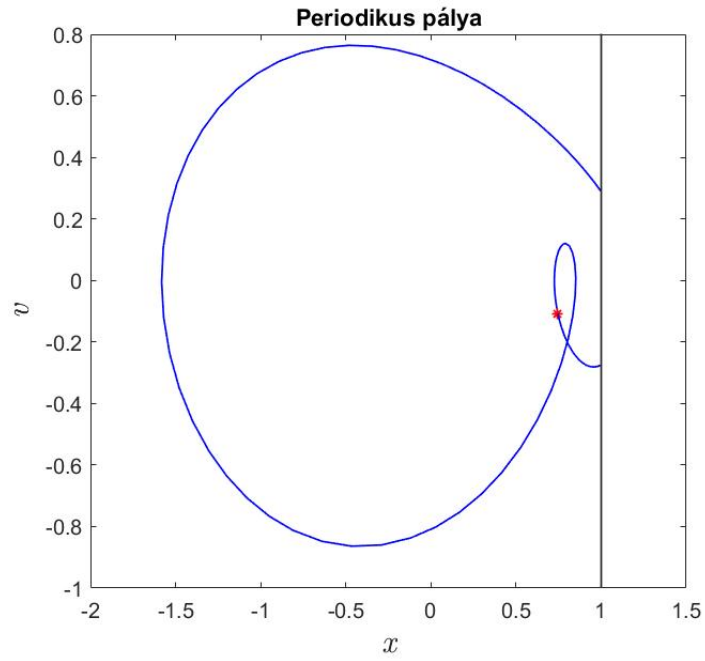
$$h_T(\mathbf{x}(t)) = x_3(t) - 2\pi n \quad (50)$$

$$\mathbf{R}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

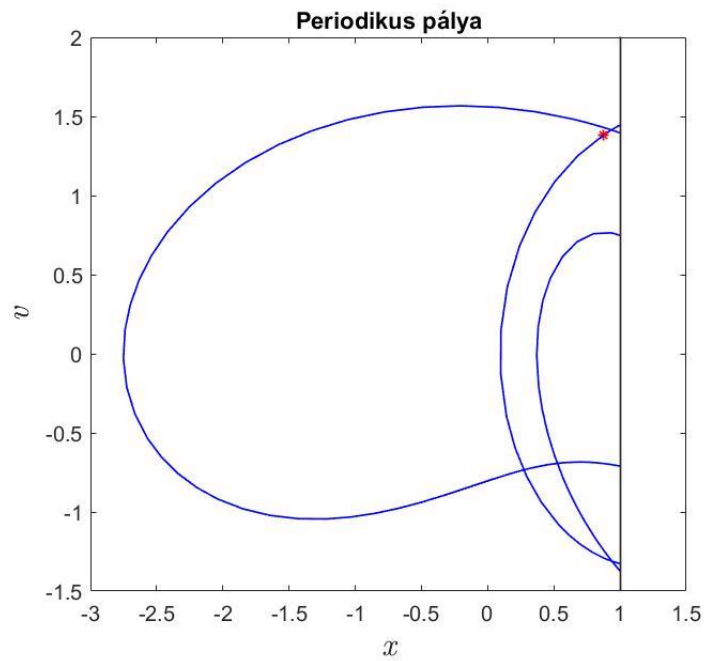
Így ha h_T -ről van indítva a megoldás, illetve h_T -t n -szer elérve állítjuk le a szimulációt akkor, a belövéses módszer $2\pi n$ periódusú pályát fog találni ütközések számától függetlenül. A peremérték feladat a következő alakú lesz ebben az esetben:

$$\mathbf{x}_{\text{vég}}(2\pi n, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}. \quad (51)$$

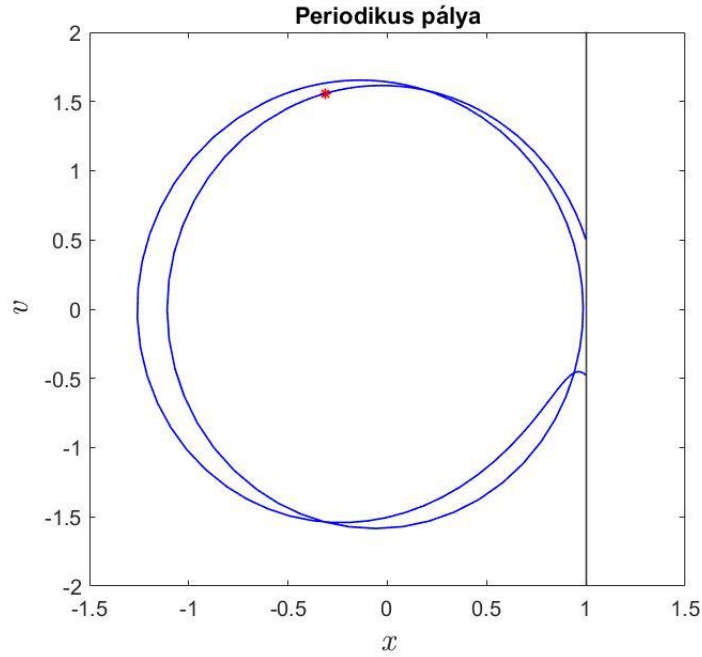
Példa ilyen periodikus pályákra (*-al jelölve a pálya kezdetét):



8. ábra: (1,1) periodikus pálya ($\mathbf{x}_0 = [0.7456, -0.1073, 0]^T, \zeta = 0.1250, f = 1, \lambda = 0.5$)



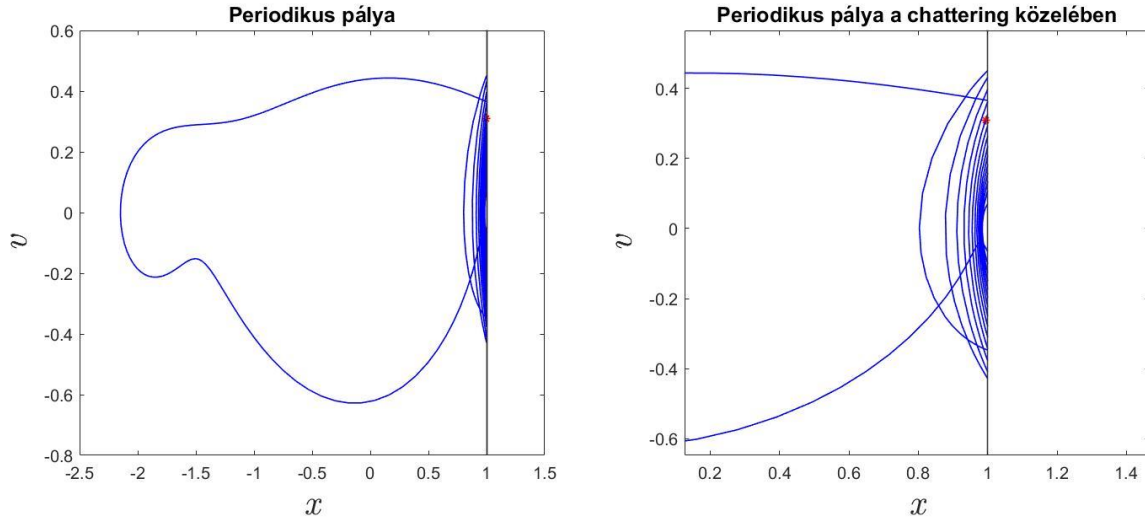
9. ábra: (1,3) periodikus pálya ($\mathbf{x}_0 = [0.8768, 1.3837, 0]^T, \zeta = 0.1250, f = 2, \lambda = 0.5$)



10. ábra: (2,1) periodikus pálya ($\mathbf{x}_0 = [-0.3141, 1.5581, 0]^T$, $\zeta = 1.5$, $f = 5$, $\lambda = 1.5$)

Az utolsó példán egy olyan pálya látható, ahol grazing közelében vagyunk, és emiatt [2] található egy ilyen különleges tulajdonságú pálya, ahol nem ugyanannyi az ütközés száma, mint a periódus hosszának a száma, ugyanis ennél a rendszernél a (n, n) típusú periodikus pályák a gyakoribbak. Példának okáért ennél a konkrét pályánál is megszűnik ez a tulajdonság ha a paramétereken csak kicsit változtatunk is (nagyon szűk tartományban marad ilyen tulajdonságú a pálya), ugyanis a grazing közelében nagy a paraméter érzékenysége a rendszernek.

Ennél a fajta pálya keresésnél előfordulhat nagy f és kis λ értékre az ún. chattering jelenség, amely végtelen számú ütközést jelentene véges idő alatt (eddig az ütközés szám limitálás miatt ilyen nem fordulhatott elő), vagyis a test feltapadna a falra. Ez itt ebben a modellben nincsen kezelve, de egy új vektormező, illetve kapcsolófelület bevezetésével megoldható lenne ez a probléma. Chattering esetében a koncentrikus körök az $(1,0)$ pont köré gyűlnek és ebben a pontban lenne vége az ütközési sorozatnak. Példa a chattering jelenség közelében lévő periodikus pályáról:



11. ábra: (1,15) periodikus pálya a chattering közelében ($\mathbf{x}_0 = [0.9936, 0.3086, 0]^T$, $\zeta = 0.125$, $f = 2$, $\lambda = 0.2$)

4.1.5. Grazing bifurkáció keresése

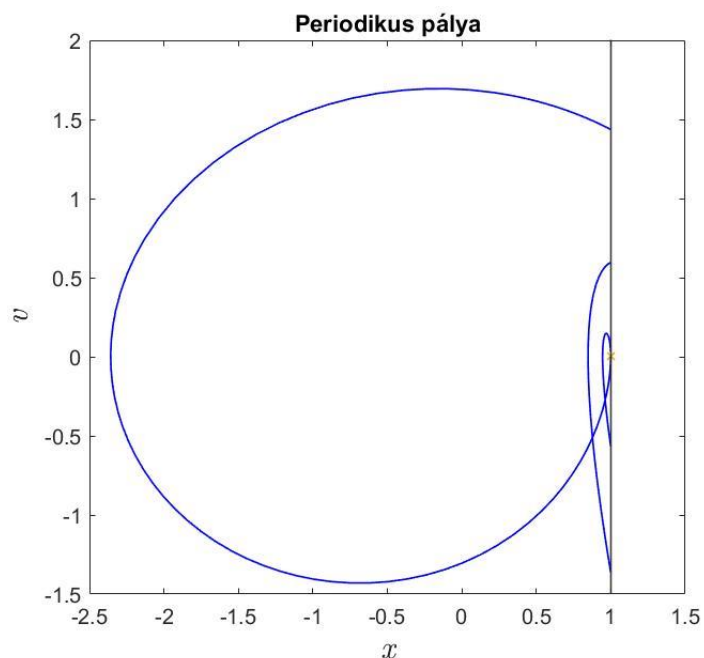
Ha egy periodikus pálya közel van egy grazing bifurkációhoz, akkor 3.4. alapján eljárva meghatározható az a paraméter, ahol fellép a bifurkáció (47) segítségével $\mathbf{x}_0^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ p \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0^*) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{vég}}(p) - \mathbf{x}_0 \\ h(\mathbf{x}_{\text{közeli}}(p)) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (52)$$

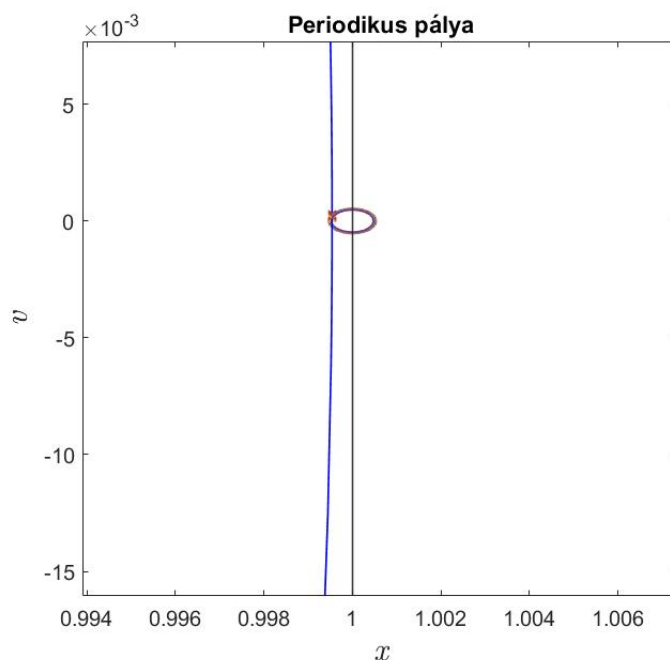
illetve $\mathbf{R}_T$ kibővítésével, megoldható Newton-Rhapon módszerrel az előző egyenletrendszer.

$$\mathbf{R}_{T,\text{új}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

A 3.4.1.-ben leírt $\mathbf{x}_{\text{közeli}}$ megtalálásának folyamatát (x-el jelölve az ábrán) szemléltetik a következő ábrák grazing bifurkáció közelében lévő periodikus pályáknál, 1. eset, amikor pálya nem éri el a kapcsolófelületet:



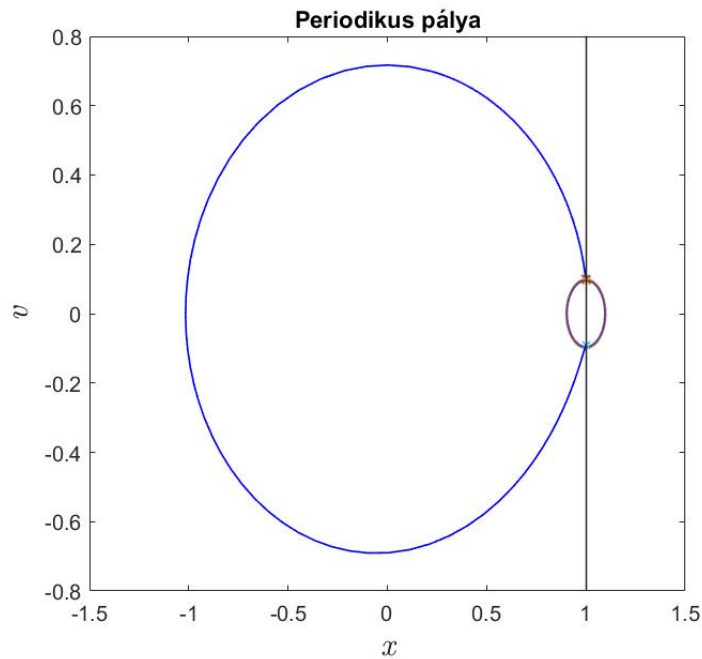
12. ábra: (1,2) periodikus pálya grazing közelében ($\mathbf{x}_0 = [0.2094, 1.67031, 0]^T, \zeta = 1.5, f = 5, \lambda = 0.79$)



13. ábra: $\mathbf{x}_{\text{közeli}}$ alakulása, ahogy közeledik a pálya a kapcsolófelülethez (az előző ábra nagyítása)

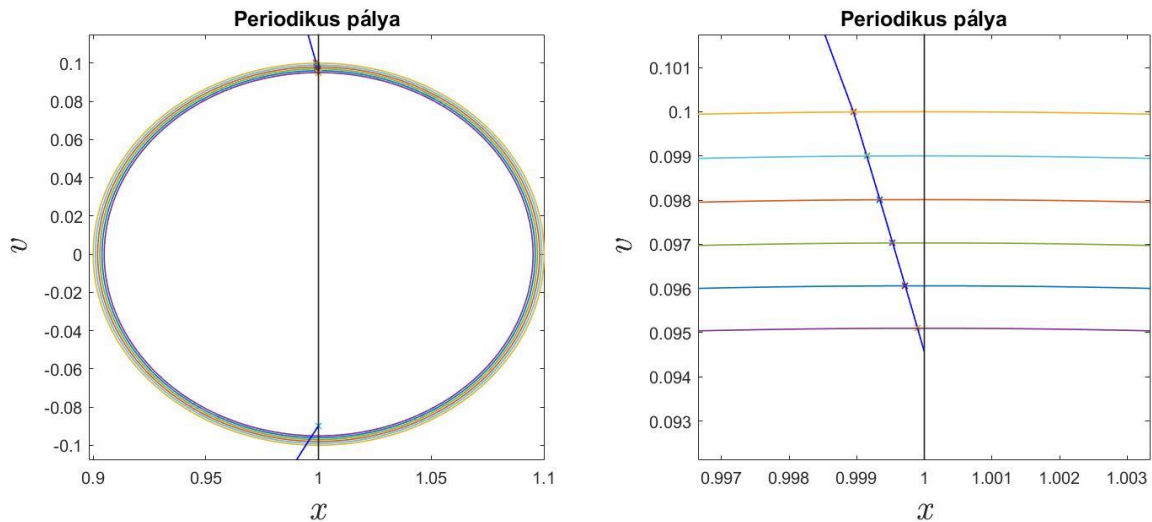
Látszik, hogy igen nagy pontossággal megtalálja a 3.4.1.-ben leírt folyamat $\mathbf{x}_{\text{közeli}}$ -t.

2. eset, amikor eléri a pálya a kapcsolófelületet (ebben a konkrét példában $\mathbf{x}_{\text{közeli}} = \mathbf{x}_{\text{pontos}}$):



14. ábra: $(1,1)$ periodikus pálya grazing közelében ($\mathbf{x}_0 = [0.3477, 0.6728, 0]^T$, $\zeta = 0.95$, $f = 1.45$, $\lambda = 0.71$)

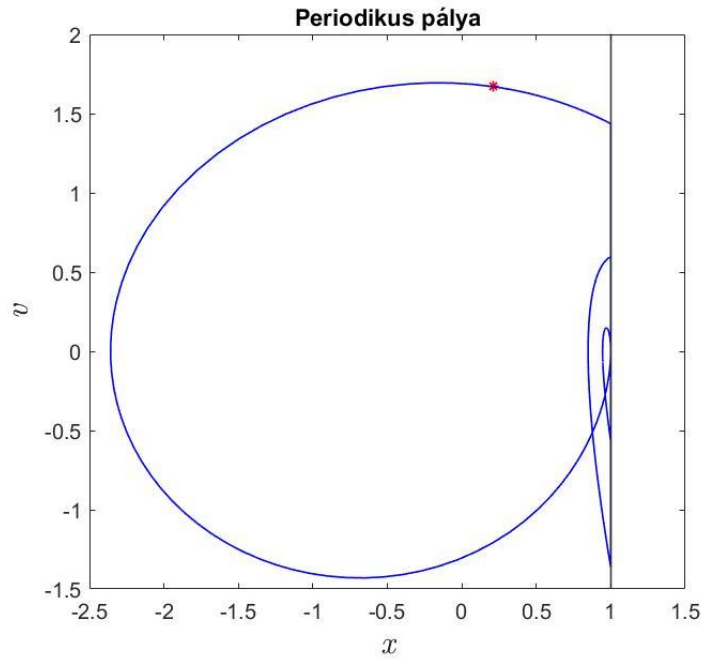
Belenagyítva látszódik, hogy $\mathbf{x}_{\text{közeli}} = \mathbf{x}_{\text{ki}}$:



15. ábra: $\mathbf{x}_{\text{közeli}}$ alakulása, ahogy közeledik a pálya a kapcsolófelülethez ($\mathbf{x}_{\text{közeli}} = [1, -0.0898, 1.0862]^T$ lett)

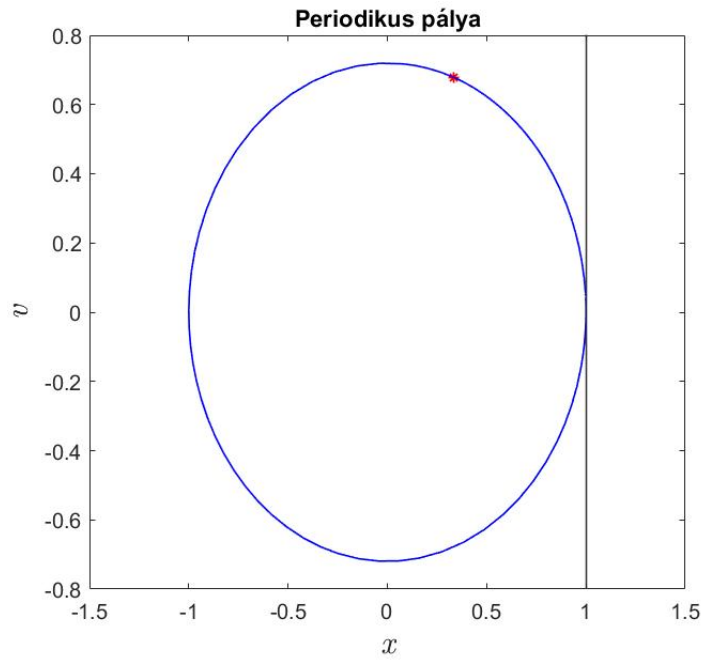
Miután meg van $\mathbf{x}_{\text{közeli}}$, a kritikus pálya keresésénél felszabadítjuk a gerjesztési frekvencia paraméterét és találunk egy pontos grazing eseményt tartalmazó pályát erre a λ -ra. 1. esetben

így fog kinézni a példában bemutatott pályához közeli periodikus pálya, ahol grazing bifurkáció fellép:



16. ábra: (1,3) periodikus pálya grazing bifurkációval ($\mathbf{x}_0 = [0.2099, 1.6703, 0]^T$, $\zeta = 1.5$, $f = 5$, $\lambda = 0.7897$)

A 2. eset példájában pedig a következő lesz (szintén λ a felszabadított paraméter):



17. ábra: (1,1) periodikus pálya grazing bifurkációval ($\mathbf{x}_0 = [0.3323, 0.6789, 0]^T$, $\zeta = 0.95$, $f = 1.45$, $\lambda = 0.7198$)

4.1.6. Paraméterben való követése a Grazing bifurkációnak

Minden adott, hogy a 3.5. alapján a következő egyenletrendszer felállítható legyen és meg is oldható:

$$\mathbf{x}_i^{**} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^* \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ p \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_{i+1}^{**}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{vég},i+1}(p, p_2) - \mathbf{x}_{0,i+1} \\ h(\mathbf{x}_{\text{közeli},i+1}(p, p_2)) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

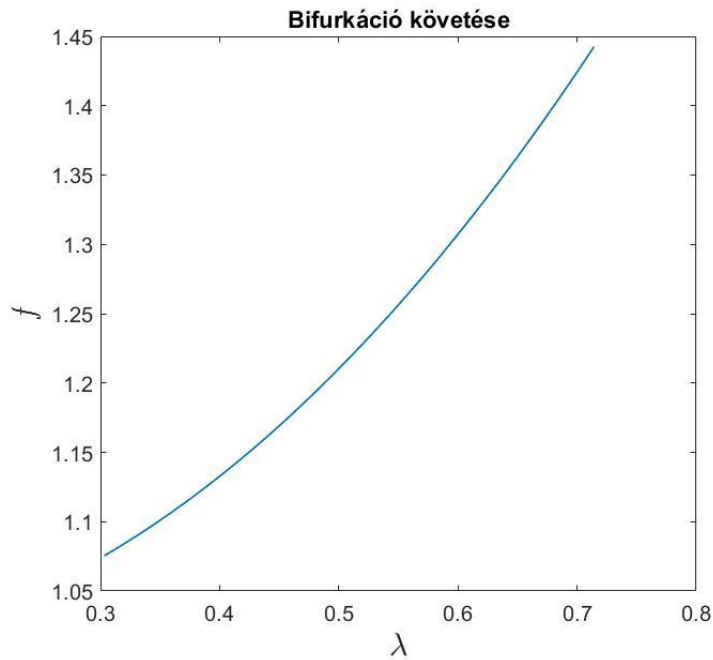
$$(\mathbf{x}_{i+1}^{**} - \mathbf{x}_i^{**}) \cdot \mathbf{v} - \Delta s = 0,$$

ahol, $\mathbf{v}$ -t a prediktor lépés határozza meg:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0^*} \mathbf{v}_{\mathbf{x}_0^*} + \mathbf{J}_{p_2} v_{p_2} = \mathbf{0} \quad (55)$$

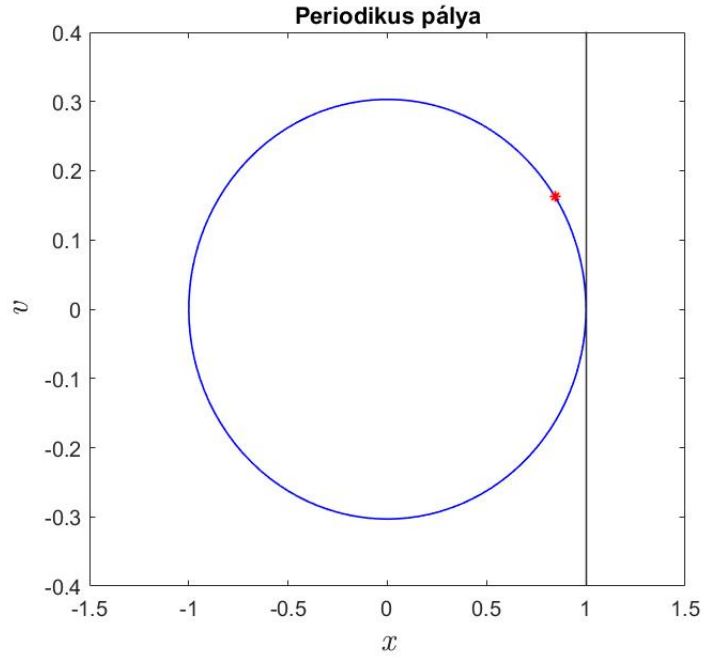
$$\|\mathbf{v}_{\mathbf{x}_0^*}\| + |v_{p_2}| = 1.$$

A legutóbbi ábrán látható grazinget tartalmazó periodikus pálya követése f illetve λ -ban (azért ez a két választott paraméter, mert ezt a gerjesztés határozza meg):



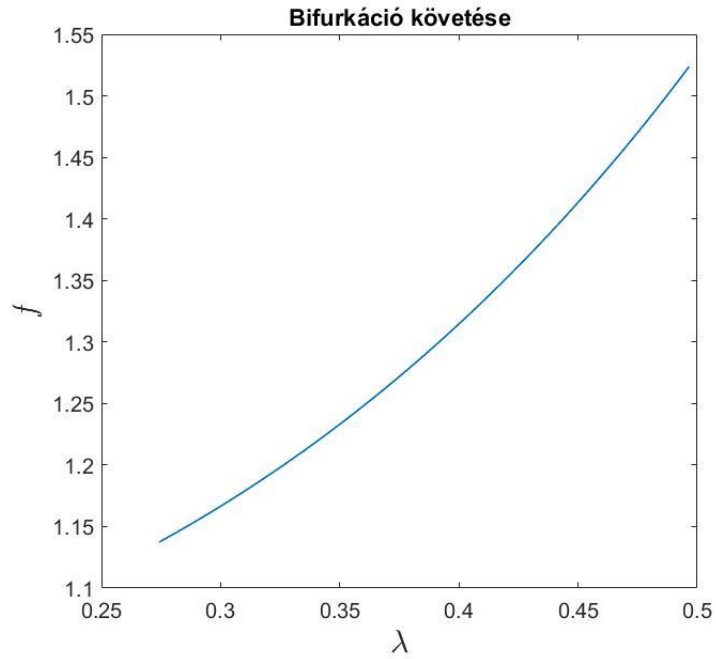
18. ábra: (1,1) periodikus pálya grazing bifurkációval ($\mathbf{x}_0 = [0.3323, 0.6789, 0]^T$, $\zeta = 0.95$, $f = 1.45$, $\lambda = 0.7198$) λ -ban és f -ben való követése

A legelső pontban a periodikus pálya következő képpen fog kinézni, ahonnan már kisebb λ és f párosítása mellett nincsen grazing bifurkációt tartalmazó periodikus pálya ezen az ágon:



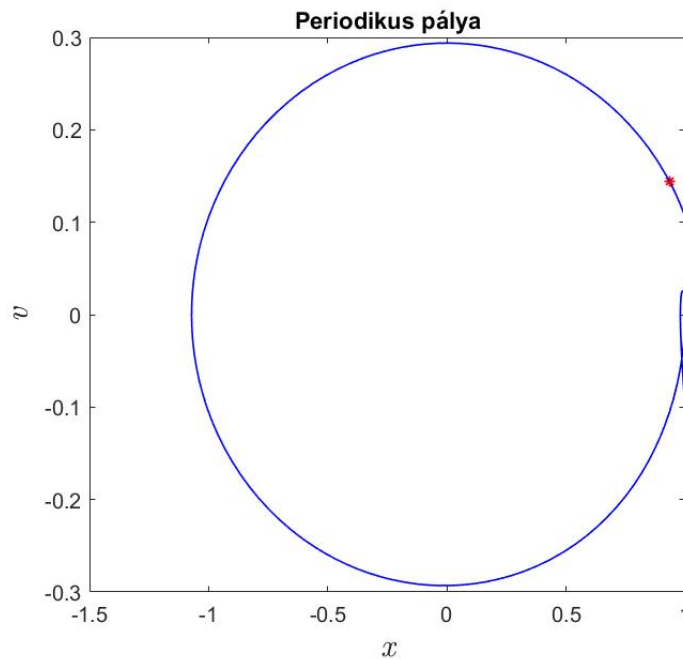
19. ábra: (1,1) periodikus pálya grazing bifurkációval ($\mathbf{x}_0 = [0.8445, 0.1624, 0]^T$, $\zeta = 0.95$, $f = 1.0753$, $\lambda = 0.3031$)

Amikor f -ben keressük meg a grazinget és λ -ban követjük azt (eddig pont fordítva volt), ugyanezen $\zeta = 0.95$ érték mellett, egy másik grazinget tartalmazó ágot is megkapunk, ami az előzővel egyenértékű megoldás csak topológiájában tér el ugyanis itt 2 ütközés fog bekövetkezni, míg eddig 1 ütközés történt. Szakirodalmakban [2] sok olyan példát lehet látni erre a jelenségre, ahol egy grazing eseményből több ág is kiindul egyszerre. Példa a másik ágra a következő ábrán látható:



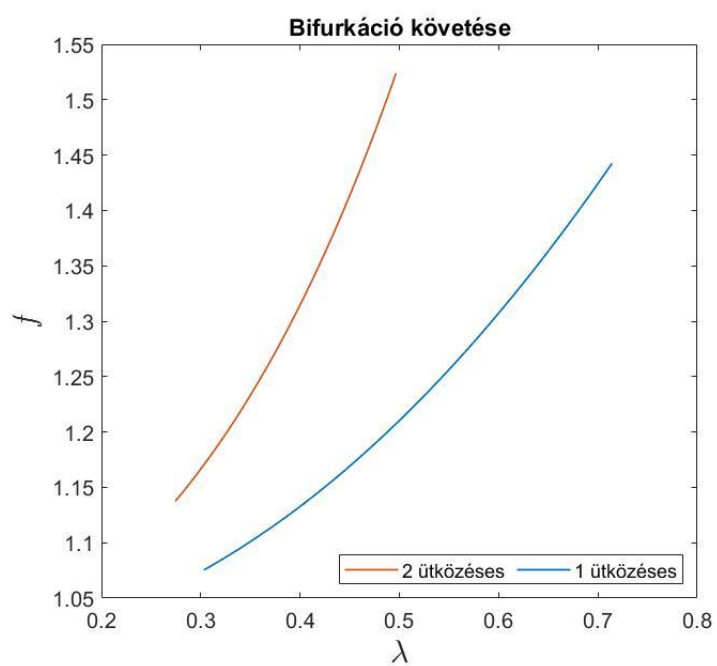
20. ábra: (1,2) periodikus pálya grazing bifurkációval ($\mathbf{x}_0 = [0.7847, 0.4970, 0]^T$, $\zeta = 0.95$, $f = 1.5328$, $\lambda = 0.5$) f -ben és λ -ban való követése

Ezen ág legalsó pontjához tartozó periodikus pálya a következő ábrán látható, ami jól be is mutatja, hogy miért van vége ennek az ágnak, ugyanis egy ponttá zsugorodik a hurok és így eltűnik a grazing bifurkáció, megszűnik a 2. ütközés:



21. ábra: (1,2) periodikus pálya grazing bifurkációval ($\mathbf{x}_0 = [0.9335, 0.1442, 0]^T$, $\zeta = 0.95$, $f = 1.1374$, $\lambda = 0.2742$)

Együtt ábrázolva a két ágat:

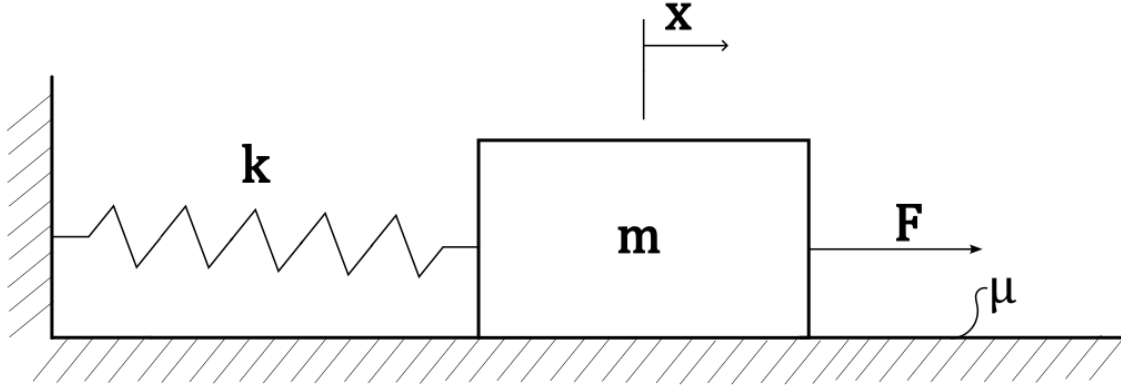


22. ábra: (1,2) és (1,1) grazing bifurkációval rendelkező pályák követése

4.2. A súrlódásos oszcillátor modellje

4.2.1. A mozgást leíró egyenletek

A vizsgált modell a következő ábrán látható:



23. ábra: A súrlódásos oszcillátor sematikus rajza

(38)-hoz hasonlóan a mozgás egyenlete:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t) - mg\mu\text{sign}(\dot{x}(t)), \quad (56)$$

ahol, μ a súrlódási együttható g a nehézségi gyorsulás, a többi jelölés a (38)-ban (ütközéses oszcillátornál) szereplő jelölésekkel megegyezik

Bevezetve a dimenziótlan időt: $\frac{1}{\omega_n} \tilde{t} = t$, és $f = \frac{A}{\omega_n^2 m}$, $\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}$ illetve a $F_s = \frac{\mu g}{\omega_n^2}$ mennyiségeket,

hasonlóan (39)-hez, (56) így fog kinézni a $\sim$ -k elhagyása után:

$$x''(t) + x(t) = f \cos(\lambda t) - F_s \text{sign}(x'(t)). \quad (57)$$

4.2.2. A szakaszosan sima rendszert leíró egyenletek, a súrlódás modellezése

Cauchy átírással, illetve autómmá téve (57)-t, a következő módon: $x_1(t) = x(t), x_2(t) =$

$x'(t), x_3(t) = \lambda t, \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$. (57)-t 2 vektormezővé bontva:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ f \cos(x_3(t)) - x_1(t) - F_s \\ \lambda \end{bmatrix}, \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ f \cos(x_3(t)) - x_1(t) + F_s \\ \lambda \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (58)$$

ahol $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$ tartozik az $x_2(t) > 0$ és az $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$ az $x_2(t) < 0$ -hoz

Illetve mivel a kettő közötti kapcsolófelület egy szakaszán egymás felé mutat a két vektormező, ott ahol $|f \cos(x_3(t)) - x_1(t)| \leq F_s$, ezért egy harmadik, köztes vektormezőt is definiálni kell

a sliding bifurkáció miatt (aminek a fizikai jelentése a letapadás), $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$. Tehát

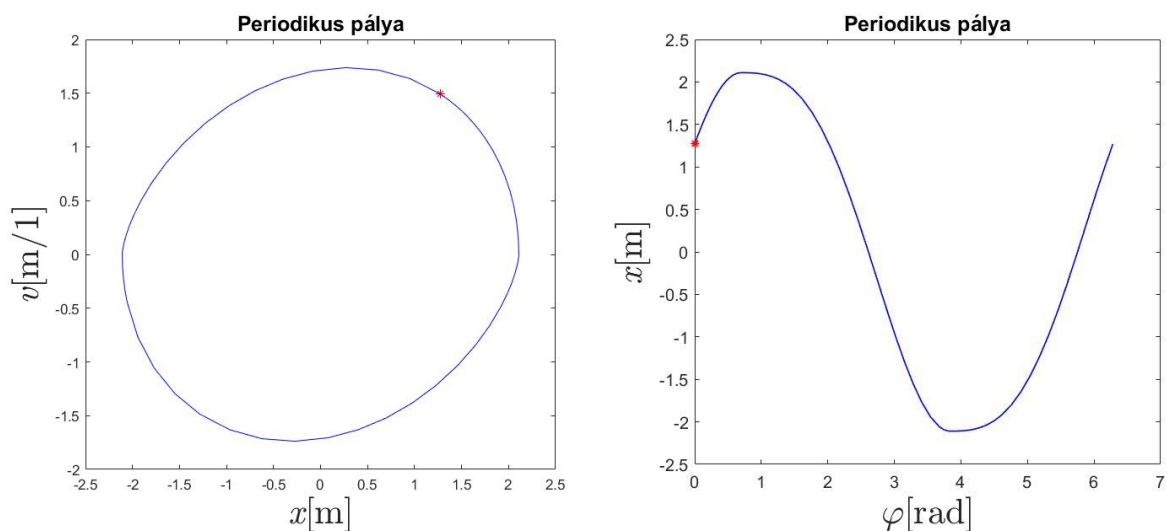
összesen 2 mód lesz jelen, amelyek között 1 kapcsolófelület fogja biztosítani a váltást, illetve a sliding bifurkációhoz is fog tartozni egy kapcsolófelület (7) alapján, valamint egy vektormező. Formálisan a 2 mód között váltó kapcsolófelület: $h(x(t)) = \dot{x}(t)$, dimenziótlán idővel és $\mathbf{x}(t)$ -vel kifejezve:

$$h(\mathbf{x}(t)) = x_2(t). \quad (59)$$

Ehhez tartozó lineáris leképezés mátrixa: $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ugyanis minden állapotváltozó önmagába lesz leképezve.

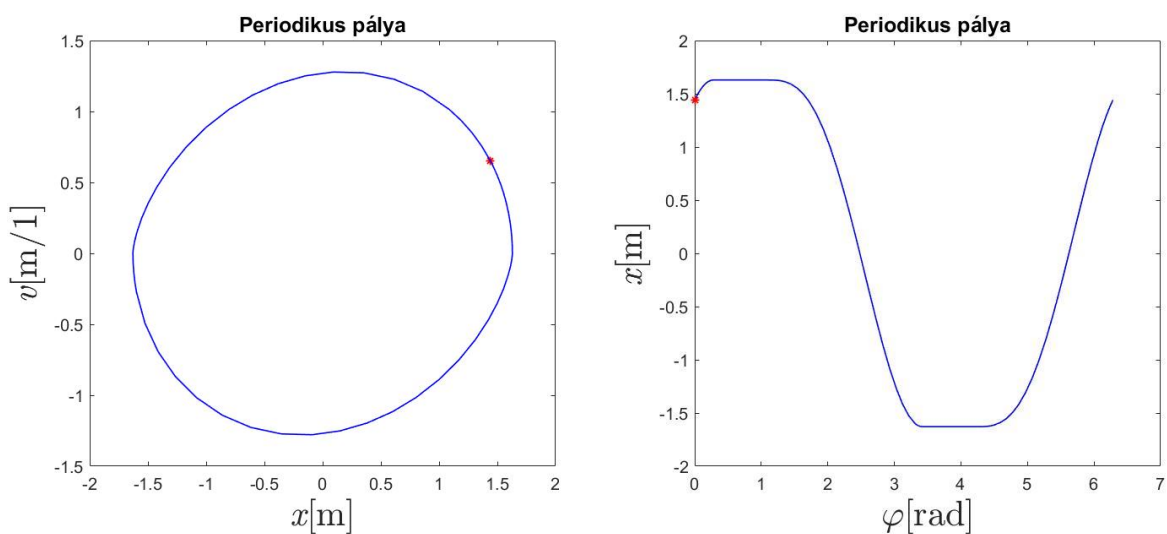
4.2.3. A belövéses módszer bemutatása adott n gerjesztési periódus hosszú pályákon

Mivel nem a módváltások száma van rögzítve a periodikus pályák keresése során, ezért szükséges a (50)-el megegyező $h_T(\mathbf{x}(t))$ és az $\mathbf{R}_T$ bevezetése, amely következtében a peremérték feladat (16)-al fog megegyezni (a végállapot módjának is meg kell, hogy egyezzen a kezdeti állapot módjával, de itt ez automatikusan teljesül, mivel az állapotváltozók vektora egyértelműen meghatározza a módot). A gerjesztési periódus továbbra is $T = 2\pi$, mint 4.1.-ben. (n, m) jelölje szintén a 4.1.-hez hasonlóan az n periódusú, m -szer módot váltó megoldást. Példák periodikus pályákra a következő ábrákon láthatóak ($v = x_2(t)$, $x = x_1(t)$ és $\varphi = x_3(t)$):



24. ábra: (1,2) periodikus pálya ($\mathbf{x}_0 = [1.2707, 1.4936, 0]^T$, $F_s = 0.9810$, $f = 1.4$, $\lambda = 0.7$)

Az utóbbi példán látszódik, hogy nem tapad le a tömeg, amelyet a kellően nagy frekvencia és amplitúdó biztosít.



25. ábra: (1,2) periodikus pálya sliding bifurkációval ($\mathbf{x}_0 = [1.4413, 0.6499, 0]^T$, $F_s = 0.9810$, $f = 1.4$, $\lambda = 0.5$)

Ezen az ábrán pedig jól látható a letapadás jelensége, amelyet az alacsony gerjesztési frekvencia idézett elő, ugyanis a 24. ábrán látott pályához képest minden paraméter ugyanaz maradt csak a λ csökkent.

4.2.4. Pszeudo-ív hossz módszer bemutatása adott nT periódus idejű pályákon

4.1.3.-a megegyező módon a következők kellene a módszerhez:

$$\mathbf{x}'_{új}(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ \zeta'(t) \\ f'(t) \\ \lambda'(t) \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\begin{bmatrix} x_2(t) \\ f \cos(x_3(t)) - x_1(t) - F_s \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_{0,új}))$$

$$\begin{bmatrix} x_2(t) \\ f \cos(x_3(t)) - x_1(t) + F_s \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_{0,új}))$$

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_{0,új})) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{2,1}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_{0,új}))}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -f \sin(x_3(t)) & \pm 1 & \cos(x_3(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{új} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ahol: $\pm$ -nál a+ az $\mathbf{f}_2$ -re vonatkozik, a - előjel az $\mathbf{f}_1$ -re

(60) kibővített rendszerrel 3.3.-ban leírt pszeudo-ív hossz módszerrel alkalmazható:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{v}_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{J}_p v_p = \mathbf{0} \quad (61)$$

$$\|\mathbf{v}_{\mathbf{x}_0}\| + |v_p| = 1,$$

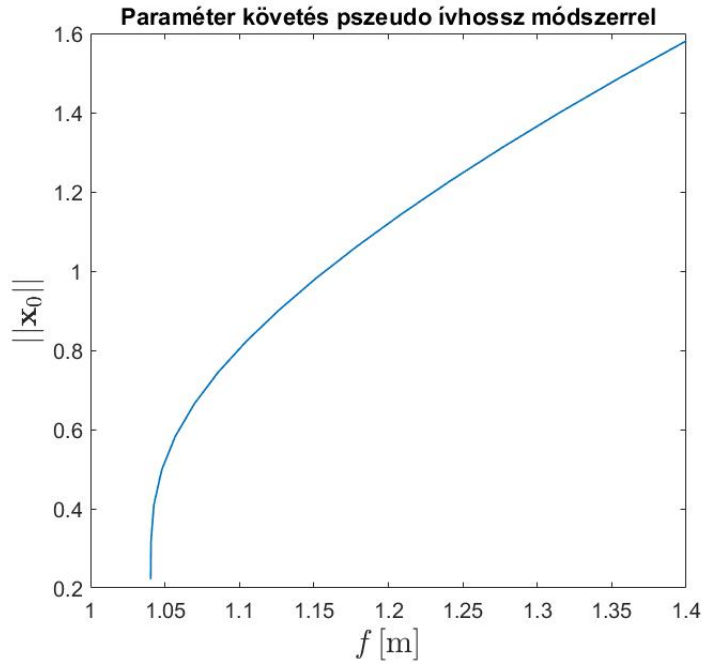
ami megadja $\mathbf{v}$ -t, majd

$$\mathbf{x}_0^* = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ p \end{bmatrix} \quad (62)$$

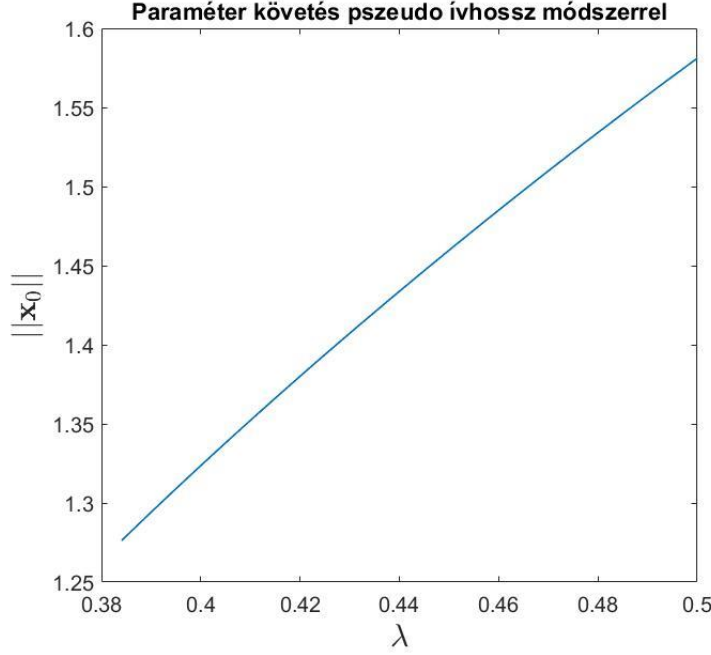
$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_{i+1}(p)) = \mathbf{x}_{\text{vég}}(nT, \mathbf{x}_{i+1}(p)) - \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{0},$$

$$(\mathbf{x}_{i+1}^* - \mathbf{x}_i^*) \cdot \mathbf{v} - \Delta s = 0,$$

aminek a megoldása megadja a következő periodikus pályát. Példák a megoldásokra az alábbi ábrákon láthatóak:



26. ábra: (1,2) periodikus pálya sliding bifurkációval ($\mathbf{x}_0 = [1.4413, 0.6499, 0]^T, F_s = 0.9810, f = 1.4, \lambda = 0.5$) lekövetése f -ben



27. ábra: (1,2) periodikus pálya sliding bifurkációval ($\mathbf{x}_0 = [1.4413, 0.6499, 0]^T$, $F_s = 0.9810$, $f = 1.4$, $\lambda = 0.5$) lekövetése λ -ban

4.2.5. Sliding bifurkáció határának megtalálása

3.6. alapján csak a $\frac{\partial h_{sl}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_{be}}$ -t kell kiszámolni (mert a többi már rendelkezésre áll), mivel $\partial h(\mathbf{x}_{be}) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, ezért:

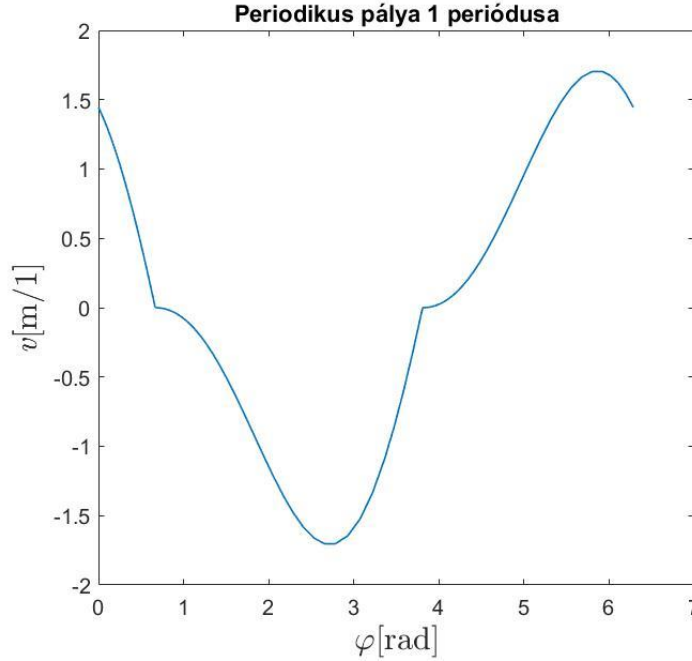
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_{sl}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_{be}} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial h(\mathbf{x}_{be}) \mathbf{f}_{be}(\mathbf{x}_{be}) + \partial h(\mathbf{x}_{be}) \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{x}_{be})}{\partial h(\mathbf{x}_{be}) \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{x}_{be}) - \partial h(\mathbf{x}_{be}) \mathbf{f}_{be}(\mathbf{x}_{be})} \right)}{\partial \mathbf{x}_{be}} & (63) \\
 &= \frac{1}{(\partial h(\mathbf{x}_{be}) \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{x}_{be}) - \partial h(\mathbf{x}_{be}) \mathbf{f}_{be}(\mathbf{x}_{be}))^2} \left(\left(\partial h(\mathbf{x}_{be}) \frac{\partial \mathbf{f}_{be}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_{be}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \partial h(\mathbf{x}_{be}) \frac{\partial \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_{be}} \right) (\partial h(\mathbf{x}_{be}) \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{x}_{be}) - \partial h(\mathbf{x}_{be}) \mathbf{f}_{be}(\mathbf{x}_{be})) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\partial h(\mathbf{x}_{be}) \frac{\partial \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_{be}} - \partial h(\mathbf{x}_{be}) \frac{\partial \mathbf{f}_{be}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_{be}} \right) (\partial h(\mathbf{x}_{be}) \mathbf{f}_{be}(\mathbf{x}_{be}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \partial h(\mathbf{x}_{be}) \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{x}_{be}) \right) \right),
 \end{aligned}$$

ahol, $\frac{\partial \mathbf{f}_{ki}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_{be}}$, illetve $\frac{\partial \mathbf{f}_{be}(\mathbf{x}_{be})}{\partial \mathbf{x}_{be}}$ (60)-ban leírt $\frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_j))}{\partial \mathbf{x}}$ vagy $\frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_j))}{\partial \mathbf{x}}$ -val egyezik meg $\mathbf{x}_{be}$ helyen, attól függően, hogy melyik módból melyik módba lépünk be.

Ez alapján már megoldható a 3.6.-ban leírt peremérték feladat:

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_0^*) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{vég}}(p) - \mathbf{x}_0 \\ |h_{\text{sl}}(\mathbf{x}_{\text{be}}(p))| - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (64)$$

példa sliding határán lévő periodikus pályára:



28. ábra: (1,2) periodikus pálya sliding bifurkáció határán ($\mathbf{x}_0 = [1.2918, 1.4447, 0]^T$, $F_s = 0.9810$, $f = 1.4$, $\lambda = 0.6866$)

Ez az ábra jól szemlélteti a sliding bifurkáció speciális alakját, ugyanis itt a $v = 0$ helyből „kilépő” görbe szép simán halad tovább 0 kezdeti meredekséggel (jobb oldali deriválttal). Ha nem lépne fel sliding bifurkáció nem 0 kezdeti meredekséggel haladna, ahogy a 24. ábrán is törések vannak a görbéken, illetve ha nem a határán lenne a sliding bifurkációnak a pálya, akkor nem pontszerű lenne a 2 görbe közti váltás, hanem megjelenne egy vízszintes szakasz is, ahogy a 25. ábrán is.

4.2.6. A sliding bifurkáció határának követése

Minden adott, hogy 3.7.-ben leírtak teljesüljenek és megoldható legyen az egyenletrendszer:

$$\mathbf{x}_0^{**} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ p \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\mathbf{x}_i^{**} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^* \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ p \\ p_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{x}_{i+1}^{**}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{vég},i+1}(p, p_2) - \mathbf{x}_{0,i+1} \\ |h_{\text{sl}}(\mathbf{x}_{\text{be}}(p, p_2))| - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

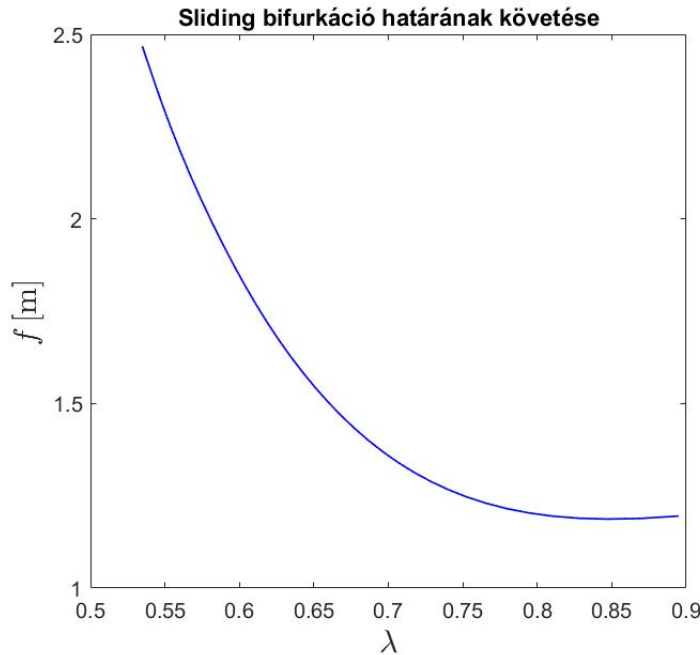
$$(\mathbf{x}_{i+1}^{**} - \mathbf{x}_i^{**}) \cdot \mathbf{v} - \Delta s = 0,$$

illetve a prediktor lépéshez adott a következő egyenletrendszer:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}_0^*} \mathbf{v}_{\mathbf{x}_0^*} + \mathbf{J}_{p_2} v_{p_2} = \mathbf{0} \quad (66)$$

$$\|\mathbf{v}_{\mathbf{x}_0^*}\| + |v_{p_2}| = 1,$$

így az (1,2) sliding határán lévő periodikus pályát $(\mathbf{x}_0 = [1.2918, 1.4447, 0]^T, F_s = 0.9810, f = 1.4, \lambda = 0.6866)$ lehet követni λ -ban és f -ben:



29. ábra: (1,2) sliding bifurkáció határán lévő periodikus pálya $(\mathbf{x}_0 = [1.2918, 1.4447, 0]^T, F_s = 0.9810, f = 1.4, \lambda = 0.6866)$ követése λ -ban és f -ben

5. Összegzés és jövőbeli kitekintés

Ahogy látható volt az algoritmus képes a grazing, illetve sliding bifurkációkat tartalmazó kritikus periodikus pályák megtalálására, illetve azokat képes 2 paraméterben követni. Ezen algoritmus felhasználásával akár az ütközéses oszcillátor és a surlódásos oszcillátor dinamikájának teljes feltérképezése megvalósítható. Illetve bármilyen általános szakaszosan sima rendszeren képes ezen bifurkációk megtalálására és követésére 2 paraméterben, mert az írt kód teljesen független a rendszertől és az algoritmus felépítésében is végig meg van tartva az általánosítás. A rendszer, mint bemeneti adat van jelen a számítások során. Jövőbeli tervként mindenképpen beépíteném a chattering jelenség kezelését, mint külön bemeneti kapcsolófelületet és a hozzátartozó vektormezőt, bár a kód jelen formájában is van lehetőség a chattering kezelésére is, de az egyszerűbb hibrid rendszer definiálás érdekében egy külön bemeneti rész szolgálhatna erre.

Irodalom:

- [1] Grizzle, J. W., Choi, J. H., Hammouri, H., & Morris, B. (2007). On observer-based feedback stabilization of periodic orbits in bipedal locomotion. *Proc. Methods and Models in Automation and Robotics*, 27-30.
- [2] M Di Bernardo. (2008). *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*. Springer.
- [3] Zana, R., Bodor, B., Bencsik, L., & Zelei, A. (2018). A Tutorial for the Analysis of the Piecewise-Smooth Dynamics of a Constrained Multibody Model of Vertical Hopping. *Mathematical and Computational Applications*, 23(4), 74. <https://doi.org/10.3390/mca23040074>
- [4] Thota, P., & Dankowicz, H. (2008). TC-HAT ($\widehat{TC}$): A Novel Toolbox for the Continuation of Periodic Trajectories in Hybrid Dynamical Systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 7(4), 1283–1322. <https://doi.org/10.1137/070703028>
- [5] Bishop, S. R. (1994). Impact oscillators. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences*, 347(1683), 347–351. <https://doi.org/10.1098/rsta.1994.0047>
- [6] Brogliato, B. (2011). *Impacts in mechanical systems: analysis and modelling*. Springer.
- [7] Alzate, R., di Bernardo, M., Montanaro, U., & Santini, S. (2007). Experimental and numerical verification of bifurcations and chaos in cam-follower impacting systems. *Nonlinear Dynamics*, 50(3), 409–429. <https://doi.org/10.1007/s11071-006-9188-8>
- [8] Błazejczyk, B., Kapitaniak, T., Wojewoda, J., & Barron, R. (1994). Experimental Observation Of Intermittent Chaos In A Mechanical System With Impacts. *Journal of Sound and Vibration*, 178(2), 272–275. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1484>
- [9] Reissig, R. (1967). A. A. Andronov, A. A. Vitt, and S. E. Khaikin, Theory of Oscillators. (International Series of Monographs in Physics, Vol. 4) XXXII + 815 S. m. 598 Fig. Oxford/London/Edinburgh/New York/Toronto/Paris/Frankfurt 1966. Pergamon Press. Preis geb. £ 10 net. *ZAMM - Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 47(7), 480–481. <https://doi.org/10.1002/zamm.19670470720>
- [10] Pratt, T. K., & Williams, R. (1981). Non-linear analysis of stick/slip motion. *Journal of Sound and Vibration*, 74(4), 531–542. [https://doi.org/10.1016/0022-460x\(81\)90417-x](https://doi.org/10.1016/0022-460x(81)90417-x)

- [11] Popp, K., Hinrichs, N., & Oestreich, M. (1995). Dynamical behaviour of a friction oscillator with simultaneous self and external excitation. *Sadhana*, 20(2-4), 627–654.
<https://doi.org/10.1007/bf02823210>