

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
DEPARTMENT OF APPLIED MECHANICS



HAVASI KRISTÓF
TDK dolgozat

Összetett hiperelasztikus anyagmodell fejlesztése és implementálása
Abaqus végelelemes szoftverben saját mérések segítségével

Supervisor:

Dr. Kossa Attila
egyetemi docens

BUDAPEST, 2022

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Elméleti összefoglaló	4
2.1. Ogden-féle modell	8
2.2. Arruda-Boyce-féle modell	8
2.3. Polinom modell	9
3. Új modell javaslat	10
4. Feszültség megoldások	11
4.1. Egytengelyű eset	11
4.2. Kéttengelyű eset	13
4.3. Keresztirányban gátolt egytengelyű eset	15
4.4. Feszültség megoldás az Ogden-féle modellre	16
4.5. Feszültség megoldás az Arruda-Boyce-féle modellre	17
4.6. Feszültség megoldás a Polinom modellre	18
4.7. A feszültség megoldások alkalmazása az újonnan bevezetett modellre	19
5. Paraméter illesztés	20
5.1. Illesztés a Treloar adatsorra	21
5.1.1. Ogden-féle modell	23
5.1.2. Arruda-Boyce-féle modell	24
5.1.3. Polinom modell	26
5.1.4. Havasi-Kossa-féle modell	27
5.2. Mérések	29
5.3. Illesztés saját mérési eredményekre	34
5.3.1. Ogden-féle modell	34
5.3.2. Arruda-Boyce-féle modell	35
5.3.3. Polinom modell	36
5.3.4. Havasi-Kossa-féle modell	37

6. UHYPER kód	38
7. VEM szimulációk	41
7.1. Egy elemes ellenőrzés	41
7.2. Kéttengelyű eset	43
8. Összefoglaló	46
9. Köszönetnyilvánítás	48
Irodalomjegyzék	50

1. Bevezetés

Manapság egyre nagyobb teret nyernek maguknak a polimerek a mindennapi életben, és a tervezésben is, köztük a hőre keményedő, gumyszerű anyagok is. Ennek okán ezek mechanikai modellezése is igen fontos kérdés szerkezeti használatuk tervezéséhez, ám ehhez anyagmodellre van szükség. A gumyszerű anyagokat, illetve hasonló társaikét, melyek nagy alakváltozásokat képesek elszenvedni úgy, hogy nem, vagy csak minimális mértékben tapasztalható rajtuk maradó (képlékeny) hatás hiperelasztikus anyagmodellekkel szokás leírni. Néhány példa ilyen anyagokra a 1.1 ábrán látható. Ezen modellek lényeges tulajdonsága, hogy önmagukban csak és kizárólag tisztán rugalmas viselkedést modelleznek, így tetszőleges nagy nyúlásra is maradó alakváltozástól mentes viselkedést írnak le. Továbbá fontos azt is megjegyezni, hogy más anyagmodellek részeként képesek összetett viselkedések modellezésére is, így elterjedtek a viszko-hiperelasztikus anyagmodellek is példának okán, ahol az anyag alakváltozási sebességtől függő tulajdonságát is figyelembe vesszük.. Ezen felül gyakori tulajdonsága a hiperelasztikus anyagoknak a kis mértékű, vagy határesetben akár nem létező térfogati összenyomhatóság is.



(a) Fitness gumi szalag [4].

(b) Autóipari elasztomer alkatrészek [11].

1.1. ábra. Hiperelasztikusan modellezhető szerkezetek.

Mindezek mellett a fő kérdés mind a mai napig a hiperelasztikus anyagok modellezésének módszere. Számos matematikai modell látott már napvilágot, más és más matematikai alapokon nyugvó felépítéssel, gyakran csak tisztán fenomenológiai alapokon nyugvó, megfigyelt tulajdonságok alapján felírt modellek is, melyek közül sok jól illeszthető a gyakorlati példákra is. Ugyanakkor nem létezik egy általános, optimális modell, mellyel bármely ilyen típusú anyagot tetszőleges pontossággal lehetne modellezni.

Ennek okán merült fel az igény, valamint ötlet egy új hiperelasztikus anyagmodell felépítésére, amely elődeihez képest pontosabb leírást adhat a valóságos anyagokra, míg azok kedvező tulajdonságait is megőrzi. Ebből kifolyólag egy relatív kevés paramétert tartalmazó, és a való-

ságot is kielégítően leíró modell kigondolása kapcsán született meg ezen dolgozat. Fontosnak tartom, hogy ezen kutatási területen minél kifinomultabb modellek, és modellezési metódusok szülessenek, hiszen ezekkel képes igazán fejlődni a mechanikai anyagmodellezés témaköre, mely eszenciális része a kontinuumok világának mechanikai oldalról tekintve.

Az új anyagmodell természetesen akkor ideális, ha pontosabban, és akár kevesebb paraméter használatával képes elérni egy azonos, vagy jobb leírási szintet, mint társai. Ennek okán néhány további anyagmodell használata is ajánlott, melyekkel már összevethető az újonnan javasolt, illetve az alkalmazhatóság szempontjából érdemes numerikus számításokat is végezni vele. Ehhez egy végeselemes szoftver használata célszerű, ugyanakkor ezen szoftverben egy felhasználó által implementált anyagmodellre is szükség van, hiszen az új anyagot leíró összfüggést is be kell építeni a programba.

Ezen okokból kifolyólag először egy illesztési feladatot kell végrehajtani, ahol objektíven értékelni lehet az új modell viselkedését az előzőekhez képest, majd egy felhasználói kóddal implementálhatóvá tenni egy végeselemes szoftverbe, így abban numerikus kísérletet lehet végrehajtani, amivel igazolhatjuk előzetes megfontolásainkat és számításainkat.

A mai napig is a leggyakrabban alkalmazott illesztés a Treloar adatokkal történik [20], melyek már igen régóta jelen vannak a szakirodalomban, és jól bevett szokás ezeket alapul venni, ugyanakkor egy saját esetet kívánok jelen dolgozatban vizsgálni, mely keretein belül egy saját mérési sorozat eredményeit is feldolgozva kívánom implementálni a modellt. Ezzel egy második lehetőséget is kapunk a modellek összehasonlítására, míg egy teljes kép alakulhat ki az olvasóban is egy hiperelasztikus anyagmodell felépítésétől kezdve az alkalmazásig, ezzel erősítve ezen terület általános megértését és transzparensé tételét.

Mindezekre való tekintettel elengedhetetlen egy rövid áttekintése a releváns területnek, mely a kontinuummechanika lényege a hiperelasztikus leírások alkalmazására, illetve néhány választott modell bemutatása a korábban már általános népszerűségnek örvendőek közül, melyek gyakorlatban is frekvenciáltan használtak, például az ABAQUS végeselemes szoftver is alkalmaz.

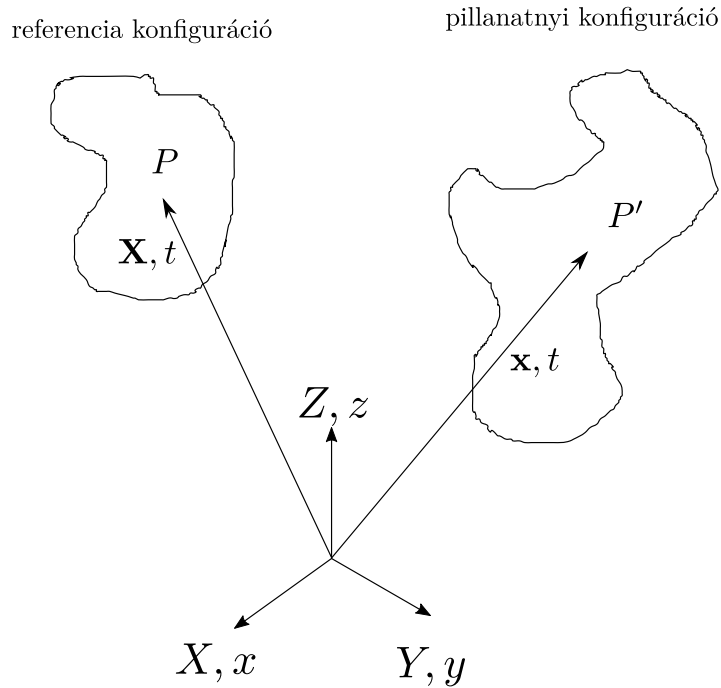
2. Elméleti összefoglaló

A hiperelasztikus anyagmodellezés bevezetéséhez szükséges áttekintenünk a kontinuummechanika témakörét is, hiszen ez foglalja magába a számunkra érdekes anyagcsalád modellezési és leírási módszereit és törvényeit [9].

A kontinuummechanika egy igen széles köre az anyagok és viselkedésük leírásának, eszenciája, hogy az anyagot egy folytonos kontinuum közegként kezeli, így nem vesz figyelembe semminemű diszkretizálást, folytonossági hibát, vagy pedig inhomogenitást. Míg az általános szilárdságtan csak kis alakváltozások leírásával foglalkozik, addig a kontinuummechanika véges, nagy

alakváltozások vizsgálatához is alkalmas, így nemlineáris feladatok is leírhatóak ezzel a fajta megközelítéssel.

Egy fontos eleme a konfiguráció leírásának a bázis választása, mely kontinuummechanika esetén igen érdekes, két koordináta-rendszer használata szokásos, egyben a kezdeti konfiguráció leírása (Lagrange-féle megközelítés), egyben pedig a pillanatnyi helyzet megadása (Euler-féle megközelítés) a fontos. A továbbiakban éljünk azzal a közelítéssel, hogy ezen két koordináta-rendszer, melyben a két konfigurációt tekintjük azonos állású Descartes-féle koordináta-rendszerek. Egy ilyen leírási módot szemléltet a 2.1 ábra. Ezen felül a különböző értelmezésben definiált mennyiségek megkülönböztetése érdekében az eredetiben használt mennyiségeket jelöljük nagybetűkkel, míg a pillanatnyiban értelmezetteket kicsivel. Ezzel egy kissé egyszerűsödik a matematikai leírása a kérdéses folyamatoknak.



2.1. ábra. Koordináta-rendszerek a kontinuummechanikai leírásban.

Talán a legfontosabb tulajdonság, mely jellemez egy kontinuumot a deformációs gradiens. Ezt az anyagi pontok mozgása definiálja, amit jellemzően χ leképezéssel jelölnek és a két konfiguráció közötti átjárást írja le. Ezt egy adott, véges nagyságú szakasz deformációjára alkalmazva egy Taylor sorfejtés elsőrendű tagjaként értelmezhetjük magát a deformációs gradiens tenzort:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \text{Grad}(\chi). \quad (2.1)$$

További tulajdonsága, hogy homogén alakváltozásokat tekintve nem csak differenciális, de véges nagyságú szakaszok leírását is lehetővé teszi ez a tenzormennyiség, ha azok időfüggő deformációjára vagyunk kíváncsiak.

Ezen mennyiség bevezetése után beszélhetünk a nyúlásról (fajlagos ívhossz), mely egy véges anyagi szakasz hosszváltozását adja meg. Ha az irányt, melyben érdekeltek vagyunk $\mathbf{N}$ -nel jelöljük (ahol $\mathbf{N}$ egységvektor), a nyúlás könnyen számítható:

$$\lambda_N(\mathbf{X}, t) = \sqrt{\mathbf{N}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{N}}. \quad (2.2)$$

A nyúlás értéke, mivel az új hosszat az eredetihez viszonyítja, deformáció nélküli esetben 1, az elméleti alsó határa pedig 0, hiszen ez azt jelentené, hogy egy véges hossz nulla hosszúságúra nyomnánk össze. Felső korlátról nem beszélhetünk, elméletben (tönkremenetelt nem feltételezve) tetszőleges mértékben megnyújthatjuk az anyagot.

A kontinuummechanikán belül ezen kívül számos deformációt leíró tenzormennyiség honosodott meg, melyek mind ugyanannyira alkalmasak az adott folyamat leírására, nincs közöttük optimális mennyiség. Soroljunk fel néhányat, melyek gyakran használatosak.

A jobboldali Cauchy-Green-féle deformációs tenzor:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}, \quad (2.3)$$

a Piola-féle deformációs tenzor:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T}, \quad (2.4)$$

a Cauchy-féle deformációs tenzor:

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}, \quad (2.5)$$

valamint a baloldali Cauchy-Green-féle deformációs tenzor:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T. \quad (2.6)$$

Ezen felül relatív nyúlásokról is beszélhetünk. Ezek alakváltozás nélküli értéke 0, és elméleti alsó határuk -1.

Két alakváltozási tenzor gyakran használatos ezen tudományterületen. Ezek a Green-Lagrange-féle alakváltozási tenzor:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (2.7)$$

illetve az Euler-Almansi-féle alakváltozási tenzor:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{c}). \quad (2.8)$$

Egy további fontos mennyiség a deformációs gradiens tenzor determinánsa, mely a térfogat hányadost adja meg, azaz definiálja a jelenlegi és kezdeti térfogatok arányát:

$$\det \mathbf{F} = J = \frac{dv}{dV}. \quad (2.9)$$

Ezen mennyiség mindig pozitív, hiszen csak pozitív térfogatot definiálunk, negatívát illetve 0 térfogatú szilárd testet nem.

Egydimenziós feladatoknál a valós (vagy logaritmikus) és a mérnöki alakváltozásokat az alábbi formulák segítségével adjuk meg:

$$\varepsilon = \ln \lambda, \quad \varepsilon^{\text{eng}} = \lambda - 1. \quad (2.10)$$

A logaritmikus alakváltozásnak létezik tenzoros, három dimenzióban használható változata is, ez a Hencky-féle tenzor, melyet referencia ($\mathbf{H}$) és pillanatnyi ($\mathbf{h}$) konfigurációban is definiálhatunk.

További fontos mennyiség számunkra a feszültség, hiszen az alakváltozás és a feszültség együttes viselkedése képes az anyagi modelleket felépíteni és leírni. Egydimenzióban itt is a valós (Cauchy-féle) és mérnöki feszültség használata terjedt el. Ezek szétválásának oka a nagy alakváltozások jelenléte, míg kis alakváltozásoknál a mérnöki és valós mennyiségek jó közelítéssel megegyeznek, addig nagy alakváltozásra jelentős viselkedésbeli különbséget mutatnak. A következő formában adhatóak meg:

$$P = \frac{F}{A_0}, \quad \sigma = \frac{F}{A}, \quad (2.11)$$

ahol A_0 és A a kezdeti illetve pillanatnyi keresztmetszet területe.

A három dimenzióban is alkalmazható tenzorális mennyiségek közül is több alkalmazható modellel létezik, egy alapvető a $\boldsymbol{\sigma}$ Cauchy-féle feszültség, de több is definiálható, például az első Piola-Kirchhoff-féle feszültség, a második Piola-Kirchhoff-féle feszültség, illetve a Kirchhoff-féle feszültség, ezek sorrendben a következők:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}, \quad \boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}. \quad (2.12)$$

Ezen mennyiségekből kiindulva már felépíthetők anyagmodellek is, hiszen a feszültségek és deformáció között definiálhatunk egy kapcsolatot teremtő mennyiséget, a alakváltozási energiasűrűséget, melyet jellemzően W -vel jelölnek, és egy skalár mennyiség. A hiperelasztikus anyagmodelleknél az első Piola-Kirchhoff-féle feszültségtenzor az alakváltozási energiasűrűség deformációs gradiens szerinti deriváltjával adható meg:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}. \quad (2.13)$$

Ezen energiasűrűség függvény definiálásával lehet egy anyagmodellt felépíteni, hiszen ez fogja összekötni az alakváltozásokat illetve és feszültségeket. Ezekből számos modell született az évek során [8], melyek közül ismételten nem került ki egyetlen felsőbbrendű modell sem, mindegyik valamely anyagcsoportra alkalmazható, és akár pontosabb lehet egy adott anyagra, mint egy összetettebb másik jelölt.

Nézzünk meg néhány gyakran használt modellt, melyeket az ABAQUS végeelemes szoftver is alkalmaz.

2.1. Ogden-féle modell

Az Ogden-féle modell egy fenomenológiai modelm mely a főnyúlásokra alapoz, a cikket 1972-ben publikálta R.W. Ogden [15]. Ezen modell valójában egy modell család, mert a modell-t N -ed rendű esetre definiálták, ez alapján a paramétereinek száma kétszerese a modell fokszámának. A modell matematikai alakja a következő:

$$W^{\text{OG}} = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3). \quad (2.14)$$

Az Ogden-féle modell egy gyakorlatban is gyakran alkalmazott hiperelasztikus modell, képes az adott anyagot elődeihez képest jól modellezni, illetve formájából adódóan egyszerű is az implementálása. További előnye, hogy a közvetlen mérhető nyúlásokat használja fel, nem pedig a deformációs gradiensből származó deformációs tenzormennyiségek skalárinvariánsait.

Az energiasűrűség függvény másodrendű esetben a következőképpen írható fel a négy paraméterével:

$$W^{\text{OG}} = \frac{2\mu_1}{\alpha_1^2} (\lambda_1^{\alpha_1} + \lambda_2^{\alpha_1} + \lambda_3^{\alpha_1} - 3) + \frac{2\mu_2}{\alpha_2^2} (\lambda_1^{\alpha_2} + \lambda_2^{\alpha_2} + \lambda_3^{\alpha_2} - 3). \quad (2.15)$$

2.2. Arruda-Boyce-féle modell

A következő modell egy újabb modell, 1993-ban publikálta a két szerző a konstitutív modellt [2], két paraméterrel rendelkezik, és tulajdonsága, hogy az inverz Langevin-függvényt tartalmazza. A Langevin-függvény a következő alakú:

$$\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}. \quad (2.16)$$

Ennek inverze zárt alakú formulával nem adható meg, emiatt egy szokásos közelítés az alábbi formula:

$$W^{A-B} = \mu N \left(\beta_{\text{chain}} \lambda_{\text{chain}} + \ln \frac{\beta_{\text{chain}}}{\sinh \beta_{\text{chain}}} \right). \quad (2.17)$$

Ezen egyenletben a két ismeretlen érték a két görög betűvel jelölt, polimerláncot jellemző mennyiségek. Definíciójuk a következő:

$$\lambda_{\text{chain}} = \sqrt{\frac{I_1}{3}}, \quad \beta_{\text{chain}} = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_{\text{chain}}}{\sqrt{N}} \right). \quad (2.18)$$

Ennek numerikus alkalmazásához, az inverz Langevin-függvény jelenléte miatt egy sorfejtést alkalmaznak, így a 2.17 egyenletre egy ötödfokú sorfejtés után, amit az ABAQUS végeelemes szoftver is alkalmaz [19], a következő alakban írhatjuk fel az alakváltozási energiasűrűség függvényt

$$W^{A-B} = \mu \left(\frac{1}{2}(I_1 - 3) + \frac{1}{20 \lambda_{\text{chain}}^2} (I_1^2 - 3^2) + \frac{11}{1050 \lambda_{\text{chain}}^4} (I_1^3 - 3^3) + \right. \\ \left. + \frac{19}{7050 \lambda_{\text{chain}}^6} (I_1^4 - 3^4) + \frac{519}{673750 \lambda_{\text{chain}}^8} (I_1^5 - 3^5) \right). \quad (2.19)$$

Ez az anyagmodell szofisztikáltabb alapokon nyugszik, a két változóját (2.18) a polimerek természetes szerkezetéből adódó tulajdonságai határozzák meg, és modellezik a megadott definíciók alapján.

2.3. Polinom modell

A polinom modell a Cauchy-Green-féle deformációs tenzorok első két skalár invariánsát használja fel, mint nevében is adott, polinom formájában. Ez a modell is valójában egy modell családot foglal magában, hiszen N -ed rendű esetben addig veszi a tagokat különböző kitevőkkel, míg az összes tagot nem írja fel, melyre a két tag rendjének összege egy. Így, míg elsőrendű esetben csak 2, másodrendű esetben $2 + 3 = 5$ tag, és így paraméter is található a modellben, továbbá magasabb rendeket vizsgálva az adott rend variációinak számával növekszik a paraméterek száma. N -ed rendre az alakváltozási energiasűrűség a következőképpen írható fel:

$$W^{\text{Pol}} = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j. \quad (2.20)$$

Másodrendű esetre a következő alakot ölti a formula:

$$W^{\text{Pol}} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)^1 + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2. \quad (2.21)$$

3. Új modell javaslat

Jelen munkában egy új hiperelasztikus modellt is elemzünk, mely képes egy pontosabb illesztésre a már említettekhez képest. A modell inspirációjául Jörgen Bergström BAM modellje szolgált [5]. A BAM modell két másik hiperelasztikus modell összegeként írható fel, ezek az eight-chain (EC) modell [2] és az elsőrendű Ogden-féle modell [15]. Ennek köszönhetően Bergström új modellje egy, a két felhasznált modelltől pontosabb illeszkedést mutató anyagmodell lett.

Ezen gondolat mentén keresztül egy hasonló alapokon nyugvó anyagmodell került felépítésre az előzőekben tapasztalt pozitív tulajdonsági változások reményében. A modell további kiindulási koncepciója, hogy az első invariáns exponenciális függvénye alkalmas leírni a kis alakváltozásokkor megfigyelhető anyagi lágyulást, illetve a második invariáns természetes logaritmusára képes a nagy alakváltozások mellett fellépő felkeményedések nagy pontosságú megragadására [8]. Ezen adatok figyelembevételével lett kiválasztva a két használt anyagmodell, melyek együttesen tartalmazzák mindkét említett tagot az alakváltozási energiasűrűség felírásában. A két választott modell a következők voltak.

Az első a Humphrey-Yin-féle model [10], melyet 1987-ben határozták meg, ezen modell energiasűrűség függvénye a következő

$$W^{\text{H-Y}} = C_1(e^{C_2(I_1-3)} - 1). \quad (3.1)$$

Ez a modell fogja az új modellünk exponenciális tagját szolgáltatni. Mint láthatjuk, ez a modell két paramétert tartalmaz, és ténylegesen az első skalár invariáns exponenciális függvénye jelenik meg benne.

A másik modell a sajátunk létrehozásához a Gent-Thomas-féle modell [7], ez a modell 1958-ban került publikálásra, az energiát leíró függvény pedig a következő formájú

$$W^{\text{G-T}} = C_1(I_1 - 3) + C_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right). \quad (3.2)$$

Ezen kifejezés tartalmazza a második skalár invariáns logaritmusát, mely az új modell felkeményedésének leírásáért lesz felelős.

Ezen modellek ismeretében az új javasolt modell alakváltozási energiasűrűség függvénye is meg-

adható, az új modell függvénye a két korábbi 3.1-3.2 összegeként írható fel.

Az újonnan javasolt Havasi-Kossa-féle modell alakváltozási energiasűrűség függvényére minden megfontolások alapján a következő lett a választás:

$$W^{H-K} = C_1(e^{C_2(I_1-3)} - 1) + C_3(I_1 - 3) + C_4 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right). \quad (3.3)$$

Mint láthattuk, ezen új modell létrehozási technika már korábban is megjelent a hiperelasztikus tudomány területén, és lényegi előrelépéseket is tett a modell lényegi tulajdonságait figyelembe véve.

Ezen felül ez a modell egy komplex függvény összetételt képes felvonultatni amellett, hogy csak 4 paramétert tartalmaz, ugyanúgy mint a másodrendű Ogden-féle modell, mely igen elterjedt alkalmazását tekintve, különösen a végelem szoftverekben, így képes egy pontosabb illesztést eredményezni azzal szemben.

4. Feszültség megoldások

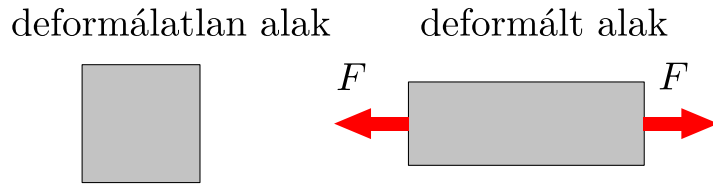
A hiperelasztikus modellek alkalmazásánál elengedhetetlen a mérésekre történő illesztés, ám ennek kivitelezéséhez a modellünkben el kell jutnunk a megfelelő feszültség-nyúlás összefüggésekre, hiszen a modellek leggyakrabban alakváltozási energiasűrűség formájában adóttak, nem pedig a számunkra szükséges anyagi egyenletekkel.

Ennek érdekében szükséges levezetni a feszültség megoldásokat, melyek megadják a szükséges összefüggéseket a későbbi paraméterillesztéshez számunkra.

A leggyakoribb mérések az egytengelyű, kéttengelyű illetve gátolt egytengelyű mérések, melyek a Treloar adatsorban [20] is megtalálhatóak. Ennek figyelembevételével ezen esetekre vezetjük le a feszültség megoldásokat.

4.1. Egytengelyű eset

Kezdjük az egytengelyű esettel. Ezen mérés során egy választott tengely mentén húzzuk meg a próbatestet, így abban ezen tengely mentén jelenik meg a feszültség, míg a másik két tengely mentén szabadon alakváltozik, így azok a tengelyek terheetlenek lesznek. Az alakváltozásokat tekintve a húzott tengely mentén jelenik meg a fő nyúlás érték, míg a két szabad irányban egyenlő nyúlás tapasztalható, mely kielégíti az egyensúlyt, miszerint ezen irányban nem mérhető feszültség. Egy ilyen terhelési eset deformációit ábrázolja a 4.1 ábra.



4.1. ábra. Egytengelyű kísérlet deformációs jellege és alkalmazott terhelései.

További fontos tényező, hogy a mérések során az anyagot összenyomhatatlannak feltételezzük, tehát a térfogati alakváltozást elhanyagoljuk, 0-nak feltételezzük. Ennek ismeretében megállapíthatjuk, hogy ez csak úgy történhet meg, ha a három fő nyúlás szorzata 1 lesz.

Ezek ismeretében definiálhatjuk az egytengelyű eset deformációs gradiensét:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Mint az megállapítható, az első főirányt tekintjük a kontrollált alakváltozás irányának, míg a másik kettő lesz a szabadon deformálódó. Továbbá az összenyomhatatlanság is teljesül, hiszen a mátrix determinánsa, azaz a három főnyúlás értékeinek szorzata 1,

$$\det(\mathbf{F}) = \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1. \quad (4.2)$$

Ezen mátrix segítségével létrehozhatjuk az egytengelyű esetre a baloldali Cauchy-Green-féle deformációs tenzor mátrixát:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Ezen mátrix segítségével meghatározhatóak a skalár invariánsok is, ezek a következők lesznek

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}, \quad I_2 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2}, \quad I_3 = 1. \quad (4.4)$$

A Cauchy-féle feszültség megadható ezen invariánsokkal és az alakváltozási energiasűrűség függvénnyel általános alakban [3]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{b} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{b}^2 + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{I} \right). \quad (4.5)$$

Mindazonáltal ezen általános megoldás számunkra nem teljes mértékben kielégítő, hiszen tér-

fogatilag összenyomhatatlan esetet feltételezve az anyag alakváltozása nem képes leírni a hidrosztatikus terhelések hatását. Ezen okból kifolyólag az összenyomhatatlannak feltételezett anyagokra egy másik alakban szokás megadni ezen általános megoldást, ami a következő:

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{dev} \left(2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{b} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{b}^2 \right) + \mathbf{p}. \quad (4.6)$$

Mint látható, az előző megoldásra feltételeztük, hogy I_3 konstans, illetve értéke egy, valamint ezen résznek csak a deviátoros részét tekintjük, így külön hozzáadódik a feszültség mátrixhoz a hidrosztatikus rész is.

A hidrosztatikus feszültség tenzor mátrixa igen egyszerű alakú, hiszen minden irányban azonos nagyságú terhelést ír le:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

A 4.6 egyenlet segítségével, adott anyagmodellre, kihasználva, hogy ismerjük az egytengelyű eset feszültségtenzorának alakját, a következő egyenlőséget állapíthatjuk meg:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

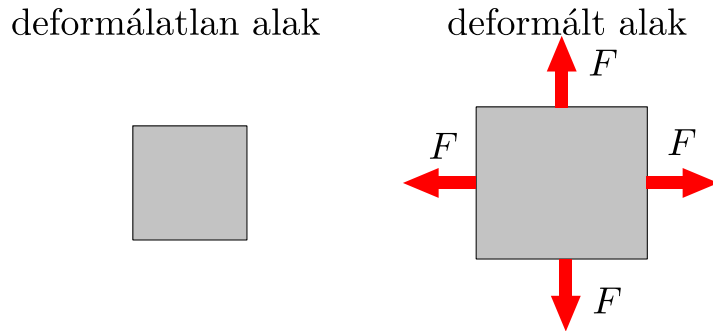
Ezzel két független egyenletre jutunk, melyek segítségével meghatározható a hidrosztatikus feszültségek nagysága, és azt felhasználva az összefüggés a feszültségek és nyúlások között az adott anyagmodellre.

A mérnöki feszültség és a valós feszültség közötti kapcsolatot az alábbi összefüggés adja meg:

$$P = \frac{\sigma}{\lambda}. \quad (4.9)$$

4.2. Kéttengelyű eset

A második vizsgálandó mérés a kéttengelyű. Ezen esetben a próbatestet két irányban húzzuk azonos erővel, ezáltal (izotrop esetben, melyet mi is feltételezünk, hiszen az alakváltozási energiasűrűség függvény nem veszi figyelembe a terhelési tengelyt) ezen irányokban azonos nyúlások, illetve feszültségek lesznek mérhetőek. Szemléltetésképpen a 4.2 ábrán megketinkhetünk egy ilyen esetet.



4.2. ábra. Kéttengelyű kísérlet deformációs jellege és alkalmazott terhelései.

Fontos megjegyezni, hogy ezen állítások csak homogén alakváltozás mellett igazak, a valóságban ez nem teljesül tökéletesen, ugyanakkor az anyag egy központi részében jellemzően igen, így megfelelő körültekintéssel alkalmazhatjuk az ideális, homogén terhelési esetet.

A harmadik főtengety mentén ismét csak szabad alakváltozás figyelhető meg, azon irányban nem lesz mérhető feszültség a rendszerben, ezen felül most is összenyomhatatlannak feltételezzük az anyagot.

A deformációs gradines tenzor a következő alakban írható fel a főtengetyek irányában:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Ezen mennyiséggel megadható a kéttengelyű homogén terhelés baloldali Cauchy-Green-féle deformációs tenzor mátrixa is:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^4} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

A skalár invariánsok a következők lesznek:

$$I_1 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4}, \quad I_2 = \lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2}, \quad I_3 = 1. \quad (4.12)$$

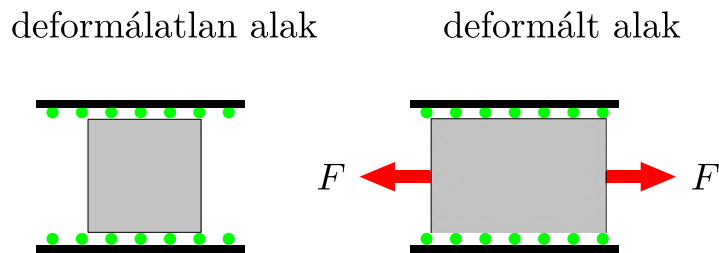
Ezek ismeretében, illetve a 4.6 összefüggés alapján az általános megoldást a feszültségi mező általános alakjával kaphattuk meg, mely feltételezéseink alapján a két húzott irányban azonos nagyságú feszültséget eredményez, míg a harmadikban feszültségmentes állapot uralkodik:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Ezen képlet alapján ismét két független egyenletre jutunk, melyek segítségével a feszültség megoldás, illetve a hidrosztatikus feszültség komponens kifejezhető. Az előzőekben bemutatott transzformációt itt is érdemes elvégezni 4.9.

4.3. Keresztirányban gátolt egytengelyű eset

Végül vizsgáljuk meg a keresztirányban gátolt egytengelyű esetet, ahol feltételezzük, hogy a próbatestet egy irányban terheljük, míg egy erre keresztirányban kényszerítjük alakjának megtartására. Ez a kísérlet a gyakorlatban általában nehezen kivitelezhető, de hasznos információt biztosít az anyagmodell minél pontosabb illesztésére. Ezek alapján egy főtengely mentén jelenik meg a terhelés irányú nyúlás, a rögzítés irányában a nyúlásunk értéke egy lesz, hiszen abban az irányban meggátoljuk az alakváltozás lehetőségét, illetve a harmadik, terheletlen irányban szabadon alakváltozik a próbatest a mérés során, tehát azon irányban nyúlás lesz megfigyelhető, de feszültség nem mérhető. Az átláthatóság kedvéért itt is egy kép, a 4.3 ábra vizualizálja a történetet.



4.3. ábra. Gátolt egytengelyű kísérlet deformációs jellege és alkalmazott terhelései.

Fontos megjegyezni ezen felül, hogy kismértékű alakváltozás hatására a tiszta nyírás és a gátolt egytengelyű, összenyomhatatlan esetben jó közelítéssel megegyetnek, így azokat analóg alkalmazhatjuk illesztési célra is.

A deformációs gradiens tenzor a főirányokban a következő alakot kell felvegye összenyomhatatlan, homogén esetet feltételezve:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Ezen mátrix ismeretében a baloldali Cauchy-Green-féle deformációs tenzor a következő alakot ölti:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Mindezek segítségével felírhatóak a skalár invariánsok is:

$$I_1 = \lambda^2 + 1 + \frac{1}{\lambda^2}, \quad I_2 = \lambda^2 + 1 + \frac{1}{\lambda^2}, \quad I_3 = 1. \quad (4.16)$$

Ezek ismeretében ismét alkalmazható az általános megoldás az összenyomhatatlan esetre. Ennek eredményeképp ismét egy mátrixegyenletre jutunk, ám míg az előző két esetben egyetlen ismeretlenünk volt a terhelés függvényében, most kettő van, a terhelési irányban, illetve a keresztirányban sem ismerjük a feszültségeket, ugyanakkor a harmadik irányban még mindig igaz, hogy feszültségtől mentes esetet feltételezünk. A 4.6 összefüggéssel ezen esetben három független egyenletre jutunk:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Jelen képletben σ jelöli a számunkra releváns feszültséget, melyet a terhelésünk irányában tapasztal az anyag, míg σ^C a keresztirányú, kontrakciós feszültséget írja le. Az alkalmazhatóság kedvéért ismét érdemes alkalmazni a 4.9 transzformációt a két feszültség mennyiség között.

4.4. Feszültség megoldás az Ogden-féle modellre

A 2.14, Ogden-féle anyagmodell nem skalár invariánsok, hanem nyúlások alapján határozza meg az anyag viselkedését, ezért a megszokott általános feszültség megoldás nehézkesen alkalmazható. Ennek okán gyakori egy másik alak használata, mely a következőképpen állítja elő a mérnöki feszültséget a főnyúlások deriváltjainak segítségével:

$$P_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}. \quad (4.18)$$

Ennek segítségével az egyes komponensekre lesz adott az egyenlet, ugyanakkor ez önmagában nem elég, hiszen ismét figyelembe kell venni azt a közelítést, hogy az anyag térfogatilag összenyomhatatlan, tehát ezen képlettel csak a deviátoros rész határozható meg a feszültségből:

$$\mathbf{P} = \text{dev}\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i\right) + \mathbf{p}. \quad (4.19)$$

Ezzel tehát adott a képlet, mellyel a mérnöki feszültségeket kiszámíthatjuk, ha figyelembe vesszük az adott terhelési állapotok jellegét, hiszen azok nem változnak, azonosak lesznek a 4.8, 4.13 és 4.17 esetekkel.

Az alakváltozási energiasűrűség deriváltjai N -ed rendű esetben a következők lesznek:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = \sum_{k=1}^N \frac{2\mu_k}{\alpha_k} \lambda_i^{\alpha_k-1}. \quad (4.20)$$

Ezt figyelembe véve, és alkalmazva a már említett, most is érvényes általános megoldás alakot, a következő megoldásokra jutunk N-ed rendű Ogden-féle modell esetén:

$$P_U^{\text{OG}} = \sum_{k=1}^N \frac{2\mu_k}{\alpha_k} \left(\lambda^{\alpha_k-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_k}{2}-1} \right), \quad (4.21)$$

$$P_B^{\text{OG}} = \sum_{k=1}^N \frac{2\mu_k}{\alpha_k} \left(\lambda^{\alpha_k-1} - \lambda^{-2\alpha_k-1} \right), \quad (4.22)$$

$$P_P^{\text{OG}} = \sum_{k=1}^N \frac{2\mu_k}{\alpha_k} \left(\lambda^{\alpha_k-1} - \lambda^{-\alpha_k-1} \right). \quad (4.23)$$

4.5. Feszültség megoldás az Arruda-Boyce-féle modellre

Az 2.19 anyagmodell esetén egy konkrét esetre vizsgáljuk meg a feszültségmegoldásokat, hiszen az általánosabb 2.17 formát használva a feladat nem ad zárt alakú megoldást. A skalárinvariánsok alapján a deriváltak a következők lesznek:

$$\frac{\partial W^{\text{A-B}}}{\partial I_1} = C_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{I_1}{10C_2^2} + \frac{11I_1^2}{350C_2^4} + \frac{38I_1^3}{3525C_2^6} + \frac{519I_1^4}{134750C_2^8} \right), \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial W^{\text{A-B}}}{\partial I_2} = 0. \quad (4.25)$$

Vegyük ehhez a három 4.8, 4.13 és 4.17 esetet, és oldjuk meg őket a mérnöki feszültségre transzformálva az eredményt:

$$P_U^{\text{A-B}} = \frac{C_1(-1+\lambda^3)(9499875C_2^8\lambda^4+1899975C_2^6\lambda^3(2+\lambda^3))}{9499875C_2^8\lambda^6} + \frac{C_1(-1+\lambda^3)(597135C_2^4\lambda^2(2+\lambda^3)^2+204820C_2^2\lambda(2+\lambda^3)^3+73179(2+\lambda^3)^4)}{9499875C_2^8\lambda^6}, \quad (4.26)$$

$$P_B^{\text{A-B}} = \frac{C_1(-1+\lambda^6)(9499875C_2^8\lambda^{16}+597135C_2^4\lambda^8(1+2\lambda^6)^2)}{9499875C_2^8\lambda^{21}} + \frac{C_1(-1+\lambda^6)(204820C_2^2\lambda^4(1+2\lambda^6)^3+73179(1+2\lambda^6)^4+1899975C_2^6(\lambda^{12}+2\lambda^{18}))}{9499875C_2^8\lambda^{21}}, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}
 P_P^{A-B} = & -\frac{C_1}{\lambda^3} + C_1\lambda + \frac{C_1\lambda(1+1/\lambda^2+\lambda^2)}{5C_2^2} + \frac{11C_1\lambda(1+1/\lambda^2+\lambda^2)^2}{175C_2^4} + \\
 & + \frac{76C_1\lambda(1+1/\lambda^2+\lambda^2)^3}{3525C_2^6} + \frac{519C_1\lambda(1+1/\lambda^2+\lambda^2)^4}{67375C_2^8} - \frac{C_1(1+\lambda^2+\lambda^4)}{5C_2^2\lambda^5} - \\
 & - \frac{11C_1(1+\lambda^2+\lambda^4)^2}{175C_2^4\lambda^7} - \frac{76C_1(1+\lambda^2+\lambda^4)^3}{3525C_2^6\lambda^9} - \frac{519C_1(1+\lambda^2+\lambda^4)^4}{67375C_2^8\lambda^{11}}.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

4.6. Feszültség megoldás a Polinom modellre

A polinom anyagmodell már kifinomultabb, hiszen tartalmazza a második skalár invariánst is, ahogy azt láttuk 2.20-ben.

A deriváltak N-ed rendű esetben a következők lesznek:

$$\frac{\partial W^{\text{Pol}}}{\partial I_1} = \sum_{i+j=1}^N C_{ij}(I_1-3)^{i-1}(I_2-3)^j, \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial W^{\text{Pol}}}{\partial I_2} = \sum_{i+j=1}^N C_{ij}(I_1-3)^i(I_2-3)^{j-1}. \tag{4.30}$$

Másodrendű esetre, amikor is öt paramétert tartalmaz a modell a deriváltak is változnak, 2.21 alapján a következők lesznek:

$$\frac{\partial W^{\text{Pol}}}{\partial I_1} = C_{10} + 2C_{20}(I_1-3) + C_{11}(I_2-3), \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial W^{\text{Pol}}}{\partial I_2} = C_{01} + 2C_{02}(I_2-3) + C_{11}(I_1-3). \tag{4.32}$$

A feszültség megoldások előállíthatóak ugyanúgy, mint az előző anyagmodellre a három összefüggés 4.8, 4.13 és 4.17 segítségével:

$$\begin{aligned}
 P_U^{\text{Pol}} = & \frac{2(-1+\lambda^3)(2C_{02}(-1+\lambda)^2(1+2\lambda) + \lambda(3C_{11}(-1+\lambda)^2(1+\lambda)))}{\lambda^5} + \\
 & + \frac{2(-1+\lambda^3)\lambda^2(C_{01} + C_{10}\lambda + 2C_{20}(2-3\lambda+\lambda^3))}{\lambda^5},
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
 P_B^{\text{Pol}} = & \frac{2(-1+\lambda^6)(3C_{11}\lambda^2(-1+\lambda^2)^2(1+\lambda^2) + C_{20}(2-6\lambda^4+4\lambda^6))}{\lambda^9} + \\
 & + \frac{2(-1+\lambda^6)(\lambda^4(C_{10} + C_{01}\lambda^2 + 2C_{02}(2-3\lambda^2+\lambda^6)))}{\lambda^9},
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$P_P^{\text{Pol}} = \frac{2(-1 + \lambda^4)(2C_{20} + C_{01}\lambda^2 + C_{10}\lambda^2 - 4C_{20}\lambda^2 + 2C_{20}\lambda^4)}{\lambda^5} + \frac{2(-1 + \lambda^4)(2C_{02}(-1 + \lambda^2)^2 + 2C_{11}(-1 + \lambda^2)^2)}{\lambda^5}. \quad (4.35)$$

4.7. A feszültség megoldások alkalmazása az újonnan bevezetett modellekre

Ahhoz, hogy a későbbiekben alkalmazni tudjuk az újonnan kidolgozott Havasi-Kossa-féle modellt, ennek is ki kell számítani a megfelelő feszültség megoldásait.

Az alakváltozási energiasűrűség függvény deriváltjai a skalár invariánsok függvényében a következők lesznek:

$$\frac{\partial W^{\text{H-K}}}{\partial I_1} = C_1 C_2 e^{C_2(I_1-3)} + C_3, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial W^{\text{H-K}}}{\partial I_2} = \frac{C_4}{I_2}. \quad (4.37)$$

Ezeket felhasználva az egytengelyű mérnöki feszültséget megkaphatjuk a 4.8 segítségével, kiejtve a hidrosztatikus feszültség értékét (és áttanszformálva a feszültséget Cauchy-féléből mérnökivé 4.9-el):

$$P_U^{\text{H-K}} = \frac{2(-1 + \lambda^3) \left(C_3 + C_4\lambda + 2C_3\lambda^3 + C_1 C_2 e^{C_2(-3+2/\lambda+\lambda^2)}(1 + 2\lambda^3) \right)}{\lambda^2 + 2\lambda^5}. \quad (4.38)$$

A kéttengelyű esetre hasonlóan levezethető a megoldás általános alakja, ez számunkra a következőnek adódik 4.13-et felhasználva, az előző lépéseket megismételve:

$$P_B^{\text{H-K}} = \frac{2(-1 + \lambda^6) \left(C_4\lambda^4 + C_3(2 + \lambda^6) + C_1 C_2 e^{C_2(-3+1/\lambda^4+2\lambda^2)}(2 + \lambda^6) \right)}{\lambda^5(2 + \lambda^6)}. \quad (4.39)$$

Végül a gátolt egytengelyű esetre a következő eredmények adódnak 4.17-ből a megoldási lépéseket követve:

$$P_P^{\text{H-K}} = \frac{2(-1 + \lambda^4) \left(C_4\lambda^2 + C_3(1 + \lambda^2 + \lambda^4) + C_1 C_2 e^{C_2(-2+1/\lambda^2+\lambda^2)}(1 + \lambda^2 + \lambda^4) \right)}{\lambda^3 + \lambda^5 + \lambda^7}. \quad (4.40)$$

Mindezek segítségével az anyagmodell már alkalmas illesztési feladatban való alkalmazásra, tetszőleges mérési adatsorra kivitelezhető az illesztés és az adott anyag modelljének felépítése

a hiányzó paraméterek meghatározásával.

5. Paraméter illesztés

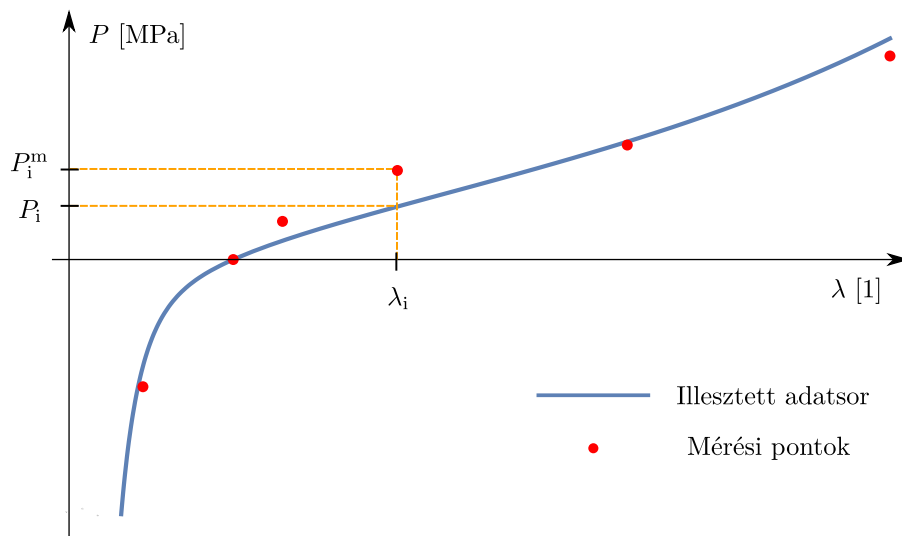
A paraméterillesztés során az adott alakváltozási energiasűrűség függvényt felhasználva, annak feszültség megoldásait tekintve végrehajtható a modell szükséges paramétereinek illesztése.

Ehhez szükséges egy mérőszám is, amit minimalizálni szeretnénk. Ezt egy hibafüggvénnyel tehetjük meg. A hibafüggvény számos alakban előállítható, beszélhetünk abszolút vagy relatív hibákról, és ezek különböző származtatott mennyiségeiről is, példának okáért abszolút értékről vagy négyzetes mennyiségről, így a különböző előjelű hibák nem kompenzálják egymást. Praktikus lehet egy olyan hibafüggvényt alkalmazni, mely korlátos felülről is, ezzel saját magunk falgát is megkönnyíthetjük, hiszen egy véges intervallumhoz kell viszonyítanunk az adott hiba-értéket, ami így az illesztés jóságáról ad tájékoztatást. A számítások és optimalizálás során az úgynevezett *root mean square* hibát alkalmaztam pontonként a relatív hibára, és normálva az adatsor hosszának függvényében.

A hibát leíró függvény ennek értelmében a következő:

$$Q = 100 \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i^m - P_i}{P_i^m} \right)^2}. \quad (5.1)$$

A 5.1 formula n darabszámú adatsorra számítja ki a hibafüggvény értékét, ahol P_i^m az i -edik mért feszültségérték, P_i pedig az i -edik mérési pont nyúlásához tartozó, analitikus formulából számított feszültségérték. Ennek szemléltetésekképpen egy adott pontra történő számításhoz ad magyarázatot a következő ábra 5.1.



5.1. ábra. Illesztési hiba számításának geometriai szemléltetése egy adott mérési pontra.

Az ábrán látható eltérés lesz az abszolút hiba, relatív hiba ebből normálással készíthető. Ezen hibaszámítás elvégzése minden mérési pontra a megfelelő λ_i helyen egy összegzés, illetve jelen esetben néhány további művelet útján szolgáltat numerikus, értelmezhető értéket az illesztés hibájára.

Ezt alkalmazni lehet minden megoldásra egyenként, így az egytengelyű, kéttengelyű és keresztirányban gátolt egytengelyű esetre is. Utóbbi számunkra az illesztés során nem lesz oly mértékben releváns, mert a saját adataink csak egy- illetve kéttengelyű mérésekből származnak, ugyanakkor a sokak által használt Treloar adatsor [20] mindhárom esetre szolgáltat eredményt, így egy teljesebb leírást biztosít.

Fontos, hogy az illesztést csak az összenyomhatatlan anyagmodellre végeztem el, azon adatokból dolgoztam tovább, illetve ezen paraméterek és egy kezdeti Poisson tényező ismeretében térfogatilag összenyomható anyagokra is alkalmazható a modell.

5.1. Illesztés a Treloar adatsorra

A Treloar adatsor a hiperelasztikus területen leggyakrabban használt kísérleti eredmények, a modellek leíró teljesítményét is ezzel szokás felmérni, így egyszerre nem csak egy illesztés, és ahhoz tartozó hiba kapható meg, hanem ezzel egyidőben, a gyakori használat miatt, más modellekhez képesti viselkedése is értékelhető.

Egy 2012-es cikkben [18] az írók összegezték a Treloar adatsort, és táblázatosan foglalták össze a numerikus értékeket. A három mérés diagramon is megtekinthető a 5.2 ábrán.

Ezek az adatpontokat használtam én is a Treloar adatsorra történő illesztés során. A 5.1 táblázatban megtalálhatóak ezen pontok.

A Treloar adatsor három mérési esetet tartalmaz, ezek az egytengelyű, a kéttengelyű és gátolt egytengelyű eset, ahol utóbbi, ahogy már korábban említésre került, megfeleltethető egy gátolt egytengelyű húzási esetnek.

Ezen adatpontokra illeszthetőek az előzőekben bemutatott, és feszültség megoldásokkal kiegészített modellek, név szerint egy másodrendű Ogden-féle, az Arruda-Boyce-féle és a másodrendű polinomiális modell, valamint az újonnan bevezetett Havasi-Kossa-féle modell.

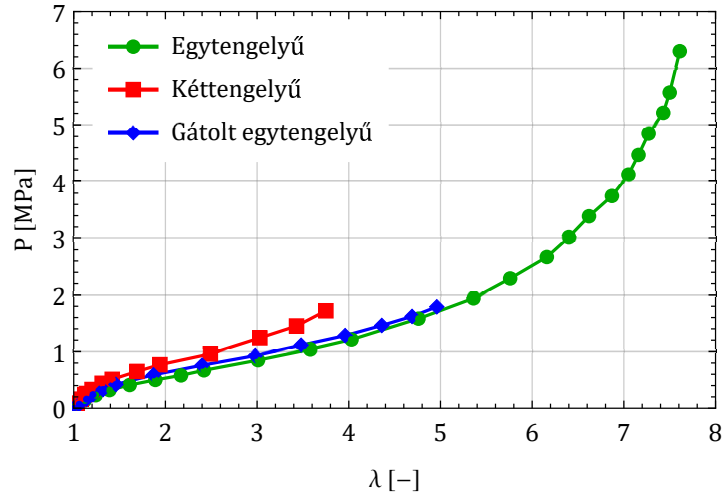
Az illesztés során a három mérési adatsorra össze kell hangolni egy egységes hibafüggvényt, hiszen a hibafüggvényünk jelenleg egyetlen adatsorra van definiálva. Ezt egyszerűen megtehetjük, jelen illesztéshez a három, egyenként számított hibafüggvény számtani közepét tekintem a teljes illesztés hibafüggvényének. Ezek alapján már értékelhetőek az illesztések és numerikusan is információt kaphatunk azokról.

Továbbá az illesztéshez a Wolfram Mathematica programcsomag *NMinimize* függvényét [16] alkalmaztam, azon belül is a *RandomSearch* metódust, mely a legjobbnak bizonyult tapasztalat

által, ez eredményezte a minimális hibát a lehetséges illesztési módszerek közül.

5.1. táblázat. A Treloar adatok numerikus értékei a 2012-es cikk alapján [18].

Egytengelyű adatok		Kéttengelyű adatok		Gátolt egytengelyű adatok	
λ [1]	P_U [MPa]	λ [1]	P_B [MPa]	λ [1]	P_P [MPa]
1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
1,01	0,03	1,04	0,09	1,06	0,07
1,12	0,14	1,08	0,16	1,14	0,16
1,24	0,23	1,12	0,24	1,21	0,24
1,39	0,32	1,14	0,26	1,32	0,33
1,61	0,41	1,20	0,33	1,46	0,42
1,89	0,50	1,31	0,44	1,87	0,59
2,17	0,58	1,42	0,51	2,40	0,76
2,42	0,67	1,69	0,65	2,98	0,93
3,01	0,85	1,94	0,77	3,48	1,11
3,58	1,04	2,49	0,96	3,96	1,28
4,03	1,21	3,03	1,24	4,36	1,46
4,76	1,58	3,43	1,45	4,69	1,62
5,36	1,94	3,75	1,45	4,96	1,79
5,76	2,29	4,03	1,96		
6,16	2,67	4,26	2,22		
6,40	3,02	4,44	2,43		
6,62	3,39				
6,87	3,75				
7,05	4,12				
7,16	4,47				
7,27	4,85				
7,43	5,21				
7,50	5,57				
7,61	6,30				



5.2. ábra. A Treloar adatok egy koordináta-rendszerben ábrázolva.

5.1.1. Ogden-féle modell

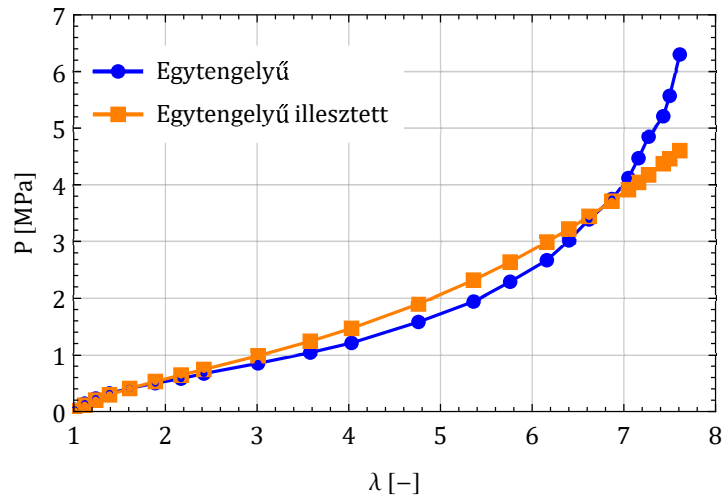
Az Ogden-féle modell esetén elvégezve az illesztést a következő eredményre jutunk a megadott 5.1 táblázat adatai alapján .

$$C_1 = 0,293184 \text{ [MPa]}, \quad C_2 = 2,31922 \text{ [1]}, \quad C_3 = -0,059281 \text{ [MPa]}, \quad C_4 = -1,20074 \text{ [1]}. \quad (5.2)$$

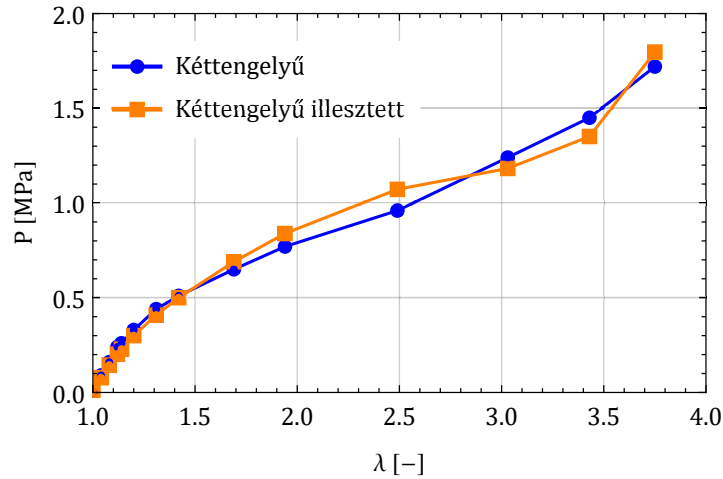
A hibafüggvény értéke:

$$Q = \frac{Q_U + Q_B + Q_P}{3} = 18,595 \text{ [%]}, \quad Q_U = 28,326 \text{ [%]}, \quad Q_B = 5,137 \text{ [%]}, \quad Q_P = 22,322 \text{ [%]}. \quad (5.3)$$

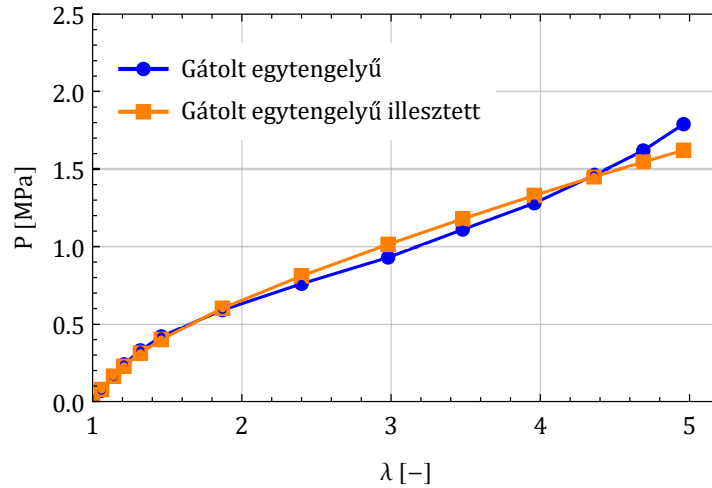
Az illesztési görbék a következők lettek, melyek megtekinthetők a 5.3-5.5 ábrákon.



5.3. ábra. Illesztés egytengelyű húzásra Ogden-féle modell esetén Treloar adatokkal.



5.4. ábra. Illesztés kéttengelyű húzásra Ogden-féle modell esetén Treloar adatokkal.



5.5. ábra. Illesztés gátolt egytengelyű húzásra Ogden-féle modell esetén Treloar adatokkal.

5.1.2. Arruda-Boyce-féle modell

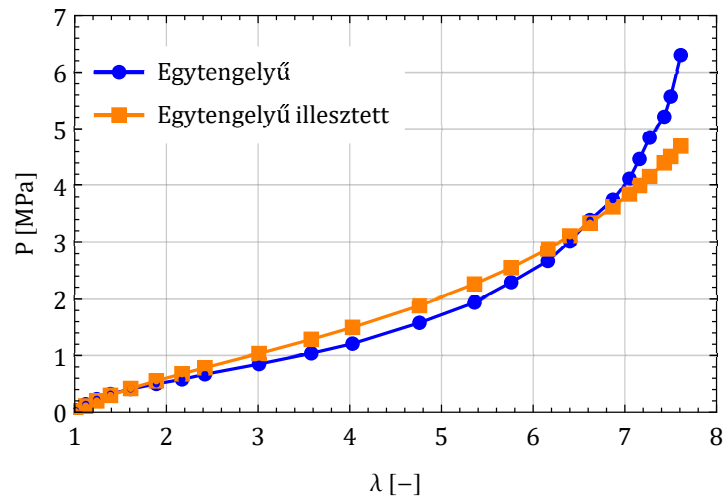
Az Arruda-Boyce-féle modellre hasonlóképpen elvégezve az illesztést 5.1 táblázat értékeire, ahogyan az az előzőekben ismertetésre került a következőre jutunk.

$$C_1 = 0,333411 \text{ [MPa]}, \quad C_2 = -5,53107 \text{ [1]}. \quad (5.4)$$

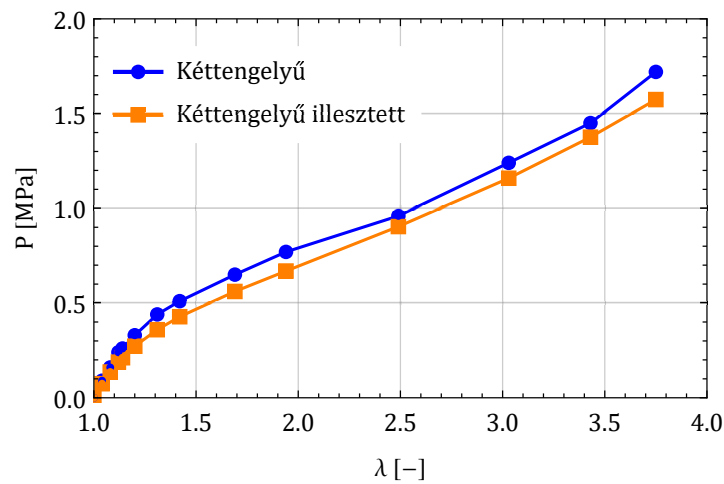
A hibafüggvények a következő értékeket adták.

$$Q = 15,332 \text{ [%]}, \quad Q_U = 20,241 \text{ [%]}, \quad Q_B = 14,647 \text{ [%]}, \quad Q_P = 11,109 \text{ [%]}. \quad (5.5)$$

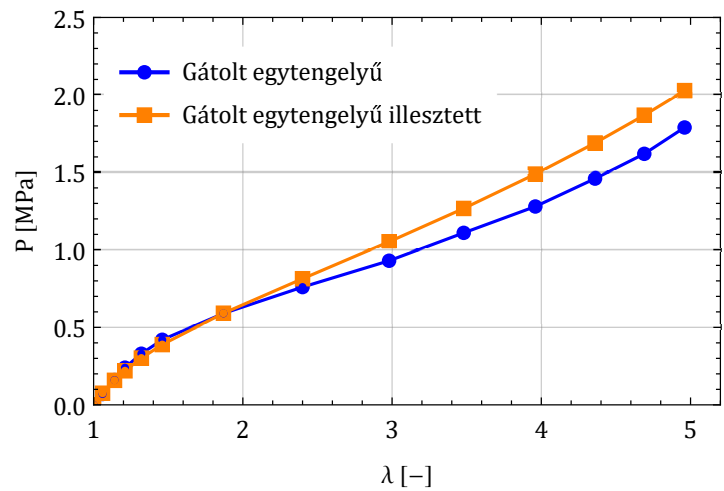
Az illesztések szemrevételezhetőek a 5.6-5.8 ábrákon.



5.6. ábra. Illesztés egytengelyű húzásra Arruda-Boyce-féle modell esetén Treloar adatokkal.



5.7. ábra. Illesztés kéttengelyű húzásra Arruda-Boyce-féle modell esetén Treloar adatokkal.



5.8. ábra. Illesztés gátolt egytengelyű húzásra Arruda-Boyce-féle modell esetén Treloar adatokkal.

5.1.3. Polinom modell

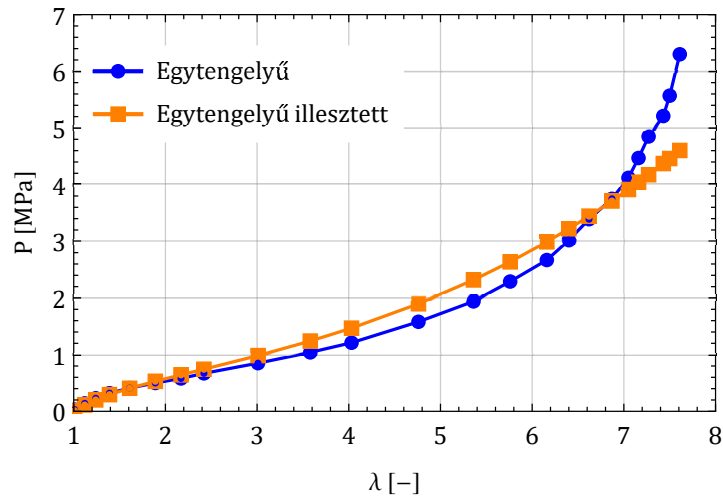
A polinom modellre is illesztettem az adatsor elemeit, ezekkel a következő paramétereket kaptam 5.1 táblázat alapján.

$$\begin{aligned} C_{10} &= 0,14792 \text{ [MPa]}, & C_{01} &= 0,028313 \text{ [MPa]}, & C_{20} &= 0,001753 \text{ [MPa]}, \\ C_{11} &= -0,002175 \text{ [MPa]}, & C_{02} &= 0,0001456 \text{ [MPa]}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

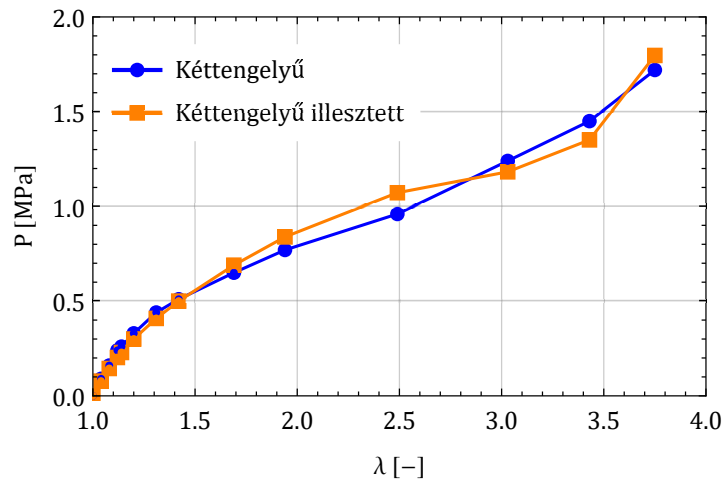
A hibafüggvények a következők lettek.

$$Q = 11,685 \text{ [\%]}, \quad Q_U = 19,4853 \text{ [\%]}, \quad Q_B = 9,3672 \text{ [\%]}, \quad Q_P = 6,2014 \text{ [\%]}. \quad (5.7)$$

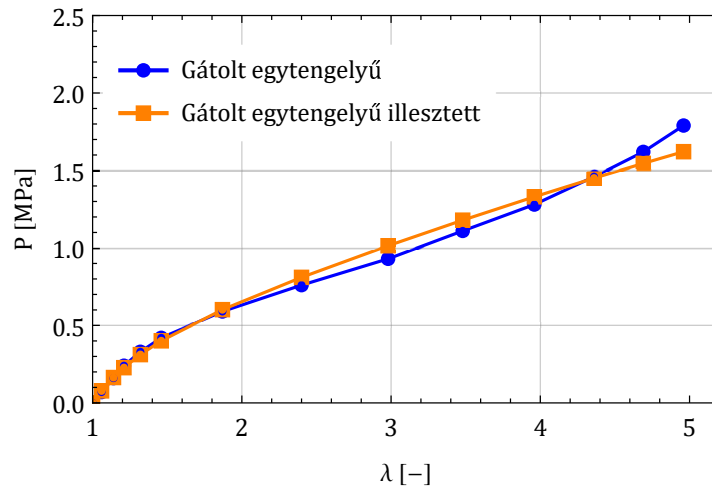
Az illesztések görbéit a 5.9-5.11 ábrákon vázolom.



5.9. ábra. Illesztés egytengelyű húzásra polinom modell esetén Treloar adatokkal.



5.10. ábra. Illesztés kéttengelyű húzásra polinom modell esetén Treloar adatokkal.



5.11. ábra. Illesztés gátolt egytengelyű húzásra polinom modell esetén Treloar adatokkal.

5.1.4. Havasi-Kossa-féle modell

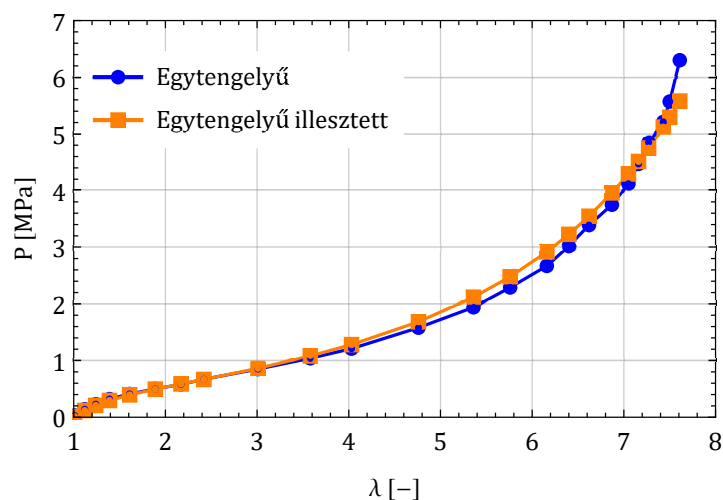
Az új modellre is elvégeztem az illesztéseket, ahol is egy jobb eredményt várunk el az előzőekhez képest a megadott mérési adatsorra a 5.1 táblázat alapján, hiszen ez lenne az új modell elsődleges feladata.

$$C_1 = 2,47263 \text{ [MPa]}, \quad C_2 = 0,0274833 \text{ [1]}, \quad C_3 = 0,0560254 \text{ [MPa]}, \quad C_4 = 0,205664 \text{ [1]}. \quad (5.8)$$

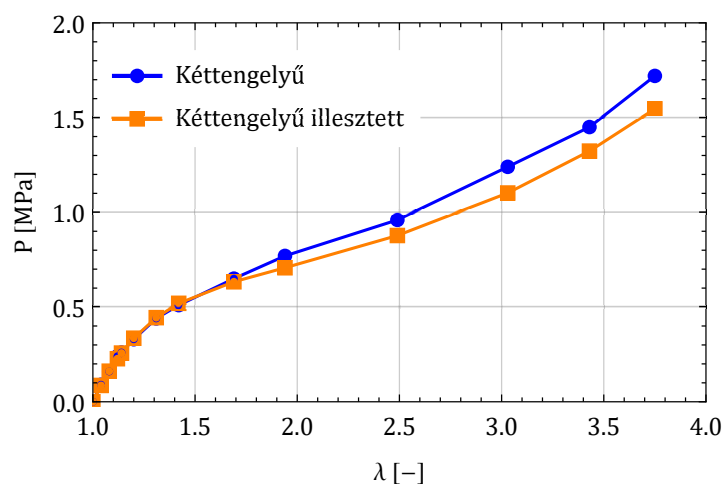
A hibafüggvény értékek.

$$Q = 9,19207 \text{ [%]}, \quad Q_U = 14,202 \text{ [%]}, \quad Q_B = 6,22778 \text{ [%]}, \quad Q_P = 7,14639 \text{ [%]}. \quad (5.9)$$

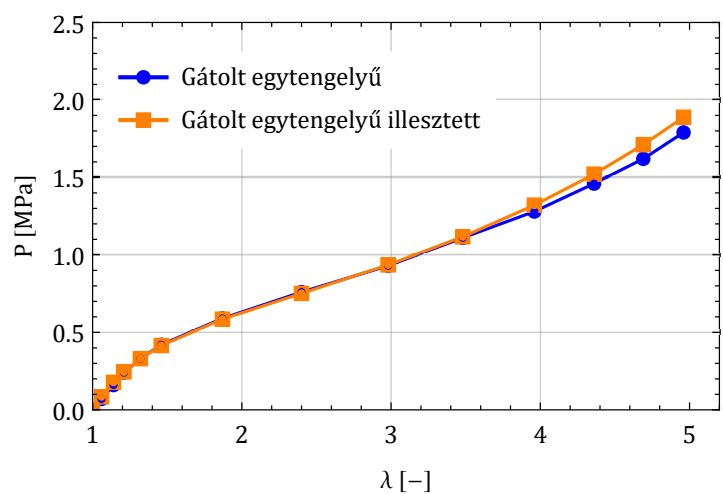
Mint látható a numerikus adatokból, a tényleges illesztési hiba ezen modellre lett a legalacsonyabb, a második legjobb, polinom modelltől is körülbelül 2,5 százalékkal jobb a teljes illesztés az adatsorra. Ezen illesztések lettek ábrázolva a 5.12-5.14 ábrákon.



5.12. ábra. Illesztés egytengelyű húzásra Havasi-Kossa-féle modell esetén Treloar adatokkal.



5.13. ábra. Illesztés kéttengelyű húzásra Havasi-Kossa-féle modell esetén Treloar adatokkal.



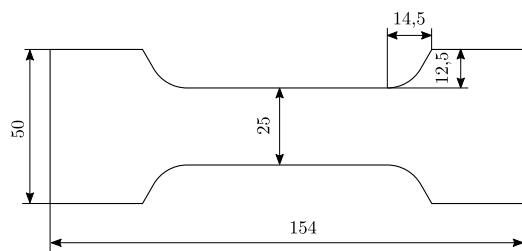
5.14. ábra. Illesztés gátolt egytengelyű húzásra Havasi-Kossa-féle modell esetén Treloar adatokkal.

5.2. Mérések

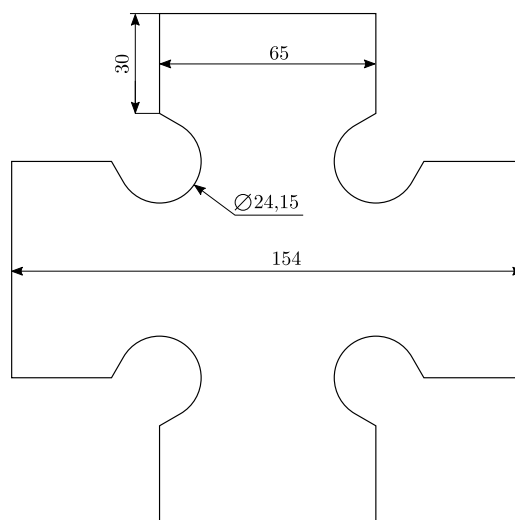
A Treloar adatok egy általánosan elfogadott adatsor, ám az csak egy vulkanizált gumianyagot ír le. Ezen okból kifolyólag saját mérési adatsort is felhasználtam a későbbi illesztések és szimulációk elvégzéséhez.

A mérések során használt anyag egy Bondex Kft. által gyártott 600x800 mm-es, 2 mm szilikonlemez volt, melynek anyaga melegen vulkanizált HTV szilikon [12]. Ennek a szilikonnak tulajdonsága, hogy nagy mértékben nyújtható, akár 300-400%-ára is képes megnyúlni, illetve kis mértékű az esetleges maradó alakváltozásuk, emellett egy nem túl nagy szakítószilárdsággal rendelkező anyag, ezáltal a mérési lánc merevsége is nagyobb lesz, egyszerűbb a mérést összeállítani, a próbatest lesz a nyúló elem a szerkezetben a kísérlet során [13]. A továbbiakban ezen anyag mérési adatai kerülnek elő, illetve a későbbi számítások és szimulációk folyamán ezen anyag lesz a modellezett anyag, melyet a dolgozat során használok.

A kísérletek során használt próbatestek geometriája is fontos kérdés. Az egytengelyű mérés során a klasszikus "piskóta" modellt használtam, míg a kéttengelyű keresztmodell esetén problémásabb egy adott geometria választása, ezen esetre nem létezik optimális geometria, amely biztosítaná a homogén alakváltozási régiót. Ezen okból kifolyólag több testet is megvizsgáltam irodalmi háttérükből. Több alak is gyakori használatban van, a klasszikus lekerekített, kikönnnyített karú, ahol bevágásokkal csökkentik a kar erősebb ellenállását [1], vagy pedig a karokat csak egy fejrész erejéig hagyják vastagabban, utána vékony karokként csatlakoznak a középső részéhez a próbatestnek [21]. Ezeket egyébiránt fémeknél is alkalmazzák [14]. Végelelemes számításoknál is alkalmazzák ezeket, azok alapján a lekerekített modellek esetén a nagyobb lekerekítési sugár homogénebb középső feszültségmezőt eredményez [22]. Azt tapasztaltam, hogy egyéb apróbb módosítási lehetőségek mellett jó hatással lehet egy, a próbatest közepén elhelyezett kisebb keresztmetszetű anyagszakasz, ám ezt nem állt módomban megvalósítani, csak egy lézerkivágó állt rendelkezésre, amivel ezt nem lehetett kivitelezni. Így egy egyszerű, lekerekített oldalú próbatest került elfogadásra és kivágásra. További fontos tény, hogy a rögzítés hatása elhanyagolható lesz a Saint-Venant elv értelmében [17]. A végső próbatest geometriák rajzai, illetve fényképei megtekinthetőek a 5.15-5.16 ábrákon.



(a) Az egytengelyű próbatest geometriája.



(b) A kéttengelyű próbatest geometriája.

5.15. ábra. A próbatestek a Bondex Kft. 600x800-as, 2 mm vastagságú szilikonlemezeiből lettek lézervágó segítségével kivágva.



(a) Egy egytengelyű kivágott próbatest.



(b) Egy kéttengelyű kivágott próbatest.

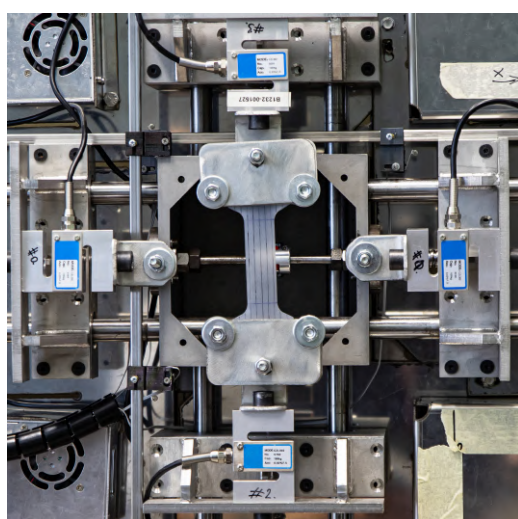
5.16. ábra. A kivágott próbatestek fotói.

A kísérleteket egy kéttengelyű húzóberendezésen végeztem, amit a BME Műszaki Mechanikai tanszéke tervezett. A próbatesteket egy befogópofába szorítva két, egymástól független mozgásra képes tengely pozíció vezérlésével, illetve a négy befogóhoz szerelt erőmérő cellákkal hajtottam végre a mérést. Ez által az elmozdulások ismertek voltak, míg az erők is folyamatos mintavételezéssel elérhetőek lettek. Fontos megjegyezni, hogy ezen pozíció, illetve elmozdulás értékek a teljes próbatestet jellemzik, nem pedig csak a számunkra érdekes homogén tartományt. Ebből kifolyólag korrekciót kell alkalmazni, melynek módszere a későbbiekben kerül ismertetésre.

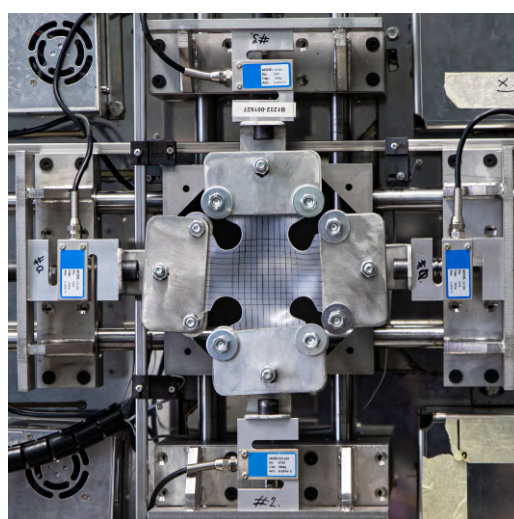
Két alapvető kísérletet hajtottam végre a próbatesteken, egytengelyű húzást, illetve kéttengelyű húzási kísérletet. Az első esetben a próbatestet 400 mm-rel nyújtottam meg, míg a kéttengelyű esetben a tengelyeken egyenként 200 mm-es elmozdulásig húztam meg az anyagot. Mindkét kísérlet folyamán ügyeltem a viszkoelasztikus hatások kiküszöbölésére, ezért mindkét esetben

10 perc alatt nyújtottam a megadott értékig a próbatesteket. Ezáltal az anyag időfüggő rugalmas viselkedése gyakorlatilag nem jeleni meg mérhetően, és a tényleges, statikus rugalmassági paraméterei mérhetőek az anyagnak. Az anyagok visszaterhelés során, a termék leírása alapján elvárható, nagyon kis mértékű maradó alakváltozás volt megfigyelhető. Ez az egy dimenziós próbatest esetén szemmel kevésbé, a két dimenziós kereszt próbatesten jobban észrevehető. A kísérletek kezdeti- és végállapotai a 5.17-5.18 ábrákon láthatóak.

Ezen hatások viszont a tényleges megnyúlásokhoz képest nagyságrendi különbséget mutatva kisebbek, a kísérlet illetve kiértékelések során elhanyagoltam őket, tekintve, hogy ezek jelen méréseim és kutatásom szempontjából irrelevánsak, ezen dolgozatnak nem célja ilyen jellegű viselkedések anyagmodellbe foglalt leírása.

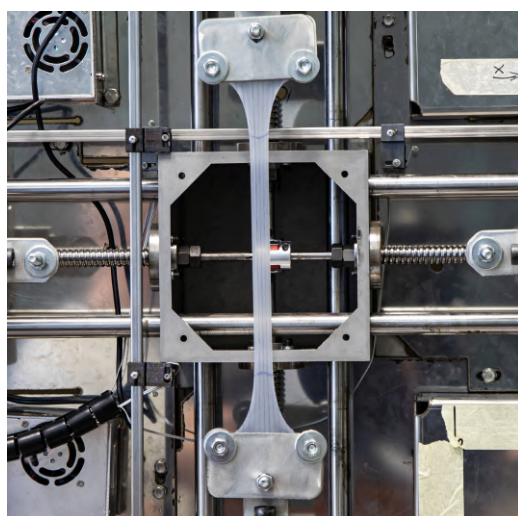


(a) Az egytengelyű próbatest kezdeti helyzete.

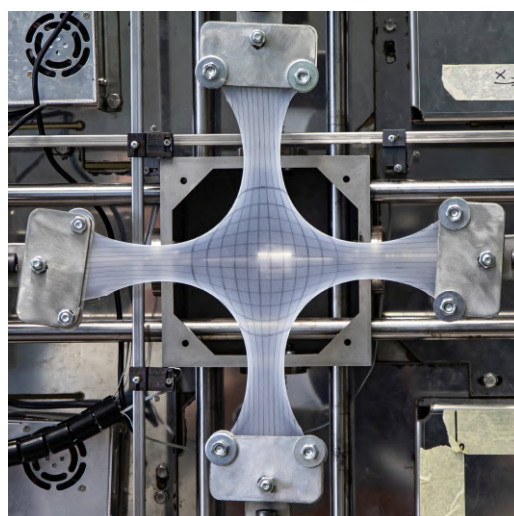


(b) A kéttengelyű próbatest kezdeti helyzete.

5.17. ábra. A próbatestek a kísérletek kezdeténél.



(a) Az egytengelyű próbatest végső helyzete.



(b) A kéttengelyű próbatest végső helyzete.

5.18. ábra. A próbatestek a kísérletek végénél.

A mérés során 50000 Hz-el rögzítésre került az idő, a két külön tengelyen lévő befogófej elmozdulása a kísérlet kezdetétől, illetve a négy érzőszor jele, ám ezekből csak 100 Hz-el történt az adatok feldolgozási célú kimentése, a folyamat jóval lassabb, a mintavételi pontok sűrűsége miatt további nem kívánatos zaj lenne a mért jeleken. Ezzel a két tengelyre nézve tengelyenként két erőjel adódik, melyek segítségével egy pontosabb, zajtól kevésbé terhelt jelet kaphatunk, ha a kettő azonos tengelyen lévő érzékelő átlag értékét vesszük egy adott pillanatra tekintve. A mérés kezdetén nyújtatlan próbatestet a nyúlás kezdetén még nem homogénen húzzuk, ezen okból kifolyólag kezdeti korrekció, úgynevezett *slack correction* alkalmazandó, melynek lényege, hogy az erőjelet vizsgálva megkeressük az első inflexiós pontot, ahol a kezdeti konvex viselkedés konkávba megy át, ezen pontba húzott érintő metszéspontja a mért adatjellel pedig meghatározza a mérésünk hasznos jeltartományának kezdeti pontját. Innentől érdemes vizsgálni a numerikus eredményket. A végpontot pedig hasonlóan meg kell határoznunk, ezen pont igen egyszerűen azonosítható be, ameddig az erő növekszik, addig tart a húzásunk (figyelman kívül hagyva a kúszás jelenségét, mely lassú kísérlet során ténylegesen elhanyagolható mértékű).

A *slack correction* algoritmus fontosabb lépéseit néhány mondatban a következőkkel lehet egyszerűen. A mérési adatsorban szükséges kikeresni a mérés megkezdése utáni első inflexiós pontot. Ezen pontba húzott érintő és a mérési adatjel metszéspontja a kezdeti pillanat felé meghatározza a számunkra releváns mérési tartomány alsó határát. Ezt numerikus deriváltakal igen egyszerűen lehet leírni, az inflexiós pontot egy második deriváltbeli előjelváltás jellemzi, míg az érintő egy hűrként határozható meg, például, melyet én is alkalmaztam a feldolgozás során, a két szomszédos pont által meghatározott szelővel. A numerikus formulák, melyeket a feldolgozó kódban használtam a következő deriváltformulákkal dolgoztak:

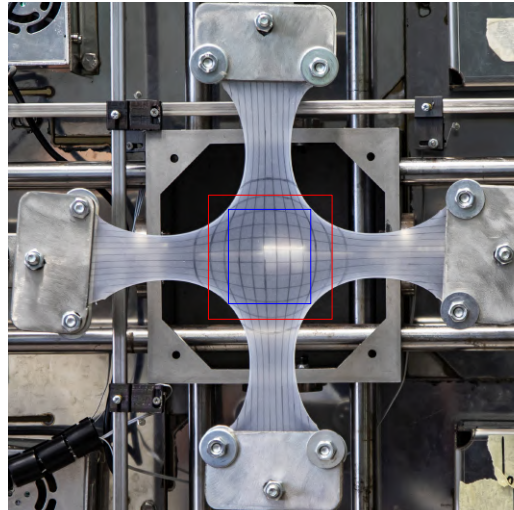
$$\ddot{F}(t) = \frac{F^{i+1} - 2F^i + F^{i-1}}{\Delta t^2}, \quad \dot{F}(t) = \frac{F^{i+1} - F^{i-1}}{2\Delta t}. \quad (5.10)$$

A mérésekből kiértékelés után megkaphatjuk a hasznos időtartományra a feldolgozásra érdemes jeleket. Ezek alapján már értelmes jeleket kapunk, melyek fizikailag is értelmezhetőek.

A mérések során rögzített pillanatokban fényképek készültek a további kiértékeléshez, ugyanis a próbatest elmozdulása nem lesz azonos a homogén rész elmozdulásával, így a fényképekből adott idő, illetve elmozdulási pontokban számítható a homogén terület nyúlása, illetve ehhez társítható egy erő érték, ebből pedig feszültség számítható. Ezekkel adott lesz az a feszültség-nyúlás adatsor, melyre a paraméterillesztés elvégezhető.

A mérésekből tehát számunkra szükséges lenne ismerni a homogén alakváltozási zóna nyúlás értékeit, ám ezek közvetlen nem állnak rendelkezésre. Ezen okból kifolyólag volt szükség a fényképek készítésére, hiszen így már pillanatokban meghatározható a teljes elmozdulás, illetve a homogénnek feltételezett zóna elmozdulása, és így nyúlása is. Ehhez a két dimenziós próbatesten felrajzolt rácsot használtam fel, abból is a kívülről második réteget, ezzel biztosítva az erő teljes átadódásának lehetőségét, más vonalak mentén ez nem lenne egyértelmű. Ezek után

egy külső és belső illesztést végeztem, így alsó és felső közelítés állt rendelkezésre a középső szál nyúlásáról, ezen két érték átlagát tekintettem a becsült nyúlásnak adott munkapontra. Ezt mindkét tengely mentén elvégezve ismét számtani közepet vettem, így kaptam meg a végleges nyúlásértékeket adott időpillanathoz, ahogy a négy erőjelből is hasonlóan felépítettem a végső értéket, és abból az egydimenziós mérnöki feszültséget kiszámítva rendelkezésre állt a mérésre a mérnöki feszültség-nyúlás görbe. Egy ilyen pontbeli számításhoz használt ábra látható a 5.19 ábrán.



5.19. ábra. A kéttengelyű mérés nyúlásszámításához használt módszer ábrázolása egy rögzített képen.

A számítások során a mérnöki nyúlást, feszültséget és alakváltozást alkalmaztam. Ezek az alábbi módon számíthatóak:

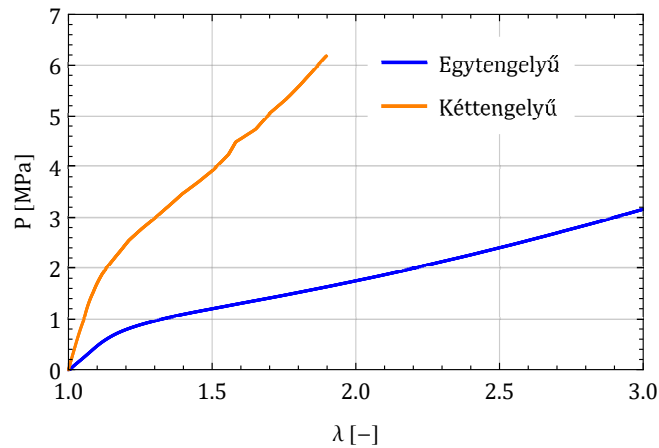
$$P = \frac{F}{A_0}, \quad \lambda = 1 + \frac{u}{L_0}, \quad \varepsilon = \frac{u}{L_0}. \quad (5.11)$$

Mint már korábban szóba került, a mérnöki mérőszámok a kezdeti geometriai mennyiségeket használják fel az értékek kiszámításához, így A_0 a kezdeti keresztmetszet területe, míg L_0 a kezdeti hosszúságot jelöli, F a pillanatnyi erő, u a pillanatnyi homogén területen mért elmozdulás nagysága.

Az említett mennyiségeket a fényképek alapján lehet mérni, azokon pontosan lehet meghatározni a befogófejek elmozdulását, valamint a nyúlásszámítás alapjául is szolgál. A fényképeken lehetőség nyílik a homogén részek mérésére is, így az alakváltozást és nyúlást a keresett régióon belül tudjuk azonosítani, illetve párosítani az abban az állapotban mért erőjelek kapcsán. A mérések során a középső szál nyúlását mértem mind egytengelyű, mind pedig kéttengelyű próbatest esetén. Ezáltal egy homogén területen belül értelmeztem a mérési eredményeket, melyek sokkal pontosabb és hasznosabb információt szolgáltatnak a további számításokhoz, értve ez alatt az illesztést is. Megjegyzendő, hogy jelen mérés közelítést is tartalmaz, mert

a homogén zónát nem szenzorok jelölik ki, ugyanakkor az alakváltozást figyelve megfelelőnek talált régió vizuálisan igazolja ezen közelítés jóságfokát. Ezzel együtt egy folytonos változást feltételezve definiálni lehet egy nyúlás-idő függvényt, mellyel a homogén nyúlások és erőértékek megfeleltethetők lesznek egymásnak.

A mérésekből származó mérnöki nyúlás - mérnöki feszültség diagramok a 5.20 ábrán szerepelnek a két kísérletre vizsgálva.



5.20. ábra. A saját mérésekből származó eredmények.

Ezen adatsort használok a következőkben az illesztésekre.

5.3. Illesztés saját mérési eredményekre

Az előzőekben bemutatott mérési eredményekre is elvégeztem az illesztést, ezáltal a szilikon anyagra képeztem az anyagmodelleket.

A numerikus illesztésekre a következőkben szintén a számtani közepet használtam a hibaszámításokhoz, ám ellentétben a korábbi adatsorral, itt csak kétféle mérésünk volt, így azon két mérést használtam csak az illesztéshez, keresztirányban gátolt egytengelyű eset nincs definiálva a modell illesztéséhez.

5.3.1. Ogden-féle modell

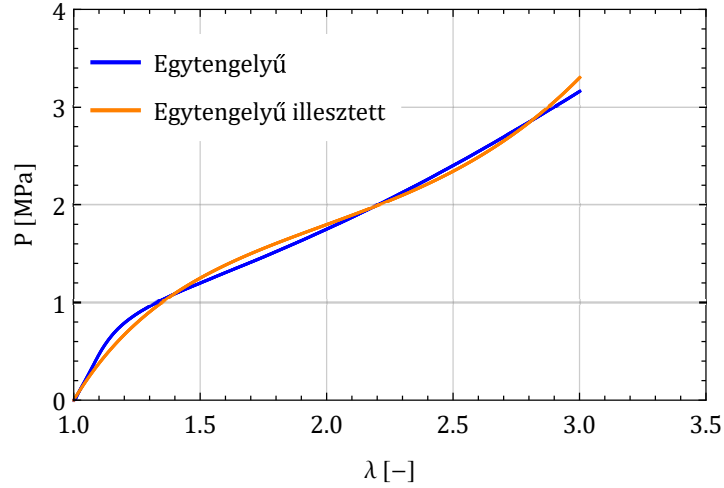
A másodrendű Ogden-féle modell a következő paraméterekkel került meghatározásra az illesztés során.

$$C_1 = 1,41387 \text{ [MPa]}, \quad C_2 = 0,508764 \text{ [1]}, \quad C_3 = 0,0141873 \text{ [MPa]}, \quad C_4 = 6,25645 \text{ [1]}. \quad (5.12)$$

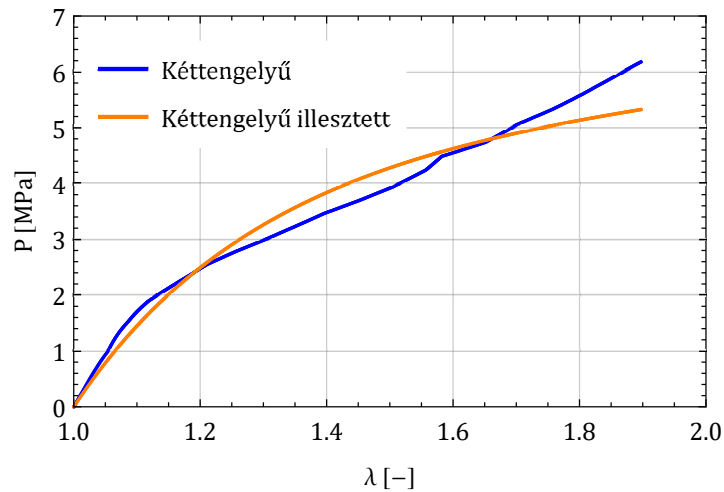
A hibafüggvények értékei a következők voltak.

$$Q = 10,1411 \text{ [\%]}, \quad Q_U = 10,7929 \text{ [\%]}, \quad Q_B = 9,48923 \text{ [\%]}. \quad (5.13)$$

Az illesztések megtekinthetők a 5.21-5.22 ábrákon.



5.21. ábra. Illesztés egytengelyű húzásra Ogden-féle modell esetén saját adatokkal.



5.22. ábra. Illesztés kéttengelyű húzásra Ogden-féle modell esetén saját adatokkal.

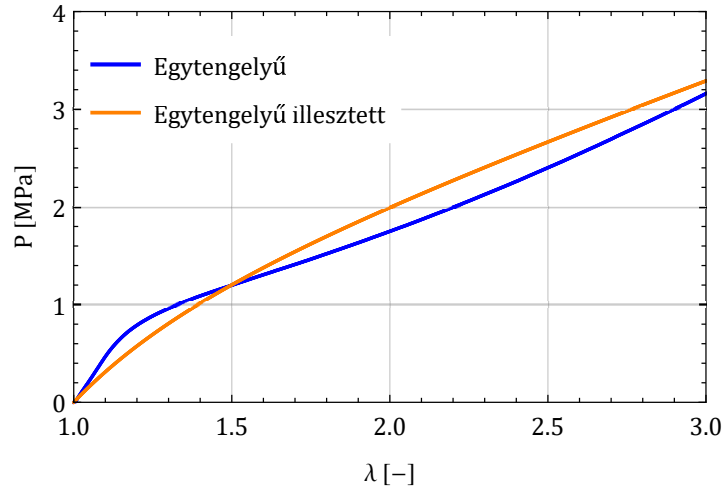
5.3.2. Arruda-Boyce-féle modell

Az Arruda-Boyce-féle modell illesztésére a következő eredményre jutunk.

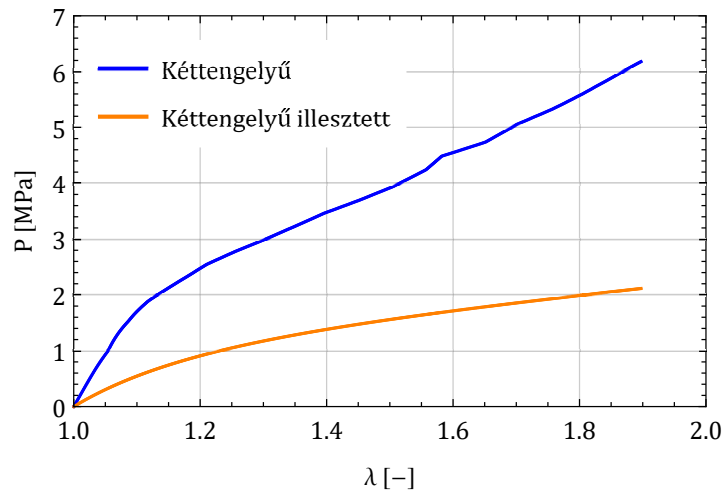
$$C_1 = 1,13891 \text{ [MPa]}, \quad C_2 = -104156 \text{ [1]}. \quad (5.14)$$

$$Q = 39,402 \text{ [\%]}, \quad Q_U = 15,3803 \text{ [\%]}, \quad Q_B = 63,4238 \text{ [\%]}. \quad (5.15)$$

Ezen modell illesztett görbéi a 5.23-5.24 ábrákon láthatóak.



5.23. ábra. Illesztés egytengelyű húzásra Arruda-Boyce-féle modell esetén saját adatokkal.



5.24. ábra. Illesztés kéttengelyű húzásra Arruda-Boyce-féle modell esetén saját adatokkal.

5.3.3. Polinom modell

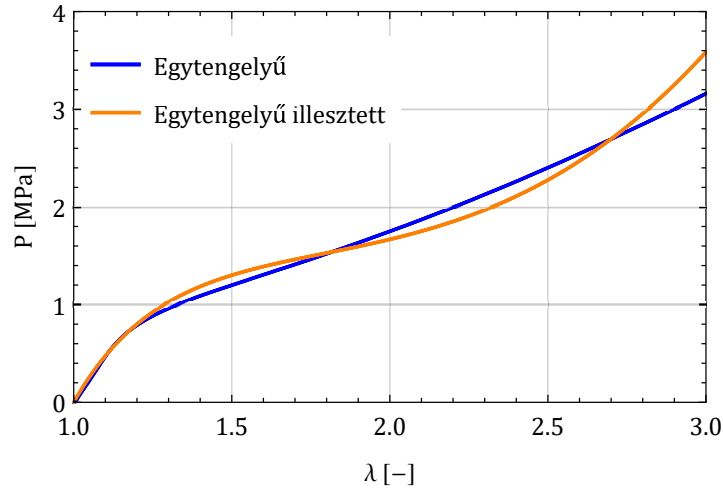
A polinom modell is illeszthető, ez a következő paraméterekre és hibaértékekre futott ki.

$$\begin{aligned} C_{10} &= 0,0290109 \text{ [MPa]}, & C_{01} &= 0,926484 \text{ [MPa]}, & C_{20} &= 0,0895543 \text{ [MPa]}, \\ C_{11} &= -0,181826 \text{ [MPa]}, & C_{02} &= 0,0281267 \text{ [MPa]}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

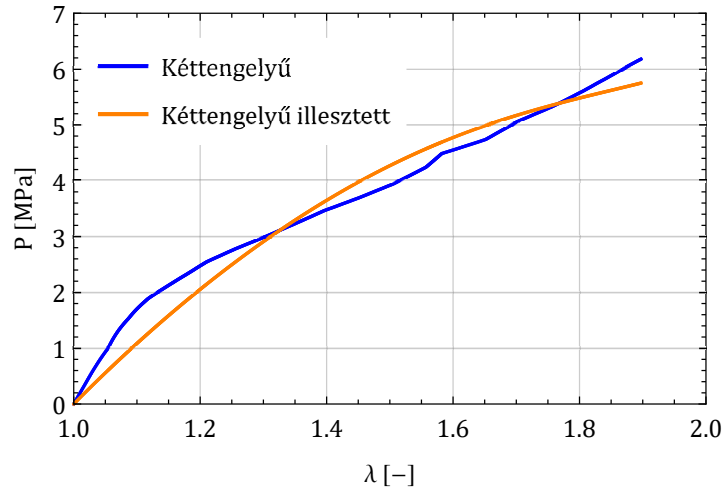
A hibafüggvények a következők lettek.

$$Q = 16,8864 \text{ [\%]}, \quad Q_U = 15,0046 \text{ [\%]}, \quad Q_B = 18,7683 \text{ [\%]}. \quad (5.17)$$

Ezekre görbét illesztve a 5.25-5.26 ábrákon látható eredményt kaphatjuk.



5.25. ábra. Illesztés egytengelyű húzásra polinom modell esetén saját adatokkal.



5.26. ábra. Illesztés kéttengelyű húzásra polinom modell esetén saját adatokkal.

5.3.4. Havasi-Kossa-féle modell

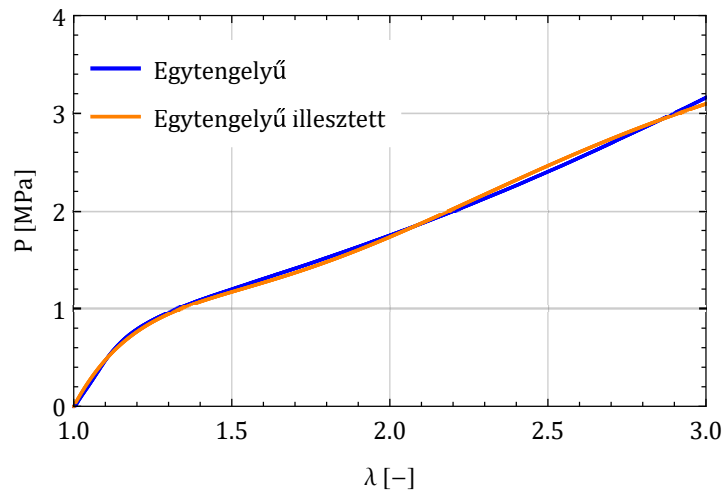
Végül, de nem utolsó sorban az új modellt is illesztettem saját mérési adatsoromra. Ebből a következő eredményekre jutottam.

$$C_1 = 2,13625 \text{ [MPa]}, \quad C_2 = -0,38046 \text{ [1]}, \quad C_3 = 0,362662 \text{ [MPa]}, \quad C_4 = 4,3547 \text{ [1]}. \quad (5.18)$$

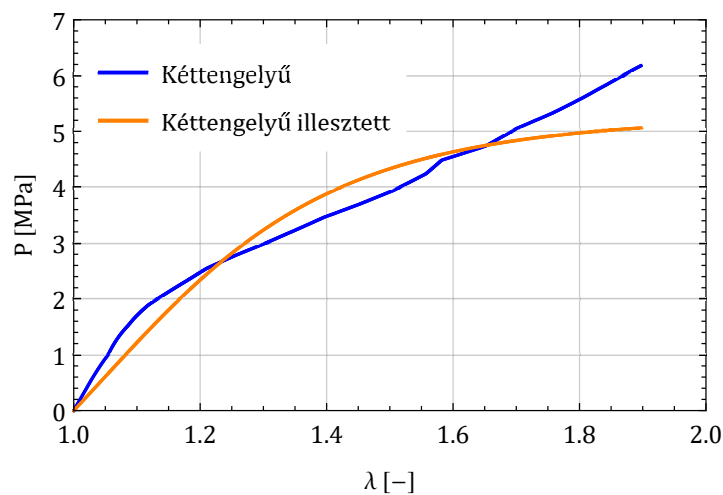
A hibafüggvények értékei a következők voltak.

$$Q = 15,5993 \text{ [%]}, \quad Q_U = 14,9227 \text{ [%]}, \quad Q_B = 16,2759 \text{ [%]}. \quad (5.19)$$

Az ezen paraméterekkel illesztett modell görbéi a mérési adatokkal összevetve a 5.27-5.28 ábrákon tekinthetők meg.



5.27. ábra. Illesztés egytengelyű húzásra Havai-Kossa-féle modell esetén saját adatokkal.



5.28. ábra. Illesztés kéttengelyű húzásra Havai-Kossa-féle modell esetén saját adatokkal.

6. UHYPER kód

A UHYPER kód egy felhasználói Fortran nyelven írt szubrutin, mely az ABAQUS végelemes szoftverhez készült sablon alapján tetszőleges anyagra megírható, és általa bármely ismert hiperelasztikus modell használható a szoftverben, amelyhez a felhasználó elkészíti a szükséges scriptet.

A hagyományos modellek elérhetőek a szoftveren belül, azokhoz nincs szükség ily módon implementálni a modell viselkedését, azonban az újonnan javasolt modell használatához szükséges az előbb említett szubrutin használata, hogy a szoftver értelmezni tudja ezen anyagmodellünket.

Az ilyen modell előállításához az alakváltozási energiasűrűség függvény deviátoros része, illetve néhány általa definiált mennyiség szükséges.

Ezeket rövidien összefoglalva összenyomhatatlan esetre, ahol a harmadik skalár invariáns értéke

nulla, a következő összefüggések szükségesek:

$$\begin{aligned}
U(1) &= W^{H-K} = C_1(e^{C_2(I_1-3)} - 1) + C_3(I_1 - 3) + C_4 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right), \\
UI1(1) &= \frac{\partial W^{H-K}}{\partial I_1}, \\
UI1(2) &= \frac{\partial W^{H-K}}{\partial I_2}, \\
UI2(1) &= \frac{\partial^2 W^{H-K}}{\partial I_1^2}, \\
UI2(2) &= \frac{\partial^2 W^{H-K}}{\partial I_2^2}, \\
UI2(4) &= \frac{\partial^2 W^{H-K}}{\partial I_1 \partial I_2}.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Minden más elem, amelyre szükség lehetne nulla lesz a térfogati összenyomhatatlanság miatt, ezen összefüggésekre egyszerűsödik a definiált modellünk.

Az összenyomhatatlan hiperelasztikus modellt kódoltam le, ezáltal a szoftver egy olyan esetet tud lekezelni, ahol a térfogati alakváltozás értéke egy ($J = 1$). Ezen kódot tartalmazza a 6.1 ábra.

```

SUBROUTINE UHYPER(BI1,BI2,AJ,U,UI1,UI2,UI3,TEMP,NOEL,CMNAME,
1 INCMPLFLAG,NUMSTATEV,STATEV,NUMFIELDV,
2 FIELDV,FIELDVINC,NUMPROPS,PROPS)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
CHARACTER*80 CMNAME
DIMENSION UI1(3),UI2(6),UI3(6),STATEV(*),FIELDV(*),
1 FIELDVINC(*),PROPS(*)
C
PARAMETER (ZERO=0.0D0,ONE=1.0D0,TWO=2.0D0,THREE=3.0D0)
C
C1=PROPS(1)
C2=PROPS(2)
C3=PROPS(3)
C4=PROPS(4)
C
U=C1*(EXP(C2*(BI1-THREE))-ONE)+C3*(BI1-THREE)+C4*LOG(BI2/THREE)
UI1(1)=C1*C2*EXP(C2*(BI1-THREE))+C3
UI1(2)=C4/BI2
UI1(3)=ZERO
UI2(1)=C1*C2*C2*EXP(C2*(BI1-THREE))
UI2(2)=-C4/BI2/BI2
UI2(3)=ZERO
UI2(4)=ZERO
UI2(5)=ZERO
UI2(6)=ZERO
UI3(1)=ZERO
UI3(2)=ZERO
UI3(3)=ZERO
UI3(4)=ZERO
UI3(5)=ZERO
UI3(6)=ZERO
RETURN
END

```

6.1. ábra. Az elkészített Fortran szubrutin.

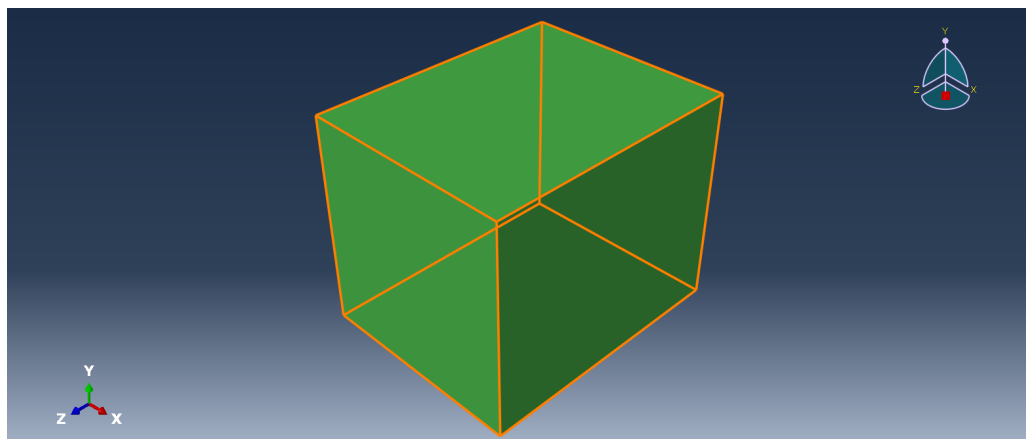
7. VEM szimulációk

A VEM szimulációk során a saját adatokra kapott eredményekkel futtattam a UHYPER szubrutint. Több szimulációt is készítettem, ezek eredményeit foglalom itt össze.

7.1. Egy elemes ellenőrzés

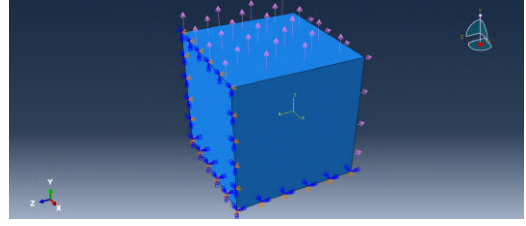
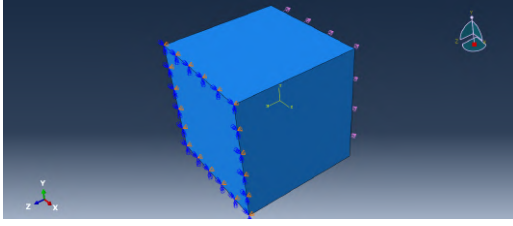
Először csak egyetlen elemen futtattam szimulációt, ahol az egytengelyű és kéttengelyű húzáshoz tartozó peremfeltételeket írtam elő egy 1x1x1-es kockára. Ezek alapján ellenőrizhető az analitikus és ezen numerikus megoldás hasonlósága, kielégítősege, ugyanakkor nem kívánok mélyen belevetni magam egy ilyen kiértékelési feladatba, hiszen a dolgozat célja elsődlegesen az új anyagmodell általános használhatóságának bemutatása. A szimulációk során összenyomhatatlan anyagmodellt használtam az új modellre illesztett paraméterekkel a 5.18 táblázat értékei alapján, ezen felül hibrid elemeket használtam az anyagmodell kielégítéséhez.

A hálózás igen egyszerű, hiszen maga a test egyetlen térfogati elem, melyet a 7.1 ábra mutat. A használt elemtípus a C3D8H elem volt.



7.1. ábra. A háló a testre.

Az egytengelyű modell esetén 5 [MPa] feszültséget írtam elő terhelésnek, míg a kéttengelyű szimulációhoz 4,5 [MPa] terhelésre ellenőriztem, ezen eseteket tengelyhelyesen a 7.2 ábrán lehet megtekinteni. A peremfeltételek az első esetben a húzottal átellenes oldal húzás irányú elmozdulásainak nullába kényszerítésével történt, a kéttengelyű esetben hasonlóan, mindkét húzási irányra megadtam a megfelelő oldalakra ezen feltételt.



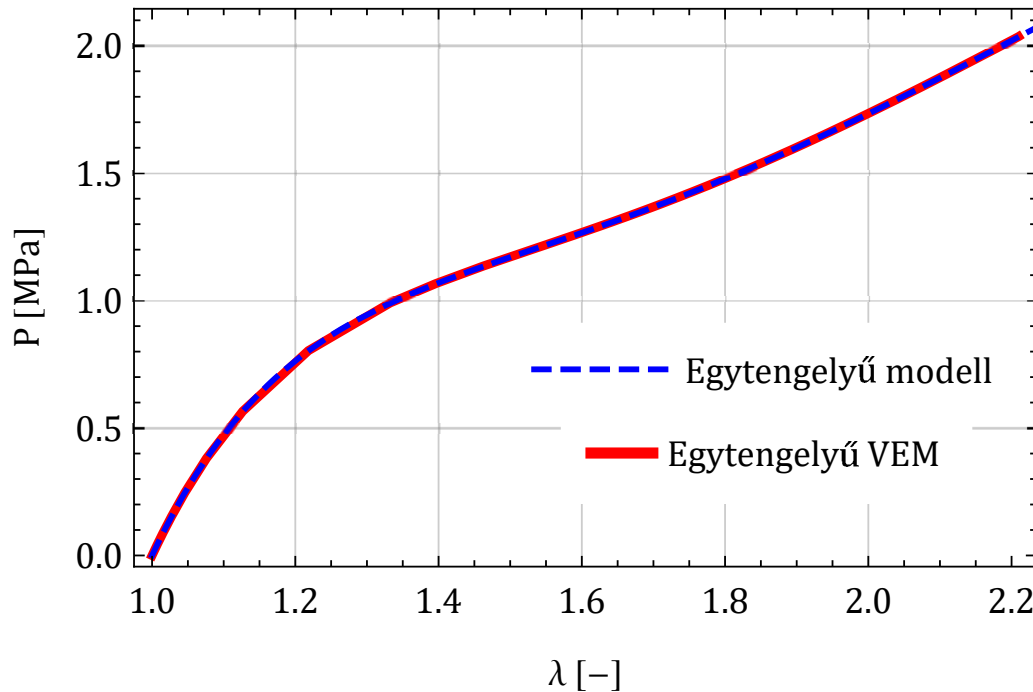
(a) A peremfeltételek az egytengelyű szimulációra. (b) A peremfeltételek az kéttengelyű szimulációra.

7.2. ábra. Terhelési esetek a modell validálásához.

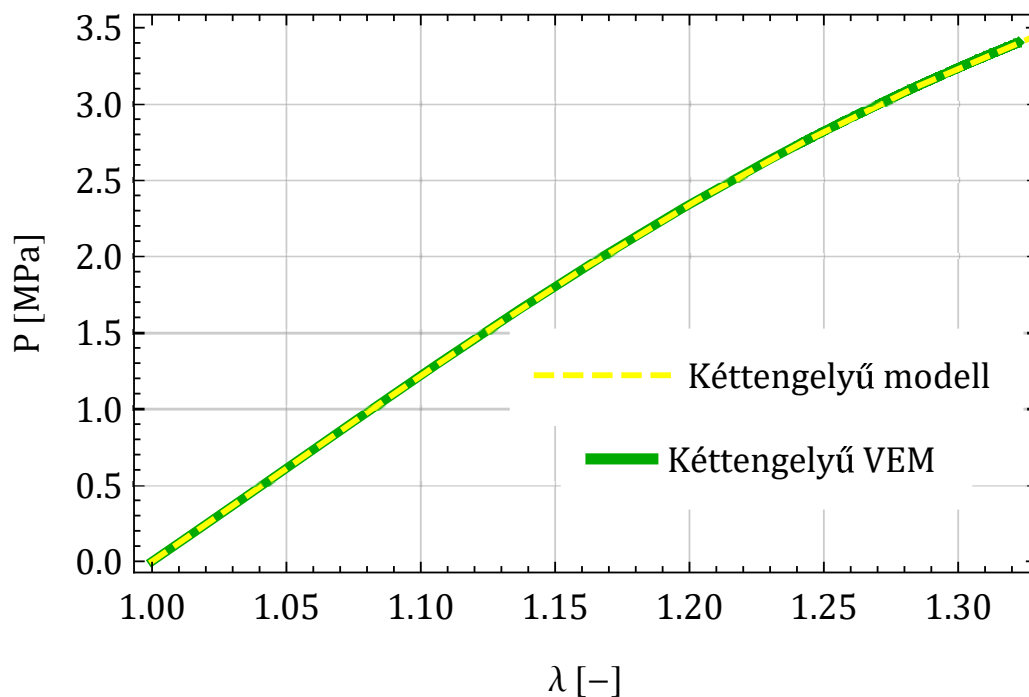
A szimulációt lefuttatva ki kell értékelnünk az eredményeket, ezeket egy *XY plot* paranccsal tettem meg. Az egytengelyű húzás során az alábbi eredményeket kaptam. A relatív nyúlást mérnöki mennyiségként olvastam ki, ugyanakkor a feszültségek a valós, Cauchy feszültségként lettek kiírva, így a számunkra használható mérnöki feszültségből a peremfeltételnek is előírt valós feszültséget a következőképpen kaphatjuk:

$$\sigma = P(\lambda) \cdot \lambda = P(1 + \varepsilon)\varepsilon. \quad (7.1)$$

A kapott eredményt összehasonlítva az illesztésekkel 5.27 és 5.28 ábrákról megtudhatjuk, mennyire használja pontosan a modellt a végeleemes szoftver. Erről látunk diagramokat 7.3 és 7.4 ábrákon.



7.3. ábra. Az egytengelyű viselkedés validálása.



7.4. ábra. Az kéttengelyű viselkedés validálása.

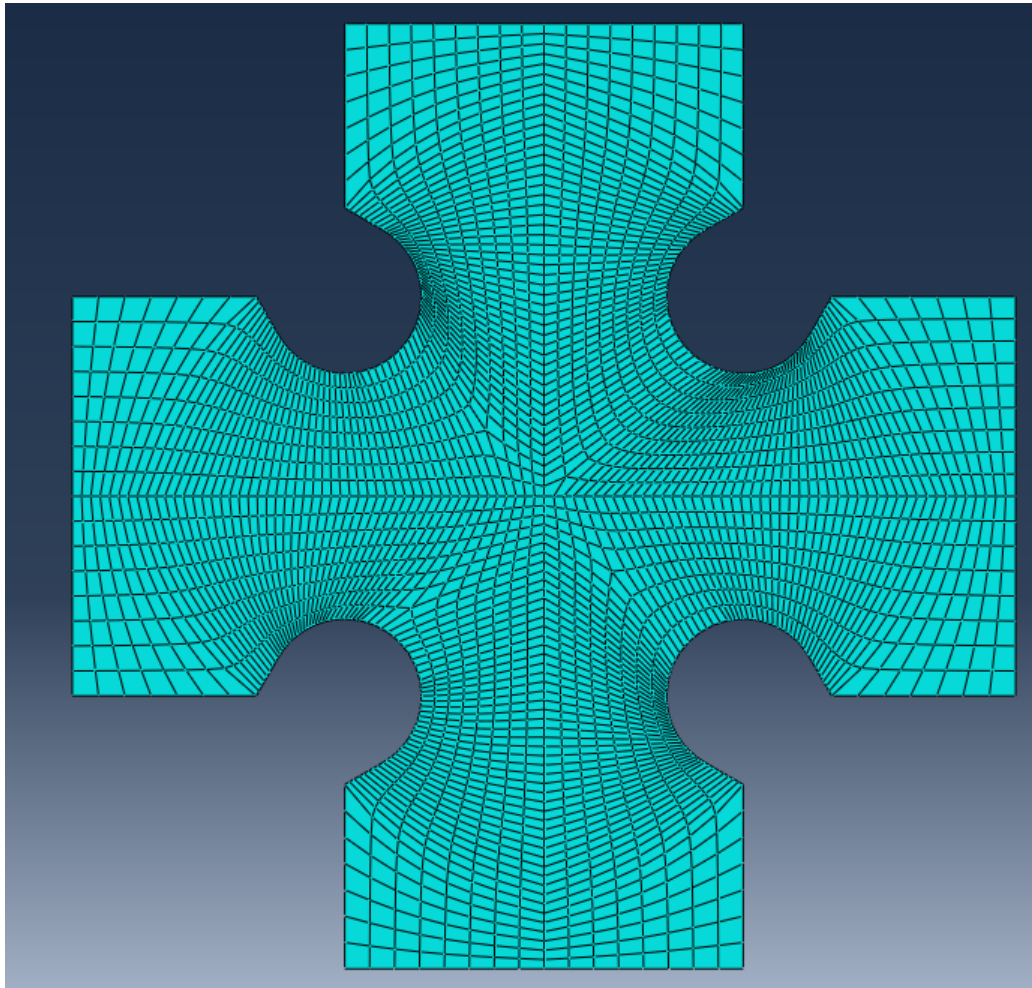
Jól láthatóan a két eset igen hasonlít az illesztett mérési eredményekhez, természetesen kisebb eltérésekkel, ugyanakkor ezek várhatóak, hiszen az paraméterek illesztése is hibával terhelt, és a numerikus szimuláció során is adódnak pontatlanságok, mindezek ellenére a modell közel leköveti a mérési eredményeket, így az implementáció sikeresnek tekinthető.

7.2. Kéttengelyű eset

A kéttengelyű esetben egy relatív bonyolult geometria szerepelt a kísérletben, így annak szimulációját is külön futtattam. Ezzel ellenőrizhető a homogén zóna megléte a terhelés hatására feszültségmező segítségével.

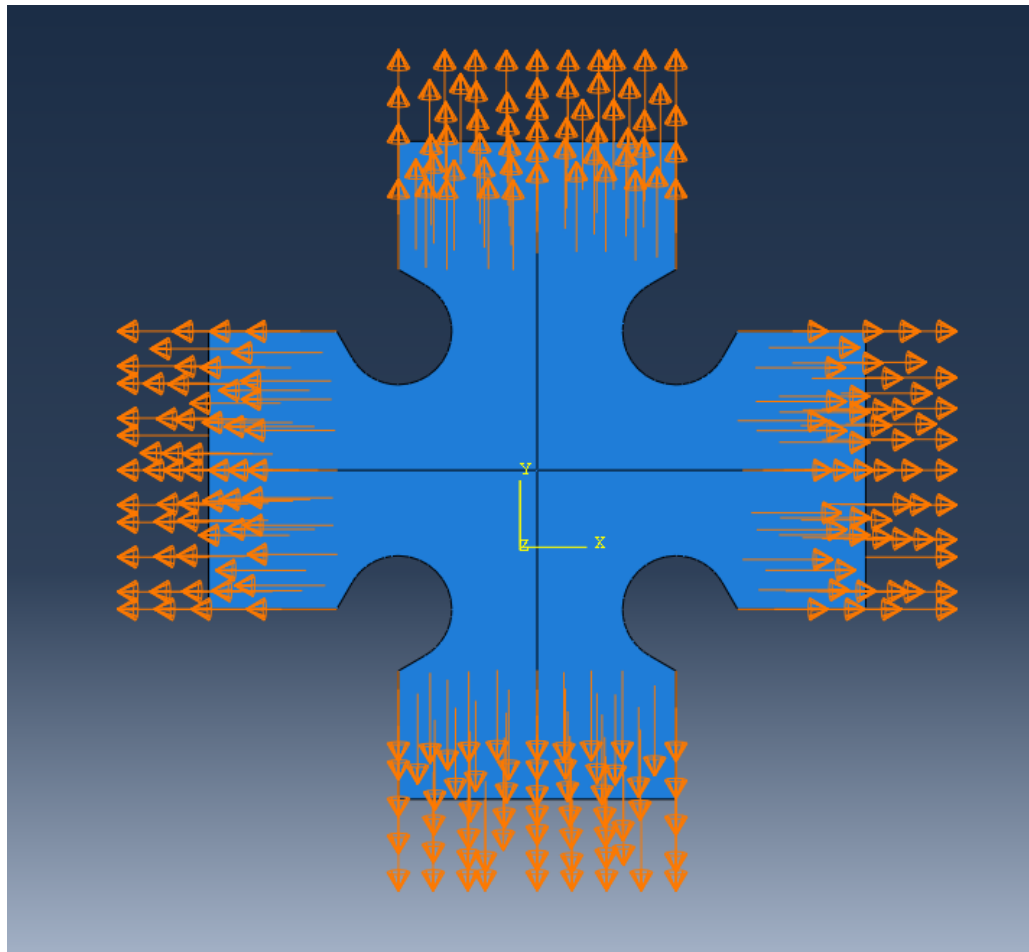
A modellezés során a teljes geometriát definiáltam kétdimenziós elemekkel, bár lehetne csak egy szegmensét, hiszen több szimmetria is kihasználható lenne számunkra, a teljesség és a jobb szemléltetés kedvéért az egész geometriára végzem el a szimulációkat.

A hálózás után a két dimenzióban definiált próbadarabunk a háló a következő formát ölti, melyet a 7.5 ábra szemléltet. Összesen 10714 elemet hozott létre a hálózó. A hálóra a CPS4 elemet alkalmaztam a végelelemes modell definiálásához a Havasi-Kossa modell saját mérési eredményeimre illesztett paramétereivel 5.18.



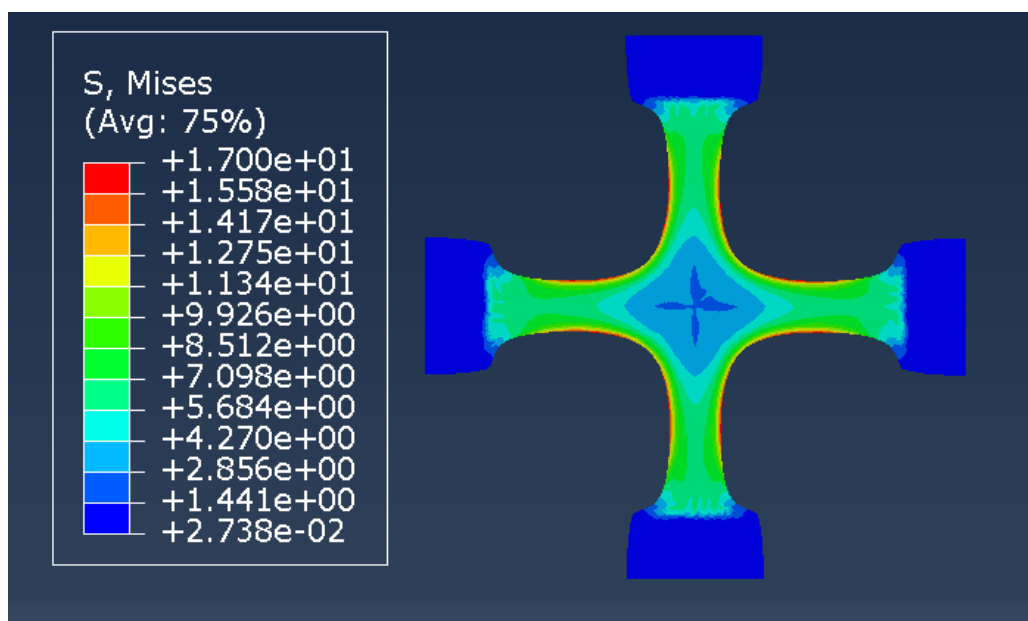
7.5. ábra. A kereszt próbadarab hálózása.

Terhelésként a kísérletnél is kontrollált elmozdulásokat írtam elő, 50 [mm]-t minden karra, így tengelyenként 100 [mm] elmozdulás tapasztalható. A valós befogást tükrözve én is a modell karjának teljes fejrészére alkalmaztam a peremfeltételt, ami a 7.6 ábrán látható.



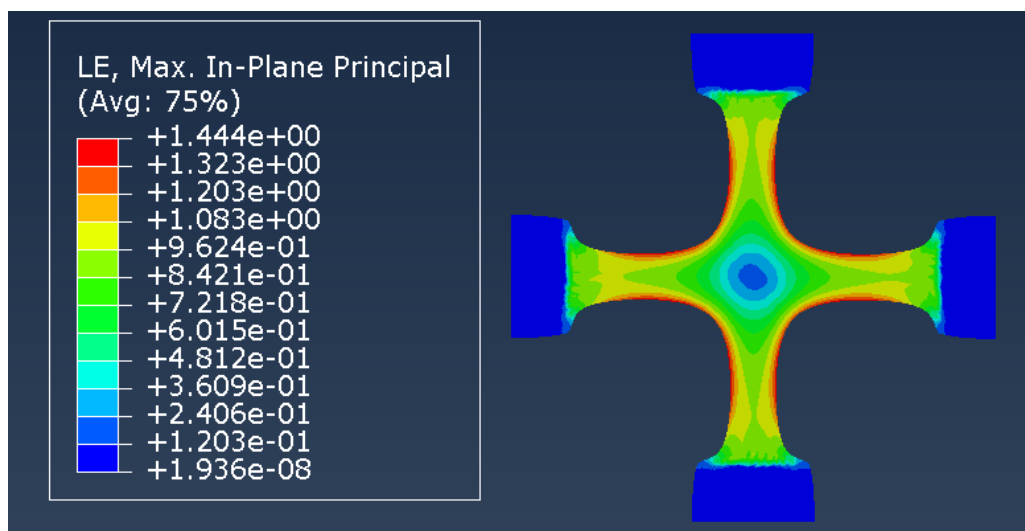
7.6. ábra. A peremfeltételek megadása a modellre.

Ezen szimuláció eredménye esetünkben a következőre adódik. Az eredmények a 7.7 ábrán tekinthetők meg.



7.7. ábra. A HMH-féle egyenértékű feszültség eloszlása.

Megtekinthetjük a valós nyúlás szerkezeten belüli eloszlását is, ez a 7.8 ábrán szerepel.



7.8. ábra. A legnagyobb logaritmikus alakváltozás eloszlása.

Látható, hogy a feszültség és alakváltozás értékek is a középső területen egy közel homogén tartományt alkotnak, míg a lekerekítéseknél a széleken sokkal nagyobb feszültségek jelennek meg. Ezek alapján további mérések és szimulációk segítségével részleteiben is lehetne ezzel foglalkozni, milyen megfeleltetés létezik a valóság és a numerikus modell között, illetve lehetne-e ezek alapján egy optimalizációt alkalmazni.

8. Összefoglaló

Az új modell implementálásának alapötletét lényegében egy irodalmi áttekintés adta, az alapján hoztam létre, mely során két kedvező tulajdonságú, zárt alakú hiperelasztikus modell összegeként definiáltam az általam generáltat. Ezen folyamat útján a két modell pozitív tulajdonságai erősítették egymást, ezáltal alkalmas a Havasi-Kossa-féle modell egy általánosabb használatra, valamint pontosabb illesztésre.

Mint látható volt 5.9 és 5.12 ábra alapján az új modell mind numerikusan, mind alakra jobban illeszkedik az adatsorra, mint a többi, korábban bevezetett modellek. A saját mérési eredmények alapján illesztett modellek közül az Ogden-féle modell enyhén jobb numerikus eredményt adott, ám az illesztési görbéket tekintve nem követi olyan jól a mérési adathalmaz tendenciáját, mint az új modell.

A mérések útján sikerült egy új, illesztésre használható adathalmazra szert tenni, mely jól láthatóan lényegesen eltér az általánosságban használt Treloar adatsortól, ez valószínű, hogy az anyagok különbségéből adódik, hiszen Treloar vulkanizált gumival kísérletezett, nem pedig szilikonnal. A kísérletek mindazonáltal egy későbbi időpontban megismétlendők, a mérési

adatok és a szilikon anyag újbóli mérésével visszaellenőrizhető a mérési pontosság és kivitelezési minőség közeli egyezés esetén.

A végeselemes tesztek átnézve kijelenthetjük, hogy a modell nem csak elméletben, de alkalmazásban is ki lett próbálva, ezáltal egy teljesebb képet alkotva annak viselkedéséről. Ezen felül a felhasználói szubrutin nyújtotta lehetőségek által egy általános implementálása is született a modellnek, mely segítségével egy illesztési feladat elvégzése után a szükséges paraméterek ismeretében könnyen és gyorsan alkalmazható lesz ezen kidolgozott és implementált új hiperelasztikus anyagmodell.

További fejlesztési lehetőség ezen területen térfogatilag összenyomhatóság implementálása a modellbe, ám ez most nem volt célja a dolgozatnak, jelen helyzetben az új anyagmodell felépítése és implementálása volt a cél.

Összefoglalva az új anyagmodell képes volt jobb illeszkedést produkálni, mint az általánosan használt és elfogadott másodrendű Ogden-féle modell, mely szintén négy paramétert tartalmaz, valamint az egyel több, öt paraméteres másodrendű polinom modellnél is pontosabb eredményeket produkált, a két paraméteres Arruda-Boyce-féle modelltől nem is beszélve, melyet szintén felülmúlt. Ezek és a szimulációk alapján ezen új modell ténylegesen alkalmas hiperelasztikus anyagok modellezésére.

Mindezek mellett megjegyezném, hogy az új modell szinte minden esetben jobban illeszkedett a mérési eredményekre, mint versenytársai, egyetlen esetben maradt csak alul, a saját méréseimre illesztett Ogden-féle anyagmodell esetén, ugyanakkor azt láthattuk a 5.3 ábra esetéből, hogy a nagy alakváltozásokhoz tartozó karakterisztikákat nem tudja ideálisan lekövetni, míg a saját modellem ezen alapokon nyugszik, így egy későbbi, nagyobb nyúlásokat is vizsgáló mérés elvégzésével valószínűnek tartom, hogy ismét egy hasonló tendencia mutatkozna a két modell között, mint azt a Treloar adatok esetén is tapasztaltuk.

További kitekintésként ezen anyagmodellt tovább lehetne fejleszteni, hogy ne csak hiperelasztikus viselkedést írjon le, hanem akár viszko-hiperelasztikus anyagokra is alkalmazható legyen. Továbbá érdemes lenne a modellt ABAQUS-ban egy további szubrutin segítségével is implementálni, például egy UMAT szubrutin keretein belül, mely nagyobb szabadságot ad a felhasználónak tetszőleges anyagi viselkedést leíró anyagmodellek definiálásában.

Ezen felül tervezek egy végeselemes optimalizálást is tervezni, ahol az illesztett görbe végeselemes eredményeiből szeretnék egy iterációt felépíteni, ez is nagyban hozzájárulhatna a későbbi számításokhoz, illetve a globális optimum felkutatásához az újonnan kifejlesztett anyagmodellre.

9. Köszönetnyilvánítás

Szerző köszönetét fejezi ki az NKFIH FK 142457 projekt keretében kapott támogatásért.

Szerző köszönetét fejezi ki Dr. Bachrathy Dánielnek a kéttengelyű szakítógépes mérések kivitelezésében nyújtott segítségért.

Külön köszönet illeti a BME Gép- és Terméktervezés Tanszékét a próbatestek kivágásában nyújtott segítségért.

A Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-I-BME-65 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI
ÉS INNOVÁCIÓS HIVATAL



Új Nemzeti
Kiválóság Program

Irodalomjegyzék

- [1] Admet. Kéttengelyű próbatestek, 2022 (Megtekintve November 6, 2022). <https://www.admet.com/planar-biaxial-testing-guide/>.
- [2] Ellen M Arruda and Mary C Boyce. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(2):389–412, 1993.
- [3] Dr. Kossa Attila. Kontinuummechanika jegyzet, 2022 (Megtekintve November 6, 2022). <https://www.mm.bme.hu/~kossa/segedletek/cmech/Kossa-ContMech-Lectures-2013-Fall.pdf>.
- [4] Gym Beam. Cross band level 4 erősítő gumiszalag - gymbeam, 2022 (Megtekintve November 6, 2022). <https://gymbeam.hu/cross-band-level-4-gymbeam.html>.
- [5] Jorgen S Bergstrom. *Mechanics of solid polymers: theory and computational modeling*. William Andrew, 2015.
- [6] D.C. Drucker, BROWN UNIV PROVIDENCE R I., United States. Office of Naval Research, and Brown University. Division of Engineering. *On the postulate of stability of material in the mechanics of continua*. Technical report (Brown University. Division of Engineering). Division of Engineering, Brown University, 1963. URL <https://books.google.hu/books?id=uX8QHAAACAAJ>.
- [7] Alan N Gent and AG Thomas. Forms for the stored (strain) energy function for vulcanized rubber. *Journal of Polymer Science*, 28(118):625–628, 1958.
- [8] Hong He, Qiang Zhang, Yaru Zhang, Jianfeng Chen, Liquan Zhang, and Fanzhu Li. A comparative study of 85 hyperelastic constitutive models for both unfilled rubber and highly filled rubber nanocomposite material. *Nano Materials Science*, 4(2):64–82, 2022. ISSN 2589-9651. doi: <https://doi.org/10.1016/j.nanoms.2021.07.003>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2589965121000490>. Trends in Nanomaterials and Nanocomposites: Fundamentals, Modelling and Applications - Part A.
- [9] Gerhard A Holzapfel. Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering science. *Meccanica*, 37(4):489–490, 2002.
- [10] JD Humphrey and FC Yin. On constitutive relations and finite deformations of passive cardiac tissue: I. a pseudostrain-energy function. *Journal of biomechanical engineering*, 109(4):298–304, 1987.
- [11] Balaji Industries. Automotive parts plastic thermoplastic elastomer component, 2022 (Megtekintve November 6, 2022). <https://www.indiamart.com/proddetail/thermoplastic-elastomer-component-21361740230.html>.

- [12] Bondex Kft. Termék anyaga, 2022 (Megtekintve November 6, 2022). <https://www.szilikontermekek.hu/szilikon-lemez/800x600-mm-szilikon-lemez/800x600x2-mm-es-szilikon-lemez>.
- [13] Bondex Kft. Anyag jellemzők, 2022 (Megtekintve November 6, 2022). <https://szilikongumi.com/melegen-vulkanizalt-szilikon-jellemzoi/>.
- [14] Diogo Montalvão and Andrew Wren. Redesigning axial-axial (biaxial) cruciform specimens for very high cycle fatigue ultrasonic testing machines. *Heliyon*, 3(11):e00466, 2017. ISSN 2405-8440. doi: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2017.e00466>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405844017319138>.
- [15] Raymond William Ogden. Large deformation isotropic elasticity—on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 326(1567):565–584, 1972.
- [16] Wolfram Research. Wolfram mathematica 12 documentation, 2022 (Megtekintve November 6, 2022). <https://reference.wolfram.com/language/>.
- [17] B de Saint-Venant et al. Mémoire sur la torsion des prismes. *Mémoires des Savants étrangers*, 14(233):560, 1855.
- [18] Paul Steinmann, Mokarram Hossain, and Gunnar Possart. Hyperelastic models for rubber-like materials: Consistent tangent operators and suitability for treloar’s data. *Archive of Applied Mechanics*, 82, 09 2012. doi: 10.1007/s00419-012-0610-z.
- [19] Dassault Systèmes. Abaqus 6.6 dokumentáció, 2022 (Megtekintve November 6, 2022). <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/stm/default.htm?startat=ch04s06ath123.html>.
- [20] L. R. G. Treloar. Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation. *Trans. Faraday Soc.*, 40:59–70, 1944. doi: 10.1039/TF9444000059. URL <http://dx.doi.org/10.1039/TF9444000059>.
- [21] Wikikwand. Kéttengelyű kísérleti segédlet, 2022 (Megtekintve November 6, 2022). https://www.wikiwand.com/en/Biaxial_tensile_testing.
- [22] Kunmin Zhao, Liangyu Chen, Rui Xiao, Zhiyang Ding, and Lihua Zhou. Design of a biaxial tensile testing device and cruciform specimens for large plastic deformation in the central zone. *Journal of Materials Science*, 54, 05 2019. doi: 10.1007/s10853-019-03358-2.