

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR
MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK

GÁCSI LÁSZLÓ
TDK Dolgozat

Haszonjárművek biztonságkritikus szabályzása osztott
tapadású felületen

Egyetemi konzulens:

Kiss Ádám

Tudományos segédmunkatárs

Külső konzulens:

Tabajdi Máté Zoltán

Tesztmérnök

BUDAPEST, 2022

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás	IV
1. Bevezetés	1
1.1. Kiinduló probléma	1
1.2. Szakirodalmi áttekintés	3
1.3. Cél megfogalmazása	4
1.3.1. Szabályzási módszer	4
1.3.2. Fékszabályzó felépítése	5
1.3.3. Sofőr felépítése	5
2. Dinamikai rendszer	6
2.1. Járműmodell	6
2.2. Kerékmodell	11
2.2.1. Longitudinális erő	12
2.2.2. Laterális erő	12
2.2.3. Kombinált modell	14
2.3. Sofőrmodell	17
2.3.1. Look-ahead sofőrmodell	17
2.3.2. Stabilitásvizsgálat időkésés nélkül	18
2.3.3. Stabilitásvizsgálat időkéséssel	22
3. Biztonságkritikus szabályzás	25
3.1. Elméleti háttér	25
3.2. Alkalmazás saját feladatra	28
3.2.1. CBF meghatározása	28
3.2.2. Szabályozójel	30
3.3. Módszer korlátjai	32
3.3.1. Nem-affin dinamikai rendszer	32
3.3.2. Disturbance	32
3.3.3. Szingularitás	33
3.3.4. Input constraint	34

4. Szimuláció felépítése	35
4.1. Fékezés folyamata	35
4.1.1. Fékezés kezdete osztott tapadású felületen	35
4.1.2. Fékezés kezdete osztott tapadású felület előtt	36
4.2. Kerékerők meghatározása	37
4.2.1. Névleges fékezőerők	37
4.2.2. Maximális laterális erők	38
4.3. Szabályozóparaméterek megválasztása	39
4.3.1. Sofőr erősítési tényezői	39
4.3.2. Biztonságkritikus szabályzás paraméterei	40
5. Eredmények	41
5.1. Kiinduló adatok	41
5.1.1. Járműspecifikus paraméterek	41
5.1.2. Sofőr attribútumai	41
5.1.3. Biztonságkritikus szabályzó paraméterei	42
5.1.4. Kezdeti értékek	42
5.2. Módszerek összehasonlítása	43
6. Összefoglalás	49
6.1. Elért célok	49
6.2. Jövőbeli fejlesztési lehetőségek	49
Irodalomjegyzék	51

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom a *Knorr-Bremse Fékrendszerek Kft.*-nek, hogy lehetőséget biztosított a TDK dolgozatom megírásához. Megkülönböztetett köszönetet szeretnék mondani *Dr. Hankovszki Zoltánnak*, akinek irányítása alatt rengeteget fejlődhettem, illetve olyan kutatási feladattal látott el, melyből ezúton TDK dolgozat készülhetett. Köszönettel tartozom továbbá *Tabajdi Máténak* is, aki ugyancsak figyelemmel kísérte kutatásomat és segített a dolgozat végső munkálataiban. Nem utolsó sorban szeretném megköszönni *Kiss Ádámnak* a heti konzultációk során nyújtott segítségét és töretlen biztatását.

Budapest, 2022

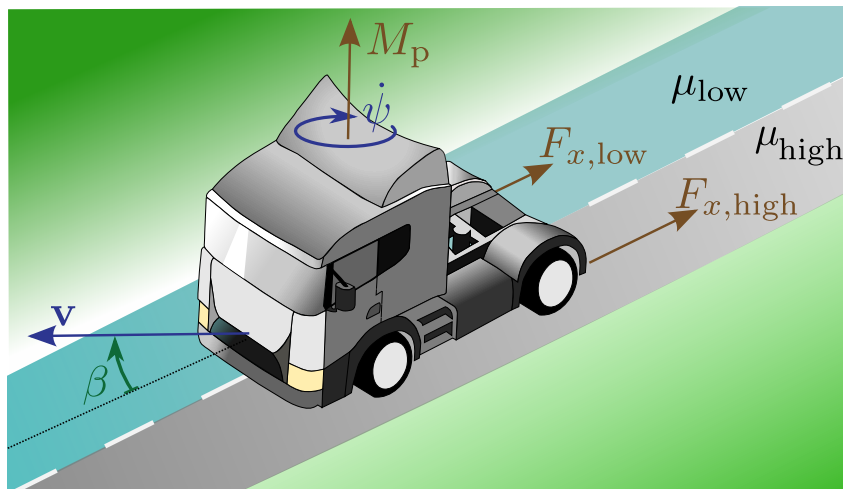
Gácsi László

1. Bevezetés

1.1. Kiinduló probléma

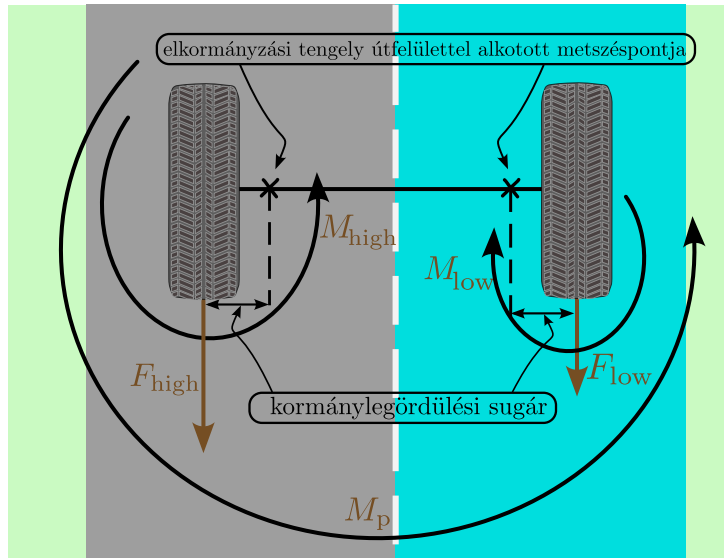
A járműszabályzás terén mind a sávtartás, mind az oldalirányú stabilitás biztosítása kiemelkedő mérnöki feladat, hiszen ezek nem megfelelő szabályzása balesethez vezethet. Míg az elmúlt években – az önvezetés megoldása végett – nagyobb számban az előbbi megoldására születtek különböző szabályzási módszerek, addig az utóbbi, oldalirányú (másnéven laterális) stabilitás biztosítása sem lebecsülhető, hiszen annak nemléte esetén a sofőr akár el is vesztheti a jármű irányíthatóságát. Klasszikus esetben a jármű longitudinális (haladás irányú) dinamikáját a gáz - illetve fékpedál lenyomásával, míg laterális dinamikáját a kormányval lehetséges befolyásolni. Ettől eltérő, és a sofőr számára meglepetéssel járó jelenség az osztott tapadású felületen történő fékezés [1], melyet a szaknyelv (a felületek eltérő súrlódási tényezője miatt) μ -split fékezésnek hív. Ekkor nem a kormánymozdulat, hanem a μ -split fékezés hatására jelenhetnek meg a kiperdüléshez vezető, kritikus sebesség értékek, melyre hagyományos sofőrök kevésbé, esetleg egyáltalán nincsenek felkészülve a szituáció ritkasága miatt.

Feltételezve, hogy a jármű rendelkezik ABS-szel (Anti-lock Braking System) és annak működésének köszönhetően minden kerék akár a saját felületén elérhető legnagyobb fékerővel fékez, az eltérő súrlódási viszonyok hatására a fékezőerőkülönbségből perdítőnyomaték jelenik meg, amely stabilitásvesztést eredményezhet, mely a jármű feletti kontroll elvesztését okozhatja. A mérési eredmények alapján a μ -split fékezés okozta stabilitásvesztéskor az 1.1 ábra alapján a jármű függőleges tengely körüli szögsebessége (*yaw rate*) és az oldalkúszási szöge kritikus mértékben megnőhet. Ezt alapvetően el lehet kerülni, ha nem engedjük, hogy a jármű ellentétes oldalai eltérő erővel fékezzenek - tehát ha mindkét oldal az alacsonyabb tapadású oldal fékerejével fékez -, ez azonban drasztikusan megnövekedett fékúttal jár együtt.



1.1. ábra. A μ -split fékezési szituáció közben fellépő dinamikai mennyiségek.

Ezenfelül, haszonjárművek számára (például kamion, teherautó, busz, stb.) a mérnöki életben még nagyobb kihívást jelent az említett probléma megoldása. Ennek okát a haszon - és személygépjárművek futóműveiben való eltérésében kell keresni. Az alapvető különbség a kormánylegördülési sugár előjelében jelenik meg [2], mely az elkormányzási tengely útfelülettel alkotott metszéspontja és a kerék felfekvési felületének középpontja közti előjeles távolság. Ennek hatása éppen az eltérő súrlódási felületen történő fékezésnél jelentkezik, hiszen a negatív kormánylegördülési sugár stabilizáló módon hat a kormányzásra; ezt a jelenséget nevezzük a jármű sajátkormányzásának. Viszont a haszonjárművek esetén pozitív kormánylegördülési sugárral rendelkező futóművek terjedtek el, mely ellentétes hatással bír: extra nyomatékkal még inkább a kiperdülés irányába sodorja el a járművet.



1.2. ábra. Pozitív kormánylegördülési sugár hatása jobb oldalon μ_{high} , bal oldalon μ_{low} súrlódási együtthatóval.

Az 1.2 ábrán látható egy tipikus haszonjármű egyik tengelyének sematikus ábrája felülnézetben. Ezek pozitív kormánylegördülési sugara – mely a fékezőerők erőkarja – a két különböző oldali kereken ellentétes értelmű nyomatékokat eredményez, melyek éppenséggel kiejtenék egymást, amennyiben a fékezőerők egyforma nagyságúak lennének. Viszont ebben az esetben:

$$M_{\text{perdülési}} + M_{\text{high}} + M_{\text{low}} > M_{\text{perdülési}}, \quad (1.1)$$

emiatt különösen veszélyes a μ -split szituáció haszonjárművek esetén, hiszen személygépjárművek esetén a kormánylegördülési sugár a perdítőnyomaték ellen dolgozna. Másrészt, létezik ennek a jelenségnek kedvező hatása is, mégpedig az úgynevezett *steering-by-braking*, tehát ellentétes oldalon lévő kerekek eltérő fékezése nyomán kormányozható a haszonjármű.

Vitathatatlan, hogy a fékerőkbe történő beavatkozáson keresztül ki kell segíteni a sofőrt annak érdekében, hogy képes legyen biztonságosan fékezni, elkerülvén a kiperdülést. Vi-

szont a kérdés az, hogy milyen szabályzást lenne érdemes választani ehhez a problémához. Ehhez ok-okozat mentén vizsgáljuk meg az alábbi következtetést:

$$F_{\text{high}} > F_{\text{low}} \longrightarrow |M_{\text{perdítő}}| > 0 \longrightarrow |\dot{\psi}_{\text{kritikus}}| > 0, |\beta_{\text{kritikus}}| > 0 \longrightarrow \text{kiperdülés} \quad (1.2)$$

Teljesen triviális megoldás lenne, hogyha az 1.1 ábrán látható, késsel jelölt mennyiségek értékeit 0-ra csökkentjük, ezáltal nem perdül ki a jármű. Ehhez szükséges, hogy a perdítőnyomaték eltűnjön, tehát mindkét oldalon a kerekek egyforma erővel fékezzenek. Ezt a módszert nevezik *select-low*-nak (SL) amiatt, mert mindkét oldal az alacsony tapadású oldal fékerejével fékez. Ennek a párja a *select-high* (SH), amikor mindkét kerék a saját súrlódási viszonyainak megfelelően fékez [3]. Másik megoldás lenne, hogyha a járművet ekkor valamilyen *PID* szabályzóval stabilizálnánk, viszont ez is ugyancsak az előző SL kimenetelhez vezetne, ahogy haladunk előre az időben. Ezen módszereknek a legnagyobb hátránya, hogy annak ellenére, hogy nem perdülne ki egy kicsit sem a jármű, jelentősen megnövekedne annak féktávolsága, ezáltal egy másik balesetveszélyes szituációt teremtenénk elő.

A megoldás a két felvázolt módszer között található: bizonyos *yaw rate* és oldalkúszási szög megengedhető, amelyhez a sofőr hozzá tud szokni, és amelyre megfelelően képes reagálni. Ezáltal olyan fékezőerő bemenet megtervezése szükséges, mely nem engedi, hogy a két dinamikai jellemző egy bizonyos, kritikus értéket meghaladjon. Erre a problémára kiválóan alkalmazható a jelenleg még gyerekcipőben járó biztonságkritikus szabályzás [4]. Annak különleges képessége, hogy adott dinamikai rendszer általunk kiválasztott állapotváltozóit (vagy annak valamilyen kombinációját) egy általunk definiált határon belül képes tartani, melyet biztonságos tartománynak nevezünk. Mindennek megvalósításához elengedhetetlen a mechanikai modellalkotás. Ennek első lépése magának a járműmodellnek a definiálása, melyen belül (járműmodelltől függetlenül) három, eddig ismeretlen paraméter szerepel: kerekeken ébredő longitudinális és laterális erő, valamint a kerékállás szöge a longitudinális irányhoz képest. Az első kettőre a kiválasztott kerékmodell, amíg az utóbbira pedig a sofőrmodell ad választ. Mindezek megválasztására számos lehetőségünk van, viszont olyan modellek alkalmazása célszerű, melyek alkalmasak a biztonságkritikus szabályzással kooperálni.

1.2. Szakirodalmi áttekintés

A szakirodalomban megtalálható, μ -split fékezésre vonatkozó megoldási kísérletek többsége a szabályozni kívánt dinamikai rendszert linearizálja és alakítja át a jól ismert biciklimodellé [5]. Ennek oka, hogy a klasszikus irányításelméleti alapokon nyugvó szabályzási módszerek lineáris modelleken alkalmazhatóak és kis kitérések esetén azok jól közelítik a valóságot. Az [6] forrás az úgynevezett *fuzzy PID* szabályzást alkalmazza, ahol a mért és kiszámolt longitudinális szlip közti eltérés alapján avatkozik be, mégpedig a féknyomásokba, tehát tulajdonképpen stabilizálja a járművet. Ugyancsak féknyomáson keresztüli

beavatkozást részesít előnyben a [1] forrás, viszont ezen túlmenően aktív kormányzást is használ, azaz nemcsak a féknyomásokba, hanem a kormányzásba is képes beavatkozni.

Összességében elmondhatjuk, hogy mi nem ezt az utat kívánjuk követni; meghagyjuk a rendszert nemlineárisnak, hiszen az alkalmazandó biztonságkritikus szabályzó azt is gond nélkül képes kezelni. Ezzel kapcsolatban fontos megemlítenünk a [7] forrást, hiszen járműszabályzáshoz hozzánk hasonló módon biztonságkritikus szabályzást alkalmaz két lényeges különbséggel. Ezek közül egyik a vizsgálandó szituáció, hiszen nem fékezés, hanem kanyarodás közben szeretné biztosítani a jármű stabilitását. Ehhez magát a sofőrt helyettesíti a biztonságkritikus szabályzóval, így a kormányzó lesz a beavatkozójel. Másik különbség pedig az, hogy a jármű - és kerékmodellből álló linearizált rendszer stabilitásvizsgálatának során megkapott stabil zónákat tekinti biztonságos tartománynak.

1.3. Cél megfogalmazása

Munkám során célom, hogy a μ -split szituációt széles körben használatos és matematikailag könnyebben kezelhető modellekkel szimuláljam. A felhasznált modellek meghatározzák a szimuláció eltérését a valóságtól, mely linearizálás, egyszerűsítések és elhanyagolások miatt jelentkezhetnek. Ennek következménye, hogy a kiperdülés pillanatát és az onnantól kezdődő eseményeket ezen a modellezési szinten nem tudjuk szimulációval demonstrálni, de nem is feltétlen szükséges, hiszen a konkrét kerék-útfelület viszony, és az ezáltal fellépő kerékerők mindvégig ismeretlenek. Ezt figyelembe véve, célként nem a jármű stabilitásvesztésének bekövetkeztét, hanem annak előzményét vizsgáljuk; ezáltal nem egy vészfékezési szituációt veszünk alapul, hanem egy kisebb lassuláshoz tartozó, átlagosnak mondható fékezést.

Addig, ameddig nem jelennek meg a teljesen önvezető járművek, a járműirányításnak két fő résztvevője lesz: a sofőr, illetve a jármű oldaláról történő beavatkozás. Ez már önmagában problémát okozhat, köszönhetően például mindkettejük különböző nagyságrendű időkésésének. Másrészről a vizsgált szituációban kétféle veszélyforrás jelenik meg az általunk vizsgált fékezési szituációban: a sávelhagyás, illetve a kiperdülés, melyek külön-külön, de egyszerre is jelentkezhetnek. Gondoljunk ekkor arra a szituációra, amikor fékezés közben a jármű tömegközéppontja végig a sáv közepén marad, viszont szögsebessége nemzérus, ezáltal "pörögve" áll meg.

1.3.1. Szabályzási módszer

Hipotézisem, hogy a két résztvevőt hozzárendelem a két potenciális veszélyforráshoz: a sofőr felel a sávtartásért, fékszabályzó pedig a kiperdülés elkerüléséért. Ez az az alapgonddal, ami alapján fel lesz építve a teljes dinamikai rendszer.

1.3.2. Fékszabályzó felépítése

Fékszabályzó alatt azt a fékerőkre történő beavatkozást értem, melynek következményeként a jármű elkerüli a kiperdülést, mely esetünkben az 1.1. fejezetben említett biztonságos tartományon belül maradást jelenti. A valóságban a teljes fékezési folyamat kiindulópontja a pneumatikus fékrendszer féknyomása, melyet ténylegesen képesek vagyunk szabályozni. Azonban, az azt leíró termodinamikai és áramlástanai modellt [1] egyszerűsítésképpen figyelmen kívül hagyhatjuk egy speciális esetben. Ebben az esetben a jármű kerekeinek longitudinális szlipje nulla, ami azt jelenti, hogy tökéletes a tapadás a kerekek és az útfelület között. Ekkor élhetünk az alábbi kapcsolattal:

$$p_b = c_b F_x, \quad (1.3)$$

mely szerint a p_b féknyomás egyenesen arányos a keréktalppontján fellépő F_x fékezőerővel, ahol c_b az adott kerékre jellemző úgynevezett fékerő tényező (*brake factor*). Ennek köszönhetően a számítások során végig lehetőségünk van fékerőket használni. Azonban pontosabb modellek esetén az (1.3)-as összefüggés már nem állja meg a helyét, ha például a jármű longitudinális dinamikáját szeretnénk részletesebben vizsgálni, de jelen esetben – amikor a jármű laterális vizsgálatában vagyunk érdekeltek – számunkra megfelelő lesz.

A járművekben megtalálható, már-már alapfelszerelésnek tekinthető ABS-nek köszönhetően képesek vagyunk a jármű valamennyi kerekét egymástól függetlenül fékezni. Kérdés tehát már csak az, hogy mely kerekek fékezőerejébe érdemes beavatkozni. Ennek a felvetése amiatt releváns, mert a legrosszabb szcenárió esetében az alacsony tapadású oldalon akár teljesen elveszíthetjük a kerekek tapadását, így itt ilyen körülmények között felesleges beavatkozni. Következtetésképpen csak a magas tapadású oldali fékezőerőkbe célszerű beavatkozni, az alacsony tapadású oldal pedig az aktuális súrlódási körülményeknek megfelelően fog fékezni.

A való életben nem hagyható figyelmen kívül az időkésés jelensége, mely minden szabályzásban is óhatatlanul jelen van. A fékszabályzó időkésését ugyanakkor elhanyagoljuk, melynek oka, hogy annak nagyságrendje eggyel kisebb, mint a sofőré. A legújabb technikák predikció alapján oldják meg a biztonságkritikus szabályzás időkésését [8].

1.3.3. Sofőr felépítése

Egyes személygépjárművek rendelkeznek aktív kormányzással és számos szakirodalmi forrás a μ -split fékezés közbeni járműstabilitást ennek segítségével próbálja meg elérni, viszont haszonjárművek esetén ennek beépítése a mai napig nem jellemző, ezért ettől eltekintek. Ennélfogva a járműmodellben megjelenő, kormánysszöggel arányos kerékállásért a kormánymozdulatokon keresztül kizárólag maga a sofőr felel. Ebben a dolgozatban a sofőr szerepe másodlagos, hiszen annak feladata csupán a sávtartás, emiatt egyszerűbb sofőrmodellt választunk.

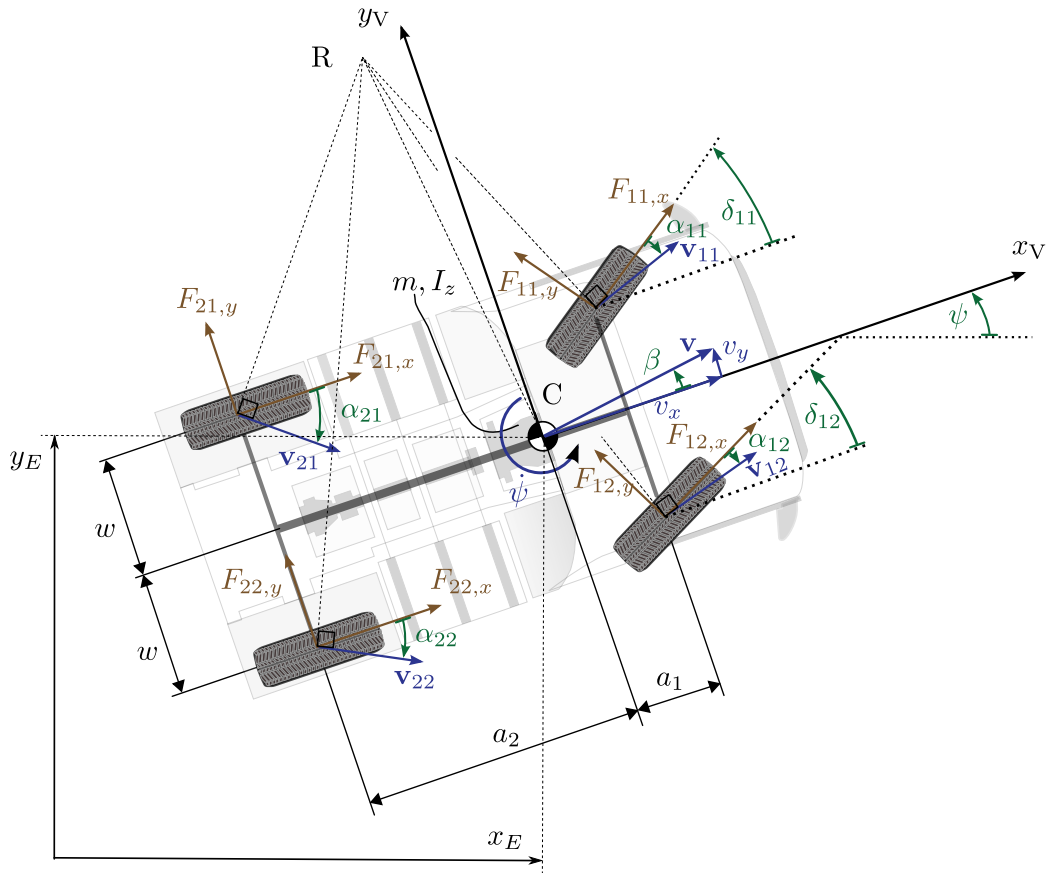
2. Dinamikai rendszer

A μ -split vizsgálatához nélkülözhetetlen egy megfelelő dinamikai rendszer leírása, melyet a későbbi biztonságkritikus szabályzáshoz affin alakban keressük:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (2.1)$$

ahol $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ az állapotváltozók vektora, $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, melyek a dinamikai modellt jellemző vektor – és mátrixfüggvények, illetve $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ a beavatkozójelek vektora; esetünkben ez(ek) lesz a magas tapadású oldali fékezőerő(k). A (2.1)-es egyenlet alakját maga a járműmodell adja, így ennek a megválasztása kulcsfontosságú. Az osztott tapadású felületen történő fékezés modellezéséhez szükséges, hogy a modellben szét legyen választva a jármű jobb és bal oldalra az eltérő fékezőerők miatt, illetve első és hátsó tengelyre az első tengely kormányozhatósága miatt. Ezáltal legalább négykerekű járműmodellre van szükségünk, és a továbbiakban ennyivel is fogok dolgozni az egyszerűség kedvéért. Továbbá mindvégig síkmodellre fogok feltételezni.

2.1. Járműmodell



2.1. ábra. Négy kerekű járműmodell szabadtestábrája.

A 2.1-es szabadtest - ábra alapján többféleképpen is le lehet vezetni a jármű nemlineáris mozgásegyenletét, például Newton 2. törvényével és relatív dinamika segítségével [5], illetve a másodfajú Lagrange egyenlettel. Azonban a járműdinamika területén kezd egyre fontosabbá válni a Gibbs-Appell egyenlet [9], hiszen annak végeredményeként egyből elsőrendű differenciálegyenletrendszert kapunk, ezzel gyorsítván a számítás menetén, illetve nem kell a relatív dinamikával foglalkoznunk. Habár az én esetemben mind a három módszer ugyanazt a mozgásegyenletet adja végeredményül, mégis fontosnak tartom az utóbbi módszerrel történő levezetést. Tekintsük először az úgynevezett gyorsulási energiát, melynek definíciója:

$$S = \frac{1}{2}m\mathbf{a}_C^2 + \frac{1}{2}I_z\ddot{\psi}^2 + \dots \quad (2.2)$$

Látható, hogy a gyorsulási energia meghatározásához szükségünk van $\mathbf{a}_C$ -ra, mely a tömegközéppont gyorsulása, illetve $\ddot{\psi}$ szöggyorsulásra. A további tagok ebben a kifejezésben nem érdekesek, hiszen a későbbiekben a pseudosebességderiváltak szerinti parciális deriválást követően eltűnnek. Továbbá m a jármű össztömege, I_z pedig a függőleges z -irány körüli tehetetlenségi nyomatéka. A mozgásegyenlet levezetéséhez szükséges bevezetnünk az úgynevezett virtuális sebességet, másnéven pseudosebességet, melyet σ -val jelölünk; ezek azok a sebességek, melyek kielégítik a kényszeregyenleteket. Utoljára pedig a virtuális erőt kell definiálnunk, melyet a virtuális teljesítmény segítségével határozhatunk meg és Π -vel jelöljük. Mindezek ismeretében a mozgásegyenletet megadó képlet:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\sigma}_i} = \Pi_i, \quad (2.3)$$

ahol i a pseudosebességek száma.

Első lépésként a koordinátarendszereket érdemes tisztázni. A járműdinamikára vonatkozó ISO 8855 [10] szabvány szerint különböztethetjük meg a földhöz (Earth), illetve a járműhöz kötött (Vehicle) koordinátarendszereket:

- Globális: (x_E, y_E, z_E) ,
- Járműhöz kötött: (x_V, y_V, z_V) .

Az előbbi megmondja, hogy egy adott ponthoz képest hol tartózkodik a jármű (és ezáltal a számunkra érdekes jármű tömegközéppontja), míg az utóbbi a jármű longitudinális és laterális sebességét és gyorsulását szolgáltatja. Ezt követően kell megválasztani a kinematikai kényszereket, mely legyen az, hogy a jármű tömegközéppontjának longitudinális sebességének nagysága legyen állandó, azaz $|\dot{x}_V| = V = \text{állandó}$, és az állapotváltozók vektora:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ \psi \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

ahol x_E és y_E a jármű tömegközéppontjának koordinátáit adják meg a globális koordinátarendszerben, ψ pedig a jármű úgynevezett legyezési szöge, nem más, mint a globális és

a járműhöz kötött koordináta-rendszerek közti elfordulás szöge (ezek a mennyiségek láthatóak a 2.1 ábrán). Az ebből a kényszerből számítható kényszeregyenletet megkapjuk, ha a $\dot{x}_V$ sebességet felbontjuk komponenseire:

$$\dot{x}_E = V \cos(\psi), \quad (2.5)$$

$$\dot{y}_E = V \sin(\psi), \quad (2.6)$$

Megszorozva (2.3)-at $\cos(\Psi)$ -vel és (2.4)-et $\sin(\Psi)$ -vel:

$$\dot{x}_E \cos(\psi) = V \cos^2(\psi), \quad (2.7)$$

$$\dot{y}_E \sin(\psi) = V \sin^2(\psi), \quad (2.8)$$

majd összeadva a két egyenletet:

$$\dot{x}_E \cos(\psi) + \dot{y}_E \sin(\psi) = V. \quad (2.9)$$

A következő lépésben kell kiválasztanunk az úgynevezett pszeudosebességeket, mégpedig annyit, hogy a kényszeregyenletek számához hozzáadva a pszeudosebességek számát, meg kell kapnunk az állapotváltozók számát. Ez esetünkben 2 pszeudosebességet jelent, melyek legyenek az alábbiak:

$$\sigma_1 \triangleq \dot{y}_V = -\dot{x}_E \sin(\psi) + \dot{y}_E \cos(\psi) \quad (2.10)$$

$$\sigma_2 \triangleq \dot{\psi}. \quad (2.11)$$

A (2.9)-es kényszeregyenlet, illetve a (2.10) és (2.11)-es pszeudosebességekre vonatkozó egyenletekből kifejezhetők az állapotváltozók deriváltjai:

$$\dot{x}_E = V \cos(\psi) - \sigma_1 \sin(\psi), \quad (2.12)$$

$$\dot{y}_E = V \sin(\psi) + \sigma_1 \cos(\psi), \quad (2.13)$$

$$\dot{\psi} = \sigma_2. \quad (2.14)$$

Ez a lépés azért volt fontos számunkra, hogy egy idő szerinti deriválással megkapjuk az állapotváltozók gyorsulásait, melyek segítségével számítható a gyorsulási energia. Deriválva időben (2.12)-(2.14) egyenleteket:

$$\ddot{x}_E = -V \sin(\psi) \dot{\psi} - \dot{\sigma}_1 \sin(\psi) - \sigma_1 \cos(\psi) \dot{\psi}, \quad (2.15)$$

$$\ddot{y}_E = V \cos(\psi) \dot{\psi} + \dot{\sigma}_1 \cos(\psi) - \sigma_1 \sin(\psi) \dot{\psi}, \quad (2.16)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\sigma}_2. \quad (2.17)$$

Ezeket már behelyettesíthetjük a gyorsulási energia képletébe:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2} m \underbrace{\mathbf{a}_C^2}_{\dot{x}_E^2 + \dot{y}_E^2} + \frac{1}{2} I_z \dot{\psi}^2 &= \frac{1}{2} m (V^2 \sin^2(\psi) \dot{\psi}^2 + \dot{\sigma}_1^2 \sin^2(\psi) + \sigma_1^2 \cos^2(\psi) \dot{\psi}^2 + \\ &+ V^2 \cos^2(\psi) \dot{\psi}^2 + \dot{\sigma}_1^2 \cos^2(\psi) + \sigma_1^2 \sin^2(\psi) \dot{\psi}^2 + 2V \sin^2(\psi) \dot{\psi} \dot{\sigma}_1 + \\ &+ 2V \sin(\psi) \cos(\psi) \sigma_1 \dot{\psi}^2 + 2 \sin(\psi) \cos(\psi) \dot{\sigma}_1 \sigma_1 \dot{\psi} + 2V \cos^2(\psi) \dot{\sigma}_1 \dot{\psi} \\ &- 2V \sin(\psi) \cos(\psi) \sigma_1 \dot{\psi}^2 - 2 \sin(\psi) \cos(\psi) \dot{\sigma}_1 \sigma_1 \dot{\psi}) + \frac{1}{2} I_z \dot{\sigma}_2^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Egyszerűsítéseket és összevonásokat követően kapjuk az alábbi kifejezést:

$$S = \frac{1}{2}m(V^2\sigma_2^2 + \dot{\sigma}_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 2V\dot{\sigma}_1\sigma_2) + \frac{1}{2}I_z\dot{\sigma}_2^2. \quad (2.19)$$

Végül szükségünk van ennek a parciális deriváltjaira a pszeudosebességderiváltak szerint:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\sigma}_1} = m(\dot{\sigma}_1 + V\sigma_2), \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\sigma}_2} = I_z\dot{\sigma}_2. \quad (2.21)$$

A pszeudoerőket a mi esetünkben a virtuális teljesítmény alapján lehet meghatározni:

$$\delta P = \mathbf{F}_{11}\delta\mathbf{v}_{11} + \mathbf{F}_{12}\delta\mathbf{v}_{12} + \mathbf{F}_{21}\delta\mathbf{v}_{21} + \mathbf{F}_{22}\delta\mathbf{v}_{22}, \quad (2.22)$$

ahol szokás a kerekek számozását balról jobbra és előlről hátra elvégezni, tehát az ij -edik kerék az i -edik kerék a j -edik tengelyen, esetemben $i,j=1,2$. Ebben, a (2.22)-es egyenletben szereplő kifejezések a globális koordinátarendszerben érvényesek, emiatt mind a fékerőkkel, mind a keréktalpponti sebességekkel transzformációt kell végeznünk. A kerekek talppontján ébredő, fékerőkből álló vektorokkal forgatást kell végeznünk, mégpedig az első tengelyen $\psi + \delta$, a hátsó tengelyen pedig ψ szöggel. Ekkor már feltételezzük, hogy $\delta_{11} = \delta_{12}$. Így adódik, hogy a globális koordinátarendszerben a keréktalpponti erők:

$$\mathbf{F}_{1j} = \begin{bmatrix} F_{1j,x} \cos(\psi + \delta) - F_{1j,y} \sin(\psi + \delta) \\ F_{1j,x} \sin(\psi + \delta) + F_{1j,y} \cos(\psi + \delta) \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{F}_{2j} = \begin{bmatrix} F_{2j,x} \cos(\psi) - F_{2j,y} \sin(\psi) \\ F_{2j,x} \sin(\psi) + F_{2j,y} \cos(\psi) \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

ahol $j=1,2$. Ezután a keréktalpponti sebességek meghatározása szükséges, melyeket a jármű tömegközéppontjának sebességének, szögsebességének és geometriájának ismeretében a sebességredukciós képlettel tudjuk meghatározni:

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C,ij}. \quad (2.25)$$

Elvégezve a (2.25)-ös egyenletet mind a négy kerékre, azt kapjuk, hogy:

$$\mathbf{v}_{11} = \begin{bmatrix} V \cos(\psi) - \sigma_1 \sin(\psi) - \sigma_2 a_1 \sin(\psi) - \sigma_2 w \cos(\psi) \\ V \sin(\psi) + \sigma_1 \cos(\psi) + \sigma_2 a_1 \cos(\psi) - \sigma_2 w \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{v}_{12} = \begin{bmatrix} V \cos(\psi) - \sigma_1 \sin(\psi) - \sigma_2 a_1 \sin(\psi) + \sigma_2 w \cos(\psi) \\ V \sin(\psi) + \sigma_1 \cos(\psi) + \sigma_2 a_1 \cos(\psi) + \sigma_2 w \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{v}_{21} = \begin{bmatrix} V \cos(\psi) - \sigma_1 \sin(\psi) + \sigma_2 a_2 \sin(\psi) - \sigma_2 w \cos(\psi) \\ V \sin(\psi) + \sigma_1 \cos(\psi) - \sigma_2 a_2 \cos(\psi) - \sigma_2 w \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{v}_{22} = \begin{bmatrix} V \cos(\psi) - \sigma_1 \sin(\psi) + \sigma_2 a_2 \sin(\psi) + \sigma_2 w \cos(\psi) \\ V \sin(\psi) + \sigma_1 \cos(\psi) - \sigma_2 a_2 \cos(\psi) + \sigma_2 w \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Ezt követően kell vennünk (2.26)-(2.29) sebességek virtuális sebességét, ahol minden tag, melyben nem található pszeudosebesség, eltűnik. A virtuális sebességek ezáltal:

$$\delta \mathbf{v}_{11} = \begin{bmatrix} -\delta \sigma_1 \sin(\psi) - \delta \sigma_2 a_1 \sin(\psi) - \delta \sigma_2 w \cos(\psi) \\ \delta \sigma_1 \cos(\psi) + \delta \sigma_2 a_1 \cos(\psi) - \delta \sigma_2 w \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\delta \mathbf{v}_{12} = \begin{bmatrix} -\delta \sigma_1 \sin(\psi) - \delta \sigma_2 a_1 \sin(\psi) + \delta \sigma_2 w \cos(\psi) \\ \delta \sigma_1 \cos(\psi) + \delta \sigma_2 a_1 \cos(\psi) + \delta \sigma_2 w \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\delta \mathbf{v}_{21} = \begin{bmatrix} -\delta \sigma_1 \sin(\psi) + \delta \sigma_2 a_2 \sin(\psi) - \delta \sigma_2 w \cos(\psi) \\ \delta \sigma_1 \cos(\psi) - \delta \sigma_2 a_2 \cos(\psi) - \delta \sigma_2 w \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\delta \mathbf{v}_{22} = \begin{bmatrix} -\delta \sigma_1 \sin(\psi) + \delta \sigma_2 a_2 \sin(\psi) + \delta \sigma_2 w \cos(\psi) \\ \delta \sigma_1 \cos(\psi) - \delta \sigma_2 a_2 \cos(\psi) + \delta \sigma_2 w \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Így már elvégezhető a (2.22)-es egyenlet jobb oldala, mely részletezés nélkül:

$$\begin{aligned} \delta P = \delta \sigma_1 \underbrace{(F_{21,y} + F_{22,y} + (F_{11,y} + F_{12,y}) \cos(\delta) + (F_{11,x} + F_{12,x}) \sin(\delta))}_{\Pi_1} + \\ + \delta \sigma_2 \underbrace{(w F_w + a_1 F_{a_1} + a_2 F_{a_2})}_{\Pi_2}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

ahol:

$$F_w = F_{22,x} - F_{21,x} + (F_{12,x} - F_{11,x}) \cos(\delta) - (F_{12,y} - F_{11,y}) \sin(\delta), \quad (2.35)$$

$$F_{a_1} = (F_{11,y} + F_{12,y}) \cos(\delta) + (F_{11,x} + F_{12,x}) \sin(\delta), \quad (2.36)$$

$$F_{a_2} = -(F_{21,y} + F_{22,y}). \quad (2.37)$$

Ez alapján felírható a mozgásegyenlet, melyet ki kell egészíteni a (2.12)-(2.14) egyenletekkel. Továbbá, ha az egyetlen kinematikai kényszerre már nem tekintünk kinematikai kényszerként, és így V nem állandó, akkor rá is vonatkozik egy differenciálegyenlet, mely levezethető Newton II. törvényével, vagy a másodfajú Lagrange egyenlettel. Átrendezések után a mozgásegyenlet tehát:

$$\dot{v}_x = \frac{1}{m} \Pi_0 + \omega v_y, \quad (2.38)$$

$$\dot{v}_y = \frac{1}{m} \Pi_1 - \omega v_x, \quad (2.39)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{I_z} \Pi_2, \quad (2.40)$$

$$\dot{x}_E = v_x \cos(\psi) - v_y \sin(\psi), \quad (2.41)$$

$$\dot{y}_E = v_x \sin(\psi) + v_y \cos(\psi), \quad (2.42)$$

$$\dot{\psi} = \omega, \quad (2.43)$$

ahol:

$$\Pi_0 = F_{21,x} + F_{22,x} + (F_{11,x} + F_{12,x}) \cos(\delta) - (F_{11,y} + F_{12,y}) \sin(\delta), \quad (2.44)$$

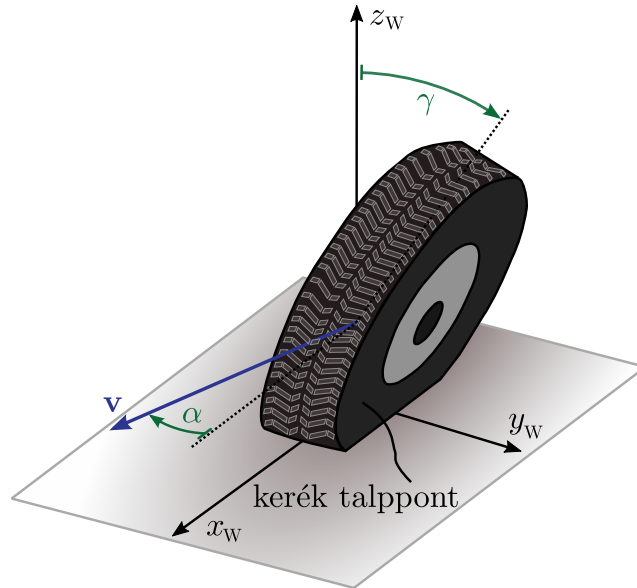
$$v_x = \dot{x}_V, \quad (2.45)$$

$$v_y = \dot{y}_V. \quad (2.46)$$

Így megkaptuk a járműmodellt leíró elsőrendű differenciálegyenletrendszert. Következő lépésben ezt a rendszert a (2.1)-es egyenlet alapján affin alakká szeretnénk változtatni, tehát a magas tapadású oldali longitudinális erők ($F_{11,x}$ és $F_{21,x}$) legyenek lineárisan kiemelhetőek. Ezt a feladatot az ezt követő kerékmodell fejezet döntő mértékben befolyásolja.

2.2. Kerékmodell

Az előző fejezetben levezetett mozgásegyenlet eddig ismeretlen paraméterei a keréktalpon ponton fellépő erők, melyre a kerékmodell hivatott megoldást adni, illetve a kerékállás szöge, melyre pedig a következő fejezetben bemutatott sofőrmódel. A bemutatásra kerülő kerékmodell célja, hogy a dinamikai és geometriai mennyiségek ismeretében meghatározzuk a kerékre ható erőket és nyomatékokat. Mivel a járművet síkbeli modellel vezettük le, ezért a kereket is célszerű ugyancsak síkban tekinteni. A kerék térbeli elhelyezkedését és hozzá kötött legfontosabb mennyiségek a 2.2 ábrán láthatóak.



2.2. ábra. Térbeli kerék a hozzá tartozó koordinátarendszerrel és legfontosabb mennyiségeivel.

Ugyancsak az ISO 8855 [10] szabvány alapján a kerék talppontjához hozzákötött koordinátarendszer tengelyei (x_W, y_W, z_W) . A kerék dőlésszögét γ jelzi, melyet most a síkmodell miatt nem veszünk figyelembe. A kerék sebességvektorának a kerék koordinátarendszerének x_W irányától való szögkitérésének kitüntetett szerepe van a teljes jármű dinamikájára tett hatása miatt; ezt nevezzük a kerék oldalkúszási szögének (*sideslip angle*) és α -val jelöljük. Síkmodell alkalmazása miatt ugyancsak nem vesszük figyelembe a kerékre ható függőleges F_z normálerő időbeli változását (tehát konstansnak tekintjük), illetve az x_W és y_W irányú nyomatékokat (*roll moment* és *pitch moment*). Amik maradnak, azok a kerék talppontján megjelenő longitudinális (x_W irányú) és laterális (y_W irányú) erők és a z_W irányú nyomaték (*aligning moment*). Az utóbbit, az M_z -t is elhanyagoljuk azon okból kifolyólag, mert az ezt a nyomatékokat okozó erők erőkarjai elenyészőek a jármű további geometriai méreteivel szemben. Így végül csak két erőt kell figyelembe vennünk a kerékmodellhez.

2.2.1. Longitudinális erő

A longitudinális erő kulcsfontosságú szerepet játszik μ -split fékezés során, hiszen a jármű ellentétes oldalain fellépő különböző nagyságú longitudinális irányú erők okozzák a perdítőnyomaték megjelenését. Ugyanakkor longitudinális erő a valóságban nem csak fékezés hatására jelenhet meg, hanem az úgynevezett longitudinális szlip jelenség miatt is, viszont ezt ebben a modellben elhanyagoljuk. Ennek oka, hogy – ahogy az 1.3.2 fejezetben lett kifejtve – féknyomás helyett fékezőerővel szeretnénk számolni, amely a szabályzójel szerepét tölti be; ezáltal nem lehet kiadódó paraméter. Így a modellemben longitudinális erő kizárólag a fékszabályzó által kivezérelt fékerő lehet.

2.2.2. Laterális erő

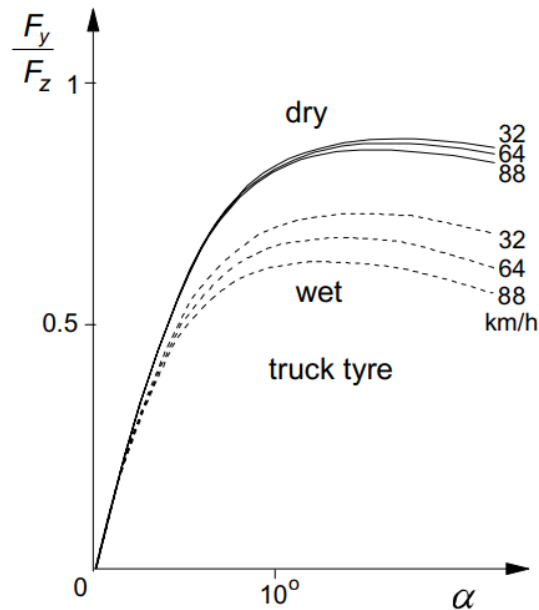
A kerék laterális (oldalirányú) erő megjelenésében központi szerepet játszik a kerék oldalkúszási szöge, hiszen a kerék sebességvektora nem esik feltétlenül a kerék síkjába. A kerekek sebességvektorai a (2.25)-ös redukciós képlet alapján már ismertek, viszont ezúttal nem a globális, hanem a járműhöz kötött koordinátarendszerben érdemes kifejezni őket az egyszerűség miatt. Ezt követően a kerekek oldalkúszási szöge inverz tangens művelettel elvégezhető:

$$\alpha_{2j} = \tan^{-1} \left(\frac{v_y + x_{V,2j}\omega}{v_x - y_{V,2j}\omega} \right), \quad (2.47)$$

ahol $x_{V,2j}$ és $y_{V,2j}$ a hátsó tengely kereinek koordinátája a jármű koordinátarendszerében. Ez amiatt van, mert a hátsó kerekek nem kormányozhatóak, és ezáltal a jármű és a hátsó kerekek koordinátarendszereik irányai egybeesnek. Az első tengelyen lévő kerekek oldalkúszási szögei hasonlóan számolhatóak, viszont figyelembe kell venni a kerekek elkormányozhatóság miatti szögváltozását, így:

$$\alpha_{1j} = \tan^{-1} \left(\frac{v_y + x_{V,1j}\omega}{v_x - y_{V,1j}\omega} \right) - \delta, \quad (2.48)$$

ahol $x_{V,1j}$ és $y_{V,1j}$ az első tengely kereinek koordinátája ugyancsak a jármű koordinátarendszerében. Mérési adatok alapján a gumibroncs kerekek szlipgörbéje a 2.3 ábrán látható trendet követi.



2.3. ábra. Kamion kerék oldalirányú szlipgörbéje [11].

Leolvashatóak továbbá a 2.3 ábráról az oldalirányú szlipgörbe következő tulajdonságai:

- páratlan függvény,
- adott kereket terhelő súlyerővel normálva a súrlódási tényezőt kapjuk konstans súlyerőt feltételezve, ez szerepel a függőleges tengelyen,
- kezdeti közel-lineáris szakaszt követően éri el maximumát (ekkor az ideális esetben a súrlódási tényező 1), ezt követően pedig a kerék teljesen elveszti tapadását
- függ a súrlódási tényezőtől, a kereket terhelő súlyerőtől, jármű sebességétől, és még sok más egyéb tényezőtől.

A biztonságkritikus szabályzás megtervezéséhez szükséges affin dinamikai rendszert kapunk a (2.1)-es egyenletnek megfelelően. Ennek a lényege, hogy a szabályzójel – amely esetünkben a magas tapadás oldali fékezőerő – explicit lineáris módon kiemelhető legyen a mozgásegyenlet jobboldaláról. Lefordítva ezt az állítást a laterális erő esetre, a (2.38)-(2.43) egyenletek jobb oldalán szereplő F_y mennyiségek F_x mennyiségektől maximum lineárisan függhetnek. Igaz még nem esett szó a laterális erők longitudinális erőktől való függéséről (mely témakör a következő fejezetben lesz részletezve), de az egyszerűség és a szabályzójel gyorsabb kiszámításának érdekében függetlennek tekintem a fentieket egymástól. A szakirodalomban az egyik leggyakrabban alkalmazott oldalirányú

erő modellje a lineáris kerékmodell, mely a 2.3 ábrán látható szlipgörbe kezdeti, lineáris szakaszát használja fel, így:

$$F_{ij,y} = C_{\alpha_{ij}} \alpha_{ij} , \quad (2.49)$$

ahol $C_{\alpha_{ij}}$ az ij -edik kerék oldalkúszási merevsége (*cornering stiffness*), melynek mértékegysége [N/rad]. Pontos definíciója [5]:

$$C_{\alpha_{ij}} = \left| \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial F_{ij,y}}{\partial \alpha_{ij}} \right| . \quad (2.50)$$

Ezek szerint az oldalkúszási merevség nem más, mint az oldalirányú szlipgörbe kezdeti, lineáris szakaszának meredeksége, melynek az előjele a megválasztott előjelkonvenciótól függ.

A szakirodalomban megtalálható, a valóságot még jobban közelítő kerékmodell a Pacejka-féle *Magic formula*, mely a 2.3 ábrán bemutatott jelleggörbét határozottan jól képes közelíteni. Az ezt megadó összefüggés [11]:

$$F_{ij,y} = D_{ij} \sin(C_{ij} \arctan(B_{ij} \alpha_{ij} - E_{ij}(B_{ij} \alpha_{ij} - \arctan(B_{ij} \alpha_{ij})))) , \quad (2.51)$$

ahol

- D_{ij} az úgynevezett csúcs tényező (*peak factor*), mely megadja a függvény maximumát, tehát $D_{ij} = \mu_{ij} F_{ij,z}$, ahol μ_{ij} a súrlódási tényező,
- B_{ij} az úgynevezett merevségi tényező (*stiffness factor*), hiszen ha linearizáljuk $\alpha_{ij} = 0$ körül a *Magic formula*-t, akkor az alábbi összefüggést kapjuk:

$$B_{ij} = \frac{C_{\alpha_{ij}}}{C_{ij} E_{ij}} , \quad (2.52)$$

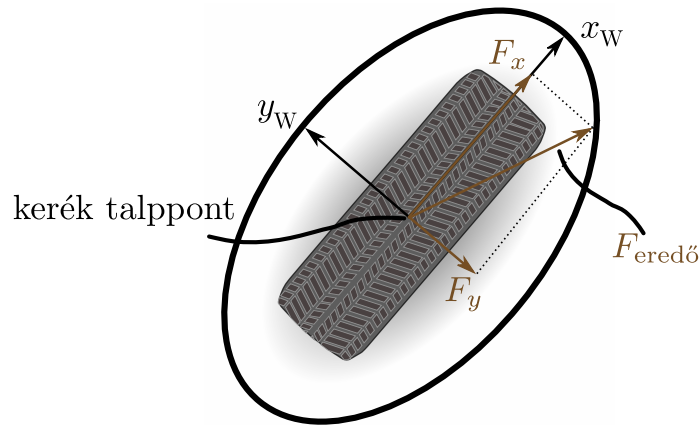
- a maradék két paramétert, C_{ij} és E_{ij} -t formátényezőnek (*shape factor*) nevezzük.

Ebben a modellben még nincsen benne a longitudinális erő hatása az oldalirányú erőre, viszont ha benne lenne a következő fejezetben bemutatott módszer szerint, akkor látni fogjuk, hogy nem-affin rendszert kapunk. Ennek átírása affin rendszerré és ezáltal megtervezve a biztonságkritikus szabályzó beavatkozájelét már problémás lesz, ahogy az a 3. fejezetben látható majd részletezve.

2.2.3. Kombinált modell

A kombinált kerékmodell lényege, hogy az előző két fejezetben bemutatott kerékerőknek valóságban is létező, egymást befolyásoló hatására adjon magyarázatot. Mivel korábban a megfogalmazott cél az volt, hogy a longitudinális erő szabályozójel legyen, ezért csak az $F_y = F_y(F_x)$ kapcsolatot kell meghatározni. Az ilyen módon definiált valamennyi kombinált kerékmodell ugyanazon a megfigyelésen alapszik, miszerint a keréktalpponton fellépő

eredő erő nagysága nem lehet akármekkora, van annak egy adott határa. Másféleképpen megfogalmazva ezt azt jelenti, hogy fékezés hatására az oldalirányú erő nem vehet fel akkora értéket, mintha nem fékeznénk. Ennek a hatásnak az egyik legegyszerűbben megfogalmazható összefüggése a súrlódási elipszis (*friction ellipse*) koncepciója [5], mely grafikusan a 2.4 ábrán látható.



2.4. ábra. Súrlódási elipszis koncepciója.

Ez alapján az erők közti összefüggést az alábbi egyenlet adja meg:

$$\left(\frac{F_x}{F_{xM}}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{F_{yM}}\right)^2 = 1, \quad (2.53)$$

ahol:

$$F_{xM} = \mu_x F_z, \quad F_{yM} = \mu_y F_z. \quad (2.54)$$

Ez a modell egyszerű megoldást nyújt az oldalirányú erő meghatározására a longitudinális és a normálerő függvényében, viszont a különböző irányokba eső súrlódási tényezők ismeretlenek számunkra, továbbá ha F_x -et szabályozójelnek tekintem és F_z normálerőt konstansnak, akkor semmilyen módon sem fogok a laterális erőre tipikus szlipgörbe jelet kapni, hiszen a kerék oldalkúszási szöge sincs benne ebben a modellben. Mégis tanulságképpen egy dolog leszűrhető a súrlódási elipszis modelljéből:

- ha $F_x = 0$, akkor F_y nagysága maximális,
- ha $F_x \neq 0$, akkor F_y nagysága csökken a maximális értékéhez képest.

Ezekből kiindulva fogom felhasználni az először Pacejka által 1958-ban alkalmazott hasonlósági módszert (*similarity method*) [11], mely az alábbi megfigyelésen alapszik: a tiszta szlipgörbék (amilyen a bemutatott 2.3 ábrán látható szlipgörbe is, ahol laterális erőn kívül semmilyen erő vagy nyomaték nem ébred a kereken) függvényének alakja megközelítőleg hasonló marad abban az esetben, amikor a kerék az úgynevezett referencia (tiszta) állapottól eltérő körülmények között jár; így például ébredhet rajta longitudinális erő is. Az én esetemben a referencia állapot az alábbiakat jelenti:

- a kerekek dőlésszöge nulla,
- a kerekek szabadon gördülnek, tehát a longitudinális szlip nulla,
- a kerekek normál irányú terhelése a szimuláció teljes idejére nézve konstans,
- a út-kerék kapcsolat súrlódási tényezője is konstans a szimuláció teljes idejére nézve.

A referencia állapotot leíró egyenlet nem más, mint a (2.51)-es egyenletben is szereplő *Magic formula*, melynek argumentumában található oldalkúszási szög helyett egy egyenértékű oldalkúszási szög (α_{eq}) fog szerepelni. Pacejka könyvében többféle modellt is bemutat erre a hasonlósági módszerre vonatkozóan kombinált modellre, viszont ezek közül számomra az lesz a fontos, melyben az F_x longitudinális erőt bemenő (*input*) változóként képes kezelni. Az egyenértékű oldalkúszási szög definíciója az előzőekben ismertetett referencia állapotban:

$$\alpha_{eqn} = \frac{1}{\varphi_x} \frac{C_{F\alpha}}{C_\alpha} \alpha, \quad (2.55)$$

ahol:

$$\varphi_x = \frac{\sqrt{D^2 - F_x^2}}{D}, \quad (2.56)$$

$$C_{F\alpha} = \varphi_{xa} \left(C_\alpha - \frac{1}{2} D \right) + \frac{1}{2} (D - F_x), \quad (2.57)$$

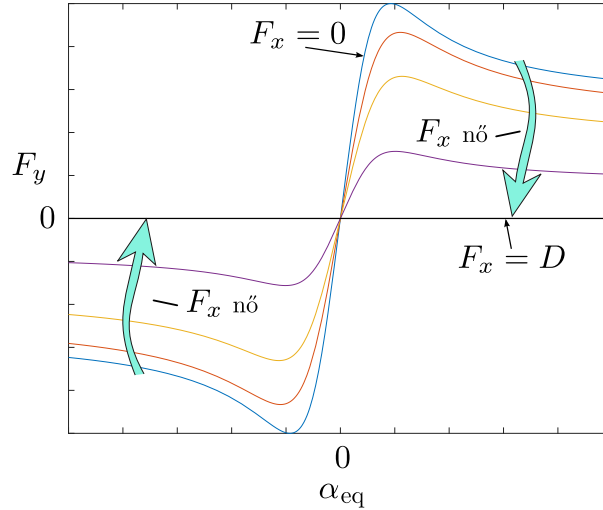
$$\varphi_{xa} = \left(1 - \left(\frac{F_x}{D} \right)^n \right)^{1/n}. \quad (2.58)$$

Ezekben az egyenletekben szereplő D és C_α a korábban már említett csúcsstényező, illetve a kerék oldalkúszási merevsége. A (2.58)-es egyenletben megjelenő n kitevő szabadon megválasztható 2 és 8 közötti szám. Az oldalirányú erő végleges alakja tehát:

$$F_y = \varphi_x F_{y0}(\alpha_{eq}), \quad (2.59)$$

ahol F_{y0} megegyezik a (2.51)-es függvénnyel. Ellenőrzésképpen, ha $F_x = 0$, tehát nem fékezünk, akkor $\varphi_{xa} = 1$, $C_{F\alpha} = C_\alpha$, $\varphi_x = 1$, és így $\alpha_{eq} = \alpha$. Továbbá, ha $F_x = D$, tehát maximálisan fékezünk, akkor $\varphi_x = 0$, így $F_y = 0$, tehát nem ébredhet oldalirányban erő a kereken. Az átmenet e két szélső állapot között fokozatos, ahogy az a 2.5 ábrán is látható.

Összefoglalva, mind lineáris kerékmodellre, mind a valóságot rendkívül jól közelítő Pacejka-féle korrigált *Magic formulá*-ra szükségünk van; az előbbire a szabályzó megtervezéséhez, az utóbbira pedig a fékezési szituáció szimulációjához. Az, hogy ezek eltérése mekkora komplikációt fog okozni a szabályzásnál, az majd az 3.3.2. fejezetben lesz kifejtve.



2.5. ábra. Különböző fékezőerők hatása a laterális erőre.

2.3. Sofőrmmodell

A mozgásegyenlet utolsó ismeretlen paramétere a δ , mely a kerékállás szöge, melyet a való életben a sofőr képes irányítani a kormánykereken keresztül. Ha e két mennyiség közti kapcsolatot egyszerűsítésképpen lineárisnak tekintjük – így a Ackerman-feltételt elhanyagoljuk, mivel annak úgysis kis haladási sebességek esetében van hatása [5] –, akkor a váltószámot a kerékállás szöge és a kormányaszög között a következő, egyszerű megfontolás alapján kaphatjuk meg. A kormánykereket jó közelítéssel kétszer lehetséges teljesen elforgatni mindkét irányba; ez irányonként 720° -ot jelent. Ekkor a kerék szélső helyzetében az eredeti irányához képest nagyjából 36° -kal képes elkanyarodni. Így a váltószám alakulása:

$$\delta_d = \frac{720}{36} \delta = 20\delta. \quad (2.60)$$

A számunkra megfelelő sofőrmmodell kiválasztásához az alábbi szempontokat kell figyelembe vennünk:

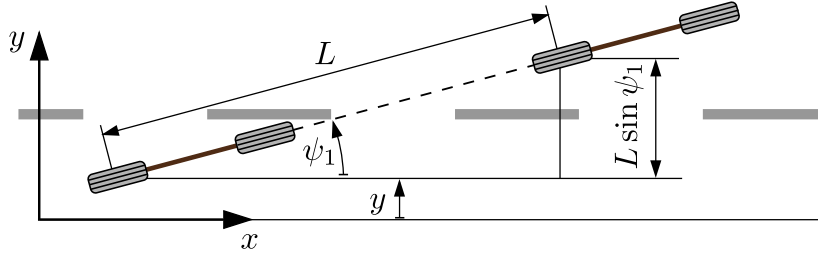
- a sofőr feladata a sávtartás,
- a dolgozat szempontjából a sofőr szerepe másodlagos, hiszen annak lényege, hogy olyan fékszabályzó tervezése legyen megvalósítva, mely kisegíti a sofőrt.

Ebből a két megállapításból azt szűrhetjük le, hogy egyszerűbb sofőrmmodell megválasztása elegendő; mégpedig olyan, amely sávtartásra képes. Erre lesz megfelelő az úgynevezett *Look-ahead* modell.

2.3.1. Look-ahead sofőrmmodell

A *Look-ahead* sofőrmmodell megértéséhez nyújt segítséget a 2.6 ábra. A módszer lényege, hogy a jármű várható oldalirányú eltérését (a globális koordinátarendszerben) veszi figye-

lembe egy adott referenciaútvonalhoz képest, L távolságban a jármű aktuális pozíciója előtt, mégpedig feltételezve, hogy ekkor a jármű iránya változatlan marad.



2.6. ábra. *Look-ahead* szabályzó bemutatása [12].

A kormányzóg meghatározásához az oldalirányú kitérésre negatív visszacsatolást, azok közül is az egyszerűbb proporcionálist alkalmazzuk, így [12]:

$$\delta = -P_y(y + L \sin(\psi)), \quad (2.61)$$

ahol hogyha kis szöget feltételezünk, és a $P_y L \triangleq P_\psi$ jelölést alkalmazzuk, akkor:

$$\delta = -P_y y - P_\psi \psi. \quad (2.62)$$

Ennélfogva arányosan visszacsatoljuk a jármű aktuális oldalirányú pozícióját és a legyezési szögét. A pontosabb sofőr leírásához szükségesek lennének a felhasznált változók nem csak arányos, hanem differenciáló, illetve integráló tagjai is visszacsatolva, viszont a stabilitásvizsgálat során már 6 erősítési tényezővel kellene dolgoznunk, melyek ábrázolása már igencsak komplikált. Tulajdonképpen elégséges is használni a (2.62)-es egyenletben szereplő kifejezést, hiszen ahogy korábban már ki lett fejtve, elégséges számunkra egyszerűbb sofőrmodell is. Esetünkben, a *Look-ahead* módszer során felhasznált két állapotváltozó (jármű tömegközéppontjának oldalirányú kitérése y_E és legyezési szög ψ) már rendelkezésünkre áll a levezetett mozgásegyenletben. Ezen a ponton már csak meg kell határoznunk, hogy milyen erősítési tényezők esetén lesz stabil a szabályzás, tehát maga a sofőr.

2.3.2. Stabilitásvizsgálat időkézés nélkül

A stabilitásvizsgálatot lineáris differenciálegyenletrendszer esetén lehet elvégezni, emiatt első lépésben a levezetett mozgásegyenletet kell linearizálnunk az egyensúlyi hely körül. Ugyan maga a fékezés (főleg a μ -split fékezés) egy nemlineáris jelenség, viszont ebben a fejezetben a sofőr stabilitását állandó sebesség mellett vizsgáljuk. Ezt azért tehetjük meg, mert feltételezhetjük, hogy az időt "befagyasztjuk". Ezáltal kapunk egy időben nem változó rendszert, amelynél a tranziens jeleknek lenne elég ideje lecsengeni. Ugyanakkor intenzívebb fékezés esetén ez a megállapítás már nem feltétlenül lesz igaz, viszont máskülönben nem tudnánk értelmezni a sofőr stabilitását [13].

A linearizálás első lépése a levezetett mozgásegyenlet egyensúlyi helyeinek keresése, tehát: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Könnyen rá lehet jönni, hogy ekkor az alábbiaknak kell teljesülnie:

$$v_y = 0, \quad (2.63)$$

$$\omega = 0, \quad (2.64)$$

$$y_E = 0, \quad (2.65)$$

$$\psi = 0, \quad (2.66)$$

$$F_{11,x} = F_{12,x}, \quad (2.67)$$

$$F_{21,x} = F_{22,x}. \quad (2.68)$$

Ugyanakkor ezek a feltételek a (2.38)-as és (2.41)-es egyenletek esetében nem biztosítják még, hogy jobb oldaluk nulla legyen. Azokhoz az kellene, hogy:

$$F_{11,x} + F_{12,x} + F_{21,x} + F_{22,x} = 0, \quad (2.69)$$

$$v_x = 0, \quad (2.70)$$

amely feltételek irrevelánsak egy valós fékezés esetén. Ez is egyfajta bizonyítása annak, hogy a fékezési szituáció nem linearizálható. Az ellentmondások feloldásának érdekében szükséges a (2.38)-as és (2.41)-es egyenleteket mellőznünk a mozgásegyenletből, melyet úgy tehetünk meg, hogy $v_x \triangleq V = \text{konstans}$ helyettesítéssel élünk; pont ugyanúgy, mint a Gibbs-Appell egyenlettel történő levezetés esetén. Továbbá, lineáris vizsgálat okán a bemutatott kerékmodellek közül a lineáris kerékmodell lesz figyelembe véve a levezetések során. Ekkor olyan sofírt szeretnénk "megtervezni" (ahogy a bevezetőben lett említve), amely kis oldalirányú perturbációk ellen reagál stabilan. A linearizálandó differenciálegyenlet így a következőképpen alakul:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{\omega} \\ \dot{y}_E \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \Pi_1 - \omega V \\ \frac{1}{I_z} \Pi_2 \\ V \sin(\psi) + v_y \cos(\psi) \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

melynek számunkra lényeges egyensúlyi pontja (mert lehet több is, de azokkal nem foglalkozunk):

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}. \quad (2.72)$$

Az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \delta)$ differenciálegyenlet linearizált alakja a következő:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u_d, \quad (2.73)$$

ahol:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_d} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (2.75)$$

$$u_d = \delta. \quad (2.76)$$

Az így kapott linearizált differenciálegyenlet alakja:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{\omega} \\ \dot{y}_E \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ \omega \\ y_E \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_d, \quad (2.77)$$

ahol:

$$A_{11} = -\frac{C_{\alpha,11} + C_{\alpha,12} + C_{\alpha,21} + C_{\alpha,22}}{mV}, \quad (2.78)$$

$$A_{12} = \frac{a_2(C_{\alpha,21} + C_{\alpha,22}) - a_1(C_{\alpha,11} + C_{\alpha,12})}{mV} - V, \quad (2.79)$$

$$A_{21} = -\frac{a_1(C_{\alpha,11} + C_{\alpha,12}) - a_2(C_{\alpha,21} + C_{\alpha,22})}{I_z V}, \quad (2.80)$$

$$A_{22} = -\frac{a_1^2(C_{\alpha,11} + C_{\alpha,12}) + a_2^2(C_{\alpha,21} + C_{\alpha,22})}{I_z V}, \quad (2.81)$$

$$B_1 = \frac{C_{\alpha,11} + C_{\alpha,12} + F_{11,x} + F_{12,x}}{m}, \quad (2.82)$$

$$B_2 = \frac{a_1(C_{\alpha,11} + C_{\alpha,12} + F_{11,x} + F_{12,x})}{I_z}. \quad (2.83)$$

Először az így kapott linearizált rendszer irányíthatóságát érdemes vizsgálni, azaz létezik-e olyan u_d szabályozójel a szimuláció teljes időtartamára nézve, mely az állapotváltozókat az állapottér tetszőleges pontjába vigye véges idő alatt. Ehhez a klasszikus irányításméletből ismert irányíthatósági mátrixot kell vizsgálnunk, melynek definíciója [14]:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}], \quad (2.84)$$

ahol n a rendszer szabadsági foka, esetünkben $n = 4$. A rendszerünk akkor irányítható, ha az alábbi feltétel teljesül:

$$\text{rank}(\mathbf{C}) = n. \quad (2.85)$$

A számításokat nem részletezve belátható, hogy a (2.77)-es egyenletben szereplő linearizált mozgásegyenletre az irányíthatósági mátrix rangja valóban megegyezik a rendszer szabadsági fokának számával. Ezt követően illeszthetjük be a választott *Look-ahead* szabályzást, mely egy arányos, negatív visszacsatolást jelent a szabályzásra nézve. Így a beavatkozás felírható az állapotváltozók segítségével:

$$u_d = \mathbf{P}^\top \mathbf{x}, \quad (2.86)$$

ahol:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P_y \\ -P_\psi \end{bmatrix}. \quad (2.87)$$

Ezt behelyettesítve a (2.77)-es egyenletbe kapjuk, hogy:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{BP}^\top \mathbf{x}, \quad (2.88)$$

ahonnan az állapotváltozók vektora jobbról kiemelhető, így:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{P}^\top)}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{x}. \quad (2.89)$$

Ezáltal már csak egy úgynevezett rendszermátrixot kaptunk, és így elvégezhető a Hurwitz-féle stabilitásvizsgálat. Elmondhatjuk, hogy a *Look-ahead* szabályzási módszer tulajdonképpen nem más, mint pólusáthelyezés. Ekkor a $\tilde{\mathbf{A}}$ összes sajátértékének valós részének a komplex számsík bal oldalán kell elhelyezkednie. A Hurwitz-módszerhez $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix karakterisztikus egyenletének együtthatóit kell vizsgálnunk, tehát:

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (2.90)$$

ahol az együtthatók:

$$a_3 = -(A_{11} + A_{22}), \quad (2.91)$$

$$a_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} + B_1P_y + B_2P_\psi, \quad (2.92)$$

$$a_1 = P_\psi(B_1A_{21} - B_2A_{11}) - P_y(B_1A_{22} - B_2A_{12} - B_2V), \quad (2.93)$$

$$a_0 = P_yV(B_1A_{21} - B_2A_{11}). \quad (2.94)$$

A Hurwitz-féle stabilitásvizsgálat szerint az aszimptotikus stabilitáshoz szükséges, hogy ezen együtthatók mind pozitívak legyenek (vagy mind negatívak, beleértve a λ^4 együtthatóját is), illetve a Hurwitz-determináns is pozitív legyen, mely előáll az együtthatókból:

$$H_3 = \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{bmatrix}, \quad (2.95)$$

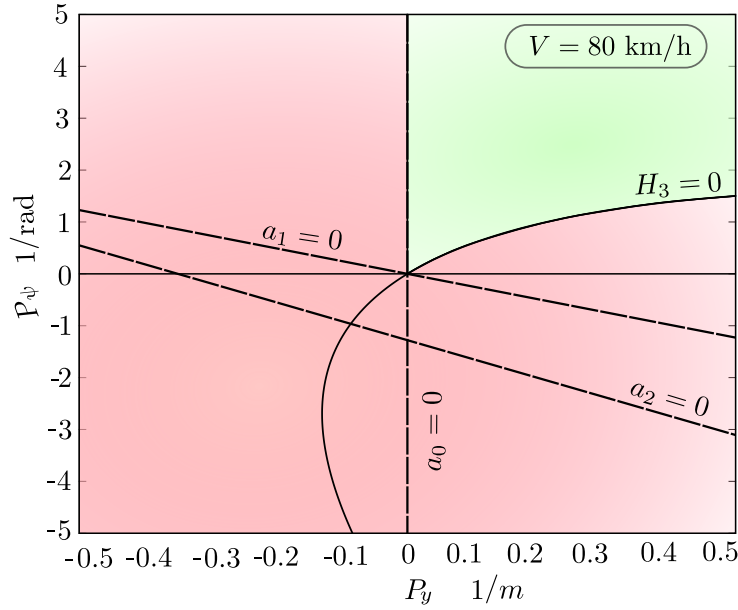
melyet kifejtve kapjuk, hogy:

$$a_3a_2a_1 - a_3^2a_0 - a_1^2 > 0. \quad (2.96)$$

Ezen határok által meghatározott stabilitási térképet a 2.7 ábrán láthatjuk. Ezen a $P_y - P_\psi$ síkon a stabil tartományt $V = 80$ km/h esetén a Hurwitz-féle determináns és a karakterisztikus egyenlet konstans tagjának együtthatója fogja közre. Míg előbbi dinamikus, addig utóbbi statikus stabilitásvesztéshez vezet, amennyiben áthaladunk rajtuk. E térképpel kapcsolatban az alábbi megjegyzéseket tehetjük:

- a jármű paramétereinek függvényében a stabilitási határok vándorolnak. Ezek közül az egyik legfontosabb a jármű sebessége: minél kisebb, annál nagyobbá válik a stabil tartomány (ez a későbbiekben hasznos lesz),
- kis $P_y - P_\psi$ kombinációkra csak pozitív erősítési tényezőket választhatunk, ami azt jelenti, hogy a sofőr valóban ellenkormányoz a negatív visszacsatolás miatt.
- a_3 együttható független az erősítési tényezőktől. Ennek magyarázata, hogy magának a járműnek alaphoz stabilnak kell lennie, melynek kritériuma, hogy [15]:

$$(C_{\alpha,21} + C_{\alpha,22})a_2 > (C_{\alpha,11} + C_{\alpha,12})a_1. \quad (2.97)$$



2.7. ábra. Stabilitási térkép időkésés nélküli sofőrre.

- megjelennek paraméterként a longitudinális (fékező)erők az együtthatókban. A probléma az lehet, hogy ezek az erők fékezés során folyamatosan változnak, ezáltal maga a stabilitási térkép is változna. Viszont ez elhanyagolható, mivel B_1 és B_2 kifejezésben az oldalkúszási merevséghez adjuk hozzá őket, melynek nagyságrendje általában eggyel nagyobb, mint a fékezőerőké.

2.3.3. Stabilitásvizsgálat időkéséssel

Időkéséses stabilitásvizsgálatra is szükségünk van, mivel valós sofőrrel szeretnénk szimulálni a μ -split fékezést. Az emberi időkésés azért sem elhanyagolható, mivel nagyságrendi különbsége van (például) a fékszabályozóhoz képest. Másrésztől ugyancsak, mint az előző fejezetben, lineáris rendszer vizsgálatával viszonylag könnyen meghatározhatóak állandó időkésést feltételezve a stabil sofőr paraméterei. Az időkéseltetett rendszer alakja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u_d(t - \tau), \quad (2.98)$$

ahol minden változatlan, kivéve a beavatkozó jelet, amely τ idővel késik, így a *Look-ahead* szabályzás is módosul:

$$u_d(t - \tau) = -P_y y(t - \tau) - P_\psi \psi(t - \tau). \quad (2.99)$$

Hasonló gondolatmenet alapján kifejezhetjük a beavatkozójelet a késleltetett állapotváltozó segítségével:

$$u_d(t - \tau) = \mathbf{P}^\top \mathbf{x}(t - \tau), \quad (2.100)$$

ahol $\mathbf{P}$ vektor alakja megegyezik a (2.87)-es egyenletben felírt alakkal. Ezt követően behelyettesíthetjük ezt a (2.98)-as egyenletbe, és így kapjuk, hogy:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{P}^\top \mathbf{x}(t - \tau). \quad (2.101)$$

Igaz, az időkésés nélküli számításban ez a lépés nem volt részletezve, de ezen a ponton kell behelyettesíteni az exponenciális próbafüggvényt, mely:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}e^{\lambda t}, \quad (2.102)$$

ahol $\mathbf{K}$ tetszőleges konstans vektor. Időkésés miatt szükségünk van ennek τ idővel való eltoltjára, illetve az időbeli deriváltjára:

$$\mathbf{x}(t - \tau) = \mathbf{K}e^{\lambda t}e^{-\lambda\tau}, \quad (2.103)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda\mathbf{K}e^{\lambda t}. \quad (2.104)$$

Ezeket visszaírva (2.101)-es egyenletbe, egyszerűsítve az expenciális függvénnyel és átrendezést követően kapjuk, hogy:

$$\underbrace{(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{P}^\top e^{-\lambda\tau})}_{\det[\]=0}\mathbf{K} = \mathbf{0}. \quad (2.105)$$

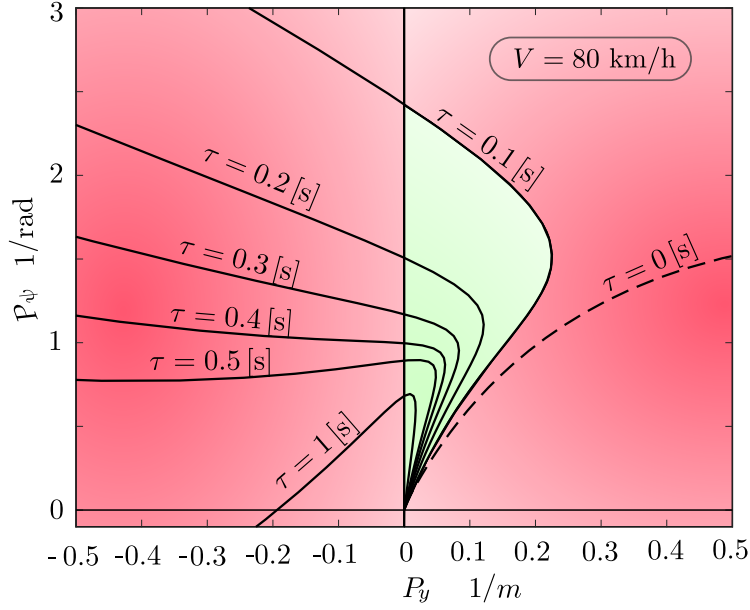
Ahogy látjuk, ennek az egyenletnek a megoldását akkor kapjuk meg, ha vesszük az eredő mátrix determinánsát és azt egyenlővé tesszük nullával. Kifejtve a determinánst jutunk el a karakterisztikus egyenlethez:

$$\begin{aligned} \lambda^4 - (A_{11} + A_{22})\lambda^3 + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} + (B_1P_y + B_4P_\psi)e^{-\lambda\tau})\lambda^2 + \\ + (P_\psi(B_1A_{21} - B_2A_{11}) - P_y(B_1A_{22} - B_2A_{12} - B_2V)e^{-\lambda\tau})\lambda + \\ + (B_1A_{21} - B_2A_{11})P_yV e^{-\lambda\tau} = 0. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Látszik, hogyha $\tau = 0$ -t helyettesítenénk be ebbe a karakterisztikus egyenletbe, akkor visszakapnánk a (2.90)-es egyenletet, továbbá az is, hogy ez már nem polinom, hiszen megjelenik λ az exponenciális függvényben is, így a karakterisztikus egyenlet transzcendenssé válik. Ennélfogva, ennek végtelen sok gyöke lesz a komplex számok halmazán. A módszer neve, amivel mégis meghatározhatjuk a késleltetett rendszer stabilitási határait, az az úgynevezett *D-szeparáció*. Ekkor elvégezzük a $\lambda = i\omega$ helyettesítést, és szeparáljuk a karakterisztikus egyenletet valós és képzetes részre. Elméleti háttere a *D-szeparációnak* az, hogy megnézzük, hogy a stabilitás határa (ami a képzetes tengely) hol helyezkedik el a $P_y - P_\psi$ síkon. A valós és képzetes részre bontott egyenleteket az erősítési tényezőkre megoldva paraméteres görbét kapunk, ahol ω a paraméter. A statikus stabilitásvesztés ismét a $P_y = 0$ egyenes mentén fog elhelyezkedni. Mivel paraméteres görbévé válik a dinamikus stabilitásvesztés határa, ezért a $P_y = 0$ egyenest vagy akár saját magát is végtelen sokszor metszheti. Az így kirajzolódó stabilitási térképen a görbék által közrefogott tartományokon az instabil gyökök száma állandó, ezek számossága a *Stépán-formulával* határozható meg [16]. Ahol az instabil gyökök száma nulla, az a tartomány stabilnak mondható. A 2.8 ábrán láthatóak a stabil tartományok különböző időkésések esetén.

A térképpel kapcsolatban az alábbi megjegyzéseket tehetjük:

- időkéséses esetben is elmondhatjuk, hogy adott τ időkésés esetén a sebesség csökkenésével a stabil tartomány területe növekszik,



2.8. ábra. Stabilitási térkép különböző időkések esetén.

- $\tau = 0 \text{ [s]}$ esetén visszacapjuk a Hurwitz-determináns határát,
- létezhet olyan τ időkések, mely esetén nem létezik stabil tartomány [17]. Ekkor a *D-görbe* függőleges érintővel indul. Viszont ez a veszély minket nem fenyeget; ahogy látjuk a 2.8 ábrán, viszonylag nagy haladási sebességen még 1 másodperces időkések esetén is van stabil tartomány.

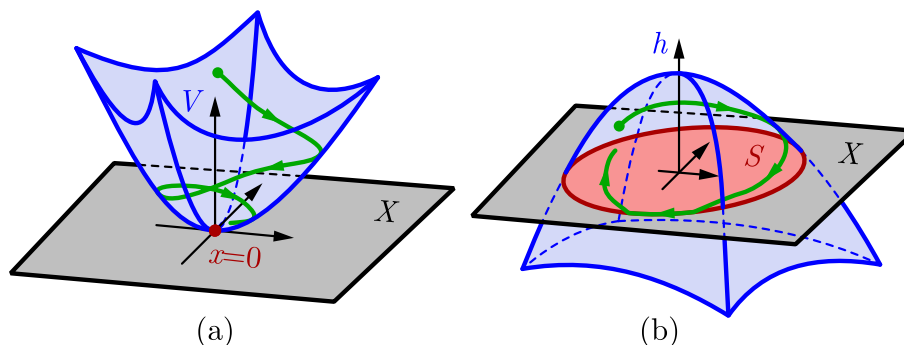
Láthatjuk, hogy időkések esetén a stabil tartomány az időkések nélküli esethez képest jelentősen megfogyatkozott, ezáltal stabil sofőr paraméterek kiválasztására egyre kevesebb lehetőségünk van. Ahogy majd a 4. fejezet alapján kiderül, igazán nincs is szükségünk szigorúan a stabil tartományról választani paramétereket, hiszen a fékezés közben a jármű sebességének folyamatos csökkenésével bővül a stabil tartományok halmaza.

3. Biztonságkritikus szabályzás

Szabályzási módszerek közül kétség kívül a rendszerek stabilitását garantáló módszerek a leggyakoribbak. Ekkor olyan beavatkozójelek megtervezésére van szükségük, mely hatására a rendszer valamely állapotváltozóját (vagy állapotváltozóit) szeretnénk a fázissík egy adott pontjába eljuttatni véges időn belül és ott tartani. Erre a legegyszerűbb példa lehet az inverz inga esete, ahol függőleges pozícióban kívánjuk tartani az ingát. Ezzel ellentétben, ha μ -split fékezés esetén a veszélyt jelentő kiperdülést stabilizálással kívánunk elkerülni, az a magasabb tapadású oldali fékezőerők konvergenciáját jelentené az alacsony tapadású oldaléhoz, ezzel megszüntetvén a perdítőnyomatékokat. Viszont hasonló megoldás már létezik erre a problémára, mely a bevezetésben említett *select low* ABS funkció, melynek legnagyobb hátránya a drasztikus mértékben megnövekedett féktávolság. A biztonságkritikus szabályzás bevonásában döntő szerepet játszott az a felismerés, hogy voltaképpen egy valós sofőr egyedül is meg tud bírkozni a μ -splitben rejlő, kihívásokkal teli feladattal, feltéve, ha ébrednek kellően nagy szögsebességek és oldalkúszási szögek. Ez a megállapítást a matematika nyelvére lefordítva azt jelenti, hogy olyan szabályzás megtervezése indokolt, mely beavatkozásával – esetünkben ezek a magas tapadás oldali fékezőerők lesznek – a kívánt állapotváltozókat egy bizonyos határon belül képes tartani.

3.1. Elméleti háttér

A biztonságkritikus szabályzó közvetlen előzményének tekinthető a Kontrol Ljapunov Függvény (*Control Lyapunov Functions*, CLF), hiszen annak alapötlete kerül felhasználásra egy kulcsfontosságú különbséggel. Ezen két ellentétes céllal rendelkező szabályzó közti különbség megértéséhez nyújt segítséget a 3.1 ábra.



3.1. ábra. Kontrol Ljapunov Függvény (a) és Biztonságkritikus Szabályzó (b) hasonlósága [18].

Ljapunov függvények esetén célunk az origó stabilitásának biztosítása egy erre a célra megválasztott pozitív definit V függvénnyel [19]. Ljapunov erre vonatkozó tételei szerint, hogyha V pozitív definit és $\dot{V}$ negatív definit (vagy szemidefinit), akkor az origó

aszimptotikusan stabil (vagy stabil). Ez megfogalmazva matematikailag; hogyha:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq -\gamma(V(\mathbf{x})) \quad (3.1)$$

egyenlőtlenség teljesül, ahol a (2.1)-es affin rendszer esetén:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \quad (3.2)$$

akkor az origó stabilizálható. A módszer igazi nehézsége, hogy bonyolultabb rendszerek esetén nem mindig találunk megfelelő V Ljapunov-függvényt, megválasztása tehát nem intuitív. Ahogy majd látjuk később a biztonságkritikus szabályzásnál, egy merőben hasonló probléma fog fennállni. Összefoglalva, ezt az ötletet visszük át a biztonságkritikus szabályzásra, csupán a 3.1 ábrán látható különbséggel: V -ből h lesz, melynek a neve *Control Barrier Function* (CBF), és a biztonságot az alábbiak szerint fogjuk értelmezni: legyen $\mathcal{C}$ a folytonosan differenciálható h függvénynek egy felső szinthalmaza. Ekkor:

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h \geq 0\}, \quad (3.3)$$

$$\partial \mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h = 0\}, \quad (3.4)$$

$$\text{Int}(\mathcal{C}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h > 0\}, \quad (3.5)$$

és így $\mathcal{C}$ halmazra biztonságos tartományként (*safe set*) hivatkozhatunk, melyen kívülre nem kerülhet a rendszer trajektóriája [4]. $\mathcal{C}$ halmaznak e tulajdonságát pozitív invarianciának nevezzük (*forward invariance*). Mielőtt rátérnénk a CBF definíciójára, fontos megemlíteni a (3.1)-es egyenlet jobb oldalán is szereplő kifejezést (melyet ott γ -val jelöltünk), és neve kiterjesztett (*extended*) *class* $\mathcal{K}_\infty$ függvény. Legfontosabb tulajdonságai, hogy:

- leképezése $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- $\gamma(0) = 0$,
- szigorúan monoton növekvő függvény, mely a teljes számegyenesen értelmezett,
- illetve legegyszerűbb példák erre az γ^p alakú függvények, ahol $p > 0$.

Továbbiakban a *class* $\mathcal{K}_\infty$ függvényeket CBF-ek esetén α -val fogjuk jelölni. Ennek ismeretében bevezethető a CBF definíciója:

Legyen $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ a folytonosan differenciálható h függvénynek egy felső szinthalmaza, és h -t *Control Barrier Function*-nek nevezzük, ha létezik olyan α kiterjesztett *class* $\mathcal{K}_\infty$ függvény, mely esetén:

$$\dot{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq -\alpha(h(\mathbf{x})) \quad (3.6)$$

a dinamikai rendszer összes $\mathbf{x}$ elemére [4]. Affin rendszer esetén $\dot{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ az alábbi alakban írható fel a (3.2)-es egyenlethez hasonlóan:

$$\dot{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \underbrace{\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}}_{\triangleq L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x})} + \underbrace{\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} \mathbf{u}}_{\triangleq L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x})}, \quad (3.7)$$

ahol $L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$ és $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})$ mennyiségeket *Lie*-deriváltaknak nevezzük. A (3.6)-os kifejezés geometriai értelmezését a 3.1 ábra jobb oldalán láthatjuk: ha a biztonságos tartomány határán vagyunk, tehát $h = 0$, akkor a *class* $\mathcal{K}_{\infty}$ függvény definíciója miatt $\alpha(h = 0) = 0$, így $\dot{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0$, így a CBF idő szerinti deriváltja ezen a helyen nemnegatív, ami azt eredményezi, hogy h monoton növekvő függvény, tehát a biztonságos tartomány belsejében marad. A kérdés már csak a szabályozójel meghatározása. Ezt általános esetben egy optimalizációs probléma megoldásaként (*Quadratic Program*) lehet elvégezni:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{u}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{k}_d(\mathbf{x})\|^2, \\ \text{s.t.} \quad & L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\mathbf{u} + \alpha(h) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ebben a QP-ban $\mathbf{k}_d(x)$ egy ismertnek tekinthető, névleges (avagy nominális) szabályzás. Az s.t. jelölés az angol *subject to*-ra utal, hiszen a kvadratikus program megoldók (amilyen például simplex megoldók vagy gradiens módszerek) különböző kényszerek mellett képesek a minimalizálásra. Amennyiben más kényszer nem szerepel (3.8)-ban, úgy az u beavatkozás zárt alakú analitikus megoldása ismert a KKT-feltételek (Karush–Kuhn–Tucker) [20] alapján:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{k}_d(\mathbf{x}) & \text{ha } \varphi > 0, \\ \mathbf{k}_d(\mathbf{x}) - \frac{\varphi \varphi_0^{\top}}{\varphi_0 \varphi_0^{\top}} & \text{különben,} \end{cases} \quad (3.9)$$

ahol:

$$\varphi = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})\mathbf{k}_d(\mathbf{x}) + \alpha(h(\mathbf{x})), \quad (3.10)$$

$$\varphi_0 = L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}). \quad (3.11)$$

Ehhez az alábbi megállapításokat tehetjük:

- affin rendszer esetén és a CBF ismeretében egyből, algoritmikusan számolható a beavatkozás,
- φ kapcsolófeltétel, hiszen annak előjele dönti el, hogy be kell-e avatkoznia a biztonságkritikus szabályzónak,
- φ kapcsolófeltétel kifejezésében szabadságunk van $\alpha(h(\mathbf{x}))$ függvény megválasztásában, ezáltal ezt egy szabályozótervezési paraméternek tekinthetjük. Gyakorlati jelentősége, hogy ennek beállításával elérhetjük, hogy a biztonságos tartomány határától mennyire közel (vagy távol) avatkozzon be a biztonságkritikus szabályzó,
- osztást kell elvégeznünk, amennyiben $\varphi \leq 0$, emiatt ki kell kötnünk, hogy ebben az esetben $\varphi_0 \varphi_0^{\top} \neq 0$, azaz $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) \neq 0$. Abban az esetben, ha $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) \equiv 0$ (tehát nem csak adott $\mathbf{x}$ -ekre), akkor magasabb rendű CBF-eket (*high order CBF*) [21] kell értelmeznünk. Azonban ebben a dolgozatban ez nem fog előfordulni, ezért ennek a módszertanát nem tárgyaljuk.

3.2. Alkalmazás saját feladatra

A szabályozás megtervezéséhez a (3.9)-es egyenlet alapján szükségünk van magára az affin differenciálegyenletre, illetve egy CBF-re. Elsőképpen az előbbit határozzuk meg.

3.2.1. CBF meghatározása

A bevezető fejezetben megfogalmazott cél az volt, hogy μ -split fékezés közben a jármű szögsebessége és oldalkúszási szöge adott határokon belül maradjon, ezáltal a szabályzás a biztonságot jelentő tartományon tartja ezeket a változókat. Az előbbit tartalmazza a levezetett mozgásegyenlet ($\dot{\psi} = \omega$), viszont az utóbbit a kerekek oldalkúszási szögéhez hasonlóan számíthatjuk a (2.47)-es egyenlet segítségével:

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right). \quad (3.12)$$

Viszont, mivel a későbbiekben ennek a kritikus értékét 1 radiánnál jóval kisebb értéknek fogjuk megválasztani – amit a szabályzás révén nem is léphet túl –, ezért élhetünk linearizálással, mely szerint:

$$\beta = \frac{v_y}{v_x}. \quad (3.13)$$

Azok az okok, amik miatt pont ez a két mennyiség lett kiválasztva a biztonság garantálása érdekében, azok a következők:

- a dinamikai rendszer fázistere 6 dimenziós; háromnál több változó ábrázolása nehézkes. A legkézenfekvőbb a síkban való ábrázolás a könnyű szemléltethetősége miatt,
- ezek azok a mennyiségek, melyeket a jármű szenzorai mérni, szoftverei pedig becsülni képesek. Az oldalirányú kitérés vagy legyezési szög szabályzásához képfelismerő szoftver lenne szükséges, melytől a dolgozat keretében eltekintünk.

Biztonságos tartománynak tekintjük azt a ponthalmazt, melyre $-\beta_{\text{kr}} < \beta < \beta_{\text{kr}}$ és $-\omega_{\text{kr}} < \omega < \omega_{\text{kr}}$. Két határt előírni ezekre mennyiségekre abból a szempontból indokolt, mert a jármű mindkét irányba képes kiperdülni; másrészt pedig maga a sofőr is képes olyan módon beavatkozni a kormányon keresztül, hogy túlságosan nagy (β, ω) értékek ébrednek. Ennek ismeretében kell megterveznünk a CBF-ünket, mely definíciójából adódóan a biztonságos tartományon belül pozitív, annak határán nulla, azon kívül pedig negatív. A megfogalmazott feltételt kielégítő CBF lehetne az alábbi, hiszen tulajdonképpen egy téglalapra lenne szükségünk:

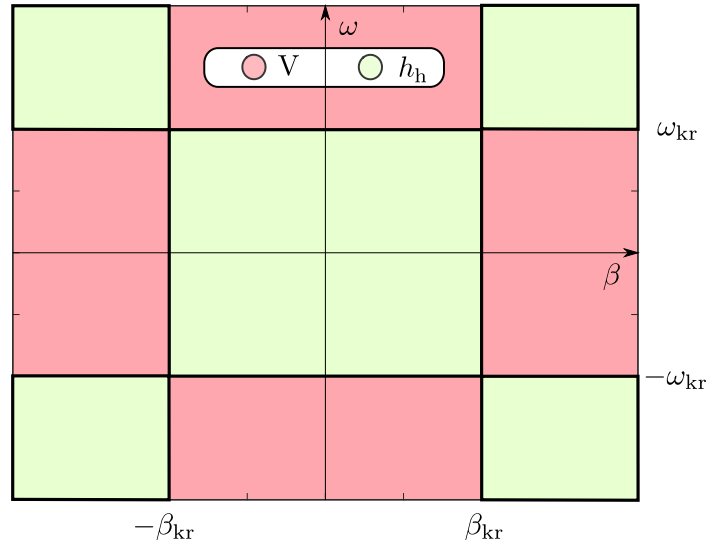
$$h(\beta, \omega) = \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta_{\text{kr}}} \right)^2 \right) \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{kr}}} \right)^2 \right). \quad (3.14)$$

A 3.2. ábrán láthatjuk, miért lenne téves döntés ezt választani; zöld színnel vannak ábrázolva azon tartományok, ahol $h > 0$ (tehát biztonságos), illetve pirossal, ahol $h < 0$ (tehát

veszélyes). Az a helyzet állt elő, hogy a kívánt biztonságos tartományok mellett további tartományok váltak biztonságossá, mégpedig olyanok, amelyek a mi szempontunkból nyilvánvalóan nem biztonságosak. Egyik megoldás lehetne erre a problémára, ha (3.14)-et egy arra alkalmas exponenciálisan lecsengő függvénnyel súlyoznánk:

$$h(\beta, \omega) = \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta_{\text{kr}}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{kr}}}\right)^2\right) e^{-C(\beta^2 + \omega^2)}, \quad (3.15)$$

ahol C olyan módon megválasztott paraméter, hogy a számunkra irreveláns biztonságos tartományok veszélyes tartományokká válnak. Csakhogy ezen a ponton egy újabb probléma merül fel: a későbbiekben szükségünk lesz h deriváltjaira az állapotváltozók szerint, és a kapott téglalap csücskein ez a derivált nem értelmezhető.



3.2. ábra. Rossz CBF választás, $V \rightarrow$ veszélyes, $h_h \rightarrow$ hibás CBF.

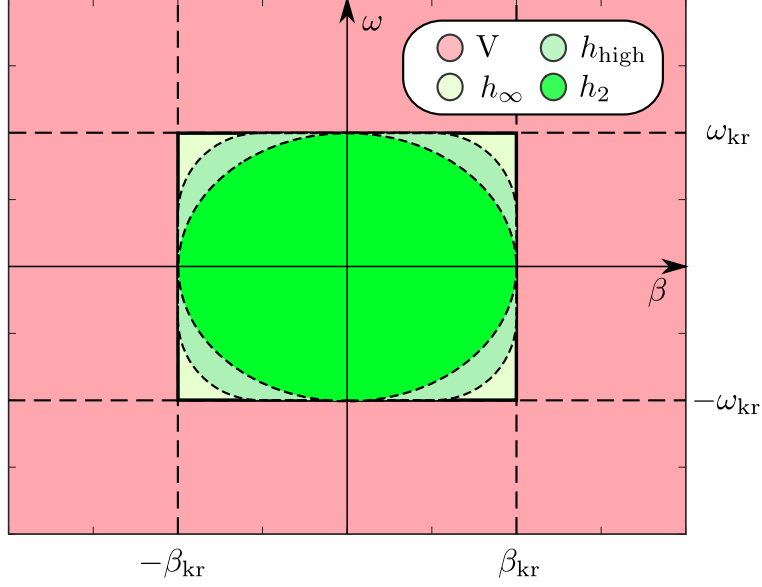
Az ellentmondás feloldására szükséges olyan CBF-t találni, melynek a deriváltja a fázistér minden pontjában értelmezett. Ennek a kiválasztásához nyújt segítséget a 3.3 ábra, ahol h alsó indexei a nemsoká definiált s kitevőre utalnak.

A 3.3 ábrán látható CBF-ek általános alakja:

$$h_s(\beta, \omega) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta_{\text{kr}}}\right)^s - \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{kr}}}\right)^s, \quad (3.16)$$

ahol ha:

- $s \rightarrow \infty$, akkor visszkapjuk a téglalap alakú tartományt, melyről beláttuk, hogy hibás választás,
- $s = 2$, akkor egy $\beta_{\text{kr}} - \omega_{\text{kr}}$ féltengelyekkel rendelkező ellipszist kapunk,
- $s = 2k$, ahol $k \in \mathbb{N}$, akkor ahogy a 3.3 ábrán is látszik h_{high} -al jelölt CBF esetén egyre jobban közelítjük meg a $h_\infty > 0$ -val jelölt tartományt.



3.3. ábra. CBF megválasztásának lehetőségei.

Konklúzióként elmondható, hogy az eredeti céltartományt a felvázolt ok miatt nem lehetséges megfelelő CBF-fel jellemezni, viszont azt közelíteni kellő mértékben igenis lehet. Ezen felül, minél kisebb s kitevőt választunk, annál konzervatívabbak leszünk, hiszen annál kisebb tartományt tekintünk biztonságosnak. Ezek alapján a szimulációk során végig $s = 2$ -vel lesznek elvégezve a számítások, tehát ellipszist fogunk biztonságosnak tekinteni.

3.2.2. Szabályozójel

A szabályozójel $u(\mathbf{x})$ kiszámítása előtt annak egy lényeges részletében kell döntést hoznunk, mégpedig komponenseinek számában. Ennek oka, hogy a magas tapadású oldalon mindkét kerékkel kívánunk fékezni és azokba beavatkozni is. Hogyha ezen az úton indulnánk el, és így $\mathbf{u} \triangleq (F_{11,x}, F_{21,x})^\top$ -t választanánk beavatkozásnak, akkor a két komponensre teljesen elfogadhatatlan értékeket is kaphatnánk. Erre egy rövid példa: a kiperdülés ellen a magas tapadású oldalon -5000 [N] szükséges együttesen, de $F_{11,x} = 5000$ [N] és $F_{21,x} = -10000$ [N] értékek is adódhatnak. A kiperdülés tényleg el lett kerülve, viszont az első kereket gyorsítanánk, míg a hátsó kereket nagyobb fékerővel fékeznénk a lehetségesnél. Ez a probléma visszavezethető az *input constraint*-ra, ami a beavatkozójelek alsó és felső határának létezését jelenti. Jelenleg elégedjünk meg azzal, hogy ehelyett a beavatkozójelek helyett egy másikat választunk, a felmerült problémával pedig a következő fejezetben fogunk foglalkozni.

Definiáljuk a szabályzást az alábbiak szerint:

$$u \triangleq F_{11,x}, \quad (3.17)$$

illetve:

$$F_{21,x} \triangleq \frac{a_1}{a_2} u, \quad (3.18)$$

ahol a magas tapadású oldal hátsó kereke a beavatkozási számszorosa, mégpedig a tengelytávok arányával szorozzuk be. Átrendezéssel láthatjuk ebből, hogy a (3.18)-as egyenlet a jármű súlypontjára felírt y_V irányú nyomatéki egyensúlyi egyenlet a magas tapadású oldalon, a fékezőerők így a terheléseloszlással arányosan alakulnak. Ennek a módszernek a vitathatatlan előnye az előzővel szemben az, hogy ha az első keréken történő beavatkozás fékereje a saját megvalósíthatósági határain belül van, akkor a hátsó kerék fékereje is saját határain belül marad. Így a következő alakúvá válik a (2.38)-(2.43)-ban található mozgásegyenlet:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\omega} \\ \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{m}(F_{12,x} \cos(\delta) - (F_{11,y} + F_{12,y}) \sin(\delta) + F_{22,x}) + \omega v_y \\ \frac{1}{m}((F_{11,y} + F_{12,y}) \cos(\delta) + F_{12,x} \sin(\delta) + F_{21,y} + F_{22,y}) - \omega v_x \\ \frac{1}{I_z}(w\tilde{F}_w + a_1\tilde{F}_{a1} + a_2\tilde{F}_{a2}) \\ v_x \cos(\delta) - v_y \sin(\delta) \\ v_x \sin(\delta) + v_y \cos(\delta) \\ \omega \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x})} u, \quad (3.19)$$

ahol:

$$\tilde{F}_w = F_{22,x} + F_{12,x} \cos(\delta) - (F_{12,y} - F_{11,y}) \sin(\delta), \quad (3.20)$$

$$\tilde{F}_{a1} = (F_{11,y} + F_{12,y}) \cos(\delta) + F_{12,x} \sin(\delta), \quad (3.21)$$

$$\tilde{F}_{a2} = -(F_{21,y} + F_{22,y}), \quad (3.22)$$

$$g_1 = \frac{\cos(\delta) + r}{m}, \quad (3.23)$$

$$g_2 = \frac{\sin(\delta)}{m}, \quad (3.24)$$

$$g_3 = \frac{a_1 \sin(\delta) - w(\cos(\delta) + r)}{I_z}, \quad (3.25)$$

$$r \triangleq \frac{a_1}{a_2}. \quad (3.26)$$

Azért kaphattuk meg ezt az alakot, mivel lineáris kerékmodellt választottunk a szabályzáshoz, így a laterális erők függetlenek a fékezőerőktől, emiatt azok az $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektorban szerepelnek. Most következhet a *Lie*-deriváltak meghatározása. Először a mindkét *Lie*-deriválthoz szükséges CBF gradienst kell kiszámolnunk, mely:

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial v_x} & \frac{\partial h}{\partial v_y} & \frac{\partial h}{\partial \omega} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

hiszen h csak az első három állapotváltozótól függ. A deriváltak az alábbiak lesznek:

$$\frac{\partial h}{\partial v_x} = \frac{2v_y^2}{\beta_{kr}^2 v_x^3}, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial h}{\partial v_y} = -\frac{2v_y}{\beta_{kr}^2 v_x^2}, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} = -\frac{2w}{\omega_{kr}^2}. \quad (3.30)$$

A *Lie*-deriváltakat pedig skaláris szorzással lehet meghatározni a (3.7)-es egyenlet alapján. Utolsó lépés a *class* $\mathcal{K}_\infty$ függvény megválasztása, mely esetünkben elégséges a legegyszerűbb, lineáris függvény is κ meredekséggel, tehát:

$$\alpha(h(\mathbf{x})) = \kappa h(\mathbf{x}). \quad (3.31)$$

Mivel az $u(\mathbf{x})$ beavatkozás skalármennyiség, ezért a (3.11)-es egyenletben szereplő φ_0 is skálár lesz, így a (3.9)-es kifejezésben lehet ezzel egyszerűsíteni a számlálóban és a nevezőben.

3.3. Módszer korlátjai

A dinamikai rendszer és a CBF levezetése során mindvégig arra kellett törekednünk, hogy egyszerre a megfogalmazott céljainknak és a biztonságkritikus szabályzó felírási szabályainak is meg kell felelnünk. Ez a mi esetünkben sem különbség, így szükségszerű volt kompromisszumokat kötnünk. A következő fejezetekben kerülnek felsorolásra a biztonságkritikus módszer eddig megoldatlan korlátjai, illetve az ezek miatti elkerülhetetlen lemondások a modellezés különböző szintjein.

3.3.1. Nem-affin dinamikai rendszer

A biztonságkritikus szabályzó elmélete affin dinamikai rendszerre lett "szabva" és bebizonyítva. Viszont ha a rendszerünk nem-affin, akkor felhasználhatnánk nem-affin és affin rendszerek közti transzformációt, mellyel az eredetileg nem-affin rendszer affinná tehető. Az eredeti rendszer:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (3.32)$$

és vigyük be u szabályzójelet az állapottérbe. Ekkor:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}, \quad (3.33)$$

ahol $\mathbf{I}$ egy $n \times n$ méretű egységmátrix és megjelenik az új beavatkozási jelünk $\tilde{\mathbf{u}}$, mely az eredeti idő szerinti deriváltja. A probléma ott jelentkezik, hogy ebben az esetben névleges kontrollt már csak a beavatkozási jel deriváltjára vagyunk képesek felírni, például ha $\tilde{\mathbf{k}}_d = 0$, akkor az eredeti u szabályozójeleink konstans függvény lesz, mégpedig azon az értéken lesz konstans, amelyen éppen kikapcsolt a biztonságkritikus szabályzás. Ez az adottság fékezés szempontjából elfogadhatatlan, mivel nem a maximálisan elérhető fékezőerővel fékezünk. Végül kénytelenek vagyunk lineáris kerékmodellt alkalmazni affin rendszer elérése céljából.

3.3.2. Disturbance

Disturbance, mint zavar azt hivatott érzékelteni, hogy nem modellezett dinamikai hatások jelenhetnek meg a valóság és a modell között. Ez egy elkerülhetetlen jelenség, mely azt

vonja maga után, hogy a biztonságkritikus szabályzás során az állapottér trajektóriái igenis elhagyhatják a biztonságos tartományt. Pontosan ez fog történni az esetünkben is, mivel nem azonos kerékmodell kerül a szabályzásba és a szimulációs környezetbe: az előbbibe az affinság kényszerűségéből kifolyólag a lineáris kerékmodell, az utóbbiba pedig a valóságot jól közelítő kombinált kerékmodell kerül beépítésre.

3.3.3. Szingularitás

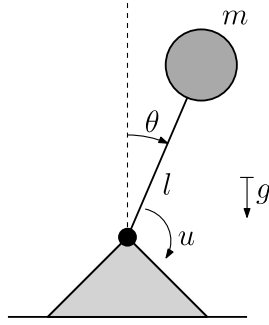
Szingularitás esetén a (3.9)-es egyenlet nevezője nulla, tehát $L_{\mathbf{g}}h = 0$, ekkor végtelen nagy u beavatkozás mellett lehetne a szabályzás biztonságos. Azzal a lépéssel, hogy egy adott állapotváltozó (vagy akár egyszerre több) biztonságos tartományát két határ közé szeretnénk szorítani, automatikusan felbukkan a szingularitás problémája. Amennyiben csupán egy határt íránk fel erre, akkor h az adott állapotváltozóra nézve elsőfokú polinom lenne, melynek ugyanez az állapotváltozó szerinti deriváltja konstans, tehát sosem nulla, viszont ekkor végtelen nagyságú tartomány válna biztonságossá, mely téves feltételezés lenne. Ezzel ellentétben, két határ felírásakor a derivált $(\partial h / \partial x)$ már elsőfokú polinom, melynek mindig van zérushelye.

Geometriailag a szingularitás úgy magyarázható meg, hogy a biztonságos tartományon belül találunk olyan pontokat, melyekre $L_{\mathbf{g}}h = 0$. Amennyiben ezt az egyenletet kielégítő pontok halmaza nem metszi a biztonságos tartomány határát (ami $h = 0$), akkor a [21] forrásban bemutatott módszer szerint megszüntethető a szingularitás olyan módon, hogy ezen a helyen (vagy helyeken) névleges szabályzást működtetünk, azaz $\varphi > 0$. Amennyiben $L_{\mathbf{g}}h = 0$ egyenlet mégis metszi a biztonságos tartományt – mely az esetek túlnyomó többségére jellemző –, akkor is hasonló módszer alkalmazása célszerű. Az alábbi, 3.4 ábrán látható inverz inga példájának esetében is ugyanez a probléma merül fel, ahol az eredeti, biztonságos tartomány elforgatásával sikerül biztosítani a nullával való osztás elkerülését.

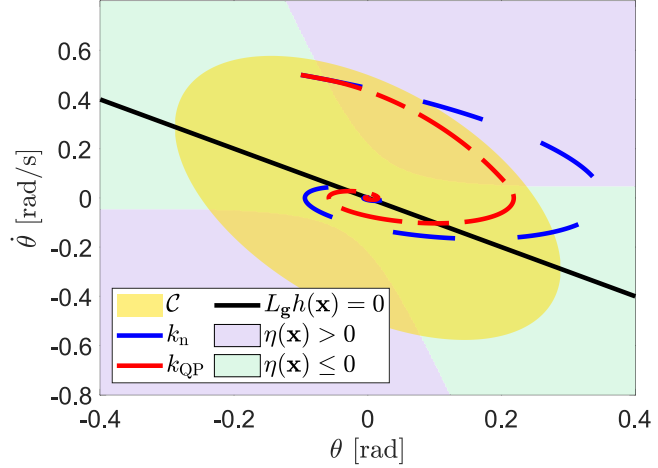
Mégis a biztonságos tartomány valamilyen transzformálásával kapott szingularitás elkerülő módszert nem tekinthetjük általános megoldásnak, hiszen:

- semmi sem garantálja, hogy tetszőleges dinamikai rendszer biztonságos tartományát metsző, szingularitást jelentő pontjai megfelelő forgatással kívül esnek a beavatkozást jelentő térrészből
- ez a megoldás geometriai kép alapján található meg, így három dimenzióban még éppen látnánk, hogy milyen beállítások mellett szüntethető meg a szingularitás. Viszont e felett már nem.

A dolgozat témája szempontjából a szingularitás problémája elsősorban az *input constraint* miatt merül fel.



(a),



(b),

3.4. ábra. Inverz inga példája (a), és megoldása a szingularitás elkerülésére (b) [22].

3.3.4. Input constraint

Valós szabályzórendszerek bemeneti jelei korlátosak, a megvalósíthatóságuk miatt igaz rájuk, hogy $u_{\min} < u < u_{\max}$. Esetünkben is a szabályozandó fékezőerő két határ között helyezkedik el:

$$F_{11,x} \in [-|F_{\max}|, 0], \quad (3.34)$$

hiszen a fékezőerőnek abszolútértékben létezik maximuma és csak negatív lehet. Egyik módszer lehet erre a 3.3.1.-es fejezetben bemutatott technika, ahol bevittük a szabályozójelet az állapottérbe, ezáltal innentől kezdve azt is bele lehet írni a CBF-be. Dinamikai rendszertől függetlenül az így kiadódó $L_g h$ minden esetben

$$L_g h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = \frac{\partial h}{\partial u} \quad (3.35)$$

alakú a $\mathbf{g}$ vektor miatt, mely amennyiben két határ közé szeretnénk tenni u -t, akkor például $h(x, u) = 1 - x^2 - u^2$ esetén

$$\frac{\partial h}{\partial u} = -2u, \quad (3.36)$$

így az $x-u$ fázistéren a $-2u = 0$ egyenes metszetni fogja a $h(x, u) = 1 - x^2 - u^2$ biztonságos tartományt, melynek megszüntetése magasabb dimenziókban a 3.3.3.-as fejezet szerint nem megvalósítható.

4. Szimuláció felépítése

A dinamikai rendszer és az alkalmazandó szabályzás kifejtését követően térhetünk rá a μ -split fékezés numerikus szimulációjára. Kétféle scenárióval is élhetünk, attól függően, hogy a fékezés az osztott tapadású felületen, vagy az előtt kezdődik. Ezen kívül, a szimuláció legfontosabb paramétereinek a meghatározását is elvégezzük ebben a fejezetben.

4.1. Fékezés folyamata

A fékezés teljes szimulációja alatt az alábbi feltételezéseket tesszük:

- a fékezés teljes időtartama alatt az alacsony és magas tapadású oldal súrlódási tényezője állandó,
- az eredetileg magas tapadású oldali kerekek a fékezés teljes időtartama alatt a magas tapadású oldalon maradnak, míg az eredetileg alacsony tapadású oldali kerekek az alacsony tapadású oldalon maradnak.

Ezekre az egyszerűsítések miatt van szükség, hiszen ezek a való életben nem feltétlenül valósulnak meg. Az utóbbi esetében külön kutatási területet jelent az a scenárió, hogy ha az egyik magas tapadású oldali kerék átkerül az alacsony tapadású oldalra (Filippov-rendszer).

A fékezőerő megjelenése a keréktalpponton nem tekinthető egységugrásjelnek valóságos körülmények között. Ennek oka, hogy a haszonjárművek fékrendszerei pneumatikusak, így egy adott fékezőnyomás eléréséhez több időre van szüksége, mint egy hidraulikus fékrendszernek. Másrészt a sofőr számára is kényelmes, ha a fékpedál lenyomására nem hirtelen, hanem fokozatosan "felépül" a fékerő.

4.1.1. Fékezés kezdete osztott tapadású felületen

A már μ -split felületen elkezdett fékezés esetében az alacsony tapadású oldal hamarabb éri el a saját súrlódási viszonyaihoz tartozó maximális fékezőerőt, míg eközben a magas tapadású oldal fékezőereje ugyanakkora mértékben nő egészen addig, míg az is el nem éri saját maximumát (mely a 4.1 ábrán látható). Ahogy láttuk, a biztonságkritikus szabályzás célja, hogy olyan módon avatkozzon be a magas tapadású oldali fékezőerőkbe, hogy a kiválasztott biztonságos tartományon belül maradjanak az állapotváltozók trajektóriái. A szabályozójel definíciója (a (3.9)-es egyenlet) alapján φ kapcsolófüggvény értelmezhető, mely előjelváltása esetén úgymond "bekapcsolja" a biztonságkritikus szabályzást, ha a biztonságos tartományt elhagyni készülénk. Ezzel szemben a "kikapcsolt" üzemmódjában $k_a(x)$ névleges szabályzás működik. Ezzel a scenárióval kapcsolatban az alábbi modellezési problémák jelennek meg:

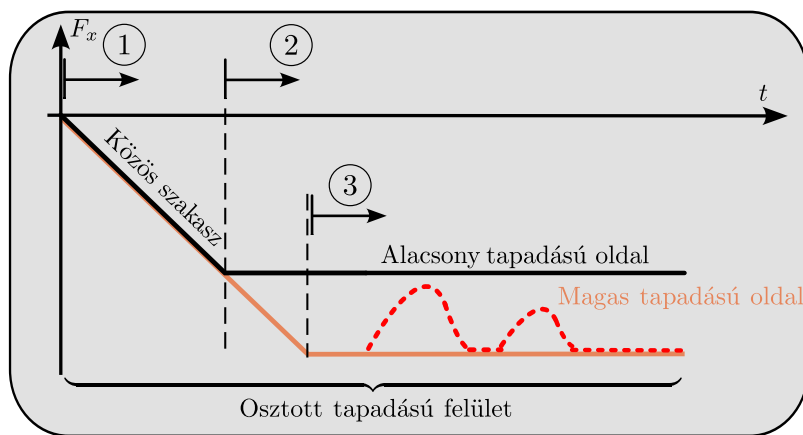
- nem egyértelmű, hogy honnan indítsuk a szimulációt, tehát $t = 0$ -t a fékezés melyik szakaszára vegyük fel. Erre három lehetőségünk van a 4.1 ábra szerint:

1. $t = 0$ a fékezés kezdete. Ekkor kétféle $k_d(x)$ névleges szabályzást kellene alkalmaznunk: egy kezdeti fékezési szakaszra jellemző, időben növekvő fékerőt, majd egy konstans, miután eléri maximumát.
2. $t = 0$ -kor az alacsony tapadású oldal szaturál, és a jármű ψ és β értékei elkezdnek növekedni. Ekkor is kétféle $k_d(x)$ névleges szabályzást kellene alkalmaznunk.
3. $t = 0$ -kor már a magas tapadású oldal is szaturál, de már csak egyféle $k_d(x)$ névleges szabályzást kellene alkalmaznunk, mégpedig a konstans maximális fékezőerőt.

Az első két esetben kétféle $k_d(x)$ definiálása szükséges, viszont ez nem megoldható, míg a harmadik esetben már elveszítenénk a kezdeti pillanat előtt bekövetkező, fékezőkülönbség hatására kialakuló állapotváltozók adott értékeit.

- a fékezőerők felfutásának jellege és időtartama ismeretlen.

Így olyan fékezési scenáriót érdemes választani, mely könnyen szimulálható és hozzá egyértelmű beavatkozási jel is tervezhető.



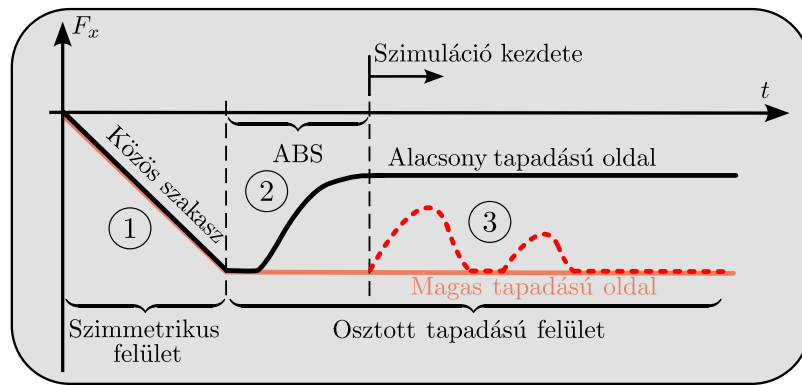
4.1. ábra. Névleges szabályzás problémája.

4.1.2. Fékezés kezdete osztott tapadású felület előtt

A másik lehetőségünk, hogy a fékezés még az osztott tapadású felület előtt elkezdődik, és még ugyancsak azelőtt éri el a kerekek a maximális fékezőerőt. Ekkor ezt fékezési scenáriót a 4.2 ábra alapján az alábbi részekre bonthatjuk fel az időben:

1. Fékezés kezdete: mindkét oldali kerékerő azonos karakterisztikával növekszik. Addig tart, míg valamelyik oldal el nem éri a saját súrlódási viszonyaihoz tartozó maximális fékerőt.

2. ABS beavatkozás: Az alacsony tapadású oldal kerekei elkerülhetetlenül blokkolnak, ha nagyobb fékezőerőhöz tartozó nyomás kerül kivezérlésre a kerekhez. Ekkor lép közbe az ABS és beállítja az alacsony tapadású oldalnak megfelelő fékezőerőt, aminél még nem blokkolnak azok a kerek. Míg ez a beállítás meg nem valósul (azaz a a kivezérelt nyomás nem lesz arányos a keréken az útestre átadódó fékerővel), addig nem kapcsolható be a biztonságkritikus szabályzó. Az ehhez szükséges pontos idő ismeretlen, nagyságrendje nagyjából 10–30 ms, de feltételezem, hogy ez alatt a idő alatt nem perdül ki és válik irányíthatatlanná a jármű.
3. Biztonságkritikus szabályzás: a numerikus szimuláció ettől a pillanattól kezdődik. Az ABS mindkét oldalon sikeresen beállított egy-egy fékerőt, aminél nem blokkolnak a kerek, továbbá az ehhez szükséges beállási idő alatt bekövetkező dinamikai hatásokat a numerikus szimuláció nemzérus kezdeti értékeiként vesszük figyelembe.



4.2. ábra. Fékezés kezdete még az osztott tapadású felület előtt.

4.2. Kerékerők meghatározása

Utolsó lépések egyike a numerikus szimulációhoz a kerékerők meghatározása, mely alatt a longitudinális erők esetében a $k_d(x)$ névleges fékezőerők, laterális erők esetében pedig a (2.60)-as egyenletben szereplő D csúcsparaméter meghatározását jelenti.

4.2.1. Névleges fékezőerők

A névleges fékezőerőket a jármű terheléeloszlásának és lassulásának függvényében határozhatjuk meg. A fékezés során adott, állandó lassulást feltételezünk, mely a súrlódási tényezőkhöz hasonlóan tapasztalati érték. Az ebből és a jármű tömegéből számítható teljes fékerőt ezt követően a jármű jobb -és baloldala között a súrlódási tényezők arányában, az első és hátsó tengelye között pedig a jármű tömegeloszlásának megfelelően osztjuk szét. Az utóbbi alatt statikus tömegelosztást értelmünk, melyet akkor tehetünk meg, ha kis

lassulásokat feltételezünk és a jármű közel egyenes vonalú mozgást végez. Emiatt nem a vészfékezés esetét vizsgáljuk, hiszen akkor a dinamikus terheléseoszlást is figyelembe kellene vennünk. Első lépésben, állandó lassulást feltételezve a kerekek eredő fékezőereje:

$$F_{x,\text{total}} = ma . \quad (4.1)$$

Tegyük fel, hogy a jármű (haladási irányának megfelelő) jobb oldala száraz aszfalton, míg bal oldala pedig nedves aszfalton fékez, az 1.1 ábrának megfelelően. Ekkor a fékezőerők oldalankénti megoszlása:

$$F_{x,\text{jobb}} = \frac{\mu_{\text{high}}}{\mu_{\text{high}} + \mu_{\text{low}}} F_{x,\text{total}} , \quad (4.2)$$

$$F_{x,\text{bal}} = \frac{\mu_{\text{low}}}{\mu_{\text{high}} + \mu_{\text{low}}} F_{x,\text{total}} . \quad (4.3)$$

Ami pedig a jármű tehereloszlását illeti, vegyük az y_V irányú nyomatéki egyenletet oldalanként (mert különben nem lenne egyértelmű megoldása az egyenletrendszernek), így:

$$a_1 F_{11,x,d} = a_2 F_{21,x,d} , \quad (4.4)$$

$$a_1 F_{12,x,d} = a_2 F_{22,x,d} . \quad (4.5)$$

Ezt felhasználva már létezik egyértelmű megoldásunk mind a négy kerék névleges fékezőerejére, mely:

$$F_{11,x,d} = F_{x,\text{total}} \frac{\mu_{\text{high}}}{\mu_{\text{high}} + \mu_{\text{low}}} \frac{a_2}{a_1 + a_2} , \quad (4.6)$$

$$F_{12,x,d} = F_{x,\text{total}} \frac{\mu_{\text{low}}}{\mu_{\text{high}} + \mu_{\text{low}}} \frac{a_2}{a_1 + a_2} , \quad (4.7)$$

$$F_{21,x,d} = F_{x,\text{total}} \frac{\mu_{\text{high}}}{\mu_{\text{high}} + \mu_{\text{low}}} \frac{a_1}{a_1 + a_2} , \quad (4.8)$$

$$F_{22,x,d} = F_{x,\text{total}} \frac{\mu_{\text{low}}}{\mu_{\text{high}} + \mu_{\text{low}}} \frac{a_1}{a_1 + a_2} . \quad (4.9)$$

4.2.2. Maximális laterális erők

A D csúcsparaméter meghatározása abból a szempontból fontos, hogy a súrlódási viszonyoknak megfelelően maximálisan mekkora erő ébredhet a keréken laterális irányba. Ismét az y_V irányú nyomatéki egyenletből indulhatunk ki, de most nem oldalanként, így az első és második tengelyre ható normálerők:

$$F_{1,z} = mg \frac{a_2}{a_1 + a_2} , \quad (4.10)$$

$$F_{2,z} = mg \frac{a_1}{a_1 + a_2} , \quad (4.11)$$

ahol g a gravitációs gyorsulás. Mivel a járműnek az y_V irányba eső tömegeloszlását szimmetrikusnak tekinthetjük, ezért az egyes kerekeket terhelő normálerők a (4.10) és (4.11)-es

normálerők felével egyeznek meg. Továbbá, laterális irányba is a korábban kiválasztott súrlódási együtthatókat feltételezve kapjuk, hogy:

$$F_{11,y,\max} = \mu_{\text{high}} \frac{mg}{2} \frac{a_2}{a_1 + a_2}, \quad (4.12)$$

$$F_{12,y,\max} = \mu_{\text{low}} \frac{mg}{2} \frac{a_2}{a_1 + a_2}, \quad (4.13)$$

$$F_{11,y,\max} = \mu_{\text{high}} \frac{mg}{2} \frac{a_1}{a_1 + a_2}, \quad (4.14)$$

$$F_{11,y,\max} = \mu_{\text{low}} \frac{mg}{2} \frac{a_1}{a_1 + a_2}. \quad (4.15)$$

Ezek lesznek a (2.60)-as kifejezésben szereplő D értékek.

4.3. Szabályozóparaméterek megválasztása

Mind az időkéséssel ellátott sofőr és mind a biztonságkritikus szabályzás esetén vannak olyan paramétereink, melyek megválasztását nem csupán a valóságos értékeik, hanem az egymással való együttműködés minősége és a fékezési szituáció körülményei alapján végezzük el.

4.3.1. Sofőr erősítési tényezők

A 3.2.2. fejezetben az időkéséssel terhelt, *Look-ahead* módszer alapján modellezett sofőr stabil paramétertartományát határoztuk meg, mely a 2.8 ábrán látható különböző időkésések esetén. Első lépésben az időkésés nagyságát érdemes megválasztani. [23] szerint a tipikus emberi reakcióidő 90-160 ms. Az adott feladat komplexitásától függően ez a tartomány magasabb. [24] forrás alapján ezt az értéket legalább 0.5 másodpercrek érdemes felvenni, és ezzel is fogunk élni.

Így is, stabil *gain*-ek kombinációjának kiválasztására végtelen sok lehetőségünk van, melynek módszeréhez az alábbi megállapításokat tesszük:

- stabil tartomány állandó v_x sebességre érvényes (azaz kvázi stacionárius állapot-ra), így fékezés közben folyamatosan változik a stabil tartomány határa mégpedig olyan módon, hogy v_x csökkenésével egyre jobban növekszik a stabil tartomány területe. Ennek fizikai jelentése, hogy a jármű sebességének csökkenésével a sofőr "stabilizálódik".
- olyan $P_y - P_\psi$ párokat érdemes keresni, melyek nem "túlságosan" stabilak, hiszen ekkor nem tudjuk jól megmutatni, hogy igazából mire is képes a biztonságkritikus szabályzó (a sofőr elvégzi a fékszabályzó feladatát, mely a való életben nem mindig állja meg a helyét), továbbá
- olyan $P_y - P_\psi$ párokat érdemes keresni, melyek esetén – még a biztonságkritikus szabályzó nélkül is – a kormányaszög kitérése nem halad meg egy adott értéket. Ezt

a valóságban úgy képzelhetjük el, hogy ha a sofőr mindkét kezét a kormányon tartja a fékezés során, akkor maximum 150-180°-kal képes elfordítani a kormányt mindkét irányba.

Ezek alapján adott kezdősebességhez és időkéséshez tartozó stabil tartományon kívüli pontot válasszunk meg olyan módon, hogy az a pont a fékezés során stabillá változik nagyjából akkor, mikor a sebesség a kezdősebesség 70 százaléka. Ezt a döntést azon okból kifolyólag hozhatjuk meg, mert a rendszer nemlineáris és fékezést szimulálunk; emiatt a folyamat vége mindig ugyanaz: a jármű megáll. Így képesek vagyunk a sofőr azon valóságos tulajdonságát figyelembe venni, hogy ez a szituáció teljesen váratlanul éri, majd a lassulás közben képes "visszavenni" az irányítást a jármű felett. Ezáltal kezdetben nem lesz a sofőr nemhogy túlságosan stabil, de még stabil sem, így a biztonságkritikus szabályzás működése sokkal látványosabban mutatható be.

4.3.2. Biztonságkritikus szabályzás paraméterei

A biztonságos tartomány jellegéről a 3.2.1. fejezetben már volt szó, viszont határainak megválasztásáról eddig még nem. A valóságban μ -splites tesztmérések alkalmával folyamatosan mérik a számunkra fontos mennyiségeket is, viszont stabilitásvesztéskor bekövetkező kiperdülést jellemző konkrét β_{kr} és ω_{kr} értékeket mondani nehézkes, hiszen megannyi más tényezőtől is függ mikor kerül erre sor. Pusztán annyi információ áll rendelkezésünkre korábbi megállapításokból, hogy kiperdüléskor a *yaw rate* és oldalkúszási szög rendkívül magas értéket vesznek fel. Az egyszerűség kedvéért mindkét mennyiség kritikus értékét a stabilitásvesztést sikeresen elkerült, μ -splites mérések során elforduló maximális értékek felének vesszük, ezáltal elég konzervatívak vagyunk, hiszen ha éppen el is hagyjuk a biztonságos tartományt a 3.3.2. fejezetben említett nem modellezett dinamikai hatások miatt, akkor sem fogja elveszteni a jármű a stabilitását. Ugyanakkor túlságosan kicsi biztonságos tartomány megválasztása már problémás tud lenni a szabályzás fizikai megvalósíthatósága miatt.

Ezen kívül még meg kell határoznunk κ szabályozóparamétert, mely a φ kapcsolófüggvényre lesz hatással. Ökölszabályként értelmezhető, hogy minél nagyobb κ -t választunk, a határtól annál közelebb lép közbe a biztonságkritikus szabályzó. Mivel a 3.3.2. fejezet alapján nem teljesen ugyanazzal a dinamikai modellel működik a biztonságkritikus szabályzó, mint a szimuláció, ezért elképzelhető, hogy kilépünk a biztonságos tartományon kívülre a nem modellezett dinamikai hatások miatt. Emiatt érdemes kisebb κ értékeket választani, hogy minél nagyobb valószínűséggel maradjunk a biztonságos tartományon belül, illetve minél rövidebb időt töltsünk azon kívül az esetleges kilépések esetén.

5. Eredmények

A numerikus szimulációk MATLAB-ban lettek elvégezve a dde23 nevű késleltetett differenciálegyenlet megoldó függvénnyel.

5.1. Kiinduló adatok

Mielőtt rátérnénk az eredményekre, a szimuláció valamennyi paramétere kerül felsorolásra.

5.1.1. Járműspecifikus paraméterek

Járműnek a Knorr-Bremse egyik nyergesvontatója lett kiválasztva, melynek geometriai méretei, tömege és tehetetlenségi nyomatéka ismert. Ezeket, illetve a fékezési környezet paramétereit az 5.1 táblázat tartalmazza.

5.1. táblázat. Járműmodell és a fékezési környezet paraméterei

Paraméter	Jelölés	Érték
Első tengely és tömegközéppont távolsága	a_1	1.142 [m]
Hátsó tengely és tömegközéppont távolsága	a_2	2.458 [m]
Tengelyhossz	w	1 [m]
Tömeg	m	8850 [kg]
z-irányú tehetetlenségi nyomaték	I_z	36952 [kgm ²]
Jármű állandó lassulása	a	-2.5 [m/s ²]
Magas tapadású oldal súrlódási együtthatója	μ_{high}	0.8 [—]
Alacsony tapadású oldal súrlódási együtthatója	μ_{low}	0.4 [—]
Gravitációs gyorsulás	g	9.81 [m/s ²]

Ami a kerékmodellt illeti, a kombinált modell csúcsparaméterei már meg lettek határozva a (4.12)-(4.15) egyenletek alapján. A további, haszonjármű kerekeire jellemző értékek lettek választva az 5.2 táblázat alapján.

5.1.2. Sofőr attribútumai

A 4.3.1. fejezet alapján lett kiválasztva a sofőr időkésése, illetve erősítési tényezői az abban a fejezetben taglaltak szerint, melyeket az 5.3 táblázat tartalmaz.

5.2. táblázat. Kerekek adatai a kombinált Pacejka-modellben

11-es kerék	Érték	12-es kerék	Érték
$C_{\alpha,11}$	-125 [kN/rad]	$C_{\alpha,12}$	-125 [kN/rad]
D_{11}	-23711 [N]	D_{12}	-11855 [N]
C_{11}	1.6 [-]	C_{12}	1.6 [-]
B_{11}	2.57 [-]	B_{12}	10.28 [-]
E_{11}	-1 [-]	E_{12}	-1 [-]
21-es kerék	Érték	22-es kerék	Érték
$C_{\alpha,21}$	-115 [kN/rad]	$C_{\alpha,22}$	-115 [kN/rad]
D_{21}	-11016 [N]	D_{22}	-5508 [N]
C_{21}	1.6 [-]	C_{22}	1.6 [-]
B_{21}	5.09 [-]	B_{22}	20.35 [-]
E_{21}	-1 [-]	E_{22}	-1 [-]

5.3. táblázat. Sofőr *Look-ahead* szerinti paraméterei

Paraméter	Jelölés	Érték
Sofőr időkésése	τ	0.5 [s]
Laterális kitérés erősítési tényezője	P_y	0.03 [1/m]
Legyezési szög erősítési tényezője	P_ψ	0.6 [1/rad]

5.1.3. Biztonságkritikus szabályzó paraméterei

A biztonságos tartomány határai μ -split mérési tesztek során kapott, a még ki nem perdült jármű átlagos értékeinek fele; ezzel elmondhatjuk, hogy ha nem is vagyunk kellően pontosak a határ megválasztásában, a nagyságrendjüket jól adjuk meg. A kiválasztott paramétereket az 5.4 táblázat közli.

5.4. táblázat. Biztonságkritikus szabályzó paraméterei

Paraméter	Jelölés	Érték
Maximális oldalkúszási szög abszolútértéke	β_{kr}	0.015 [rad]
Maximális <i>yaw rate</i> abszolútértéke	ω_{kr}	0.02 [rad/s]
Szabályzóparaméter	κ	4 [-]

5.1.4. Kezdeti értékek

Kezdeti feltételnek az $\mathbf{x}(0)$ vektort kell megadnunk, melynek első három koordinátája a jármű kezdeti sebességét, utóbbi három koordinátája pedig a kezdeti pozícióját jellemzi. Utóbbiak az egyszerűség kedvéért legyenek zérusak, mely azt jelenti, hogy a $t = 0$ időpillanatban a jármű az origóból indul vízszintes meredekséggel (ezt fejezi ki a $\psi = 0$ feltétel); ezt értelmezzük a sáv közepének, melyen a jármű halad. A 4.1.2. fejezetben

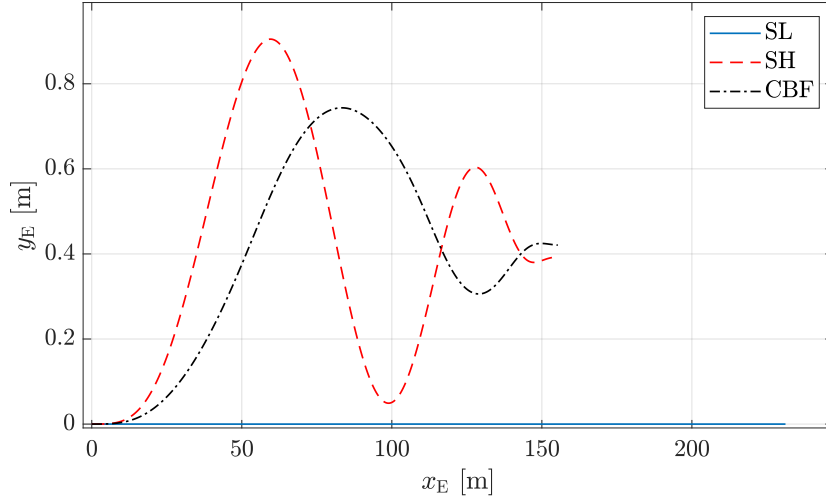
olyan fékezési szcenárió lett kiválasztva, amelynek középső, második szakaszában az ABS beavatkozásának köszönhetően a kerekek tapadása biztosított, ezalatt néhány század másodperc alatt megjelenhetnek a fékezőerőkülönbség hatására nemzérus β és ω értékek. Ezeket viszont olyan kicsinek feltételezzük, hogy elhanyagolhatjuk őket. A kezdeti értékekhez szorosan hozzátartozik a szabályzás névleges szabályzása, melyek a (4.6)-(4.9) egyenletekben található névleges fékezőerők és az 5.1 táblázatban látható paraméterek segítségével határozhatóak meg. Azért is szerepelnek az állapotváltozók kezdeti feltételeivel az 5.5 táblázatban, mivel a szimuláció kezdetén $\varphi(\mathbf{x}(0)) > 0$.

5.5. táblázat. A szimuláció kezdeti értékek

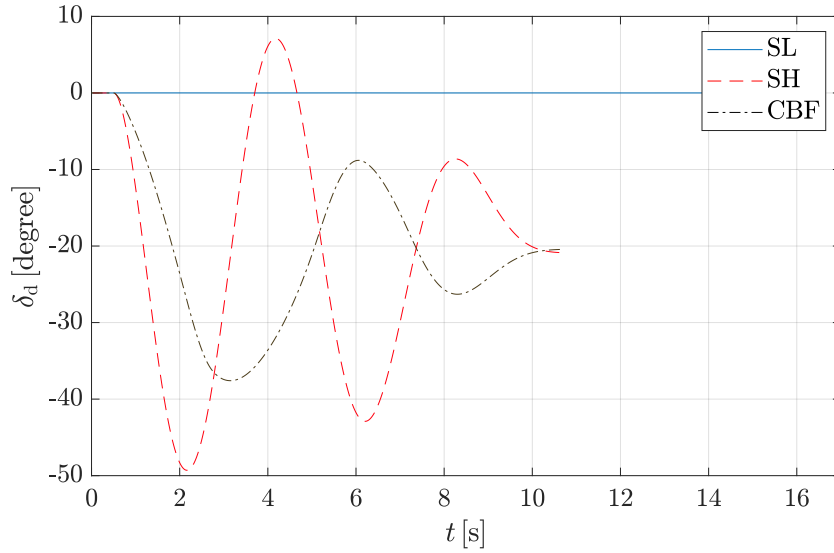
Paraméter	Jelölés	Érték
Longitudinális sebesség	v_{x0}	100 [km/h]
Laterális sebesség	v_{y0}	0 [km/h]
<i>Yaw rate</i>	ω_0	0 [rad/s]
x pozíció	$x_{E,0}$	0 [m]
y pozíció	$y_{E,0}$	0 [m]
Legyezési szög	ψ_0	0 [rad]
Jobb első kerék névleges fékereje	$F_{11,x,d}$	-10070 [N]
Bal első kerék névleges fékereje	$F_{12,x,d}$	-5035 [N]
Jobb hátsó kerék névleges fékereje	$F_{21,x,d}$	-4680 [N]
Bal hátsó kerék névleges fékereje	$F_{22,x,d}$	-2340 [N]

5.2. Módszerek összehasonlítása

Három módszer kerül összehasonlításra, melyek a *select-low* (SL), a *select-high* (SH), illetve a részletesen bemutatott biztonságkritikus szabályzás (CBF). Azt várjuk tőlük előzetesen, hogy míg SL esetén nagy fékút árán nem jelenik meg oldalirányú dinamika és SH esetén rövid fékúthoz kiperdüléshez vezető nagyságú sebességértékek jelennek meg, addig a biztonságkritikus szabályzó révén ezen két módszer előnyös tulajdonságai ötvözhetőek. Ezáltal végeredményben a két szélsőségesnek mondható szabályzási módszer mellett egy optimálisat kaphatunk. Elsőként hasonlítsuk őket össze a megtett fékút alapján. Az 5.1 ábrán látható a jármű tömegközéppontjának pályája, másnéven a jármű felülnézetből figyelhető meg. Ami az alkalmazott fékezési módszereket illeti, az SH-hoz képest a féksabályzóknak köszönhetően a járműnek sokkal kisebb oldalirányú kitérései lettek, következtetésképpen a sofőr sávtartási képessége is javult. Ezekhez képest viszont az SL módszer drasztikus féktávolságnövekedéssel jár együtt, mely nem elhanyagolható még annak árán sem, hogy ekkor a járműnek nincs oldalirányú kitérése.



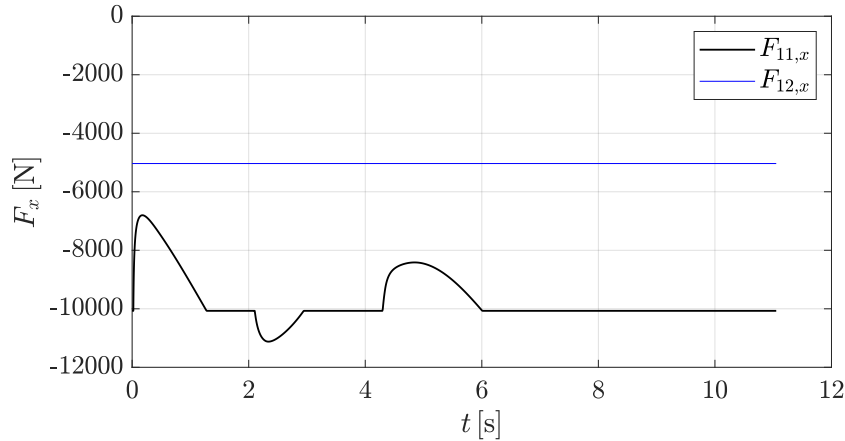
5.1. ábra. Jármű tömegközéppontjának trajektóriái a három fékezési módszer esetén



5.2. ábra. Sofőr kormánymozdulatai a három fékezési módszer során

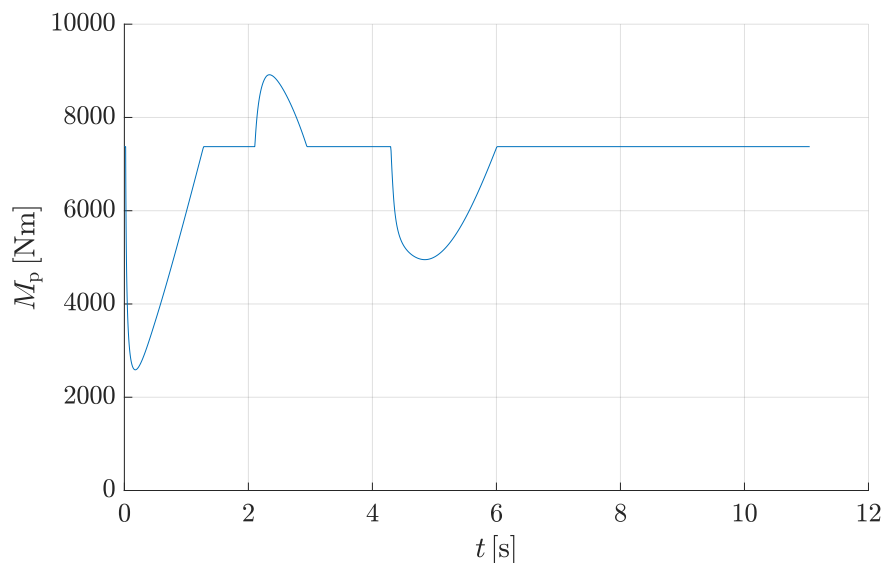
A sofőr kormánymozdulataira is hatással van a kiválasztott fékezési módszer, melynek időjelei az 5.2 ábrán láthatóak. Mivel a jármű oldalirányú kitérésének és legyezési szögének figyelembevételével avatkozik be a sofőr, ezért SL esetében nem is kell beavatkoznia. Az SH módszerhez képest a kormányyszögben is szemmel látható változást hoz a biztonságkritikus szabályzás, így még komfortosabbá válik a kormányzás a sofőr számára. Ezt a komfortot tovább képes fokozni az a megállapítás is, hogy a CBF esetében a kormányyszög időbeli jelének meredekségei sokkal kisebbek, ami azt jelenti, hogy nem "kapkod" a sofőr úgy, mint SH esetében. Továbbá látható az is az 5.2 ábrán, hogy a sofőr valóban 0.5 s időközesséssel rendelkezik, hiszen addig az időpillanatig a δ_d végig nulla. Ennek az átváltáshoz a kerékállás szögéből (hiszen a mozgásegyenletben ez szerepel) a (2.61)-es egyenletet használtuk fel. Végül azt is kijelenthetjük ezek alapján, hogy megfelelő sofőr paramétereket választottunk ki, hiszen a kormányyszög értékeinek tartománya megfelel a valóságnak.

Ezen kívül érdemes megjegyezni, hogy a sofőr az SL és CBF módszerek esetében nem a nulla fok körül végez periodikus jellegű kormánymozdulatokat. Ennek oka, hogy a jármű az aszimmetrikus fékezésének és az arra reagált ellenkormányzás együttes hatása az, hogy a jármű ferdén halad.



5.3. ábra. Kerekek fékezőerői a jármű első tengelyén CBF esetén.

A fékezőerők esetében nem a különböző fékezési módszereket, hanem a magas és alacsony tapadású oldalak fékezőerőit célszerű ábrázolni, hiszen az SL és SH esetekben a fékerők mindvégig konstansak, így többlet információval nem rendelkeznek. Az 5.3 ábrán az első tengely kerekei láthatók, a hátsó tengely fékerői pedig a terheléseloszlásnak megfelelően ezeknek átskálázott alakjai, ezért ezeket szintén nem ábrázoljuk. Ezen szimuláció alatt összesen háromszor történt beavatkozás: kétszer vissza kellett fogni a fékerőt, egyszer pedig rásegíteni az SH módszerhez képest. Fontos megjegyezni, hogy amire most SH módszerként hivatkozunk, annál feltételezzük, hogy az ABS nem használja ki a maximálisan elérhető fékezőerőt, hiszen akkor nem ébredhetnének laterális erők.



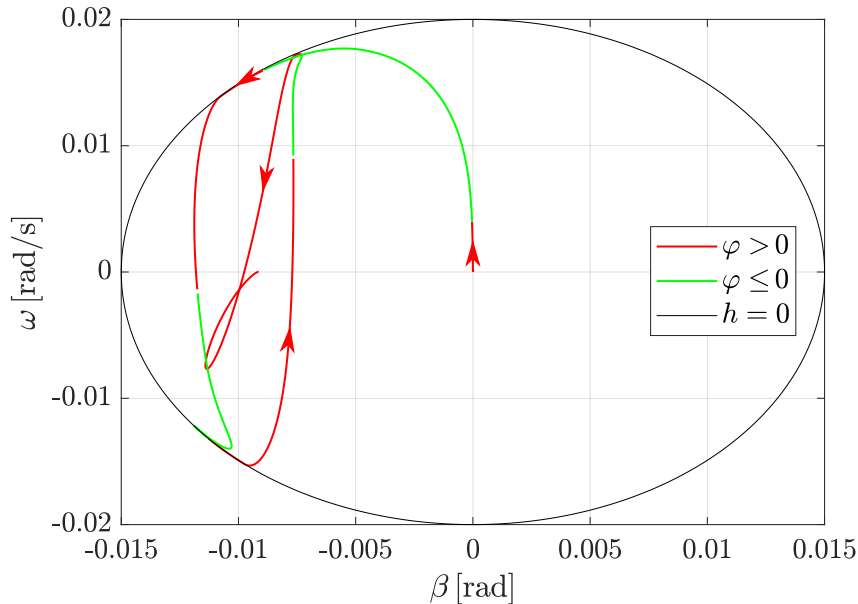
5.4. ábra. Fékezőerők különbségére megjelenő perdítőnyomaték CBF szabályzás közben.

Az 5.3 ábrán látható fékezőerők különbségére perdítőnyomaték fog kialakulni, melyet a következőképpen számíthatunk:

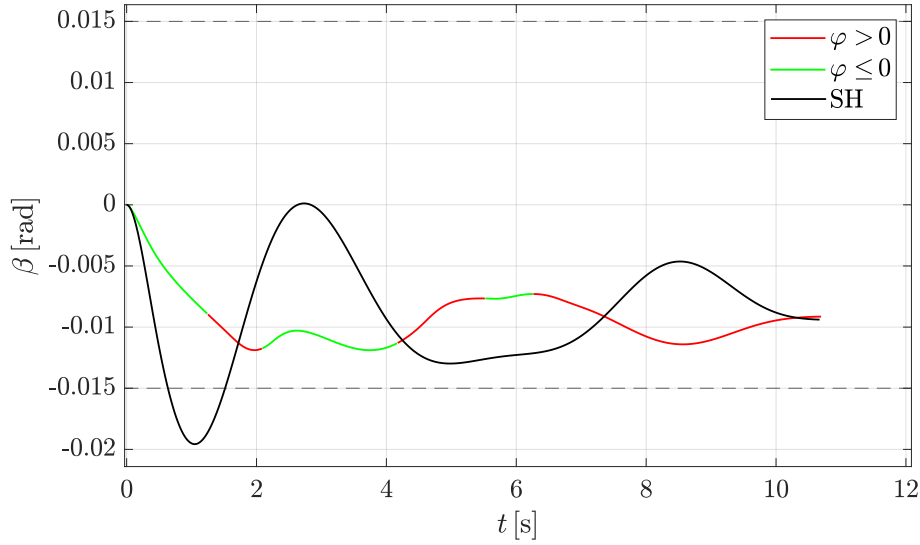
$$M_p = w(F_{11,x} + F_{21,x} - F_{12,x} - F_{22,x}). \quad (5.1)$$

Ennek megfelelően láthatjuk az 5.4 ábrán a perdítőnyomatéknak az időbeli változását.

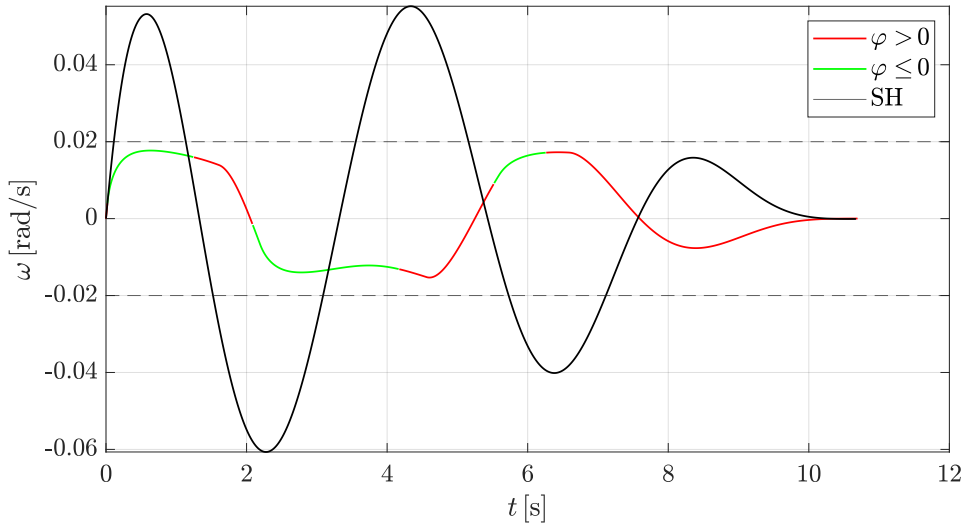
Végül tekintsük a biztonságos tartomány, tehát $\beta - \omega$ síkján μ -split fékezéskor a trajektória pályáját (mely az 5.5 ábrán látható). Abban az esetben, ha a numerikus szimuláció és a fékszabályzók ugyanazon a kerékmodellen fut, akkor a biztonságkritikus szabályzó az előzetes elvárásoknak megfelelően az általunk megválasztott biztonságos tartományon belül képes tartani a trajektóriát. Pirossal látható továbbá a trajektória azon szakasza, amikor nem volt szükséges a biztonságkritikus szabályzó beavatkozására, ekkor $u(x) = u_d$ névleges szabályzó működik, melyek az SH módszerben is alkalmazott fékezőerők. Emellett ugyancsak zölddel látható a szabályzó beavatkozása. Az 5.5 ábrán látható trajektória időbeli jeleit az 5.6 és az 5.7 ábrán láthatjuk, előbbin az oldalkúszási szöget, utóbbin pedig a szögsebességet mind *select-high*, és mind biztonságkritikus szabályzás esetén, illetve ekkor az 5.5 ábrához hasonlóan pirossal jelöljük a névleges, míg zölddel a biztonságkritikus beavatkozást. Mindkét ábrán szaggatott vonallal látható az adott mennyiségekhez tartozó határok, melyeket már a biztonságkritikus szabályzást alkalmazva nem lép át sem a szögsebesség, sem az oldalkúszási szög.



5.5. ábra. Fázissík $\beta - \omega$ vetülete a rendszer trajektóriájával, pirossal jelölve a névleges szabályzást, zölddel a CBF beavatkozását, feketével pedig a biztonságos tartomány határát.

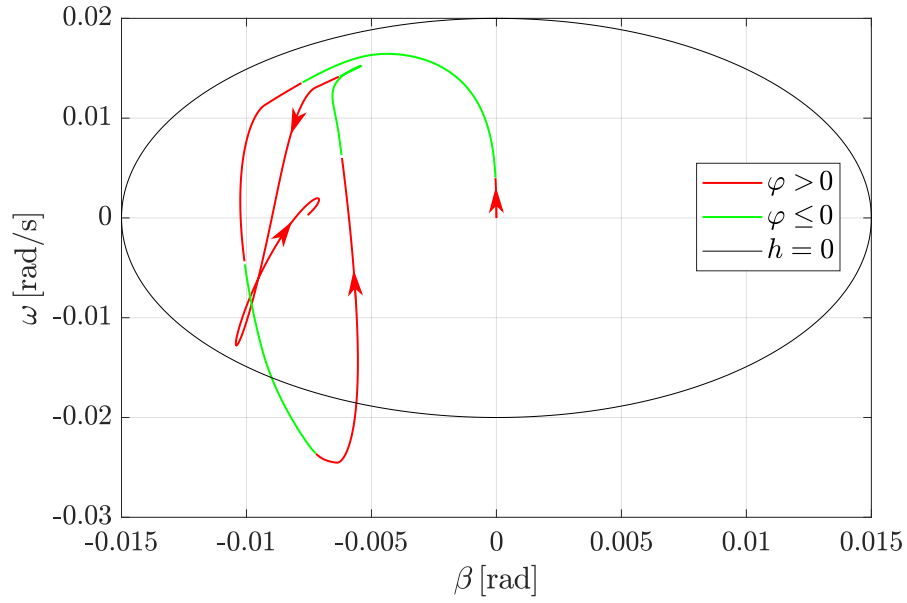


5.6. ábra. Oldalkúszási szög időjele SH és CBF módszerekkel, pirossal jelölve a névleges szabályzást, zölddel a CBF beavatkozását, feketével pedig a biztonságos tartomány határát.



5.7. ábra. Szögsebesség időjele SH és CBF módszerekkel, pirossal jelölve a névleges szabályzást, zölddel a CBF beavatkozását, feketével pedig a biztonságos tartomány határát.

Ettől eltérő képet mutat az a szcenárió, amikor a szimuláció a Pacejka-féle kombinált kerékmodellen, míg a fékszabályzó ugyanúgy a lineáris kerékmodellen fut (ahogy az 5.8 ábrán látható). A trajektória a nem modellezett dinamikai hatások miatt lép ki a biztonságos határon kívülre. Viszont ez a kilépés nem mondható jelentősnek, összehasonlítva az 5.8 ábrán látott SH módszerrel kapott *yaw rate*-tel. Ott ugyanis a maximális érték háromszorosát is elérte, míg a nem modellezett dinamikai hatások következtében ennek csupán töredékét.



5.8. ábra. Fázissík $\beta - \omega$ vetülete a rendszer trajektóriájával és eltérő kerékmodellekkel.

Erre a jelenségre (melyet *disturbance*-nek neveztünk a 3. fejezetben) léteznek különféle megoldások, mint például magának a biztonságkritikus szabályzónak a robosztussá tétele [25].

6. Összefoglalás

6.1. Elért célok

A biztonságkritikus szabályzásnak köszönhetően μ -split fékezés alkalmával sikeresen korlátok közé tudtuk szorítani a jármű szögsebességét és oldalkúszási szögét. Mindezt időben késleltetett sofőrrel, és a szabályzótervezésnél lineáris, míg a szimulációban kombinált kerékmodellel sikerült elérnünk. Ezáltal nem csupán egy esetleges kiperdüléstől óvtuk meg a járművet, hanem a sofőr számára is kényelmesebbé tettük a jármű irányítását, hiszen ekkor sokkal kisebb és nyugodtabb kormánymozdulatokkal is sávban tudja tartani a járművet. Nem utolsó sorban, a megtett féktávolság tekintetében is kiválóan teljesített a felhasznált szabályzásunk. Ennek magyarázata az az elgondolás, miszerint a sofőr kis szögsebességek és oldalkúszási szögek mellett képes megtartani a jármű irányíthatóságát.

Mindezek mellett, a biztonságkritikus szabályzás egyik leghasznosabb tulajdonságát is fel tudtuk használni, mégpedig azt, hogy szükségtelen a dinamikai rendszert linearizálnunk egy egyensúlyi helye körül, a nemlineáris mozgásegyenlettel is gond nélkül meg tud birkózni. Viszont ekkor mindenképp affin rendszerrel kell dolgoznunk, ez az egyik lényeges hátránya ennek a szabályzásnak, mely útját állja a beavatkozási jelen belüli kifinomultabb kerékmodellek alkalmazásának, illetve az *input constraint*-nak, mellyel lehetőségünk lenne a beavatkozási jelre is kritériumot előírni.

6.2. Jövőbeli fejlesztési lehetőségek

Az jelenlegi dinamikai modellt alapjaiban változtatná meg, ha beavatkozási jelnek a fékerők helyett féknyomásokat választanánk. Annak ellenére, hogy a pneumatikus fékrendszer modelljét is bele kell helyeznünk a jelenlegi modellbe, a jármű longitudinális dinamikáját is sokkal pontosabban lennének képesek vizsgálni, hiszen a longitudinális szlip nem elhanyagolható hatását is figyelembe vesszük. Ekkor is érdemes figyelembe venni a szabályzó időkésését is, hiszen ugyan egy nagyságrenddel kisebb, mint az emberi időkésés, de mégis megfogható nagyságú és hatása tapasztalható.

A biztonságkritikus szabályzással kapcsolatban megfogalmazott korlátokra is megoldást kell találnunk a későbbiekben, hiszen bőven adódhatnak olyan esetek az aktuális szimulációk során, amikor vagy szingularitásba futunk, vagy a fékezőerő vesz fel irreális értékeket. Ezek mellett érdemes figyelmet fordítani a valóság és az azt leíró modell közti eltérésekből adódó helytelen beavatkozásra.

Irodalomjegyzék

- [1] C. Ahn, B. Kim, and M. Lee, „Modeling and control of an anti-lock brake and steering system for cooperative control on split-mu surfaces,” *International Journal of Automotive Technology*, vol. 13, no. 4, pp. 571–581, 2012.
- [2] K. Tagesson, B. Jacobson, and L. Laine, „Driver response at tyre blow-out in heavy vehicles & the importance of scrub radius,” in *2014 IEEE intelligent vehicles symposium proceedings*. IEEE, 2014, pp. 1157–1162.
- [3] S. B. Zagorski, „Compatibility of abs disc/drum brakes on class viii vehicles with multiple trailers and their effects on jackknife stability,” Ph.D. dissertation, The Ohio State University, 2004.
- [4] A. D. Ames, S. Coogan, M. Egerstedt, G. Notomista, K. Sreenath, and P. Tabuada, „Control barrier functions: Theory and applications,” in *2019 18th European control conference (ECC)*. IEEE, 2019, pp. 3420–3431.
- [5] R. N. Jazar, *Vehicle dynamics*. Springer, 2008, vol. 1.
- [6] E. Dong and L. Zhang, „Vehicle stability control system of emergency brake on split-mu road,” in *2017 9th International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics (IHMSC)*, vol. 1. IEEE, 2017, pp. 252–255.
- [7] J. A. V. Alves, C. I. G. Chinelato, and B. A. Angelico, „Vehicle lateral stability regions for control applications,” *IEEE Access*, vol. 10, pp. 87 787–87 802, 2022.
- [8] T. G. Molnar, A. K. Kiss, A. D. Ames, and G. Orosz, „Safety-critical control with input delay in dynamic environment,” *arXiv preprint arXiv:2112.08445*, 2021.
- [9] W. B. Qin, Y. Zhang, D. Takács, G. Stépán, and G. Orosz, „Nonholonomic dynamics and control of road vehicles: moving toward automation,” *Nonlinear Dynamics*, pp. 1–46, 2022.
- [10] „Road vehicles — Vehicle dynamics and road-holding ability — Vocabulary,” International Organization for Standardization, ISO 8855.
- [11] H. Pacejka, *Tire and vehicle dynamics*. Elsevier, 2005.
- [12] I. Vörös and D. Takács, „The effects of trailer towing on the dynamics of a lane-keeping controller,” in *Dynamic Systems and Control Conference*, vol. 84270. American Society of Mechanical Engineers, 2020, p. V001T02A004.
- [13] B. Varszegi, D. Takacs, and T. Insperger, „Acceleration helps in skateboarding at high speeds,” *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 6, no. 3, pp. 982–989, 2018.

- [14] H. G. Tanner, „On the controllability of nearest neighbor interconnections,” in *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)(IEEE Cat. No. 04CH37601)*, vol. 3. IEEE, 2004, pp. 2467–2472.
- [15] Z. Hankovszki, R. Kovács, and L. Palkovics, „Electronic stability program with vehicle sideslip estimation,” *Periodica Polytechnica Transportation Engineering*, vol. 41, no. 1, pp. 13–20, 2013.
- [16] G. Stépán, *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions*. Longman Scientific & Technical, 1989.
- [17] C. A. Molnar and T. Insperger, „Critical delay as a measure for the difficulty of frontal plane balancing on rolling balance board,” *Journal of Biomechanics*, vol. 138, p. 111117, 2022.
- [18] T. G. Molnar, R. K. Cosner, A. W. Singletary, W. Ubellacker, and A. D. Ames, „Model-free safety-critical control for robotic systems,” *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 7, no. 2, pp. 944–951, 2021.
- [19] H. K. Khalil, „Lyapunov stability,” *Control Systems, Robotics and Automation*, vol. 12, p. 115, 2009.
- [20] S. Boyd, S. P. Boyd, and L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [21] X. Tan, W. S. Cortez, and D. V. Dimarogonas, „High-order barrier functions: Robustness, safety, and performance-critical control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 67, no. 6, pp. 3021–3028, 2021.
- [22] A. Alan, A. J. Taylor, C. R. He, A. D. Ames, and G. Orosz, „Control barrier functions and input-to-state safety with application to automated vehicles,” *arXiv preprint arXiv:2206.03568*, 2022.
- [23] C. A. Molnar, A. Zelei, and T. Insperger, „Rolling balance board of adjustable geometry as a tool to assess balancing skill and to estimate reaction time delay,” *Journal of the Royal Society Interface*, vol. 18, no. 176, p. 20200956, 2021.
- [24] G. Orosz, R. E. Wilson, and B. Krauskopf, „Global bifurcation investigation of an optimal velocity traffic model with driver reaction time,” *Physical Review E*, vol. 70, no. 2, p. 026207, 2004.
- [25] A. Alan, T. G. Molnar, E. Das, A. D. Ames, and G. Orosz, „Disturbance observers for robust safety-critical control with control barrier functions,” *arXiv preprint arXiv:2209.08123*, 2022.