



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Állapotfüggő időkésés vizsgálata a járműkövető modellben

TDK dolgozat

Szerző:

Martinovich Kristóf

Gépészeti Modellezés Mesterszak (MSc), 4. félév

Konzulens:

Kiss Ádám

Tudományos segédmunkatárs,
Műszaki Mechanikai Tanszék



Műszaki Mechanikai Tanszék

Budapest
2022.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1. Célkitűzések	4
1.2. Áttekintés	5
2. Elméleti háttér	6
2.1. Az általános járműkövető	6
2.2. Állapotfüggő időkésés modellezése	9
2.2.1. A járműkövető modell kiterjesztése állapotfüggő időkéséssel	9
2.3. Lineáris stabilitáshatár számításának módszerei	12
2.4. Nemlineáris vizsgálat elméleti háttere	13
3. Közúti, járműves mérési eredmények	15
3.1. Mérési elrendezés	16
3.2. Lineáris stabilitás vizsgálat	19
3.3. Nemlineáris stabilitás vizsgálat	23
4. Összefoglalás	30
4.1. Tovább lépési lehetőségek	31
Hivatkozások	33

1. Bevezetés

Jelentős változásoknak vagyunk szemtanúi a közúti közlekedésben és a mobilitási ágazatban. A digitalizáció terjedése, a folyamatosan növekvő technológiai tudás és az egyre mélyrehatóbb elméleti kutatások hatalmas potenciált hordoznak magukban. A leginkább fejlesztésre szoruló terület a biztonság növelése, a közlekedéssel járó káros környezeti hatások csökkentése, valamint a forgalmi dugók csillapítása. Az átalakulást kitüntetett figyelem övezi, melyet a technológiai innováció mellett törvényi szabályozások is igyekeznek előmozdítani.

A különböző vezetést támogató rendszerek, mint például a sebességtartó automatika CC (cruise control), már több évtizedes múltra tekintenek vissza és a legtöbb személygépjárműben alapfelszereltségnek számítanak. Manapság már a fejlettebb adaptív sebességtartó automatika ACC (adaptive cruise control) [1, 2] is elterjedt. Ezek a járművek számos szenzorral, például kamerákkal és radarral vannak felszerelve, melyek alapján hozzák a döntéseket. A legmodernebb, jelenleg is fejlesztés alatt álló technológia az összekapcsolt sebességtartó automatika CCC (connected cruise control) [3, 4] és a csatlakoztatott adaptív sebességtartó automatika CACC (connected adaptive cruise control) [5]. Amennyiben egy jármű fel van szerelve jármű-jármű kommunikációval V2V (vehicle-to-vehicle) [6] vagy "jármű-minden" kommunikációval V2X (vehicle-to-everything) [7], akkor összekapcsolódhat a közúti forgalom más résztvevőivel egy hálózatban, és akár a látóhatáron túlról is gyűjthet információt. Ez a technológia nemcsak a menetidő és az üzemanyag-fogyasztás csökkentésére használható [8, 9], hanem a biztonságot garantáló vezérlést alkalmazva (safety critical control) [10, 11, 12, 13, 14] biztonságosabb közlekedés valósítható meg vele az emberi hibák kiszűrésével. Mindezek a tényezők társadalmi léptékben is jelentős gazdasági és életminőségbeli javulást eredményezhetnek. Az átalakulás tendenciája felgyorsulni látszik, és valószínű, hogy a közeljövőben jelentős áttörésre kerül sor az említett területeken. Ezek a rendszerek azonban dinamikai modelleken alapulnak, melyekhez alapos kutatás és mélyreható matematikai ismeretek szükségesek.

Az úgynevezett járműkövető modellt az autópályás közlekedés vizsgálatára alkották meg, hogy modellezni lehessen a sofőrök viselkedését [15, 16]. A forgalom pontosabb vizsgálatának érdekében bevezették az időkésést a rendszerbe [17, 18], mely így késleltetett differenciálegyenlet rendszerrel DDE (delay differential equation) írható le. Később a CC és az összekapcsolt autonóm járművek CAV (connected automated vehicle) kutatásának alapvető modelljévé vált [19]. A CAV-k nemcsak egymással, hanem a V2V technológiával felszerelt "összekapcsolt emberi járművekkel" CHV (connected human vehicle) is tudnak kommunikálni. A járműkövető modellt gyakran körgyűrűs elrendezésben vizsgálják a szakirodalomban, ahol N jármű halad egy körgyűrűn [15, 16]. Amennyiben $N \rightarrow \infty$ vagy N egy praktikus nagy szám, ez a modell alkalmas az egyenes útszakaszon történő közlekedés vizsgálatára. A körgyűrűs konfigurációval kapcsolatos átfogó szakirodalom [20]-ban olvasható, melyhez kapcsolódó közúti tesztek és mérések is végeztek [21, 22, 23]. Továbbá vizsgálták önvezető járművek AV-k (automated

vehicle) részarányának hatását a rendszer stabilitására [24].

A korábbi általános várakozással szemben, még évtizedeket vehet igénybe a teljes mértékben AV-kból álló forgalom elérése [4]. Az átmeneti időszak miatt szükséges a vegyes forgalmi szituáció vizsgálata, ahol egyszerre vannak jelen a forgalomban AV-k és emberi járművek HV-k (human vehicle). Elméleti [25, 26] és kísérleteken alapuló vizsgálatok [27, 28, 21, 29] során bebizonyították, hogy kis számú AV is képes csökkenteni a forgalmi dugókat, ezáltal javítva a forgalom áramlását. De ahhoz, hogy a bennük rejlő lehetőséget valóban ki lehessen aknázni, elengedhetetlen az emberi sofőrök viselkedésének a kellően pontos és részletes modellezése.

1.1. Célkitűzések

A sofőrökhöz társított időkésés számos tényezőből tevődik össze, melyeket a sofőr személye és a körülmények is befolyásolnak. A reagálás teljes ideje nagy szórást mutat, minimum 0.15-től egészen a több másodperc ig [30, 31]. Egyrészt az időkésés értéke tartalmazza az emberi felismerés, döntés és reagálás, majd a beavatkozás (pedál benyomás, kormányzás) idejét [32], másrészt a jármű mechanikai áttételéből, tehetetlenségéből, fékerő felépüléséből stb. származó időt is. Ezek alapján megállapították, hogy lakott területen belül az alap-reakcióidő 0.7 másodperc körül alakul, míg lakott területen kívül (nagyobb követési távolságnál) ellazul a sofőrök figyelme, ami legalább 1 másodperc alap-reakcióidőt okoz. Ez növekszik, ha vezetés közben meg kell változtatnunk a tekintünk és fókuszunk irányát, ami esetén már 1.3. . . 1.5 s értékű lehet az időkésés. Ezt további növekmény követheti, amennyiben döntést is kell hoznunk, ekkor az időkésésünk már 1.6. . . 2 s időintervallumba fog esni [30, 31].

Az emberi reakcióidőhöz képest az önvezető járművek időkésése a számítógépek adta gyors adatfeldolgozásból és döntésből kifolyólag lényegesen rövidebb. Azonban a jármű mechanikájából származó késés esetükben is jelen van, és kiegészülhet AV-k esetén a szenzorok jelfeldolgozásából és CAV-k esetén a kommunikációból származó késéssel [33, 34]. Az emberi reakcióidő ráadásul változik az életkorral, befolyásolja a sofőr tapasztalata, állapota, fáradtsága, koncentrációja és a szituáció, amire reagálni kell.

Ezekből következik, hogy nem triviális egy alkalmas érték megválasztása az emberi időkésleltetés általános leírására. Legegyszerűbb módon ezt egy átlagos, konstans értékkel lehet figyelembe venni. Belátható, hogy ez egy erős közelítést jelent a sofőrök heterogenitása miatt, ráadásul a tapasztalatok alapján a vezetés közben is folyamatosan változhat, attól függően, hogy éppen mennyire figyelnek oda a vezetők, elvonja-e valami a figyelmüket.

Feltételezésünk szerint a járművezetők reakcióideje realiztikusabban modellezhető a körülményektől függő időkéséssel. A járműkövető modellben a sofőrök vezetési szándékát alapvetően határozza meg az aktuális követési távolság. Ez alapján választják meg a biztonságos sebességet és döntenek a jármű gyorsításáról vagy éppen lassításáról. Ezért joggal feltehető, hogy az

időkésés a követési távolságtól, mint a szituációt leíró változótól függ. Ennek alapja az lehet, hogy az egymáshoz közel haladó járművek sofőrjei a fokozott kockázat miatt jobban figyelnek, ami kisebb időkésést eredményez. Ezzel szemben nagyobb követési távolság esetén lankadhat a figyelmük, amit nagyobb időkéséssel vehetünk figyelembe. Továbbá az is hozzájárulhat, hogy nagyobb követési távolság esetén egységnyi változás két jármű távolságában relatíve kisebb változást jelent, mint amikor közelebb vannak egymáshoz. A gyakorlati tapasztalatok azt mutatják, hogy az emberek általában túlbecsülik a távolságot, miközben alulbecsülik a sebességet. Emiatt nehezebb pontosan érzékelni és így később tudnak reagálni a fellépő szituációra.

A változó reakcióidő bevezetése a modellbe állapotfüggő késleltetett differenciálegyenlet rendszerrel SD-DDE tehető meg. Ahhoz, hogy ezt vizsgálni tudjuk, fejlett matematikai technikákra van szükség, amely egy jelenleg is aktívan kutatott terület [35, 36, 37]. Jóllehet széleskörben a mérnöki alkalmazásokban még nem terjedt el a használata komplex modellezési és számítási igénye miatt. Mindazonáltal a szerszámgép rezgések esetén megmutatták, hogy a pontosabb modellezés és több hatás figyelembe vétele állapotfüggő időkésést eredményez, ami jelentős hatással van a rendszer stabilitására [38, 39, 40]. Az ezekben ismertetett megfontolások és módszerek alkalmasak a továbbfejlesztett járműkövető modell lineáris és nemlineáris vizsgálatára.

A dolgozat célja a korábbi munkánk során bemutatott módon [41], a reakcióidőt állapottól függően felírva modellezni és az így kapott eredményeket mérési adatokkal összevetni. A Michigani Egyetem kutatócsoportja méréseket végzett két HV-ből és egy AV-ből álló járműkonvojjal körgyűrűs elrendezésben [23]. A rendelkezésünkre bocsátott mérési adatok alapján lehetőségünk van az elméleti modell validálására.

1.2. Áttekintés

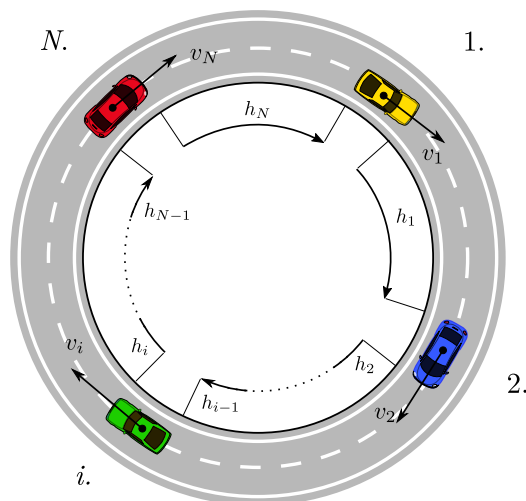
A dolgozat a következőképpen épül fel. A 2 fejezet tartalmazza az elméleti háttérrel, felhasznált modellt és módszereket. A 2.1 fejezetben bemutatjuk a konstans időkésés esetén az általános járműkövető modellt és a hozzá tartozó egyenletek. A 2.2 során bemutatásra kerül az állapotfüggő időkésés, és a 2.2.1 alfejezetben kiegészítésre kerül a járműkövető modell az állapotfüggő időkéséssel. Ez után a 2.3 fejezetben bemutatjuk a lineáris stabilitás vizsgálatot, majd a 2.4 fejezetben következik a nemlineáris vizsgálat elméletét. Az elméleti háttér után következik a 3 fejezetben a kiegészített modell összehasonlítása a mérési eredményekkel. Először a 3.1 fejezetben ismertetjük a mérés elrendezését és kivitelezését, másodsor a 3.2 fejezetben a mérési adatok feldolgozására kerül sor és bemutatjuk az így kapott lineáris stabilitás vizsgálatot összehasonlítva a konstans és állapotfüggő időkéséssel kapott eredményekkel. Utoljára a 3.3 fejezetben a rendszer globális viselkedését vizsgáljuk a periodikus pályák követése és a numerikus szimulációk által. Aztán következik a 4 fejezetben a dolgozat összefoglalása, eredmények kiértékelése, levonva a tanulságokat az állapotfüggő időkéséssel kapcsolatban, végezetül a 4.1

fejezetben bemutatjuk a lehetséges jövőbeli lehetőségeket.

2. Elméleti háttér

2.1. Az általános járműkövető

Ebben a fejezetben áttekintjük az általános járműkövető modellt konstans időkéssel. A szakirodalomban ezt az autópályán és autópályán történő közlekedés, forgalmi dugók kialakulásának vizsgálatára használják. Az így kapott eredmények fontos szerepet töltenek be az AV-k és különböző CC technológiák tervezésében. A modell felépítése az 1. ábrán látható, ahol N darab gépjármű követi egymást egy L kerületű körgyűrűn. Minden autó mozgását egy hosszirányú szabályozó függvény, $V(h)$ határozza meg. A rendszer dimenziója $2N$, a járművek helyzetét két állapotváltozó írja le: a sebesség $v_i(t)$ és az előtte lévő autóhoz viszonyított követési távolság $h_i(t)$. Ez az úgynevezett "bumper-to-bumper" távolság, vagyis az adott jármű elülső lökhárítója és az előtte haladó hátsó lökhárítója közötti követési távolság.



1. ábra. Sematikus ábra a modellről, ahol N jármű követi egymást egy körgyűrűn. A járműveket két állapotváltozó írja le, a követési távolság h_i és sebesség v_i , ahol $i = 1 \dots N$.

Az elméleti modell egyszerűsíthető a járművek hosszának elhanyagolásával, ugyanis figyelembevételük csak térbeli eltolást jelentene és a deriválás során kiesnek az egyenletrendszerből. Azonban valós járművek szabályozóinál és közúti vagy teszt pályás méréseknél a járművek hosszával számolni kell, hogy a mért adatok összhangban legyenek az elméleti modellel.

A körgyűrű miatti visszacsatolás lehetőséget teremt kis számú autó esetén is nagy rendszerek viselkedésének általános megértéséhez. A folyamatos kanyarodás miatt fellépő erőhatásokat nem vesszük figyelembe. Az egyes járművek mozgása és annak megváltozása N autó után visszahat önmagukra, ezáltal jól vizsgálhatók a körben haladó fékezési és gyorsítási hullámok.

Amennyiben $N \rightarrow \infty$ vagy N egy kellően nagy szám, akkor egyenes úton haladó forgalom viselkedése közelíthető.

A modell általános alakban nemlineáris időkésleltetett differenciálegyenlet rendszerrel DDE, az alábbi alakban írható fel

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau_i), \dots), \quad \mathbf{f}: \underbrace{X \times X \times \dots}_{(N+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{2N-1}. \quad (1)$$

Az állapotváltozókat tartalmazó vektor a következő

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_1 \dots v_N & h_1 & \dots & h_{N-1} \end{bmatrix}^T \in X \subseteq \mathbb{R}^{2N-1}, \quad (2)$$

ahol N a járművek száma, τ_i az i -edik jármű időkésése, v_i a sebessége és h_i a követési távolság, mely a lökhárítótól lökhárítóig mért távolság az i -edik és az előtte haladó $(i + 1)$ -edik jármű között. Az i -edik jármű állapotát [3, 23]-nak megfelelően két egyenlet írja le, melyek közül a sebesség deriváltja egy nemlineáris szabályozó egyenlettel írható fel, ami az önvezető autók esetében

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = \dot{v}_i(t) = \text{sat} \Big(& \alpha_i \left(V_i(h_i(t - \tau_i)) - v_i(t - \tau_i) \right) \\ & + \sum_{j=1}^k \beta_j W_i \left(v_{i+j}(t - \tau_i) - v_i(t - \tau_i) \right) \Big), \end{aligned} \quad (3)$$

ha $i = i_a$, ahol $i = 1, \dots, (N - 1)$ és $k = 1, 2 \dots$ adja meg, hogy a CAV mekkora kommunikációs hatótávval rendelkezik, hány járművel "lát előre", amely adatait felhasználva optimálisabb vezetési stratégia valósítható meg. Továbbá emberi sofőrök esetén

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = \dot{v}_i(t) = \text{sat} \Big(& \alpha_i \left(V_i(h_i(t - \tau_i)) - v_i(t - \tau_i) \right) \\ & + \beta_i W_i \left(v_{i+1}(t - \tau_i) - v_i(t - \tau_i) \right) \Big), \end{aligned} \quad (4)$$

ha $i = i_h$. Az α_i és β_i az i -edik autó kontroll paraméterei, $V_i(h)$ az úgynevezett optimális sebesség függvény, ami a kívánt sebesség és a követési távolság kapcsolatát írja le. Az egyenletekben α_i adja meg, milyen érzékenységgel reagáljon a jármű az optimális és a jelenlegi sebesség különbségére, míg β_i azt, hogy az egymást követő járművek sebesség különbségére milyen érzékenységgel reagáljon. Amennyiben az önvezető jármű fel van szerelve V2V eszközzel, képes figyelembe venni további β_j paraméterekkel a távolabbi járművekhez képesti sebesség különbséget. Egyrészt, mindezek a sofőrök viselkedését hivatottak realiztikusan modellezni, megragadva, hogy mik határozzák meg a hosszirányú dinamikát az emberek esetén. Másrészt önvezető járművek esetén és vezetés támogató rendszerekben tervezhető a függvény és a kontroll paraméterek értéke. Ezek behangolása lehetőséget biztosít a kutatók és mérnökök számára, hogy felhasználási területtől függően optimális viselkedést érjenek el, ami kedvező az adott jármű

vagy akár a teljes forgalom számára. A második állapotváltozó a követési távolság deriváltja a modell felépítéséből adódik, az egymást követő járművek sebességéből számítható

$$\dot{x}_{i+N}(t) = \dot{h}_i(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t), \quad (5)$$

Fontos megjegyezni, az N -edik jármű követési távolsága leválasztható, mivel ez kiadódik a körgyűrű L hosszából (amely egy választott paraméter) és a többi jármű követési távolságából

$$h_N(t - \tau_N) = L - \sum_{i=1}^{N-1} h_i(t - \tau_N), \quad (6)$$

így az N -edik jármű gyorsulása a következő alakban írható fel

$$\begin{aligned} \dot{v}_N(t) = \text{sat} & \left(\alpha_N \left(V_N \left(L - \sum_{i=1}^{N-1} h_i(t - \tau_N) \right) - v_N(t - \tau_N) \right) \right. \\ & \left. + \beta_N W_N \left(v_1(t - \tau_N) - v_N(t - \tau_N) \right) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

Ezzel a rendszer dimenzióját $2N - 1$ -re csökkentve egyszerűsíthetjük. Amennyiben ezt nem tennénk meg, konstans eltolásnak megfelelő állapot is megoldása lenne a lineáris egyensúlyi hely számításának. Ez merevtest szerű mozgásnak felel meg, amikor az összes járműnek megegyezik a sebessége, ugyanannyira gyorsítanak és lassítanak.

Az optimális sebesség függvény ("optimal velocity function" vagy "range policy") általánosan nemlineáris, folytonos, szakaszonként definiált függvény

$$V_i(h) = \begin{cases} 0 & \text{ha } h \leq h_{\text{stop},i}, \\ F_i(h) & \text{ha } h_{\text{stop},i} < h < h_{\text{go},i}, \\ v_{\text{max},i} & \text{ha } h \geq h_{\text{go},i}. \end{cases} \quad (8)$$

ahol $h_{\text{stop},i}$ az a minimális követési távolsághoz tartozó limit, ami alatt a járművek megállni igyekeznek, felső limit $h_{\text{go},i}$ felett a megengedett $v_{\text{max},i}$ maximális sebességre törekednek. Ahogy sűrűsödik a forgalom, lassítanak a járművek, hogy tartsák a biztonságos követési távolságot és amennyiben a forgalom engedi, kevesebb a jármű és nagyobb távolság áll rendelkezésre, akkor nagy sebességgel haladnak. A két határérték közötti viselkedést a $F(h)$ függvény adja meg, ami minden jármű esetén különböző lehet. A szakirodalomban lineáris, polinom vagy trigonometrikus függvény is elterjedten használt. Továbbá, a sebességtartás függvényt ("speed policy")

$$W_i(v) = \begin{cases} v & \text{ha } v \leq v_{\text{max},i}, \\ v_{\text{max},i} & \text{ha } v > v_{\text{max},i} \end{cases} \quad (9)$$

is rendszeresen figyelembe veszi, amely megakadályozza a jármű gyorshajtasát, ha az előtte haladó gyorsabb, mint a v_{max} sebességhatár. A járművek gyorsulás és fékezési képessége a

realisztikusabb modellezés érdekében szaturációval vehető figyelembe, amely egy folytonos, szakaszonként definiált függvény a következő formulával felírva

$$\text{sat}(a) = \begin{cases} a_{\min} & \text{ha } a \leq a_{\min}, \\ a & \text{ha } a_{\min} \leq a \leq a_{\max}, \\ a_{\max} & \text{ha } a \geq a_{\max}, \end{cases} \quad (10)$$

ahol $a_{\min}$ és $a_{\max}$ a jármű lehetséges maximális fékezési és gyorsulási értéke. A gyorsulás szaturáció jelentősen megváltoztathatja a rendszer globális stabilitását. Ennek hatásait a járműkövető modellre a [42] cikkben alaposan bemutattuk.

A továbbiakban az SD-DDE rendszer felírásánál és a mérési adatok feldolgozásánál egyszerűsítésként elhagyjuk a $W(v)$ kapcsoló függvényt és a $\text{sat}(a)$ gyorsulás szaturációt, annak érdekében, hogy az állapotfüggő időkézés megkülönböztetett hatását tudjuk vizsgálni.

2.2. Állapotfüggő időkézés modellezése

A bevezetésben részletezett emberi reakcióidőt befolyásoló hatások és a szakirodalomban SD-DDE vonatkozó megfontolások alapján, az i . emberi sofőr időkézését a követési távolságtól függőként vezetjük be az alábbi alakban [41]

$$\tau = g(h(t - \tau)) := \tau(h_t), \quad (11)$$

ha $i = i_h$, ahol $g(h)$ egy tetszőlegesen választott függvény, h az adott autó követési távolsága, és $h_t(\tau) = h(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$ reprezentálja az összes lehetséges késleltetett értéket a $[-\tau, 0]$ tartományon. A felírt időkézés implicit, mivel τ megjelenik az egyenlet bal és a jobb oldalán is a követési távolság argumentumában. Ennek alapja, hogy a járművezető a követési távolságot a reakcióidejéből fakadóan korábbi, $t - \tau$ időpillanatban érzékelt. Az autonóm járműveknek az időkézése τ_i konstansnak tekinthető. Ennek értéke a körülményektől függetlenül állandó, varianciája elhanyagolható az emberi sofőrök változékonyságához képest.

2.2.1. A járműkövető modell kiterjesztése állapotfüggő időkézéssel

Általánosan megadva SD-DDE felépítése az (1) egyenlethez hasonlóan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau_1(\mathbf{x}_t)), \mathbf{x}(t - \tau_2(\mathbf{x}_t)), \dots, \mathbf{x}(t - \tau_N(\mathbf{x}_t))), \quad (12)$$

ahol $\mathbf{x}_t(\theta) = \mathbf{x}(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$ reprezentálja a kiterjesztett állapotváltozót leíró folytonos függvényt. Minden autó különböző τ_i -vel rendelkezik, mivel függ a (11) alapján a követési távolságtól, amely járművenként eltérő. Az állapotváltozókat tartalmazó vektorok továbbra is

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [v_1(t) \ \dots \ v_N(t) \ h_1(t) \ \dots \ h_{N-1}(t)]^\top \\ \mathbf{x}(t - \tau_i(\mathbf{x}_t)) &= [v_1(t - \tau_i(h_{i,t})) \ \dots \ v_N(t - \tau_i(h_{i,t})) \ \dots \ , \\ &\quad h_1(t - \tau_i(h_{i,t})) \ \dots \ h_{N-1}(t - \tau_i(h_{i,t}))]^\top, \end{aligned} \quad (13)$$

időkézés nélkül és minden időkézés esetén külön-külön vektorral megadva. A rendszerből leválasztható h_N állapotváltozó, hasonlóan a (6) egyenletben bemutatott módon

$$h_N(t - \tau_N(h_N)) = L - \sum_{k=1}^{N-1} h_k(t - \tau_N(h_N)) := h_{Nt}. \quad (14)$$

Az i -edik jármű változóinak deriváltját a következő egyenletek adják meg a korábbiakhoz hasonlóan

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(t) = \dot{x}_i(t) = & \alpha_i \left(V_i \left(h_i(t - \tau_i) \right) - v_i(t - \tau_i) \right) \\ & + \sum_{j=1}^k \beta_j \left(v_{i+j}(t - \tau_i) - v_i(t - \tau_i) \right), \end{aligned} \quad (15)$$

ha $i = i_a$ az autonóm járműveknél, valamint

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(t) = \dot{x}_i(t) = & \alpha_i \left(V_i \left(h_i(t - \tau_i(h_{i,t})) \right) - v_i(t - \tau_i(h_{i,t})) \right) \\ & + \beta_i \left(v_{i+1}(t - \tau_i(h_{i,t})) - v_i(t - \tau_i(h_{i,t})) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

ha $i = i_h$ emberi sofőrök esetén. Azonban a követési távolság deriváltja

$$\dot{h}_i(t) = \dot{x}_{i+N}(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t) \quad (17)$$

nincsen késleltetve, ez a pálya geometriájából adódik. Fontos megjegyezni, hogy a SD-DDE rendszerek minden esetben nemlineárisak, mivel az állapotváltozó a saját argumentumában szerepel a késésen keresztül. Mivel a rendszer megoldása nem deriválható az állapotfüggő időkézések szerint, a DDE rendszereknél használt "valódi linearizálás" nem lehetséges. Ehelyett egy olyan "kapcsolódó" DDE-t választunk, melynek lokálisan megegyezik a lineáris stabilitása az eredeti SD-DDE rendszerrel [35, 38]. Ha a rendszer egyensúlyi helyzetben üzemel, a követési távolságok $h_i(t - \tau_i(\mathbf{x}_t)) \equiv h^*$ és az állapotfüggő időkézések $\tau_i(h_{i,t}) \equiv \tau_i^*$ is időben állandóak lesznek, amennyiben $i = i_a$ az időkézés eleve állandó $\tau_i^* \equiv \tau_i$. Így a kapcsolódó linearizált rendszer, ami a (12) egyenletben az $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ esethez tartozik, az alábbi módon adható meg:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \underbrace{D_0 \mathbf{f}^*}_{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=1}^N \underbrace{D_i \mathbf{f}^*}_{\mathbf{R}_i} \tilde{\mathbf{x}}(t - \tau_i^*), \quad (18)$$

bevezetve a $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*, \dots)$ jelölést a nemlineáris differenciálegyenlet rendszer $\mathbf{x}^*$ egyensúlyi helyen vett értékére. $D_0 \mathbf{f}^*$ az időkézés nélküli-, míg $D_1 \mathbf{f}^*, \dots, D_N \mathbf{f}^*$ rendre $\mathbf{f}$ -nek az $1, 2, \dots, N$. időkézeseletett állapotváltozó vektorok szerinti deriváltjai. A kapcsolódó rendszer állapotváltozói:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t) = & \begin{bmatrix} \tilde{v}_1(t) & \dots & \tilde{v}_N(t) & \tilde{h}_1(t) & \dots & \tilde{h}_N(t) \end{bmatrix}^\top, \\ \tilde{\mathbf{x}}(t - \tau_i(h_{i,t})) = & \begin{bmatrix} \tilde{v}_i(t - \tau_i(h_{i,t})) & \dots & \tilde{v}_N(t - \tau_i(h_{i,t})) & \dots & \tilde{h}_i(t - \tau_i(h_{i,t})) & \dots & \tilde{h}_{N-1}(t - \tau_{N-1}(h_{N-1,t})) \end{bmatrix}^\top, \end{aligned} \quad (19)$$

$i = 1 \dots N$ esetén. Az állapotváltozók egyensúlyi értékeit tartalmazó vektor

$$\mathbf{x}^* = [v^* \dots v^* h^* \dots h^*]^\top, \quad (20)$$

melynek elemeit az alábbi módon számítva kaphatjuk

$$\begin{aligned} v_i(t) &\equiv v_i(t - \tau_i^*) \equiv v^* = V(h_i^*), \\ h_i(t - \tau(h_{it})) &\equiv h_i(t) \equiv h_i^*, \\ \tau(h_{it}) &\equiv \tau_i(h_i^*) = \tau_i^*, \end{aligned} \quad (21)$$

ahol $i = 1 \dots N$ és a körgyűrű hossza $L = \sum_{i=1}^N h_i^*$ -nek adódik. Érdemes megjegyezni, hogy mérések esetén a körgyűrű hossza adott, ebből határozható meg az aktuális egyensúlyi követési távolság. Ellenben az elméleti számításoknál gyakran a h^* paraméter hatását vizsgálják, amiből visszszámítható a hozzátartozó körgyűrű. A (18) egyenletben szereplő deriváltak közül az időkézés nélküli deriváltakat tartalmazó lineáris együttható mátrix $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{2N-1 \times 2N-1}$:

$$\mathbf{D}_0 \mathbf{f}^* = \mathbf{L} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial v_1(t)} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial h_{N-1}(t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2N-1}}{\partial v_1(t)} & \cdots & \frac{\partial f_{2N-1}}{\partial h_{N-1}(t)} \end{array} \right] \bigg|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^*}, \quad (22)$$

az egyes időkézésekhez tartozó deriváltakat tartalmazó együttható mátrixok az alábbi formulával számíthatóak

$$\mathbf{D}_i \mathbf{f}^* = \mathbf{R}_i = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial v_1(t-\tau_i(\mathbf{x}_t))} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial h_{N-1}(t-\tau_i(\mathbf{x}_t))} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2N-1}}{\partial v_1(t-\tau_i(\mathbf{x}_t))} & \cdots & \frac{\partial f_{2N-1}}{\partial h_{N-1}(t-\tau_i(\mathbf{x}_t))} \end{array} \right] \bigg|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^*}, \quad (23)$$

ahol $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{2N-1 \times 2N-1}$ és $i = 1, \dots, N$. A karakterisztikus egyenlet megoldását próbafüggvénnyel keressük:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{c} e^{\lambda t}, \\ \tilde{\mathbf{x}}(t - \tau(h^*)) &= \mathbf{c} e^{\lambda(t-\tau_i^*)} = \mathbf{c} e^{\lambda t} e^{-\tau_i^* \lambda}, \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \lambda \mathbf{c} e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (24)$$

ahol $\lambda \in \mathbb{C}$ a karakterisztikus exponens és $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{2N-1}$ vektor. Visszahelyettesítve a (18) egyenletbe

$$\lambda \mathbf{c} e^{\lambda t} = \mathbf{L} \mathbf{c} e^{\lambda t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \mathbf{c} e^{\lambda t} e^{-\tau_i^* \lambda}, \quad (25)$$

majd azt átrendezve vizsgáljuk a következő feltételt

$$\left(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{L} - \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i e^{-\tau_i^* \lambda} \right) \mathbf{c} e^{\lambda t} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

Ez akkor teljesül, ha az egyenletben szereplő valamelyik szorzótényező értéke $\mathbf{0}$, ahol az $e^{\lambda t} > 0$ teljesül minden esetben, ezen kívül a triviális $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ különböző megoldásokat keressük, így

kapva a karakterisztikus egyenletet

$$\det\left(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{L} - \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i e^{-\tau_i^* \lambda}\right) = 0, \quad (27)$$

melyet megoldva számítható a rendszer lineáris stabilitása a következő fejezetben felsorolt módszerek segítségével.

2.3. Lineáris stabilitáshatár számításának módszerei

A karakterisztikus egyenlet (27) egy úgynevezett transzcendens egyenlet, melynek végtelen sok megoldása van. Ezért a karakterisztikus gyökök meghatározása nem triviális feladat. A késleltetett differenciálegyenletek végtelen dimenziósok, mivel λ az exponenciális függvény kitevőjében is megjelenik. Megjegyzendő, hogy amennyiben nem választjuk le a (14) egyenletben bemutatott módon az h_N változót a rendszerről, úgy a $\lambda = 0$ karakterisztikus exponens is megoldás lenne, mely esetén $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ adódna.

A karakterisztikus exponens általánosan felírva valós és képzetes részre bontható fel $\lambda = \text{Re}\lambda + i\text{Im}\lambda = \gamma + i\omega$, ahol $i^2 = -1$ az imaginárius egység. A rendszer stabilitásának feltétele, hogy az összes gyök a negatív félsíkon helyezkedjék el, vagyis a valós részük negatív legyen ($\gamma_k < 0$) az összes, végtelen számú gyök esetén. A stabilitásvesztés határához tartozik a kritikus gyök, melynek valós része $\max(\gamma_i) \equiv \gamma_{\text{kr}} = 0$. A DDE rendszereknél gyakran dinamikus stabilitásvesztés, úgynevezett Hopf-bifurkáción következik be [43], ekkor egy komplex-konjugált gyökpár $\lambda_{\text{kr}} = \pm i\omega_{\text{kr}}$ halad át a képzetes tengelyen. A kritikus gyököt a (27) egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk a stabilitásvesztés határhoz tartozó karakterisztikus egyenletet

$$D(i\omega) = \det\left(i\omega_{\text{kr}} \mathbf{I} - \mathbf{L} - \mathbf{R} e^{-\tau i\omega_{\text{kr}}}\right) = 0. \quad (28)$$

A megoldásának egyik lehetséges módszere az úgynevezett D-szeparáció [44, 45], ezzel a stabilitás határhoz tartozó (28) egyenletet, valós $\text{Re}D(\lambda) = 0$ és képzetes $\text{Im}D(\lambda) = 0$ részre bontjuk. Ezen két egyenlet megoldásaként a stabilitási határok meghatározhatóak a rendszer paramétereinek függvényében. Ennek számítására használható a többdimenziós felező módszer (MDBM) [46], amely egy hatásos gyökkeresési eljárás.

Másik megoldási lehetőség "brute force" módszerrel a paramétertartományt lefedve, sok diszkrét pontban szimulálni a SD-DDE-t és az időjelek elemzésével a stabilitástérképek "számítása". Ugyanakkor nagy felbontásban, sok pontban szimulálva meglehetősen időigényes módszer. Emellett gyakran problematikus a rendszer viselkedésének megállapítása a lassan lecsengő időjelek alapján, különösen is a stabilitási határok közelében.

További lehetőség numerikus módszerrel a gyökök és a stabilitási határ számításra a MATLAB DDE-BIFTOOL szoftvercsomag [47, 48]. Az algoritmus megválasztott paraméterek mentén

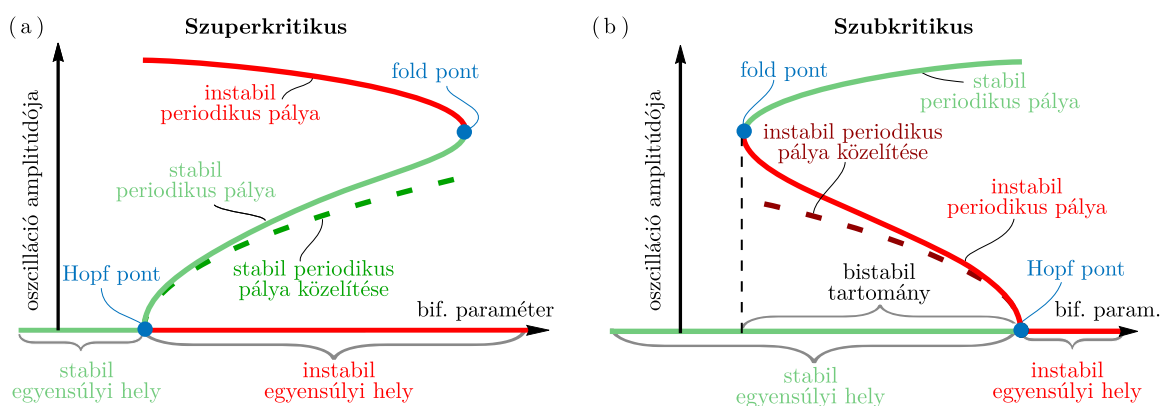
kiszámítja az egyensúlyi helyzetet, majd a stabilitás határhoz tartozó Hopf bifurkációs pontokat tetszőlegesen választott paraméterek mentén követi, ezzel kirajzolva a stabilitás határt.

Állapotfüggő időkézés esetén a rendszer követése bonyolultabb, mint a konstans időkézésű modellek esetén. A DDE-BIFTOOL csak az explicit időkézéssel megadott SD-DDE rendszerekre használható, viszont a járműkövető rendszerben implicit az időkézés (11). Erre megoldást jelent, ha az $\tau(\mathbf{x}_t)$ késést egy extra állapotváltozóként vesszük figyelembe, azonban az extra algebrai egyenlet felírása és a rendszernek a módosítása elég körülményes. Belátható, hogy az egyensúlyi helyen az explicit és implicit időkézés esetén megegyezik a stabilitási határ, ugyanis $h(t - \tau(h_t)) \equiv h(t) \equiv h^*$, vagyis mindkét esetben az egyensúlyi követési távolsághoz tartozóan egyenlő lesz az időkézés is. A lineáris stabilitás határt követő BIFTOOL algoritmus megfelelő módosításával lehetőség van implicit időkézés esetén is a stabilitástérképek számítására, az extra algebrai egyenlet felírása nélkül.

2.4. Nemlineáris vizsgálat elméleti háttere

A kritikus gyökök stabilitásvesztése a járműkövető modellben általában az említett módon dinamikus stabilitásvesztésen, Hopf bifurkáción keresztül történik. Ekkor egy kezdetben ω_{kr} körfrekvenciával oszcilláló periodikus pálya nő ki a lineáris stabilitás határból [49, 50]. Ha egy stabil periodikus pálya az instabil egyensúlyi helyzet fölé nő, akkor azt superkritikus Hopf bifurkációnak nevezzük, amely a 2(a) ábrán látható. Legtöbbször nem kívánatos a rendszert ilyen helyzetben üzemeltetni, ugyanis ilyenkor az egyensúlyi helyzet amúgy is instabil. Ennek ellenpárja a subkritikus Hopf bifurkáció, mely során egy instabil periodikus pálya emelkedik a stabil egyensúlyi állapot fölé, a 2(b) ábrán látható módon. Ez az eset, lineáris szempontból biztonságosnak tűnhet, ha nem vagyunk tisztában a rendszerben meglévő periodikus pályákkal. Gyakorlatban és szimulációk során az látható, hogy egy kis perturbáció (pl. enyhe fékezés) által okozott oszcilláció lecseng. Ha azonban a perturbáció az állapotváltozókat az instabil periodikus pályán kívülre "tolja", akkor nem tud visszaállni a egyensúlyi állapothoz a rendszer és a rezgés amplitúdója folyamatosan növekedni fog. Megjegyzendő, hogy létezhet egy másik stabil periodikus pálya az instabil "fölött". Ekkor a periodikus pálya stabilitást vált az úgynevezett fold bifurkáción keresztül. Amennyiben subkritikus esetben a periodikus pálya visszafordul, ekkor a rendszer bistabil lesz, mert egy helyen lesz jelen stabil egyensúly és stabil periodikus megoldás. Ezt figyelembe véve a subkritikus bifurkáció általánosságban veszélyesebbnek tekinthető a mérnöki alkalmazásokban, mint a superkritikus a nehezebb felismerhetősége és az okozott bistabil viselkedés miatt.

A késleltetett rendszerek esetén a Hopf bifurkációs elmélet alkalmazásával lehetőség van a periodikus pálya amplitúdójának másodrendű közelítésére analitikusan [49]. Ehhez a (18) egyenletet harmadfokig sorba kell fejteni, majd központi sokaság redukció alkalmazásával [51, 52, 53, 54, 55, 56] a végtelen dimenziójú rendszer két dimenzióra csökkenthető, az úgynevezett



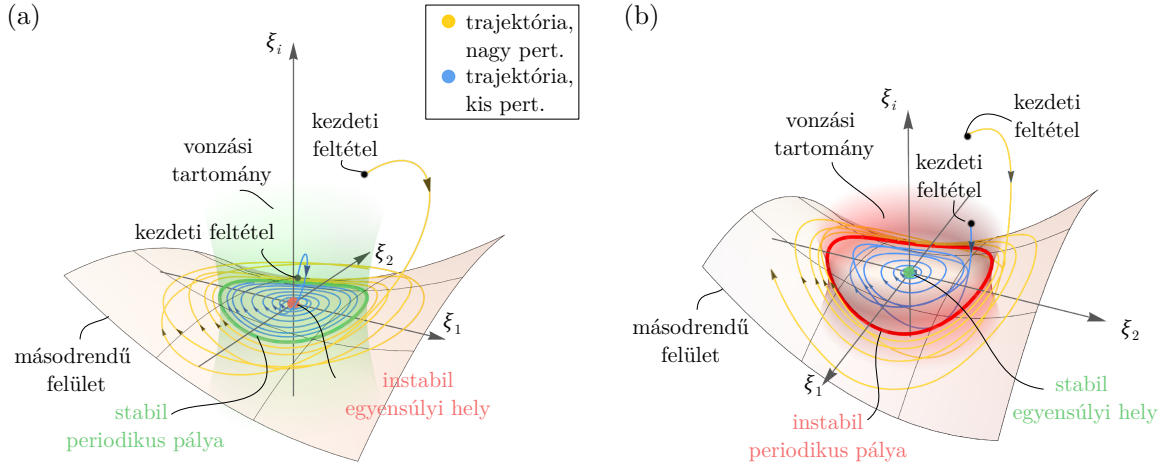
2. ábra. A bifurkáció diagram a periodikus pálya (állandósult állapotbeli rezgés) amplitúdóját bifurkáció paraméter függvényében ábrázolja. A periodikus pálya a Hopf pontból indul ki, esetenként az úgynevezett fold pontban stabilitást válthat és visszafordulhat. Az (a) alábbián egy szuperkritikus bifurkáció látszik, ahol a stabil periodikus pálya nő ki az instabil egyensúlyi hely fölé, míg a (b) alábbián egy szubkritikus eset látható, ahol instabil periodikus pálya nő a stabil egyensúlyi hely fölé.

fő (kritikus) dinamikai irányokra, amelyek a hosszútávú, lassú dinamikát határozzák meg. A többi dimenzió leválasztására azért van lehetőség, mert a hozzájuk tartozó rezgési komponensek gyorsabban lecsengenek[57], így nem befolyásolva az állandósult állapotot.

A végtelen dimenziós állapottér dinamikájának alaposabb megértéshez tekintsük a 3. ábrát, három dimenzióban illusztrálva a Hopf bifurkációs pont közelében a központi sokaságot. A két fő, a hosszútávú dinamikát meghatározó irány ξ_1 és ξ_2 , míg ξ_i "szemlélteti" a többi végtelen sok dimenziót. Linearizálással a spektrális altér egy ξ_1 és ξ_2 által kifeszített érintő síkkal közelíthető, ami áthalad az egyensúlyi helyen. Továbbá, a fentebb kifejtett nemlineáris analitikus számítás során a végtelen dimenziós központi sokaság egy másodrendű felülettel közelíthető, amire tart a hosszú távú ("lassú") dinamika.

A 3. ábrán, a szuperkritikus és szubkritikus viselkedést illusztráljuk kis és nagy perturbáció esetén. Az (a) alábbián látható a szuperkritikus eset, ahol egy instabil egyensúlyi állapot (piros) van az origóban, és egy stabil periodikus pálya (zöld) a központi sokaságon. Kis és nagy perturbáció esetén, amelyet az egyensúlyhoz közeli, illetve távoli kezdeti feltételek beállításával reprezentálunk, a transziens rezgések után a trajektóriák a középponti sokaság felszínén állapodnak meg, a stabil periodikus pálya felé konvergálnak.

Összehasonlításképpen, a szubkritikus esetet a 3 (b) alábbiája szemlélteti. Ekkor stabil egyensúlyi állapot van az origóban, és körülötte a középponti sokaságon egy instabil periodikus pálya. Ebben az esetben létezik egy olyan sokaság, amely a végtelen dimenziós állapottérre kettéosztja és meghatározza a vonzás tartományt, amit a piros árnyékolt felület szemléltet. Kis perturbáció esetén a kék pálya a vonzási tartományon belülről indul és a stabil egyensúlyhoz konvergál.



3. ábra. Illusztráció a központi sokaság közelítéséről a Hopf bifurkációs pont kis környezetében. A trajektóriák kis és nagy perturbációval indított szimulációhoz tartoznak, előbbit sárgával, utóbbit kézzel ábrázolva. Az (a) alábrán szupercritikus-, míg a (b) alábrán szubkritikus bifurkáció látható.

Ahogy arra már fentebb rámutattak, a szubkritikus eset veszélyt hordoz magában, mert látszólag stabil, jól működő rendszernek tűnik. Azonban vonzási tartományon kívülről indítva a kezdeti állapotot (sárga pálya), a megoldás konvergál a középponti sokasághoz, de azon az instabil periodikus pálya taszítja, ami egyre növekvő amplitúdójú oszcillációt okoz.

Bár a késleltetett rendszerek bifurkációs elméletének szakirodalma meglehetősen gazdag, mégis, az állapotfüggő időkéssel rendelkező rendszerek esetén legjobb tudomásunk szerint nem létezik bifurkációs elmélet, mely segítségével analitikusan közelíteni lehetne a periodikus pályákat.

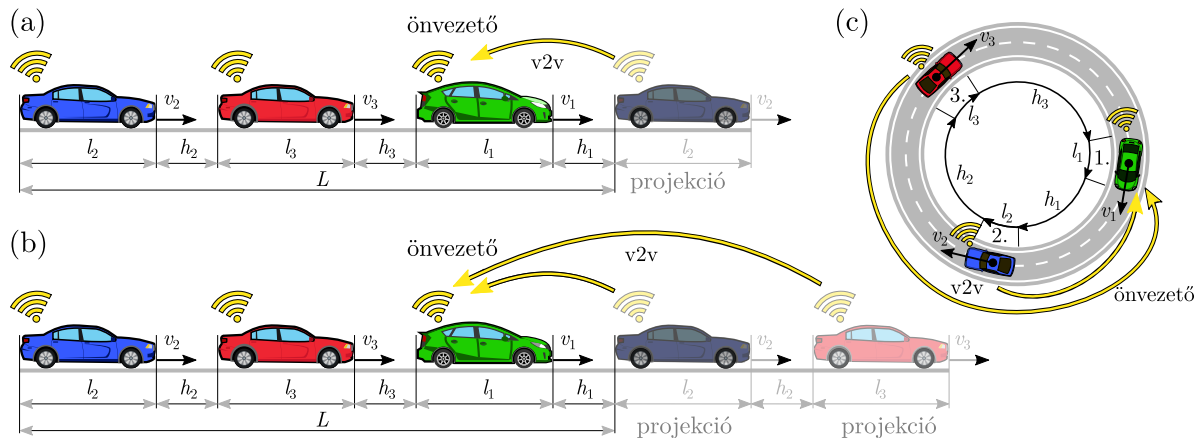
A dolgozat során a további számításokhoz a DDE-BIFTOOL követő szoftvercsomagot használtuk [47, 48] a rendszer globális viselkedésének vizsgálatához, amely képes az SD-DDE rendszerek vizsgálatára. A lineáris stabilitáshoz hasonlóan, az állandósult állapotbeli periodikus pályák választott paraméterek menti követésére és stabilitásuk meghatározására is van lehetőség, mely által a feld pontok is követhetőek. Azonban implicit SD-DDE-nél a nemlineáris periodikus pályák követése is csak extra feltétellel lehetséges a 2.3 fejezetben ismertetett módon. Éppen ezért, a periodikus pályák számítása során egyszerűsítéssel élünk, és az időkést explicit alakban adjuk meg.

3. Közúti, járműves mérési eredmények

Ebben a fejezetben bemutatjuk a mérési elrendezést és megvalósítást, majd a 2.2.1. fejezetben bevezetett állapotfüggő időkéssel kiegészített modellt vizsgáljuk. A számított eredményeket

összevetjük a konstans időkésésű modellel és a mérési adatokkal, egy valós példán keresztül elvégezve a fent részletezett lineáris és nemlineáris vizsgálatokat.

3.1. Mérési elrendezés



4. ábra. A mérési elrendezés bemutatása [23], ahol három V2V technológiával ellátott járműkonvoj, melyből kettő CHV (kék, piros) egy pedig CAV (zöld). (a) a virtuális körgyűrű az utolsó jármű CAV elé vetítésével valósul meg, (b) a CAV a látóhatárán túlról is, mindkét járműből kapott adatokat figyelembe veszi (c) az elméleti modellel összhangban levő virtuális körgyűrűs elrendezés.

A járműkövető modellt gyakorlati mérések során is kipróbálták körgyűrűs elrendezésben, hogy validálni lehessen az elméleti eredményeket [22]. A mérés során egyértelműen kimutatták az úgynevezett "stop-and-go" hullámot, amely a haladási iránnyal szemben, a járműsoron visszafelé haladó fékezési, majd gyorsítási hullámot jelent. Azonban ezt a mérést csak kis sebesség mellett tudták elvégezni, miközben a járműkövető modell elsősorban az autópályás, nagy tempójú forgalmat hivatott modellezni. Az ilyen, relatíve kis méretű körpályán nagy sebességnél rendkívül nehéz az úton tartani a járművet a fellépő erőhatások miatt, miközben az előrébb haladó járműre is figyelni kell. Az egyik megoldás a kellően nagy körpályán való tesztelés, azonban ehhez sok járműre lenne szükség, hogy kialakuljanak a vizsgálni kívánt haladó hullámok és fantom dugó jelensége. Az elméleti modell csak a longitudinális dinamikát vizsgálja, figyelmen kívül hagyva a körgyűrűből fakadó kanyarodását a járműveknek, amire csak a visszacsatolás miatt van szükség.

Ezeknek a gyakorlati problémáknak a megoldása érdekében, a Michigani Egyetem kutatócsoportja egyenes úton végzett méréseket egy CAV és két CHV-ből álló járműkonvojval [23]. Kihhasználva a V2V technológia adta lehetőségeket, az elől haladó CAV képes volt maga elé projektálni a valójában sor végén haladó CHV-t, mintha az a jármű előtte haladt volna és annak viselkedésére reagált. Ezáltal megvalósíthatóvá vált az elméleti modellel összhangban egy

analóg, tetszőleges L hosszúságú virtuális gyűrű vizsgálata, mindezt releváns, az autópályán is realiztikus haladási sebesség mellett. A 4(a)-(b) alábbián látható a mérési elrendezés, a (c)-n pedig a kapcsolódó virtuális körgyűrű. A mérést két konfigurációban végezték el összesen négy mérésorban, melynek részletei a 3. táblázatban találhatóak. Az 1. konfiguráció a 4(a) ábrán látható, mely során a CAV csak egy maga elé projektált járműt vett figyelembe. A második konfigurációt a 4(b) szemlélteti, ekkor a CAV a szabályozás során mindkét maga elé projektált járműre reagált a (15) egyenletben szereplő $\beta_{a,1}$ és $\beta_{a,2}$ erősítési tényezőkkel, kihasználva a CCC adta előnyöket.

A mérési adatok feldolgozásánál figyelembe kell venni a virtuális körgyűrű és járművek hosszát is

$$h^* = \frac{1}{N} \left(L - \sum_{i=1}^3 l_i \right), \quad (29)$$

melyből a h^* átlagos követési távolság meghatározható. Ezt követően az egyensúlyi helyzet a (21) egyenlet alapján számítható. Ekkor minden jármű megegyező v^* sebességgel halad, azonban az egyensúlyi követési távolságuk eltér a sofőrökre vonatkozó különböző optimális sebesség függvények miatt. Az egyensúlyi állapot az alábbi nemlineáris egyenletrendszer megoldásával kapható meg

$$\begin{cases} V_a(h_1^*) = v^*, \\ V_2(h_2^*) = v^*, \\ V_3(h_3^*) = v^*, \\ h_1^* + h_2^* + h_3^* = 3h^*, \end{cases} \quad (30)$$

melyet a MATLAB beépített Newton–Raphson megoldójával számítottunk. Az emberi sofőrök optimális sebesség függvényét folytonos, szakaszosan definiált másodfokú függvényként határozták meg

$$V_i(h) = \begin{cases} 0 & \text{ha } h \leq h_{\text{stop},i}, \\ v_{\text{max},i} \left(1 - \left(\frac{h_{\text{go},i} - h}{h_{\text{go},i} - h_{\text{stop},i}} \right)^2 \right) & \text{ha } h_{\text{stop},i} \leq h \leq h_{\text{go},i}, \\ v_{\text{max},i} & \text{ha } h \geq h_{\text{go},i}. \end{cases} \quad (31)$$

A benne szereplő paraméterek illesztése a mérési adatok alapján hibafüggvények minimalizálásával történt [23, 58]. Ennek során az illesztett modellel szimulált időjeleket és a mérési eredményeket hasonlították össze. Azonban ez az eljárás átlagolást tartalmaz, ezáltal nem írja le kellően jól a rendszer viselkedést. Az illesztett paraméterek és a hozzájuk tartozó bizonytalanság az 1. táblázatban szerepel. A dolgozatban szereplő szimulációk során ezen paraméterek középértékével számoltunk. A modell egyszerűsítése céljából, a két emberi sofőr kontroll paramétereit $\alpha_h = \alpha_2 = \alpha_3$, $\beta_h = \beta_2 = \beta_3$, valamint az időkésést konstans $\tau_h = \tau_2 = \tau_3$ egymással megegyezőnek vették. Értéküket szintén a mérési adatok alapján illesztették, azonban nagy bizonytalanságot mutatnak, így lehetőségünk van ésszerű keretek között hangolásukra a pontosabb

Jármű	Paraméter illesztés		
	$h_{\text{stop},i}$ (m)	$h_{\text{go},i}$ (m)	$v_{\text{max},i}$ (m/s)
1, önvezető	5	30	$(h_{\text{go},1} - h_{\text{stop},1})\kappa$
2	1.56 ± 0.12	29.1 ± 0.92	24.6 ± 1.2
3	-0.2 ± 0.11	33.9 ± 0.64	24.0 ± 0.6

1. táblázat. Az optimális sebesség függvényben szereplő paraméterek, melyek az CAV esetén technológiai paraméterek, emberi sofőröknél paramétereit a mérési adatokból számították [23]

modellezés érdekében. A [58] munka során szofisztikáltabb módszerekkel illesztették az emberek paraméter értékeit, amely eredményeként némileg változtatott értékeket ajánlottak, ezek a 2. táblázatban szerepelnek. Az általuk illesztett modell az átlagolt viselkedést jól visszaadja, de az egyes mérési pontokban nem minden esetben ad jó eredményt. Éppen ezért, a dolgozatban a konstans időkésés helyett állapotfüggő időkésést alkalmazunk. Ez ugyan matematikailag bonyolultabb, de jobban leírja a sofőrök viselkedését, így vélhetőleg pontosabb eredményt kaphatunk az olyan helyeken, amit a konstans időkéséses modell nem tudott megfelelően visszaadni. Ezen eredmények részletes tárgyalása a 3.2 és 3.3 fejezetekben következik.

A legegyszerűbb esetben az állapotfüggő időkésés modellezése lineáris függvénnyel történhet, amely leírásához két paramétert vezettünk be [41]

$$\tau_i = ah_i(t - \tau_i) + b \implies \tau_i = ah_i(t) + b := \tau_i(h_i), \quad (32)$$

ahol $a > 0$ (s/m) az időkésés meredeksége és b (s) a konstans eltolás. Az időkésést a korábbiakkal ellentétben, a (11) implicit egyenlet helyett explicit alakban írjuk fel. Ekkor az egyenlet jobb oldalán a késleltetett követési távolság helyett az időkésés nélküli $h_i(t)$ változó szerepel. Erre a számítások megkönnyítése érdekében kerül sor, hogy a DDE-BIFTOOL-al követni lehessen a stabilitási határokat extra algebrai egyenlet felírása nélkül. Az így definiált állapotfüggő időkésés a 5(c) alábbián látható. Megjegyzendő, hogy amennyiben $a = 0$ -nak választjuk, akkor $\tau_i \equiv b$ konstans időkésést kapunk. További egyszerűsítésként a két emberi sofőr állapotfüggő reakcióidejét a kontroll paraméterekhez hasonlóan megegyezőnek választottuk.

	Emberi kontroll paraméterek		
	α_h (1/s)	β_h (1/s)	τ_h (s)
Eredeti	0.14	0.54	1
Finomhangolt	0.12	0.54	1

2. táblázat. Konstans időkésés esetén, a paraméterillesztésből és hangolásból kapott emberi kontroll paraméterek

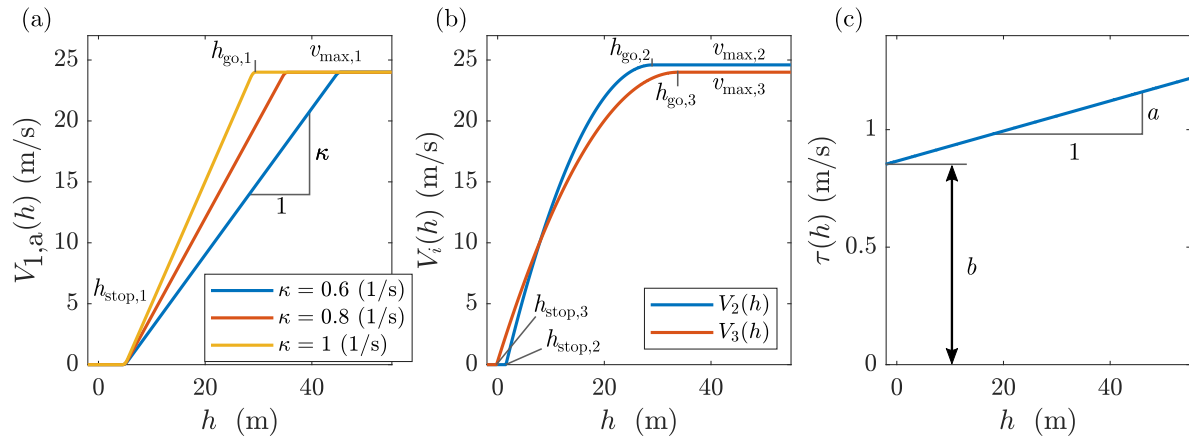
A CAV paraméterei tervezhető technológiai értékek. A mérés során alkalmazott járműben az optimális sebesség függvényt a $h_{\text{stop},1}$ és $h_{\text{go},a}$ között lineáris függvénnyel állították. A

numerikus követés megkönnyítése érdekében ezt a függvényt kisimítottuk a [59]-hoz hasonlóan

$$V_a(h) = \begin{cases} 0 & \text{ha } h \leq h_{\text{stop},1} - c, \\ \kappa(h - h_{\text{stop},1}) + \frac{(c - \kappa(h - h_{\text{stop},1}))^2}{4c} & \text{ha } h_{\text{stop},1} - c < h < h_{\text{stop},1} + c, \\ \kappa(h - h_{\text{stop},1}) & \text{ha } h_{\text{stop},1} + c \leq h \leq h_{\text{go},a} - c, \\ \kappa(h - h_{\text{stop},1}) - \frac{(v_{\text{max},a} - \kappa(h - h_{\text{stop},1}) - c)^2}{4c} & \text{ha } h_{\text{go},a} - c < h < h_{\text{go},a} + c, \\ v_{\text{go},a} & \text{ha } h \geq h_{\text{max},a} + c, \end{cases} \quad (33)$$

ahol $\kappa = \frac{1}{t_{\text{set}}}$ a longitudinális kontrollban szereplő érzékenység. A CC rendszereknél a bemeneti, sofőr által beállítható paraméterek a $v_{\text{max},a}$ maximális sebesség és a t_{set} időbeli követési távolság ("time-headway"). Az egyenletben szereplő c a lekerekítési sugár, amely az eredeti függvényben $h_{\text{stop},1}$ és $h_{\text{go},a}$ értékeknél lévő törés körüli tartományt adja meg, amit másodfokú egyenlettel simítottunk ki. Az említett két konfigurációhoz tartozó paraméterek és a különböző mérőszámok értékei a 3. táblázatban vannak összegyűjtve.

A mérés során használt függvények az 5 ábrán láthatóak. Az (a) alábbi CHV optimális sebesség függvénye, különböző beállítások esetén, a (b) alábbi a HV-k mérési adatokból illesztett kontroll függvényei és a (c) alábbi a dolgozatunk során bevezetett állapotfüggő időkésés, amely a követési távolság lineáris függvénye.



5. ábra. A modellben felhasznált kontroll és kapcsoló függvények. Az (a) alábbi az önvezető jármű optimális sebesség függvénye, három különböző $\kappa = 0.6, 0.8, 1$ (1/s) értéknél $i = 1$ esetén, (b) alábbi az emberi sofőrök mérési adatok által illesztett optimális sebesség függvénye $i = 2, 3$ esetén, (c) alábbi az állapotfüggő időkésés modellezése követési távolság lineáris függvényeként $\tau(h) = ah + b$ látható.

3.2. Lineáris stabilitás vizsgálat

Ebben a fejezetben bemutatjuk a mérési eredményeket, a korábbi lineáris időkésést feltételező modellből kapott stabilitási határokat és a továbbfejlesztett állapotfüggő időkéséssel számított

	Megnevezés	Jelölés	Érték	Mértékegység
	CAV időkésés	τ_a	0.5	s
	CAV kontrollparaméter	α_a	0.4	1/s
	Lekerekítési sugár	c	0.45	m
1. konfiguráció	CAV kontrollparaméter	$\beta_{a,1}$	0.5	1/s
	CAV kontrollparaméter	$\beta_{a,2}$	0	1/s
	1. mérőssor			
	CC érzékenység	κ	0.6	1/s
	Egyensúlyi követési távolság	h^*	5:5:30	m
	2. mérőssor			
	CC érzékenység	κ	0.8	1/s
	Egyensúlyi követési távolság	h^*	5:5:40	m
	3. mérőssor			
	CC érzékenység	κ	0.6	1/s
	Egyensúlyi követési távolság	h^*	5:5:30	m
2. konfiguráció	CAV kontrollparaméter	$\beta_{a,1}$	0.2	1/s
	CAV kontrollparaméter	$\beta_{a,2}$	0.3	1/s
	4. mérőssor			
	CC érzékenység	κ	1	1/s
	Egyensúlyi követési távolság	h^*	5:5:30	m

3. táblázat. A mérés során alkalmazott paraméterek értékei

stabilitási térképeket. A mérési elrendezéshez tartozó differenciálegyenlet rendszert a (12) egyenlettel összhangban a következő formában írhatjuk fel

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \\ \dot{v}_3(t) \\ \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_a \left(V_a \left(h_1(t - \tau_a) \right) - v_1(t - \tau_a) \right) + \sum_{j=1}^k \beta_j \left(v_{1+j}(t - \tau_a) - v_1(t - \tau_a) \right) \\ \alpha_h \left(V_2 \left(h_2(t - \tau_2(h_2(t))) \right) - v_2(t - \tau_2(h_2(t))) \right) + \beta_h \left(v_3(t - \tau_2(h_2(t))) - v_2(t - \tau_2(h_2(t))) \right) \\ \alpha_h \left(V_3 \left(h_3(t - \tau_3(h_3(t))) \right) - v_3(t - \tau_3(h_3(t))) \right) + \beta_h \left(v_1(t - \tau_3(h_3(t))) - v_3(t - \tau_3(h_3(t))) \right) \\ v_2(t) - v_1(t) \\ v_3(t) - v_2(t) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

ahol $k = 1, 2$ és $h_3 = 3h^* - h_1(t - \tau_3(h_3(t))) - h_2(t - \tau_3(h_3(t)))$. A kapcsolódó, egyensúlyi helyzet körüli (30) linearizált egyenlet (18), amelynek megegyezik a stabilitása az eredeti SD-

DDE rendszerrel

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{R}_1\tilde{\mathbf{x}}(t - \tau_a) + \mathbf{R}_2\tilde{\mathbf{x}}(t - \tau_2(h_2^*)) + \mathbf{R}_3\tilde{\mathbf{x}}(t - \tau_3(h_3^*)) \quad (35)$$

lesz. Az egyenletben szereplő mátrixok dimenziója $\mathbf{L}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3 \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, számításuk a (22) és (23) egyenletekben leírtak szerint történik

$$\mathbf{D}_0 \mathbf{f}^* = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{f}^* = \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} -\alpha_a - \beta_{a,1} & \beta_{a,1} & 0 & \alpha_a V'_a(h_2^*) & 0 \\ 0 & -\beta_{a,2} & \beta_{a,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$\mathbf{D}_2 \mathbf{f}^* = \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_h - \beta_h & \beta_h & 0 & \alpha_h V'_2(h_2^*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathbf{D}_3 \mathbf{f}^* = \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_h & 0 & -\alpha_h - \beta_h & -\alpha_h V'_3(h_3^*) & -\alpha V'_3(h_3^*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Az így kapott mátrixokat visszairjuk a (27) karakterisztikus egyenletbe, ezáltal tetszőleges paraméter tartományon meghatározható a rendszer stabilitása. Az adatok két konfigurációban, melyek $\beta_{a,1}$ és $\beta_{a,2}$ paraméterekben különböztek, 4 mérőssorban változtatott κ értékek esetén, diszkrét h^* mérési pontokban álltak rendelkezésre. Az összesen 26 pont stabilitásának besorolását szubjektíven végeztük, a rögzített adatokból kinyert sebesség profilok vizsgálata által. A 6 ábrán három jellemző viselkedés látható. Az (a) alábbián az autók szinte azonos sebességgel haladnak végig, ha valamelyik fékez a többi is lassít, de nem kezd oszcillálni a sebességük, amiből stabil egyensúlyra következtethetünk. A (b) alábbián a sebességek folyamatosan oszcillálnak, a járművek nem tudják hasonló sebességgel követni egymást, ami instabil állapotra utal. A (c) alábbián a tranziens gyorsítási szakasz után a járművek nagyjából 50 s-en keresztül képesek állandó sebességgel követni egymást, azonban egy nagyobb fékezés hatására kialakul egy nagy

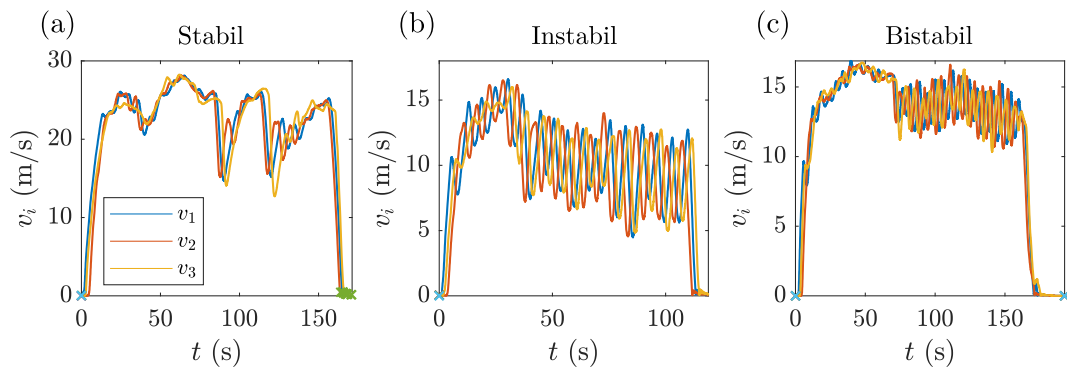
Emberi sofőrök javasolt paramétereit			
α_a (1/s)	β_a (1/s)	a (s/m)	b (s)
0.1	0.32	0.023637	1.0152

4. táblázat. Az emberi sofőrökhöz tartozó kontroll-, és a bevezetett időkésést leíró paraméterek

amplitúdójú rezgés. Ez látszólag binstabilitásra utal, feltételezhető, hogy egyszerre van jelen egy stabil egyensúlyi hely és egy stabil periodikus pálya.

A modellben mélyrehatóan vizsgáltuk a paraméterek hatását a stabilitási tulajdonságokra, mely eredményeként az emberi sofőrök kontroll paramétereire és a reakcióidejüket modellező állapotfüggő időkésésre a 4. táblázatban szereplő értékeket javasoljuk. Ennek során a mérési eredményekkel összhangban kiválasztottunk két-két h^* - κ stabilitási határra eső pontpárt. Tetszőleges α_h és β_h értékeket választva megkerestük azt a két konstans időkésés értéket, amikor a kiválasztott ponton áthaladt a stabilitási határ. Erre a két konstans időkésés értékre követési távolságtól függő időkésést illesztettünk a és b paraméterek segítségével, ezáltal biztosítva, hogy a választott két ponton megegyezzen a SD-DDE rendszer stabilitása. Ezt a műveletet utána széles α_h és β_h tartományon paraméter söpréssel megismételtük. Végezetül kiválasztottuk a 4. táblázatban szereplő értékeket, amelyek esetén a legjobban illeszkedett a kapott lineáris stabilitás határ a mérési eredményekre. A felhasznált állapotfüggő időkésés a 7(e) ábrán szerepel.

A fent ismertetett módszerrel klasszifikált eredmények a 7. ábrán láthatóak. Zöld kereszt jelöli a stabil-, piros az instabil egyensúlyi helyet és türkiz kék a feltételezett binstabil pontokat. A stabilitási határnak a mérési eredményekkel összhangban egy instabil pont és egy stabil vagy binstabil (mindkettő esetén lineárisan stabil az egyensúly) pont közé kell esnie. Azonban pontos helye a rendelkezésre álló $\Delta h^* = 5$ m és $\Delta \kappa = 0.2$ (1/s) felbontás miatt bizonytalan



6. ábra. A mérésből származó jellemző időjelek, (a) alábbián stabil egyensúly $\kappa = 0.8$ (1/s) és $h^* = 35$ m esetén, (b) alábbián instabil egyensúly $\kappa = 1$ (1/s) és $h^* = 15$ m esetén, (c) alábbián binstabil viselkedés $\kappa = 0.8$ (1/s) és $h^* = 15$ m esetén

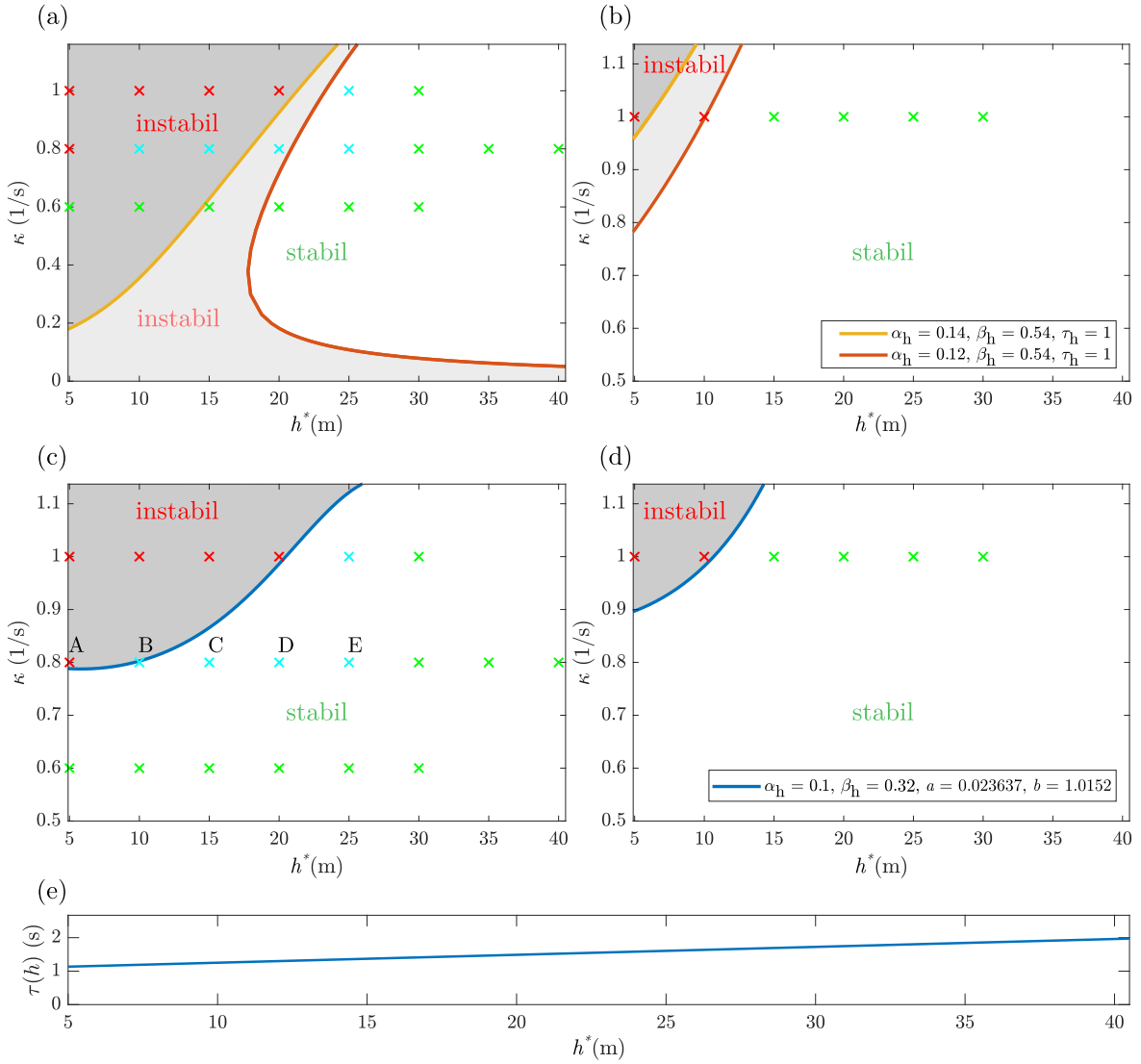
két diszkrét pont között. A konstans időkésés stabilitási térképei a 7(a)-(b) alábbiakban láthatóak. Narancssárga színnel szerepel az eredetileg ajánlott $\alpha_h = 0.12$ (1/s)-hez tartozó stabilitás határ. Ekkor (a) alábbiakban láthatóan egyedül $\kappa = 1$ (1/s) értéknél esik a megfelelő helyre a stabilitási határ. Ugyanis a "c" alakú görbe ellentmond annak, amire a mérési pontok trendjéből következtetni lehet. A kisebb κ értékeknél a görbe visszakanyarodik a nagy h^* értékek felé. Ebben az esetben a 2. mérési konfigurációnál a (b) alábbiakban illeszkedik a stabilitási határ a mérési pontokra. A finomított $\alpha_h = 0.14$ (1/s) paraméter stabilitás határa sárga színnel szerepel. Ekkor az (a) alábbiakban $\kappa = 1$ (1/s) értéknél továbbra is megfelelő helyre esik a stabilitási határ. Ebben a konfigurációban jobban hasonlít a mérési pontokra, de továbbra is jelentős tartományon ad rossz eredményt kisebb h^* értékekre. Viszont ekkor a (b) alábbiakban látható második konfigurációban elromlik a stabilitás határ. A [58] dolgozatban alaposan megvizsgálták a különböző paraméterek hatását, amivel pontonként lehet javítani, de ennek hatására máshol adott rossz eredményt. Ebből következett, hogy a modell nem tudja jól leírni a valóságot, nem egyezik a mérési adatokkal.

Ezzel szemben, az állapotfüggő időkéséssel számolt, a (c)-(d) alábbiakban látható lineáris stabilitási határ nagyon pontosan illeszkedik a mérési adatokra mindkét konfigurációban, az összes pont esetén megfelelve az mérésből meghatározott stabilitási tulajdonságoknak. Ráadásul a vizsgált 5-40 m-es mérési tartományon az időkésés átlagos értéke $\bar{\tau} = 1.547$ s. Ez jó egyezést mutat a 1.1. fejezetben ismertetett, mérési eredményekből származó, az emberi sofőröket jellemző reakcióidővel [30, 31]. Továbbá az időkésés változó értéke is az egész tartományon összhangban van a gyakorlati tapasztalatokból következő értékekkel. Emellett a $\alpha_h = 0.1$ (1/s) értéke a mérési bizonytalanságon belül van a [23, 58]-ben kapott értékekkel és $\beta_h = 0.32$ (1/s) is összhangban van a szakirodalomban használt emberi érzékenység paraméterekkel [21, 59]. A mérések során nagy kiterjedésű tartományon találtunk bistabil viselkedést, lásd türkizzel jelölt pontok, ezért érdemes a modellt nemlineáris vizsgálatoknak is alávetni és összehasonlítani a mért adatokkal.

3.3. Nemlineáris stabilitás vizsgálat

A 3.2. fejezetben láthattuk, hogy konstans időkésésű modell nem tudja leírni a rendszer lineáris stabilitását. Ebből következően a nemlineáris vizsgálat során számított periodikus pályák is rossz helyen lévő stabilitási határból indulnak ki. A [58] továbbá azt mutatta, hogy a pályák alakja sem hasonlít a mérési eredményekre, ugyanis kis h^* -nál is nagy amplitúdójú rezgéseket produkált. Végezetül az adatokból feltételezett megfelelő bistabil tartományt sem volt képes az a modell előállítani.

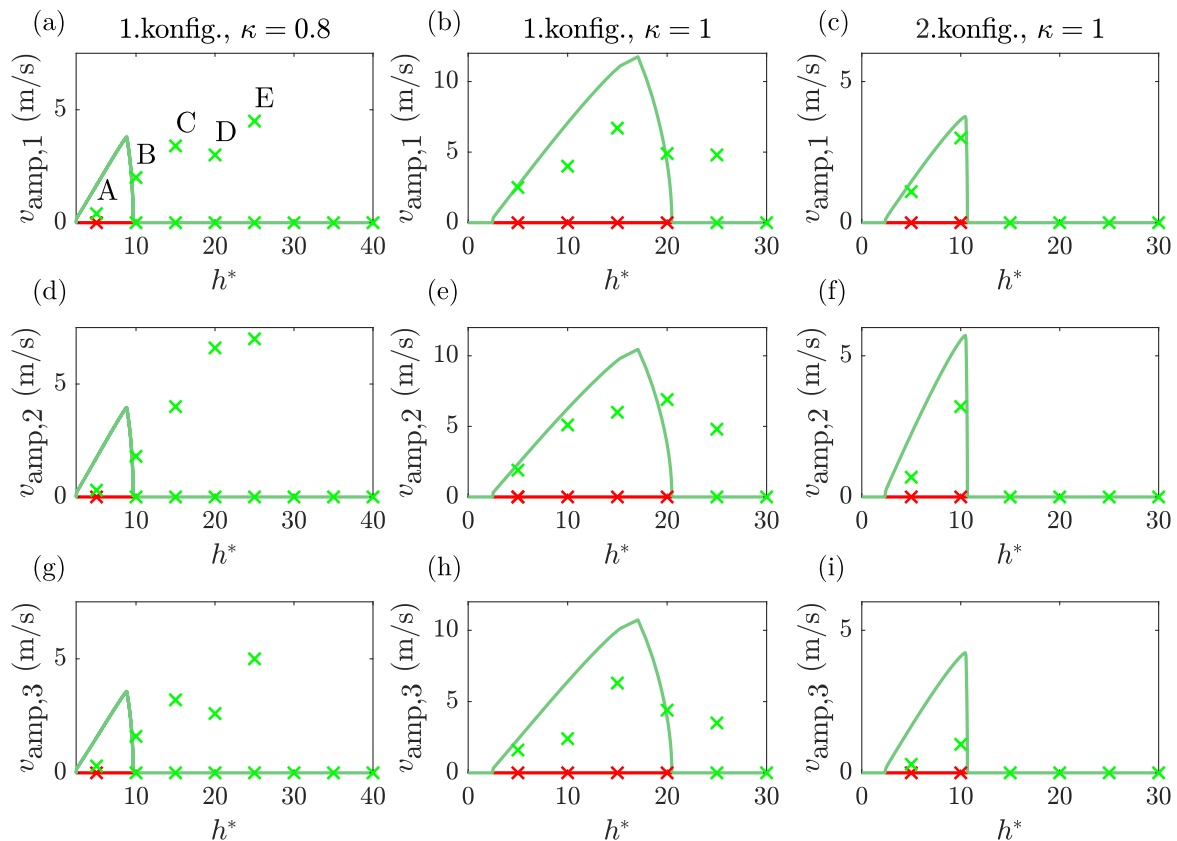
A nemlineáris vizsgálatok során az adatok feldolgozása az előzőekhez hasonlóan történik. A mérési pontokhoz tartozó időjelekből, lásd 6. ábra, kiválasztjuk a perturbáció után kialakult állandósult állapotbeli rezgést. Ezt követően kellő gondossággal eljárva, mérnöki megfontolások során meghatározhatóak az oszcillációk úgynevezett "peak-to-peak" amplitúdói, vagyis a lokális maximumok és minimumok különbségei. Fontos figyelembe venni, hogy egy-egy konkrét



7. ábra. A mérési eredmények és a szimulációból származó lineáris stabilitás térképek az (a) alábbi konstans időkézés esetén az 1. konfigurációban, a (b) alábbi konstans időkézés esetén az 2. konfigurációban, a (c) alábbi állapotfüggő időkézés esetén az 1. konfigurációban, a (d) alábbi állapotfüggő időkézés esetén az 2. konfigurációban, valamint a (e) alábbi a felhasznált állapotfüggő időkézés.

érték meghatározása jelentős hibával terhelt lehet az emberi leolvasás szubjektivitása miatt. A periodikus pályák követése 2.4 fejezetben bemutatott DDE-BIFTOOL-al történt.

A mérési eredményekből megállapított rezgési amplitúdók [58] és a periodikus pálya követésének eredményei a 8. bifurkációs diagramon láthatóak. A CAV és a tesztben részt vevő sofőrök eltérő vezetési stílusa minden jármű esetében különböző amplitúdójú rezgést okozott. A $\kappa = 0.6$ (1/s) értékhez tartozó összes pont globálisan stabil, ezért ennél a vizsgálatnál nem lényegesek a további nemlineáris vizsgálatok. Az ábrán a függőleges oszlopokban egy adott paraméterhez tartozó bifurkációs diagramok szerepelnek a különböző járművek esetén, míg a vízszintes so-



8. ábra. A mérési eredmények és a szimulációból származó bifurkációs diagramok a különböző konfigurációk és paraméterek esetén az (a)-(c) alábbi az első, önvezető járműhöz tartozó periodikus pályák, (d)-(f) alábbi a második, emberi járműhöz tartozó periodikus pályák, (g)-(i) alábbi a harmadik, emberi járműhöz tartozó periodikus pályák.

rokban egy jármű viselkedése látható a különböző szituációkban. Összességében elmondható, hogy kvalitatíve, trendszerűen jól illeszkednek a mérési pontok a kapott periodikus pályákra. A 2. konfiguráció esetén a legjobb az illeszkedés, ahol a (c) és (f) ábrákon kvantitatíve is jól egyeznek az amplitúdó értékek. A 1. konfigurációnál $\kappa = 1$ (1/s)-nál mindhárom járműnél jó egyezést mutatnak az eredmények a stabilitáshatár közelében $h^* = 5$ m és $h^* = 20$ m értékeknél, (b), (e) és (h)-nál is. Azonban a mérések alapján feltételezett binstabil viselkedés egyik járműnél sem jelent meg $h^* = 25$ m értéknél. A 1. konfigurációnál $\kappa = 0.8$ (1/s)-nál vett bifurkációs diagramokon az alsó két pontban a pontok elhelyezkedése, értéke és a alakja is trendszerűen jó egyezést mutat, de a várt nagy binstabil tartomány $h^* = 10 - 25$ m között nem jelenik meg.

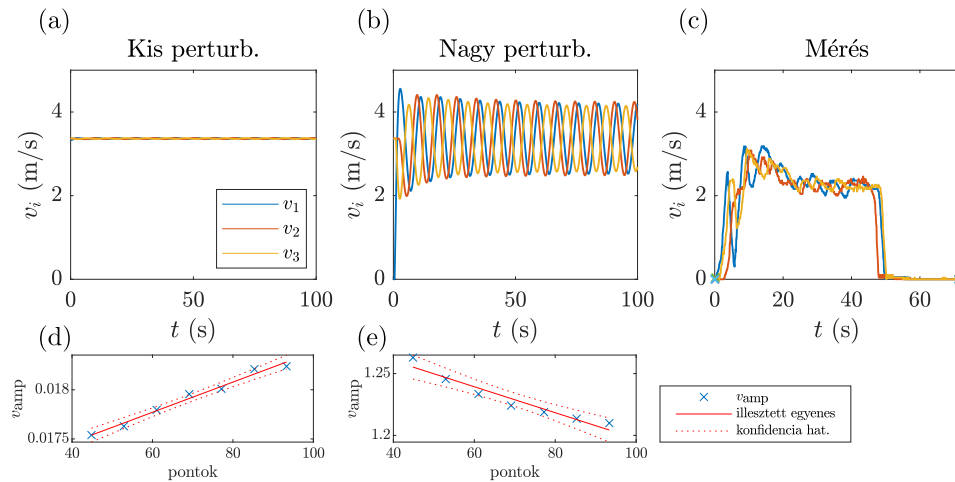
A stabil viselkedésre kellően biztosan lehet következtetni mérésekből, így feltételezhetjük, hogy ahol lineárisan stabil pontokat választottunk, azok ténylegesen érvényesek. Azonban a binstabil viselkedés és a jellemző amplitúdók meghatározásában jelentős a bizonytalanság. Mivel az SD-DDE modell pontos lineáris stabilitás térképet eredményezett, ezért érdemes alaposabban megvizsgálni a 7(a) és 8(a) ábrákon szereplő A-E pontokat. Továbbá érdemes megjegyezni, hogy

a periodikus pályák követése csak az állandósult állapotbeli viselkedésről ad információt. Ahhoz, hogy a tranziens rezgéseket is vizsgálni tudjuk, numerikus szimulációt végzünk az SD-DDE rendszerrel a megadott paraméterek mentén. A kezdeti feltételeknek a $t < 0$ időintervallumra a (30) egyenletből számolt v^* , h_1^* , h_2^* és h_3^* egyensúlyi értékeket választottuk. Annak érdekében, hogy vizsgálni lehessen a nemlineáris hatásokat, két szélsőséges kezdeti feltétellel futtatjuk minden pontban. Az egyik esetben rendkívül enyhe fékezést modellezve $v_1(0) = 0.99v^*$ értékre csökkent az első autó sebessége, tehát csak kis mértékben perturbáljuk a rendszert. A másik esetben durva fékezésbe kezdett az első jármű, ekkor $v_1(0) = 0$ állóra fékezett, ami nagy perturbációt jelent. A szimulációkat 100 s-ig futtattuk, amely hasonló a mérésekben látott releváns nagy amplitúdójú rezgések hosszával.

A mérés és a szimuláció eredményei a 9-13 ábrákon szerepelnek, a bistabilként beazonosított pontokban. Nemlineáris rendszerek numerikus szimulációjánál az időjelek alapján nehéz következtetni a rendszer valódi viselkedésére, különösen a stabilitási határ közelében, ahol a tranziens rezgések lassan csengenek le, ahogyan a 2.4. fejezetben erről már értekeztünk. A kis és nagy mértékben perturbált esetek rendre az (a) és (b) alábbiakban, valamint a mérés időjelei a (c) alábbiakban láthatóak. A szimulációból az utolsó 40-100 s-ig tartó tartományon vizsgáltuk a rezgés amplitúdóját, majd ezekre egyenest illesztettünk, mely segítségével következtetni lehet a hosszútávú viselkedésre. Ezek kis és nagy perturbációnál a (d) és (e) alábbiakban láthatóak. Amennyiben kis perturbáció esetén az illesztett egyenes növekvő trendet mutat, minden esetben instabil az egyensúly. Továbbá, ha nagy perturbáció esetén az amplitúdók növekednek, akkor egészen biztosan, ha csökkenek, de egy nem nulla értékhez tartanak, akkor valószínűsíthető a periodikus pálya, azaz határciklus létezése. Megjegyzendő, hogy az utóbbira lehet következtetni, ha az amplitúdókra illesztett egyenes nagy szórást mutat. Végezetül, ha kis perturbáció esetén az amplitúdók csökkennek, de nagy perturbáció esetén egy nagy amplitúdójú határciklushoz tart az adott pontban, akkor a rendszer bistabil. Ez a módszer nem teljesen robosztus, de fejlettebb azoknál az egyéb egyszerű technikáknál, amelyek csak egy határértékkel hasonlítják össze a szimuláció végén lévő amplitúdót, azáltal, hogy a tranziens rezgés tendenciájáról is képet ad.

A 8(a) ábra A pontjához tartozó szimuláció $\kappa = 0.8$ (1/s) és $h^* = 5$ (m) paraméterek esetén a 9. ábrán látható. Az (a) alábbiakban alapján úgy tűnhet, hogy a kis perturbációnál stabil a rendszer, viszont a (d)-n az amplitúdók trendjét vizsgálva látható, hogy valójában nagyon lassan elszálló időjelet kapunk, azaz az amplitúdók növekednek, tehát az egyensúlyi helyzet instabil. A nagy perturbációnál ugyan csökken az amplitúdók nagysága, de valószínűleg egy nem nulla értékhez tart, hanem a jelen lévő határciklus amplitúdójához. Ez superkritikus bifurkációnak felel meg, ahol egy stabil határciklus van az instabil egyensúlyi hely "fölött". Az itt látottak összhangban vannak a bifurkációs diagram eredményével és az instabil egyensúlyt tekintve a méréssel, de eltérés látható a megvalósuló amplitúdók nagyságában. Azonban láthatjuk, hogy nagyon lassan változik a periodikus pályák amplitúdója a vizsgált 100 s alatt. A kismértékben perturbált szimuláció kellő idő után a mérésnek megfelelő amplitúdójú rezgést fog produkálni. Ezért

feltételezhetően választható egy olyan, a mérésben látottaknak megfelelő mértékű perturbáció, ami pontosan visszaadná a mérés során megvalósult rezgési amplitúdót a mérési tartományon.



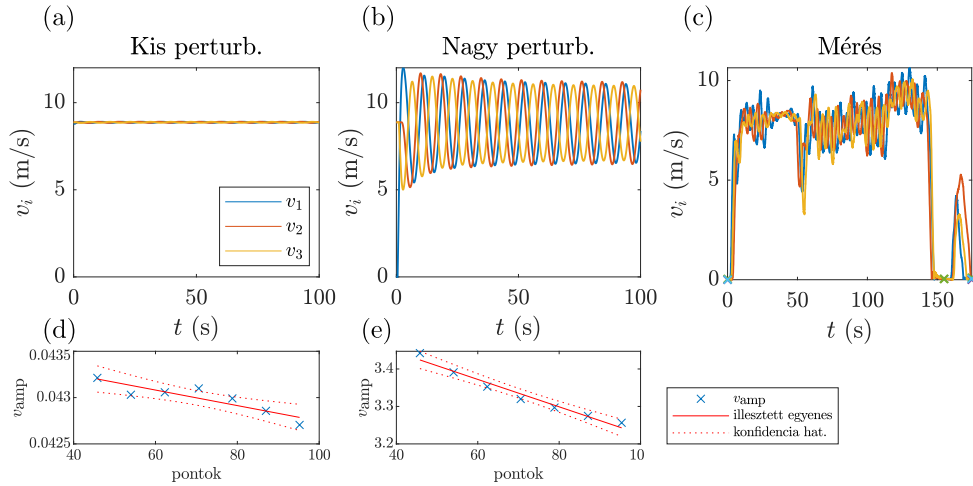
9. ábra. Instabil egyensúlyi hely a 8(a) ábra A pontjának megfelelően $\kappa = 0.8$ (1/s) és $h^* = 5$ (m) paraméterek esetén. (a) alábbi szimuláció, kis perturbációnál (d) alábbi az amplitúdók trendje, (b) szimuláció, nagy perturbációnál (e) alábbi az amplitúdók trendje, (c) alábbi a mérés időjelei vannak ábrázolva.

A 8(a) ábra B pontjához tartozó szimuláció $\kappa = 0.8$ (1/s) és $h^* = 10$ (m) paraméterek esetén a 10. ábrán látható. A fent részletezett megfontolások alapján, figyelembe véve a (d) és (e) alábbiakat, megállapítható, hogy a mechanikai modellünkben nincsen határciklus és globálisan stabil az egyensúlyi helyzet. Ehhez hasonlóan, globálisan stabil viselkedést látunk a 8(a) ábra C, D, E pontjaiban, melyek a 11, 12 és 13 ábrákon szerepelnek. Mindegyik esetben nagy perturbáció esetén az egyensúlyi helyzethez tartó rezgés látható, azonban ezeknek a lecsengése nagyon lassú.

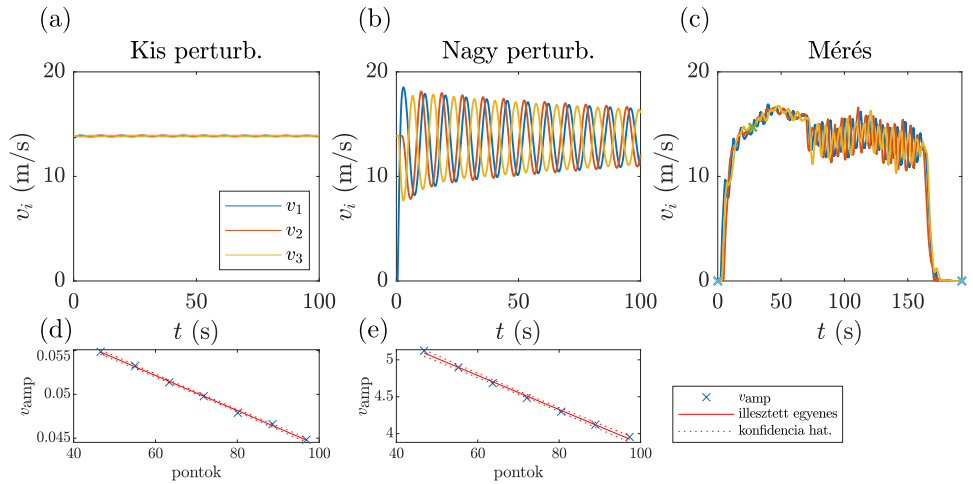
Ezekben a pontokban kvalitatíve és nagyságrendileg is hasonló szimulációs és mérési eredményekből arra lehet következtetni, hogy a rendszer valójában globálisan stabil és feltehetőleg a mérés során tapasztalt látszólagos bistabil hatás tulajdonképpen a tranzien rezgés gyenge csillapításnak köszönhető. A fékezés után nagyon lassan cseng le az oszcilláció és a relatíve rövid mérés nem tette lehetővé, hogy ezekben az esetekben pontos képet kapjunk a hosszútávú viselkedésről.

Egy másik magyarázata lehet a mérés és a modell eltérése az úgynevezett "sztochasztikus rezonancia" hatása. Ennek lényege, hogy a mérés során keletkezett egyéb zavaró hatások a stabilitási határ közelében stabil esetben hajlamosak bizonyos mértékű rezgést előidézni. Ez a hatás sokszor megnehezíti a szerszámgéprezgések során a stabilitási határok méréssel történő azonosítását, amely egy napjainkban aktívan kutatott terület [60, 61].

Abban az esetben, amennyiben elfogadjuk, hogy az említett pontokban mégiscsak bistabil

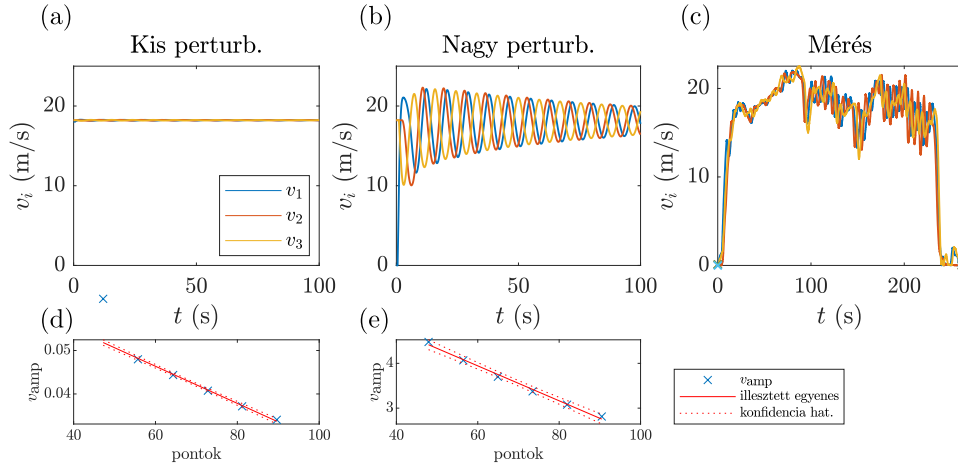


10. ábra. Stabil egyensúlyi hely a 8(a) ábra B pontjának megfelelően $\kappa = 0.8$ (1/s) és $h^* = 10$ (m) paraméterek esetén. (a) alábrán szimuláció, kis perturbációnál (d) alábrán az amplitúdók trendje, (b) szimuláció, nagy perturbációnál (e) alábrán az amplitúdók trendje, (c) alábrán a mérés időjelei vannak ábrázolva.

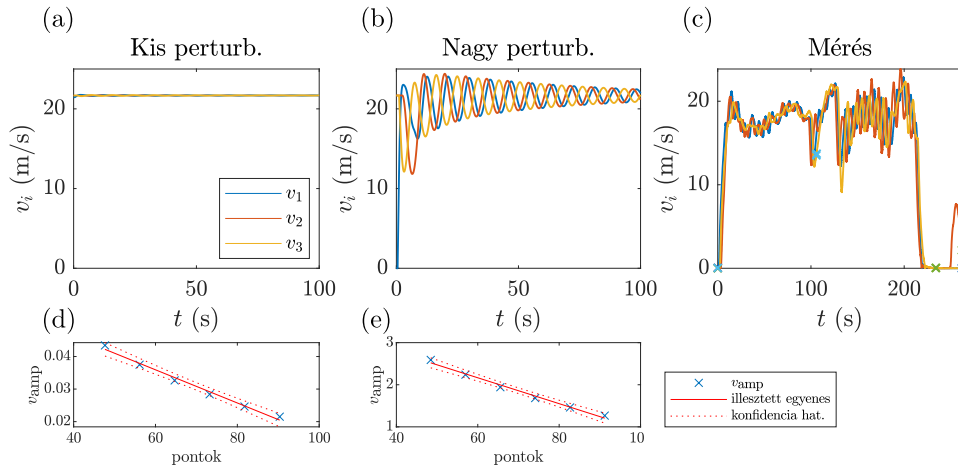


11. ábra. Stabil egyensúlyi hely a 8(a) ábra C pontjának megfelelően $\kappa = 0.8$ (1/s) és $h^* = 15$ (m) paraméterek esetén. (a) alábrán szimuláció, kis perturbációnál (d) alábrán az amplitúdók trendje, (b) szimuláció, nagy perturbációnál (e) alábrán az amplitúdók trendje, (c) alábrán a mérés időjelei vannak ábrázolva.

tartományt kapunk, úgy érdemes az SD-DDE rendszert a paraméterterben alaposabban feltérképezni. A modellben szereplő paraméterek közül a κ technológiai paraméter, amit tetszőlegesen lehet hangolni az önvezető jármű beállítása során. Az egyensúlyi követési távolság h^* geometriai paraméter a vizsgált útszakasz és a járművek hosszából kiadódik. Az emberek viselkedésének leírására négy paraméter szolgál (lásd. 4), melyek további hangolásával a 14. ábrán található bifurkációs diagramokat kapjuk. Az eredményekből látható, hogy az SD-DDE rendszer kva-



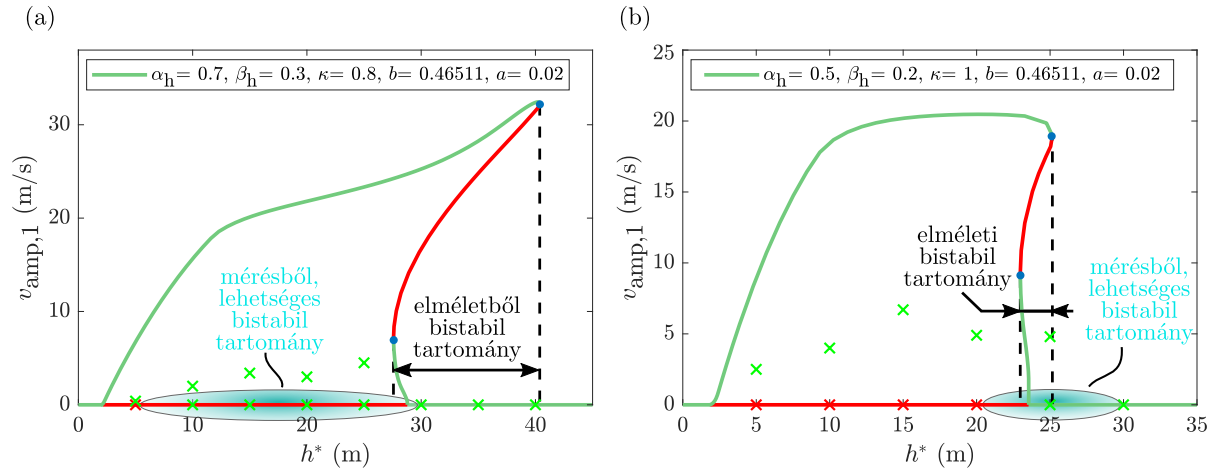
12. ábra. Stabil egyensúlyi hely a 8(a) ábra D pontjának megfelelően $\kappa = 0.8$ (1/s) és $h^* = 20$ (m) paraméterek esetén. (a) alábrán szimuláció, kis perturbációnál (d) alábrán az amplitúdók trendje, (b) szimuláció, nagy perturbációnál (e) alábrán az amplitúdók trendje, (c) alábrán a mérés időjelei vannak ábrázolva.



13. ábra. Stabil egyensúlyi hely a 8(a) ábra E pontjának megfelelően $\kappa = 0.8$ (1/s) és $h^* = 25$ (m) paraméterek esetén. (a) alábrán szimuláció, kis perturbációnál (d) alábrán az amplitúdók trendje, (b) szimuláció, nagy perturbációnál (e) alábrán az amplitúdók trendje, (c) alábrán a mérés időjelei vannak ábrázolva.

litatív képes a méréshez hasonlóan jelentősen nagy bistabil paraméter tartományt produkálni. Fontos azonban megjegyezni, hogy a paraméter hangolások esetén más értékeknél lineáris és nemlineáris szempontból sem kapunk jó eredményeket. A (b) ábra esetében a modell jellegre jól visszaadja a mérés során látottakat. A feldolgozott adatoknak megfelelő, $h^* = 25$ m helyen mutat bistabil viselkedést és a tartomány kiterjedése is összhangban van velük. Azonban a periodikus pályák amplitúdója jóval nagyobb a mérésből következő értékeknél. Megvizsgálva

(a) ábrát, igen nagy kiterjedésű bistabil tartományt kapunk. Azonban ekkor a lineáris stabilitás nem egyezik meg a méréssel és a periodikus pálya amplitúdója sokszorosa a valódinak. Mégis, ugyan eltolva, de a rendszer képes a mérés által feltételezett bistabil tartománnyal összemérhető nagyságút előállítani. Lényeges kiemelni, hogy erre a konstans időkézésű modell semmilyen paraméter hangolásánál sem volt képes.



14. ábra. Bifurkációs diagram, az állapotfüggő időkézés hangolt paramétereinek esetén, az (a) alábbi $\kappa = 0.8$ (1/s) paraméternél megjelenő nagy kiterjedésű bistabil tartomány, a (b) alábbi $\kappa = 1$ (1/s) paraméternél a méréssel összhangban lévő bistabil tartomány.

4. Összefoglalás

A dolgozat során bemutattuk az emberi váltakozó reakcióidőt realizisztikusabban modellező állapotfüggő időkézést. Szót ejtettünk a szakirodalomban fellelhető emberi reakcióidőre vonatkozó ismeretekről, majd ezek alapján felállítottunk egy megfelelő, állapotfüggő időkézést tartalmazó késleltetett differenciálegyenlet-rendszerrel felírt modellt. Összehasonlítottuk a közúton végzett mérési adatokkal és a konstans időkézésű modellel, bemutatva a lineáris stabilitási térképeket és nemlineáris vizsgálatok során kapott bifurkációs diagramokat, végül numerikus szimulációt is végeztünk a modellel. Sikerült olyan, az embereket leíró paraméter értékeket meghatározni, amelyek esetén pontos egyezést mutat az elméleti modell a mérési eredményekkel. Ráadásul így a kontroll paraméterekre és az időkézésre is realizisztikus értékeket kaptunk, amelyek megfelelnek az emberi sofőrök viselkedésére vonatkozó előzetes ismereteinknek. Az így kapott eredmények minőségi ugrást jelentenek a korábban konstans időkézést feltételező modellhez képest, amely kvalitatíve sem volt képes illeszkedni az adatokra, mindössze egy-egy mérési pont eredményét tudta visszaadni. Ezzel szemben a dolgozatban bemutatott SD-DDE rendszer a lineáris stabilitást tökéletesen, kvantitatíve is minden pontban visszaadta és a nemlineáris tulajdonságokat is trend szerűen jól modellezte. Mindezek megalapozzák az állapotfüggő időkézés létjogosultságát

az emberi időkésés realisztikusabb modellezésének érdekében. Érdemes tehát a jövőben a egyes forgalmi szituációk modellezését az általunk javasolt, kiterjesztett állapotfüggő időkésésű járműkövető modellel vizsgálni.

4.1. Tovább lépési lehetőségek

A dolgozatban vizsgált SD-DDE rendszer a nemlineáris vizsgálatok során nem minden pontban felelt meg a mérési adatoknak. A dolgozat során több elhanyagolással is élünk, így a jövőben a pontosabb modellezés érdekében érdemes lehet a rendszert implicit időkéséssel vizsgálni. Ezen kívül szintén elhanyagoltuk a gyorsulás szaturáció és a "speed policy" kapcsolófüggvényeket. Ezen nemlineáris függvények figyelembevételével, vélhetően még realisztikusabb eredményeket lehetne kapni.

A mérési adatokból meghatározott optimális sebesség függvények és paramétereik nagy bizonytalanságot mutattak. Ennek orvoslása érdekében érdemes lenne a közúti méréseket több mérési pontban, nagyobb felbontás mellett is elvégezni. Így lehetőség lenne nemcsak az emberi kontroll paraméterek, hanem az optimális sebesség függvény jobb illesztésére is. Továbbá az elméleti modellel számított lineáris stabilitási térképet és a nemlineáris bifurkációs diagramot is pontosabban lehetne illeszteni a nagyobb felbontású mérési adatok segítségével.

A 3.3 fejezetben új meglátással élünk, miszerint a mérési adatok alapján feltételezett bistabil tartomány valójában globálisan stabil. A periodikus pályákhoz hasonlatos nagy amplitúdójú rezgések pedig a rendszer kis csillapításából következnek és kellően hosszú mérés után lecsengenek. A mérési adatokat úgynevezett "simulation-in-the-loop" számításban felhasználva lehetőség nyílna ennek a feltételezésének az alaposabb vizsgálatára. Ennek során a CAV mért pozícióját és sebességét az SD-DDE modellben előírva meg lehetne vizsgálni, hogy mennyire korrelálnak a HV-k mért és az ilyen módon szimulált eredményei.

Hosszútávú terveink közé tartozik az állapotfüggő időkésésű modell nagyobb mintán való vizsgálata, a modell validációja, a lejátszódó folyamatok alaposabb megértése, és az egyéb időkésést befolyásoló tényezők vizsgálatának érdekében.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozunk Stépán Gábornak a TDK dolgozat legfontosabb alapgondolataként szolgáló ötletéért, hogy az állapotfüggő időkésést vezessünk be a járműkövető modellbe. Az eredményeket tekintve ez meglehetősen jó megérzésnek bizonyult.

Köszönettel tartozunk Orosz Gábornak, hogy a szakdolgozat elméleti eredményeit látva felhívta a figyelmünket a mérés során tapasztalt bistabil tartományra és rendelkezésünkre bocsátotta az adatokat.

Hálás köszönettel tartozom Kiss Ádámnak a több éve tartó gyümölcsöző együttműködésért. Köszönöm neki a rám szánt rengeteg időt, sok segítséget és útmutatást, amit a konzulensemként nyújtott.

Végezetül, köszönetet mondok feleségemnek Blankának, akire mindig számíthattam, köszönöm a támogatásod és bátorításod, ami nélkül nem ment volna.

Hivatkozások

- [1] M. Wang, W. Daamen, S. P. Hoogendoorn, B. van Arem, Rolling horizon control framework for driver assistance systems. part i: Mathematical formulation and non-cooperative systems, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 40 (2014) 271–289. doi:10.1016/j.trc.2013.11.023.
- [2] M. Wang, W. Daamen, S. P. Hoogendoorn, B. van Arem, Rolling horizon control framework for driver assistance systems. part ii: Cooperative sensing and cooperative control, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 40 (2014) 290–311. doi:10.1016/j.trc.2013.11.024.
- [3] G. Orosz, Connected cruise control: modelling, delay effects, and nonlinear behaviour, *Vehicle System Dynamics* 54 (8) (2016) 1147–1176. doi:10.1080/00423114.2016.1193209.
- [4] T. Ersal, I. Kolmanovsky, N. Masoud, N. Ozay, J. Scruggs, R. Vasudevan, G. Orosz, Connected and automated road vehicles: state of the art and future challenges, *Vehicle System Dynamics* 58 (5) (2020) 672–704. doi:10.1080/00423114.2020.1741652.
- [5] E. Van Nunen, J. Reinders, E. Semsar-Kazerooni, N. Van De Wouw, String stable model predictive cooperative adaptive cruise control for heterogeneous platoons, *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles* 4 (2) (2019) 186–196. doi:10.1109/TIV.2019.2904418.
- [6] SAE J3216 (2021), Taxonomy and Definitions for Terms Related to Cooperative Driving Automation for On-Road Motor Vehicles. doi:10.4271/j3216_202107.
- [7] SAE J2735 (2020), V2X Communications Message Set Dictionary. doi:10.4271/J2735_202007.
- [8] H. Jiang, J. Hu, S. An, M. Wang, B. B. Park, Eco approaching at an isolated signalized intersection under partially connected and automated vehicles environment, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 79 (2017) 290–307. doi:10.1016/j.trc.2017.04.001.
- [9] C. R. He, H. Maurer, G. Orosz, Fuel Consumption Optimization of Heavy-Duty Vehicles With Grade, Wind, and Traffic Information, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 11 (6), 061011 (07 2016). doi:10.1115/1.4033895.
- [10] D. Liu, B. Besselink, S. Baldi, W. Yu, H. L. Trentelman, On structural and safety properties of head-to-tail string stability in mixed platoons, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* (2022) 1–13doi:10.1109/TITS.2022.3151929.

- [11] A. D. Ames, J. W. Grizzle, P. Tabuada, Control barrier function based quadratic programs with application to adaptive cruise control, in: 53rd IEEE Conference on Decision and Control, 2014, pp. 6271–6278. doi:10.1109/CDC.2014.7040372.
- [12] C. R. He, G. Orosz, Safety guaranteed connected cruise control, in: 21st IEEE International Conference on Intelligent Transportation Systems, 2018, pp. 549–554. doi:10.1109/ITSC.2018.8569979.
- [13] T. G. Molnar, A. K. Kiss, A. D. Ames, G. Orosz, Safety-critical control with input delay in dynamic environment, IEEE Transactions on Control Systems Technology (2021). doi:10.48550/arXiv.2112.08445.
- [14] T. G. Molnar, A. Alan, A. K. Kiss, G. Orosz, Input-to-state safety with input delay in longitudinal vehicle control, 17th IFAC Workshop on Time Delay Systems (2022). doi:10.48550/arXiv.2205.14567.
- [15] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama, Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation, Physical Review E 51 (1995) 1035–1042. doi:10.1103/PhysRevE.51.1035.
- [16] H. von Allwörden, I. Gasser, On a general class of solutions for an optimal velocity model on an infinite lane, Transportmetrica A: Transport Science 17 (3) (2021) 258–277. doi:10.1080/23249935.2020.1778813.
- [17] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, Analysis of optimal velocity model with explicit delay, Physical Review E 58 (5) (1998) 5429.
- [18] G. Orosz, R. E. Wilson, G. Stépán, Traffic jams: dynamics and control, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 368 (1928) (2010) 4455–4479. doi:10.1098/rsta.2010.0205.
- [19] J. Wang, Y. Zheng, Q. Xu, J. Wang, K. Li, Controllability analysis and optimal control of mixed traffic flow with human-driven and autonomous vehicles, IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems PP (2020) 1–15. doi:10.1109/TITS.2020.3002965.
- [20] T. G. Molnar, M. Hopka, D. Upadhyay, M. Van Nieuwstadt, G. Orosz, Virtual rings on highways: Traffic control by connected automated vehicles (2022). doi:10.48550/ARXIV.2204.11177.
- [21] J. I. Ge, S. S. Avedisov, C. R. He, W. B. Qin, M. Sadeghpour, G. Orosz, Experimental validation of connected automated vehicle design among human-driven vehicles, Transportation Research Part C: Emerging Technologies 91 (2018) 335–352. doi:10.1016/j.trc.2018.04.005.

- [22] R. E. Stern, S. Cui, M. L. Delle Monache, R. Bhadani, M. Bunting, M. Churchill, N. Hamilton, H. Pohlmann, F. Wu, B. Piccoli, et al., Dissipation of stop-and-go waves via control of autonomous vehicles: Field experiments, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 89 (2018) 205–221. doi:10.1016/j.trc.2018.02.005.
- [23] S. S. Avedisov, G. Bansal, A. K. Kiss, G. Orosz, Experimental verification platform for connected vehicle networks, in: 2018 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), IEEE, 2018, pp. 818–823. doi:10.1109/ITSC.2018.8569520.
- [24] V. Giammarino, S. Baldi, P. Frasca, M. L. Delle Monache, Traffic flow on a ring with a single autonomous vehicle: An interconnected stability perspective, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems PP* (2020) 1–11. doi:10.1109/TITS.2020.2985680.
- [25] S. Cui, B. Seibold, R. Stern, D. B. Work, Stabilizing traffic flow via a single autonomous vehicle: Possibilities and limitations, in: 2017 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV), 2017, pp. 1336–1341. doi:10.1109/IVS.2017.7995897.
- [26] S. E. Li, Y. Zheng, K. Li, Y. Wu, J. K. Hedrick, F. Gao, H. Zhang, Dynamical modeling and distributed control of connected and automated vehicles: Challenges and opportunities, *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine* 9 (3) (2017) 46–58. doi:10.1109/MITS.2017.2709781.
- [27] W. B. Qin, G. Orosz, Experimental validation of string stability for connected vehicles subject to information delay, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 28 (4) (2020) 1203–1217. doi:10.1109/TCST.2019.2900609.
- [28] J. Ploeg, B. T. Scheepers, E. Van Nunen, N. Van de Wouw, H. Nijmeijer, Design and experimental evaluation of cooperative adaptive cruise control, in: 2011 14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2011, pp. 260–265. doi:10.1109/ITSC.2011.6082981.
- [29] Y. Zhou, S. Ahn, M. Wang, S. Hoogendoorn, Stabilizing mixed vehicular platoons with connected automated vehicles: An h-infinity approach, *Transportation Research Part B: Methodological* 132 (2020) 152–170, 23rd International Symposium on Transportation and Traffic Theory (ISTTT 23). doi:10.1016/j.trb.2019.06.005.
- [30] M. Green, "how long does it take to stop?" methodological analysis of driver perception-brake times, *Transportation Human Factors* 2 (2000) 195–216. doi:10.1207/STHF0203_1.
- [31] G. Meleghe, *Gépjárműszakértés*, 2004.

- [32] R. Sipahi, F. M. Atay, S.-I. Niculescu, Stability of traffic flow behavior with distributed delays modeling the memory effects of the drivers, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 68 (3) (2008) 738–759. doi:10.1137/060673813.
- [33] J. I. Ge, G. Orosz, Optimal control of connected vehicle systems with communication delay and driver reaction time, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 18 (8) (2017) 2056–2070. doi:10.1109/TITS.2016.2633164.
- [34] S. Beregi, S. S. Avedisov, C. R. He, D. Takacs, G. Orosz, Connectivity-based delay-tolerant control of automated vehicles: theory and experiments, *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles* (2021) 1–1doi:10.1109/TIV.2021.3131957.
- [35] F. Hartung, J. Turi, On differentiability of solutions with respect to parameters in state-dependent delay equations, *journal of differential equations* 135 (2) (1997) 192–237.
- [36] F. Hartung, T. Krisztin, H.-O. Walther, J. Wu, Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications, *Handbook of differential equations: ordinary differential equations* 3 (2006) 435–545.
- [37] F. Hartung, On differentiability of solutions with respect to parameters in neutral differential equations with state-dependent delays, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 192 (1) (2011) 17–47. doi:10.1007/s10231-011-0210-5.
- [38] T. Insperger, G. Stépán, J. Turi, State-dependent delay in regenerative turning processes, *Nonlinear Dynamics* 47 (1-3) (2006) 275–283. doi:10.1007/s11071-006-9068-2.
- [39] T. Insperger, D. A. Barton, G. Stépán, Criticality of hopf bifurcation in state-dependent delay model of turning processes, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 43 (2) (2008) 140–149.
- [40] D. Bachrathy, G. Stépán, J. Turi, State Dependent Regenerative Effect in Milling Processes, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 6 (4), 041002 (03 2011). doi:10.1115/1.4003624.
URL <https://doi.org/10.1115/1.4003624>
- [41] K. Martinovich, Követési távolságtól függő reakcióidő hatása a járműkövető modellre, Szakdolgozat, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (2021).
- [42] K. Martinovich, A. K. Kiss, Nonlinear effects of saturation in the car-following model, *Nonlinear Dynamics* (Oct. 2022). doi:10.1007/s11071-022-07951-0.
- [43] G. Stépán, Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions, Longman Scientific & Technical, 1989.

- [44] G. Stépán, Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions, Longman, UK, 1989.
- [45] T. Insperger, G. Stépán, Semi-Discretization for Time-Delay Systems: Stability and Engineering Applications, Springer, 2011.
- [46] D. Bachrathy, G. Stépán, Bisection method in higher dimensions and the efficiency number, Periodica Polytechnica Mechanical Engineering 56 (2) (2012) 81–86. doi:10.3311/pp.me.2012-2.01.
- [47] K. Engelborghs, T. Luzyanina, D. Roose, Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-biftool, ACM Transactions on Mathematical Software 28 (1) (2002) 1–21. doi:10.1145/513001.513002.
- [48] J. Sieber, K. Engelborghs, T. Luzyanina, G. Samaey, D. Roose, DDE-Biftool manual - bifurcation analysis of delay differential equations, Tech. rep. (2014). doi:10.48550/arXiv.1406.7144.
- [49] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer, New York, 1983. doi:10.1115/1.3167759.
- [50] Y. A. Kuznetsov, Elements of applied bifurcation theory, Vol. 112, Springer Science & Business Media, 2013.
- [51] S. A. Campbell, Calculating centre manifolds for delay differential equations using maple, in: Delay differential equations, Springer, 2009, pp. 1–24. doi:10.1007/978-0-387-85595-0_8.
- [52] T. Kalmár-Nagy, G. Stépán, F. C. Moon, Subcritical hopf bifurcation in the delay equation model for machine tool vibrations, Nonlinear Dynamics 26 (2) (2001) 121–142. doi:10.1023/A:1012990608060.
- [53] G. Orosz, G. Stépán, Subcritical hopf bifurcations in a car-following model with reaction-time delay, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 462 (2073) (2006) 2643–2670. doi:10.1098/rspa.2006.1660.
- [54] Z. Dombovari, R. E. Wilson, G. Stepan, Estimates of the bistable region in metal cutting, P Roy Soc A Math Phy 464 (2008) 3255–3271. doi:10.1098/rspa.2008.0156.
- [55] T. G. Molnar, Z. Dombovari, T. Insperger, G. Stepan, On the analysis of the double hopf bifurcation in machining processes via centre manifold reduction, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 473 (2207) (2017) 20170502. doi:10.1098/rspa.2017.0502.

- [56] B. Szaksz, G. Stépán, Delay-induced bifurcations in collocated position control of an elastic arm, *Nonlinear Dynamics* 107 (2022). doi : 10.1007/s11071-021-06812-6.
- [57] G. Haller, S. Ponsioen, Nonlinear normal modes and spectral submanifolds: existence, uniqueness and use in model reduction, *Nonlinear dynamics* 86 (3) (2016) 1493–1534. doi : 10.1007/s11071-016-2974-z.
- [58] M. Sirák, Forgalmodynamikai modell globális vizsgálata és validációja mérés alapján, TDK dolgozat, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (2019).
- [59] A. K. Kiss, S. S. Avedisov, D. Bachrathy, G. Orosz, On the global dynamics of connected vehicle systems, *Nonlinear Dynamics* 96 (3) (2019) 1865–1877. doi : 10.1007/s11071-019-04889-8.
- [60] E. Buckwar, R. Kuske, B. L’esperance, T. Soo, Noise-sensitivity in machine tool vibrations, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 16 (08) (2006) 2407–2416.
- [61] D. Bachrathy, H. T. Sykora, D. Hajdu, B. Beri, G. Stepan, Why is it hard to identify the onset of chatter? a stochastic resonance perspective, *CIRP Annals* 70 (1) (2021) 329–332.