



Nagyhatékonyságú numerikus módszer fejlesztése mechatronikai rendszerek stabilitásvizsgálatához

HABA TAMÁS

Mechatronikai mérnöki MSc hallgató

Témavezető:

DR. BUDAI CSABA

adjunktus

Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék

TDK dolgozat

2022

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
2. Mintavételes rendszerek modellezése	7
2.1. A pozíciószabályozás alapmodellje	7
2.2. A digitális szabályozás jellemzői	8
2.2.1. Kvantálás hatásai	9
2.2.2. Mintavételezés hatásai	11
2.3. A száraz súrlódás hatásai	14
2.3.1. Fontosabb disszipációs jelenségek	14
2.3.2. A Coulomb súrlódási modell	16
2.3.3. Nemsima dinamikai hatások modellezése	16
2.4. A mintavételezés és a Coulomb-súrlódás együttes hatásai	19
2.4.1. Szakaszosan folytonos megoldások	19
2.4.2. A trajektóriák egyenlete	20
2.4.3. Coulomb-súrlódás okozta Filippov-dinamika	21
2.4.4. Diszkrét idejű modell	24
3. Stabilitásvizsgálat	33
3.1. Analitikus megközelítés	33
3.2. Szimulációs megközelítés	39
3.2.1. Escape-time algoritmus	39
3.2.2. Numerikus stabilitásvizsgálat	41
4. Optimalizálási módszerek	45
4.1. Szimulációk párhuzamosítása GPU-val	45
4.1.1. Az OpenCL keretrendszer	45
4.1.2. Implementáció	46
4.2. Mezők adaptív felosztása	47
4.3. Marching squares algoritmus	49
4.4. Párhuzamos adaptív marching squares algoritmus	51

5. Kísérleti eredmények	53
5.1. Paraméteridentifikáció	54
5.2. Mérési eredmények	55
6. Összefoglalás	57
7. Felhasznált irodalom	59

1. Bevezetés

A mechatronika egyik fő célja a pozíciószabályozás, mely során egy objektumot egy előírt helyzetbe kell eljuttatni, vagy egy adott pályán kell mozgatni. Ilyen feladatok egyaránt megjelennek a robotikában [1–3], haptikus eszközökben [4–7] és a mérnöki tevékenység számos egyéb területén.

A mechatronikai rendszerek fő jellemzője, hogy integráltan jelennek meg bennük a mechanikai rendszerek, a különféle villamos eszközök (szenzorok, aktuátorok), valamint a számítógépes jelfeldolgozás és irányítás eszközei. Ennek eredményeként mintavételes rendszerek jönnek létre, melyekben az irányított rendszer folytonos idejű, míg a szabályozó diszkrét időben írható le [8–10].

Minden szabályozási rendszerben, így a pozíciószabályozásban is a legfontosabb tervezési kritérium a stabilitás, ami azt biztosítja, hogy a működés során kialakuló lengések korlátosak legyenek és lecsengjenek. A szabályozók digitális megvalósítása során időkésés jelenik meg, ami stabilitási problémákat okoz [1, 9, 11].

Mintavételes rendszerek stabilitásvizsgálatra különféle módszerek alkalmazhatók [12–14], azonban ezek többsége lineáris rendszerekre vonatkozik. A száraz súrlódás nemlineáris jellegéből adódóan nem vehető figyelembe ezen módszerekkel, ezért a legtöbb esetben elhanyagolásra kerül, ami így pontatlan eredményekhez vezethet.

A száraz súrlódás és a mintavételezés együttes hatásainak precíz matematikai leírása problematikus, csak közelítő módszerekkel tehető meg [15, 16]. A stabilitásvizsgálat egyik alternatív megközelítése egzakt szimulációk futtatásán alapszik. Azonban egy kiterjedt paramétertartományon belül a stabil működést biztosító zónák azonosításához szimulációk sokaságát kell elvégezni, ami a nagy számítási igény miatt nem tehető meg hatékonyan.

Jelen dolgozat fókuszában a mintavételezés és a száraz súrlódás hatásainak vizsgálata áll, különös tekintettel a mechatronikai rendszerek stabilitására. A fő célkitűzés egy olyan numerikus módszer implementálása és bemutatása, ami mindamellett, hogy a száraz súrlódás és a mintavételezés hatásait precízen képes figyelembe venni, nagy hatékonysággal futtatható különféle optimalizálási módszereknek köszönhetően.

A dolgozat felépítése a következő: A 2. fejezet a vizsgált rendszer modelljét mutatja be és a szimulációk megvalósításához szükséges levezetéseket. A 3. fejezetben a stabilitásvizsgálat különféle megközelítései kerülnek bemutatásra, valamint a dolgozat fő célkitűzésében szereplő numerikus módszer, melynek optimalizálási lehetőségeit a 4. fejezet tárgyalja. A kapott eredményeket az 5. fejezetben leírt mérések igazolják, végül a 6. fejezet röviden összefoglalja a munkát.

2. Mintavételes rendszerek modellezése

Egy mechatronikai alkalmazásban kulcsfontosságú szerepet kapnak a mintavételes rendszerek. Az ilyen rendszerek közös jellemzője az, hogy egy valós fizikai folyamat felügyeletét vagy irányítását egy digitális alrendszer végzi. Ebből kifolyólag a rendszerben egyaránt megjelennek a valós fizikai alrendszerhez tartozó *analóg* mennyiségek, és az irányításhoz kapcsolódó *digitális* jelek. A továbbiakban a pozíciószabályozás példáján kerül bemutatásra a mintavételes rendszerek modellezésének főbb kihívásai és megközelítései.

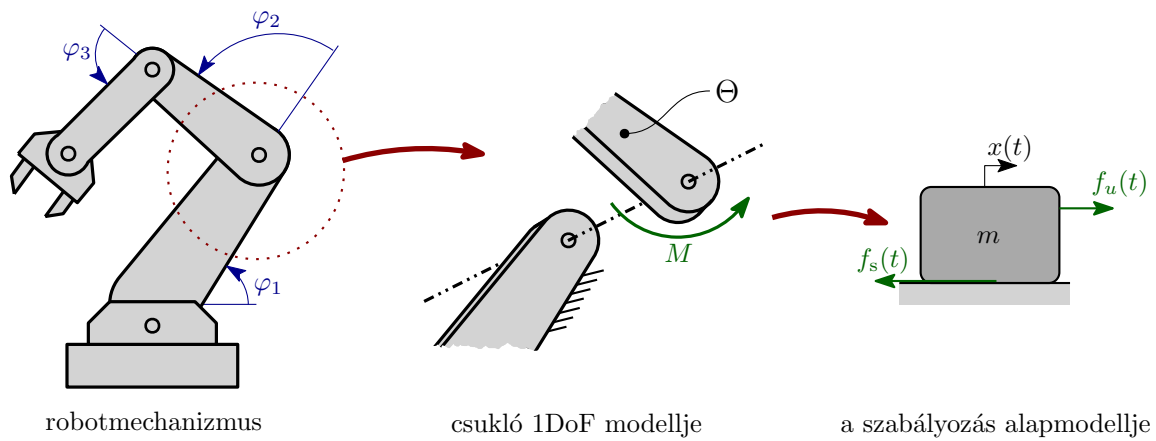
2.1. A pozíciószabályozás alapmodellje

A pozíciószabályozás célja egy adott objektum előírt pályán történő, vagy egy célhelyzetbe való mozgatása. Jellemzően robotikai alkalmazásokban, gépgyártástechnológiában illetve különféle haptikus eszközök területén kap kiemelt jelentőséget.

Leggyakoribb esetben összetett, több szabadsági fokú mechanizmusok alkotják a szabályozott rendszert, például egy robotmechanizmus, ahogy azt a 2.1. ábra is illusztrálja. A vázolt rendszer kinematikája a $\varphi_{1,2,3}$ csuklásszögekkel, mint független változókkal írható le. Két kinematikai tagot kiemelve és az egyiket rögzítve elkészíthető a csukló hajtásának egyszerű, egy szabadsági fokú modellje.

Ebben a modellben a Θ tehetetlenségi nyomatékú tag meghajtását az M koncentrált nyomaték végzi. A modell tovább egyszerűsíthető a zavaró hatások elhanyagolásával egy egyenértékű translációs rendszert feltételezve, melyben egy m tömegű testet a villamos hajtásból eredő f_u beavatkozó erő mozgat, valamint a súrlódási hatások figyelembe vehetők az f_s erőn keresztül.

Ezáltal az egy szabadsági fokú translációs rendszer a továbbiakban demonstratív eszközként fog szolgálni a pozíciószabályozás főbb modellezési kihívásainak bemutatásában és a kapcsolódó alapjelenségek elemzésében.



2.1. ábra. A robotmechanizmus redukált, egy szabadsági fokú modellje.

A kiindulási dinamikai modell a mozgásegyenlet felírásával kapható meg az alábbi módon

$$m \cdot \ddot{x}(t) = f_u(t) - f_s(t) \quad (2.1)$$

ahol $x(t)$ a test kitérése, azaz a kívánt cél pozíciótól való eltérése. Ebben a dinamikai modellben az f_u beavatkozó erő és az f_s súrlódási erő még nincs specifikálva, ezen jelenségek modellezésének legfontosabb megközelítései a továbbiakban kerülnek tárgyalásra.

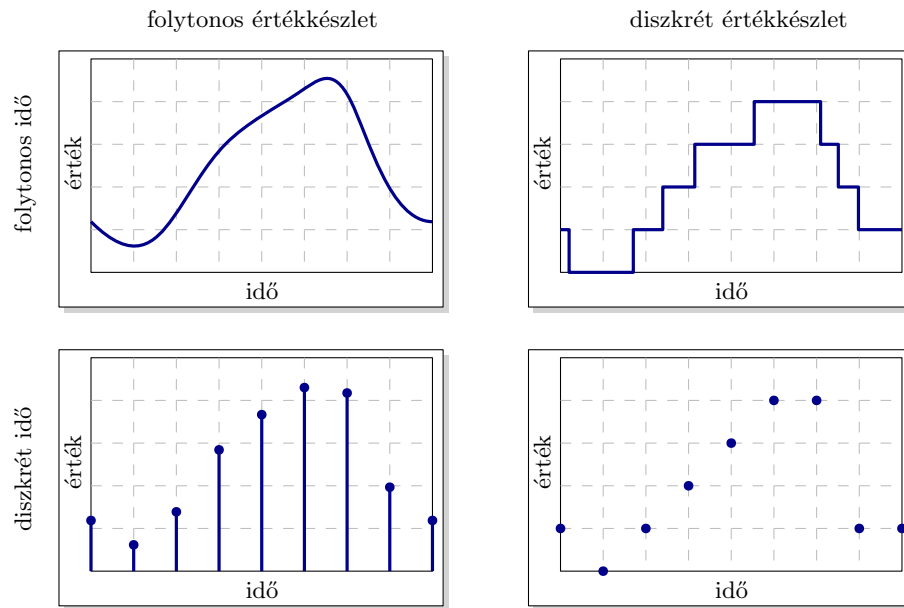
2.2. A digitális szabályozás jellemzői

Vizsgáljuk elsőként az alapmodell (2.1) egyenletében szereplő f_u beavatkozó erőt, amelyet a szabályozó rendszer állít elő. Napjainkban a szabályozás szinte kizárólag digitális módon kerül megvalósításra, ebből kifolyólag kulcsfontosságú szerepet kapnak a digitális jelek jellemzői.

A jelek osztályozásának egyik legfontosabb aspektusa a folytonosság, ami egyrészt időben, másrészt értékkészletben (térben) is értelmezhető. Az időbeli diszkrétizálást *mintavételezésnek*, a térbeli diszkrétizálást *kvantálásnak* nevezzük.

Ezek alapján négy csoport különböztethető meg, ahogy azt a 2.2. ábra is illusztrálja. Ebből kiemelt szerepet játszik az időben és értékkészletben is folytonos jelek csoportja, ezek az analóg jelek, melyek jellemzően valós fizikai mennyiségeket reprezentálnak.

Ezzel szemben a másik legfontosabb csoportot az időben és értékkészletben is diszkrét jelek alkotják, melyeket digitális jeleknek nevezünk. A számítógépes irányítás hardveres eszközei és szoftveres algoritmusai kizárólag digitális jelek feldolgozására



2.2. ábra. Időbeli és értékkészletbeli diszkrétizálás hatásai.

alkalmasak, ugyanis a mikroprocesszorok fizikai megvalósítása magában hordozza a jelek időbeli és térbeli reprezentálásának korlátait.

2.2.1. Kvantálás hatásai

Az értékkészlet szerinti diszkrétizálás, azaz a kvantálás miéértje digitális jelek esetén a számábrázolásban keresendő. Egy mikroprocesszor műveletvégző egysége, az aritmetikai és logikai egység (ALU) egy logikai áramkör, ami bináris számokon képes alapl műveleteket végrehajtani. A bitek, azaz a kettes számrendszerbeli számjegyek száma korlátozott, így a számábrázolás véges tartományon és véges pontossággal történik. A kvantálásra kerülő jel

$$x(t) \in [0 \quad V_{\text{ref}}) \quad (2.2)$$

tartományon vehet fel értékeket, ahol V_{ref} azt a referencia értéket jelöli, ami ideális esetben a kvantálandó jel felső korlátja. Ha a számábrázolás N darab biten történik, úgy 2^N különböző digitális érték különböztethető meg. A bemenő jel intervallumát egyenlő részekre osztva megkapható a legalacsonyabb helyiértékű bit (least significant bit, LSB) értéke az alábbiak szerint:

$$LSB = \frac{V_{\text{ref}}}{2^N}. \quad (2.3)$$

Ez az érték egyfelől a legkisebb, nullától különböző jelszintet mutatja, másrészt a teljes tartományon a legkisebb megkülönböztethető jelszintkülönbséget is. Figyelembe véve, hogy az N biten ábrázolható legnagyobb bináris érték $2^N - 1$, meghatározható a teljes

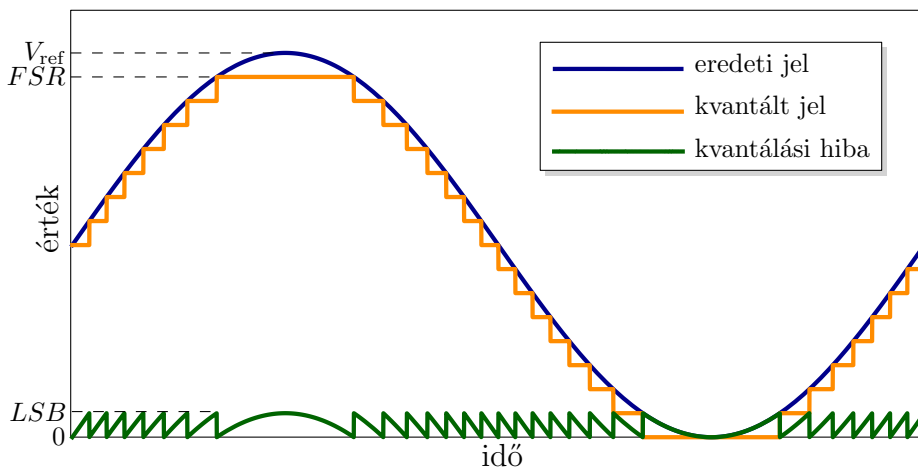
értéktartomány (full scale range, FSR) az alábbiak szerint

$$FSR = LSB \cdot (2^N - 1) = V_{\text{ref}} \cdot (1 - 2^{-N}), \quad (2.4)$$

amiből jól látszik, hogy a maximális referenciaérték már nem ábrázolható, mert ahhoz már szükség lenne az $N + 1$ -edik bitre is. A kvantálás matematikailag leírható az alábbi formula szerint

$$x_Q(t) = \left\lfloor \frac{x(t)}{LSB} \right\rfloor \cdot LSB \quad (2.5)$$

ahol $\lfloor \cdot \rfloor$ a floor vagy padlófüggvényt jelöli, amely minden valós számhoz a legnagyobb nála kisebb egész számot rendeli. A kvantálás hatásait és az előbbieken bemutatott jellemzőket a 2.3. ábra szemlélteti.



2.3. ábra. A kvantálás hatásai és a kvantálási hiba $N = 4$ bites számbábrázolás esetén egy szinuszjelen.

A kvantálás ugyan precízen leírható matematikailag a (2.5) egyenlet alapján, de a nemlineáris és nem folytonos jellege miatt dinamikai rendszerekben való modellezése problémákhoz vezet. Erre egy lehetséges megoldást jelent, ha a dinamikai modellekben a jelek folytonos értékkészlettel szerepelnek, viszont a 2.3. ábrán is szereplő kvantálási hiba külső zajforrásként, úgynevezett *kvantálási zajként* szerepel.

A kvantálási zaj jól meghatározott módon a $[0 \text{ LSB})$ intervallumon vesz fel értéket és általában jól modellezhető egyenletes eloszlással. Amennyiben a hasznos jel csúcserőssége V_{ref} , úgy a jel-zaj arány (signal-to-noise ratio, SNR) az alábbi módon számítható

$$SNR = 20 \cdot \log \left(\frac{V_{\text{ref}}}{LSB} \right) = 20 \cdot \log(2^N), \quad (2.6)$$

ami a logaritmus azonosságait felhasználva tovább egyszerűsíthető az

$$SNR = N \cdot 6,02 \text{ dB} \quad (2.7)$$

alakra. Fontos megjegyezni, hogy a jel-zaj arányt ehhez képest nagy mértékben ronthatja, ha nincs kihasználva a teljes $[0 V_{ref})$ bemeneti jeltartomány, így erre különös tekintettel kell lenni a mérés technikai eszközök méretezésénél.

A napjainkban széles körben elérhető digitális eszközök mellett jellemzően a kvantálási zaj nem okoz jelentős problémát. Egy 32 bites egész típusú változó esetén a jel-zaj arány (2.7) alapján 192,64 dB, ami mellett már elhanyagolható a kvantálási zaj. Ha például egy 1 méter hosszúságú útdő szenzor jelét ábrázoljuk 32 biten, akkor a kvantálási hiba csúcsértéke $1/2^{32}$ méter, ami körülbelül 0,23 nanométer. Természetesen ezen a tartományon már inkább a szenzor és az analóg-digitális átalakító felbontása jelent korlátot, azonban jól látszik, hogy maga a számábrázolás kellően pontos számítások elvégzését teszi lehetővé.

Bizonyos esetekben mégis szükség lehet további szűrésre és jelkondicionálásra, ugyanis a kvantálási zaj felerősödhet, például numerikus differenciálás következtében. A továbbiakban azonban ezen hatások elhanyagolásra kerülnek, mert a gyakorlatban a szenzorok, analóg-digitális átalakítók és a számábrázolás felbontása jellemzően elegendően nagy.

2.2.2. Mintavételezés hatásai

Az idő szerinti diszkrétizálás során a vizsgált rendszerről csak bizonyos időközönként áll rendelkezésre új információ. Leggyakoribb esetben egyenletes τ időközönként a vizsgált jelek pillanatnyi értéke ismert. A pozíció mintavételezése felírható az alábbi alakban

$$x[k] = x(k\tau) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

ahol τ a mintavételi idő, k az időlépés száma, és az $x[k]$ jelölés a mintavételezett pozíció jelsorozataát jelenti. Tegyük fel, hogy hasonló módon lehetőség van a sebességet is mérni, így előállítható a

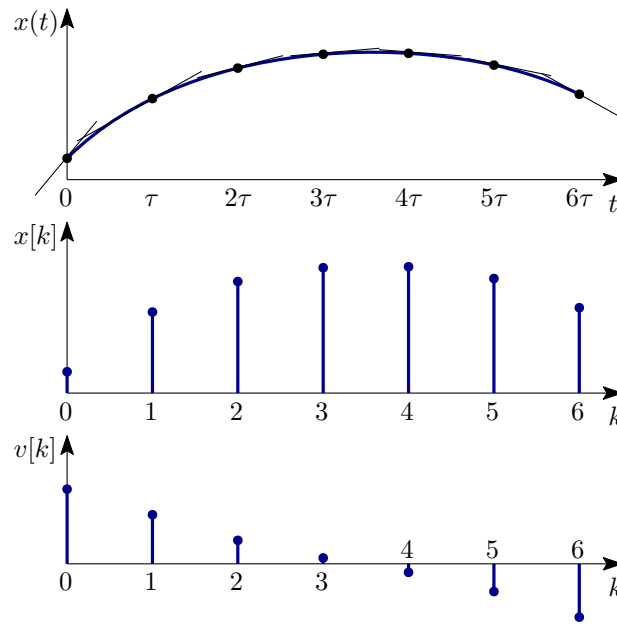
$$v[k] = \dot{x}(k\tau) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

mintavételezett sebességjel is, ahogy az a 2.4. ábrán is szemléltetésre került. Egy digitális szabályozási algoritmus számára kizárólag ezek a diszkrét idejű jelek érhetők el, és a beavatkozás mértéke is ezekből számolható.

Tekintsük az alábbi egyenlettel leírható szabályozási törvényt

$$f_u(t) = -k_p \cdot x[k] - k_d \cdot v[k] \quad k\tau \leq t < (k+1)\tau \quad (2.10)$$

amely minden mintavételi pillanathoz a pozícióval és a sebességgel arányos beavatkozó



2.4. ábra. A pozíció és a sebesség mintavételezése.

erőt számol a k_p és k_d szabályozási paramétereknek megfelelően. Két mintavételi pillanat közötti időben a beavatkozó erő állandó marad, azaz a beavatkozás *zérusrendű tartón* keresztül történik. Minden mintavételi pillanatban az új ismert pozíció és sebesség értéknek megfelelően $f_u(t)$ is új értéket vesz fel, így egy szakaszosan folytonos, lépcsős jellegű beavatkozó erő áll elő.

Amennyiben a súrlódási hatások elhanyagolhatók a pozíciószabályozási feladat modelljében, úgy a (2.1) egyenlet az

$$m \cdot \ddot{x}(t) = f_u(t) \quad (2.11)$$

alakra egyszerűsödik, melybe behelyettesítve a (2.10) egyenlettel leírt szabályozási törvényt az alábbi mozgásegyenlet adódik

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k_p \cdot x[k] - k_d \cdot v[k] \quad k\tau \leq t < (k+1)\tau, \quad (2.12)$$

mely jobb oldalon szakaszosan állandó, és integrálással előállítható az alábbi általános megoldás

$$x(t) = -\frac{k_p \cdot x[k] + k_d \cdot v[k]}{2m} t^2 + C_1 t + C_0 \quad k\tau \leq t < (k+1)\tau, \quad (2.13)$$

ahol C_0 és C_1 valós értékű konstansok a kezdeti feltételektől függenek. A sebesség időfüggvénye ennek deriválásával állítható elő:

$$\dot{x}(t) = -\frac{k_p \cdot x[k] + k_d \cdot v[k]}{m} t + C_1 \quad k\tau \leq t < (k+1)\tau. \quad (2.14)$$

Amennyiben ismertek a k -adik mintavételi időpillanatra vonatkozó $x[k] = x_k$ és $v[k] = v_k$ kezdeti feltételek, úgy előállítható a mozgásegyenlet speciális megoldása az alábbi alakban

$$x(t) = -\frac{k_p \cdot x_k + k_d \cdot v_k}{2m}(t - k\tau)^2 + v_k(t - k\tau) + x_k \quad k\tau \leq t < (k+1)\tau, \quad (2.15)$$

azonban ez a megoldásfüggvény csak a $k+1$ -edik mintavételi pillanatig érvényes. Ekkor új mérés történik és a szabályozó új beavatkozó erőt számol, így egy újabb kezdetiérték-problémát kell megoldani. Az új mintavételi intervallumra vonatkozó kezdeti érték az előző mintavételi intervallum végén felvett pozíció alapján számolható az alábbiak szerint

$$x[k+1] = x((k+1)\tau) = -\frac{k_p \cdot x_k + k_d \cdot v_k}{2m}\tau^2 + v_k\tau + x_k, \quad (2.16)$$

valamint az új kezdeti sebesség

$$v[k+1] = \dot{x}((k+1)\tau) = -\frac{k_p \cdot x_k + k_d \cdot v_k}{m}\tau + v_k. \quad (2.17)$$

A lineáris dinamikai viselkedés miatt az új pozíció és sebesség felírható lineáris leképezésként

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{k_p\tau^2}{2m} & \tau - \frac{k_d\tau^2}{2m} \\ -\frac{k_p\tau}{m} & 1 - \frac{k_d\tau}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

alakban, és így minden további mintavételi pillanatban előállítható a pozíció és a sebesség az alábbi

$$\begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{k_p\tau^2}{2m} & \tau - \frac{k_d\tau^2}{2m} \\ -\frac{k_p\tau}{m} & 1 - \frac{k_d\tau}{m} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

leképezéssorozattal a kezdeti $[x_0 \ v_0]^\top$ állapotból.

Következtetésképp megállapítható, hogy a mintavételezés a rendszer dinamikájában kapcsolt dinamikai viselkedéshez vezet, hiszen minden mintavételi pillanatban új kezdetiérték-problémával írható le a mozgás következő szakasza. A fentiek alapján látható, hogy a modell diszkrét időben egy lineáris leképezéssorozattá egyszerűsödik, amely a kizárólag mintavételi pillanatokban írja le a mozgást.

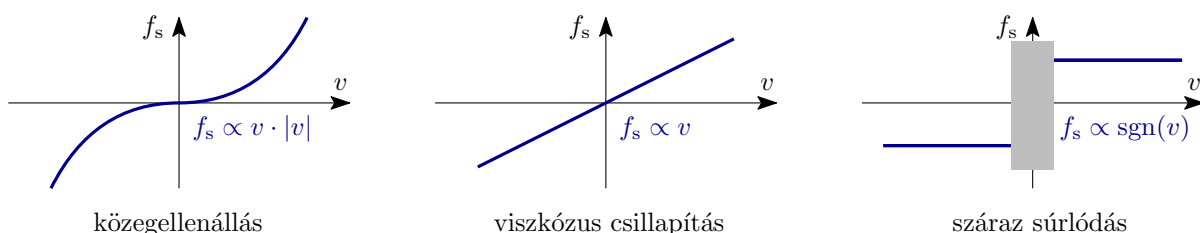
2.3. A száraz súrlódás hatásai

A különféle mechanizmusok gyakorlati megvalósításában a mozgó alkatrészek között, illetve a közeggel való kölcsönhatások során súrlódási jelenségek lépnek fel, amelyek a mechanikai energiát hő formájában disszipálják. Az alábbiak rövid áttekintést nyújtanak a főbb súrlódási hatásokról, különös tekintettel a száraz súrlódásra és a Coulomb-féle súrlódási modellre.

2.3.1. Fontosabb disszipációs jelenségek

Attól függően, hogy egy test milyen közegben mozog, különböző súrlódási jelenségek lépnek fel. Az f_s súrlódási erő függhet a rendszer minőségét leíró, jellemzően állandó paraméterektől, például geometriai jellemzőktől, anyagtulajdonságoktól. A dinamikai viselkedés szempontjából azonban lényegesebb az időben változó mennyiségektől való függéseket vizsgálni, ami a súrlódási jelenségeknél a közeghez képesti v relatív sebesség hatását jelenti.

A 2.5. ábra a legalapvetőbb súrlódási jelenségekhez tartozó karakterisztikákat mutatja. Mindhárom bemutatott eset közös jellemzője, hogy a karakterisztika páratlan függvénnyel írható le, ugyanis gyakran a rendszer szimmetriája miatt a mozgásirány megváltoztatásával a súrlódási erő csupán előjelet vált. Fontos tulajdonság még az is, hogy a karakterisztikák az I. és a III. síknegyedben húzódnak, így a pillanatnyi teljesítmény $f_s \cdot v$ szorzata mindenütt pozitív értéket vesz fel, ami a (2.1) egyenlet előjelkonvenciója alapján disszipációt jelent.



2.5. ábra. A legfőbb súrlódási fajták és jellemző karakterisztikáik.

Gáz halmazállapotú közegben a 2.5. ábra bal oldalán látható közegellenállás lép fel, amit az alábbi, abszolút értékében a sebességgel négyzetesen arányos karakterisztika ír le

$$f_s = \frac{1}{2} c_e \rho A \cdot v |v|, \quad (2.20)$$

ahol c_e a közegellenállási tényező, ρ a közeg sűrűsége és A a közegben mozgó test felületének a mozgásra merőleges irányba vett vetülete. Ez a modell feltételezi, hogy az áramlásba helyezett test szimmetrikus, ellenkező esetben a különböző mozgásirányokhoz más és más c_e közegellenállási tényező tartozna.

A közegellenállás nemlineáris dinamikai hatásokat eredményez, melynek vizsgálatához speciális matematikai eszközökre van szükség, például stabilitásvizsgálathoz a Ljapunov-módszerre vagy központi sokasági tételre.

A 2.5. ábra középső részén a viszkózus csillapítás esete látható, ami folyadék halmazállapotú közegekben léphet fel. A súrlódási erő nagysága ebben az esetben az alábbi arányossággal számolható

$$f_s = b \cdot v, \quad (2.21)$$

ahol b a viszkózus csillapítási tényező. Ez a modell newtoni folyadékok esetén érvényes, ahol a folyadék mechanikai feszültsége egyenesen arányos az őt érő deformációsebességgel. Viszkózus csillapítás a kenéssel rendelkező alkatrészeknél, például csapágyakban, lineáris vezetékekben fordul elő, illetve rezgéscsillapító elemekben is alkalmazzák energiaelnyelés céljából.

A viszkózus csillapítás lineáris rendszereket eredményez, bevezetésével érvényesek maradnak ugyanazok a módszerek, amelyek a 2.2.2. fejezetben kerültek bemutatásra. Időbeli diszkretizálás esetén a (2.19) egyenlethez hasonlóan lineáris leképezéssorozattal írhatók le az ilyen rendszerek.

Szilárd testek felületeinek közvetlen érintkezésekor száraz súrlódási jelenségek lépnek fel, amit a 2.5. ábra jobb oldala illusztrál. A száraz súrlódási erő nagysága nem függ a sebesség nagyságától, iránya azonban mindig a mozgást gátló, disszipatív hatású, amit legegyszerűbben az alábbi függvénnyel lehet leírni

$$f_s = \mu N \cdot \text{sgn}(v) \quad (2.22)$$

ahol μ az érintkező anyagpárra jellemző súrlódási tényező, N a felületeket összeszorító normális erő, valamint $\text{sgn}(\cdot)$ az előjelfüggvény.

A száraz súrlódás jelensége rendkívül összetett, a (2.22) egyenlet csak nagyobb sebességek esetén ad pontos eredményt. Alacsony sebességnél a súrlódási erő már nem állandó nagyságú, valamint a $v = 0$ statikus állapotban letapadási, megcsúszási jelenségek is előfordulnak, akár hiszterézissel is. Ebből kifolyólag a 2.5. ábrán ez a tartomány szürke árnyalattal ki lett takarva, az itt játszódó jelenségeket a különböző száraz súrlódási modellek különbözőképpen írják le.

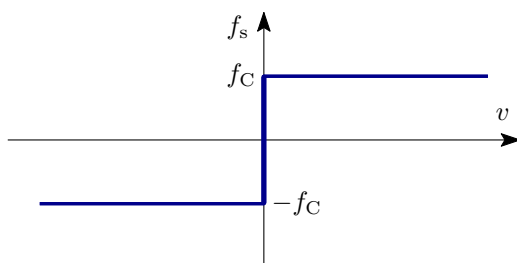
A száraz súrlódás a közegellenálláshoz hasonlóan szintén nemlineáris dinamikai hatásokat eredményez, azonban ezen felül a súrlódási karakterisztika szakadást is tartalmazhat. Ennek modellezése és precíz matematikai kezelése speciális módszertant igényel, amit a későbbiekben a 2.3.3. fejezet mutat be.

2.3.2. A Coulomb súrlódási modell

A száraz súrlódás egyik legelterjedtebb modellje a Coulomb-modell, melynek karakterisztikája az alábbi módon írható le

$$\begin{cases} f_s = f_C & \text{ha } v > 0 \\ f_s = -f_C & \text{ha } v < 0 \\ f_s \in [-f_C, f_C] & \text{ha } v = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

ahol f_C paraméter a súrlódási erő nagysága. Az első két eset a csúszás, míg a harmadik eset a letapadás jelenségét írja le. Letapadás esetén a súrlódási erő $-f_C$ és f_C között bármilyen értéket felvehet annak megfelelően, hogy a test nyugalomban maradjon. Éppen ezért a $v = 0$ helyen a karakterisztika nem egy egyértelmű hozzárendelés, ahogy azt a 2.6. ábra is illusztrálja.



2.6. ábra. A Coulomb súrlódási modell karakterisztikája.

A Coulomb-súrlódási modell karakterisztikája az előzőek alapján nem nevezhető szigorú értelemben véve függvénynek, azonban ennek kiküszöbölésére bevezethető a *halmazértékű függvény* fogalma, amely megengedi, hogy a $v = 0$ helyhez egy intervallum tartozzon értéként.

2.3.3. Nemsima dinamikai hatások modellezése

Az előzőekben bemutatott Coulomb-súrlódási modell mindamelllett, hogy az egyik legegyszerűbb és legelterjedtebb száraz súrlódási modell, dinamikai hatásai összetettek lehetnek. Ennek egyik oka a súrlódási karakterisztika nem folytonos tulajdonsága, ami miatt a mozgásegyenlet jobb oldalon nem folytonos differenciálegyenletté válik. Másrészt a problémát okozhat letapadás jelensége is, mert ilyenkor a súrlódási karakterisztika nem egyértelmű hozzárendelést tartalmaz.

Az alkalmazott modellek úgynevezett *nemsima* dinamikai viselkedést mutatnak, mely során bizonyos fizikai mennyiségek (például a súrlódási erő) ugrásszerűen változhatnak. A mozgásegyenlet a továbbiakban nem kezelhető klasszikus értelemben vett

differentiálegyenletként, hiszen a Lipschitz-tulajdonság nem teljesül, így a megoldások létezése és egyértelműsége nem garantált.

A Coulomb-súrlódás dinamikai hatásainak precíz matematikai leírásához egy új eszközre, a *Filippov-rendszerekre* van szükség. Egy Filippov-rendszer [17] általános alakban felírható az alábbi formában

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) & \text{ha } H(\mathbf{x}) > 0 \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) & \text{ha } H(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

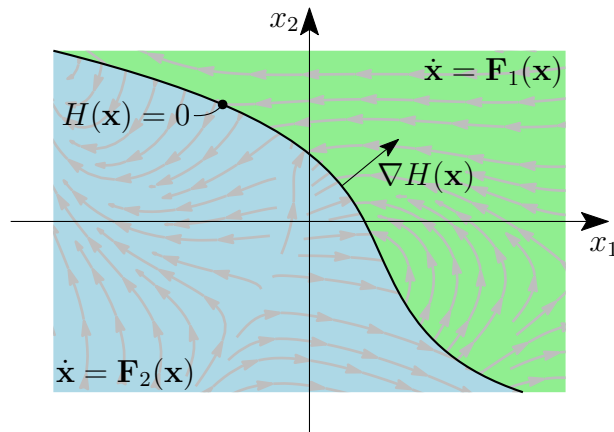
ahol a rendszer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ állapotának deriváltját két különböző $\mathbf{F}_{1,2} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektormező írja le annak megfelelően, hogy a $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező pozitív vagy negatív előjelű az adott pontban. A $H(\mathbf{x}) = 0$ egyenletet kielégítő halmazt kapcsolófelületnek vagy kapcsolóvonalnak nevezzük, jelölése:

$$\Sigma = \{\mathbf{x} : H(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (2.25)$$

A Filippov-rendszerek fontos tulajdonsága, hogy a kapcsolófelületen a két vektormező eltérő, azaz

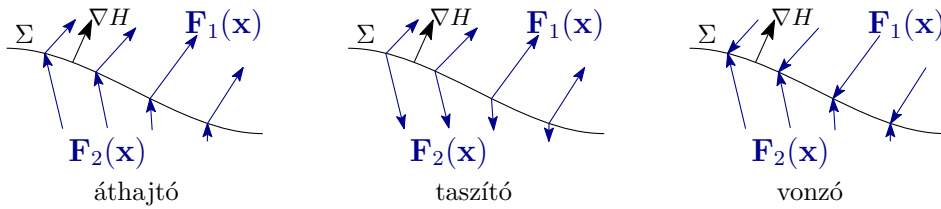
$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \neq \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) \quad \text{ha} \quad H(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.26)$$

ahogy azt a 2.7. ábra is mutatja. Jól látható továbbá az is, hogy a (2.24) egyenletben alkalmazott előjel-konvenció miatt a kapcsolófelületen a $H(\mathbf{x})$ függvény gradiense mindig az $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$ vektormezővel leírható dinamikájú féltér felé mutat.



2.7. ábra. A Filippov-rendszerek fázisportréjának szemléltetése két dimenzióban.

Mindaddig, amíg egy trajektória szigorúan csak az egyik féltérben húzódik, a rendszer klasszikus differenciálegyenletként kezelhető és integrálható. Amint egy trajektória eléri a Σ kapcsolófelületet, további megfontolások válnak szükségessé a megoldás folytatásához. Három fő eset különíthető el a két vektormező kölcsönös irányítottsága alapján, ahogy azt a 2.8. ábra is szemlélteti.



2.8. ábra. A Filippov-rendszerekben kialakuló Σ kapcsolófelületek (kapcsolóvonalak) fajtái.

Amennyiben a deriváltmező az egyik oldalról a kapcsolófelület felé mutat és a másik oldalról a kapcsolófelülettől elfelé mutat, úgy *áthajtó* felületről van szó. Ennek matematikai feltétele leírható a

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) > 0 \quad (2.27)$$

egyenlőtlenséggel, hiszen a skaláris szorzat akkor pozitív, ha a két vektormező azonos irányítottságú. Amint eléri egy trajektória az áthajtó felületet, a dőfésponttól kezdve tovább számolható a dinamika az ellentétes oldal vektormézeje alapján. Mivel a rendszer infinitezimálisan rövid ideig van a kapcsolófelületen, így nem szükséges külön kikötéseket adni a derivált kapcsolófelületen felvett értékére.

Amennyiben a deriváltmező mindkét oldalon a kapcsolófelülettől elfelé mutat, úgy *taszító* felületről van szó. Könnyen belátható, hogy bármelyik féltérről indul egy trajektória, az soha nem fogja elérni a kapcsolófelületet, mert annak környezetében mindenképpen távolodni fog tőle.

Amennyiben a deriváltmező mindkét oldalon a kapcsolófelület felé mutat, úgy *vonzó* felületről van szó. A deriváltak irányítottságát a 2.8. ábra és a deriváltmező segítségével az

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \cdot \nabla H(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) \cdot \nabla H(\mathbf{x}) > 0 \quad (2.28)$$

egyenlőtlenségek írják le. A trajektóriák bármely oldalról el tudják érni a kapcsolófelületet, és amennyiben ez megtörténik, úgy rajta is maradnak, úgynevezett *csúszó* megoldást eredményezve. A kapcsolófelületet ebben az esetben *csúszófelületnek* is nevezzük, a rendszer viselkedését pedig *csúszómódnak*.

A csúszó megoldások során a rendszer huzamosabb ideig tartózkodik a kapcsolófelületen, így szükséges valamilyen módon a deriváltakat is definiálni. A Filippov-rendszerek esetén a csúszómód dinamikáját a két vektormező

$$\dot{\mathbf{x}} = (1 - \alpha)\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \alpha\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) \quad (2.29)$$

konvex kombinációja írja le, ahol az $\alpha \in [0 \ 1]$ paraméter értéke garantálja a trajektóriák

kapcsolófelületen maradását. Ennek matematikai feltétele

$$\underbrace{((1 - \alpha)\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \alpha\mathbf{F}_2(\mathbf{x}))}_{\mathbf{x}} \cdot \nabla H(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.30)$$

ugyanis a derivált akkor érintő irányú a kapcsolófelülettel, ha merőleges $\nabla H(\mathbf{x})$ -ra. Az α paraméter kiemelésével

$$\alpha(\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_1(\mathbf{x})) \cdot \nabla H(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \cdot \nabla H(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.31)$$

adódik, amit rendezve

$$\alpha = \frac{\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \cdot \nabla H(\mathbf{x})}{(\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_2(\mathbf{x})) \cdot \nabla H(\mathbf{x})} \quad (2.32)$$

alapján a csúszófelület minden pontján kiszámolható az α együttható. Ezzel a csúszó megoldások már egyértelműen meghatározhatók.

2.4. A mintavételezés és a Coulomb-súrlódás együttes hatásai

A továbbiakban a cél egy olyan modell levezetése, amely a 2.2.2. fejezethez hasonlóan diszkrét időben írja le a vizsgált pozíciószabályozási feladatot, azonban figyelembe veszi a Coulomb-súrlódás hatásait is a 2.3.3. fejezetben tárgyalt eszközökkel.

2.4.1. Szakaszosan folytonos megoldások

Mind a mintavételes szabályozó által előállított $f_u(t)$ beavatkozó erő, mind az $f_s(t)$ Coulomb-súrlódási erő szakaszosan állandó értékű, így a (2.1) egyenlet felírható

$$m \cdot \ddot{x}(t) = f \quad (2.33)$$

alakban, ahol $f = f_u(t) - f_s(t)$ konstans erő a beavatkozó erő és a súrlódási erő eredője. Ez a mozgásegyenlet olyan időintervallumokon érvényes, ahol a két erő állandó. Adott $x(t_0) = x_t$ és $\dot{x}(t_0) = v_t$ kezdeti feltételek esetén a megoldás a négyzetes úttörvény alapján meghatározható

$$x(t_0 + \Delta t) = x_{t+\Delta t} = \frac{f}{2m}\Delta t^2 + v_t\Delta t + x_t, \quad (2.34)$$

valamint

$$v(t_0 + \Delta t) = v_{t+\Delta t} = \frac{f}{m} \Delta t + v_t \quad (2.35)$$

alakban. Az egyszerűbb jelölés céljából vezessük be a

$$\Phi(x_t, v_t, f, \Delta t) = (x_{t+\Delta t}, v_{t+\Delta t}) \quad (2.36)$$

általános megoldásfüggvényt, ami megmutatja, hogy (x_t, v_t) kezdeti feltételek és f eredő erő hatására Δt idő elteltével milyen pozíció és sebesség értékeket vesz fel a rendszer. A beavatkozó erő és a súrlódási erő is ugrásszerűen változhat, azonban az ugrások között állandó értékűek, így Φ -vel való leképezések sorozatával leírható a rendszer viselkedése.

2.4.2. A trajektóriák egyenlete

A cél egy olyan diszkrét idejű modell előállítása, ami a mintavételi időpillanatokhoz kötötten írja le a rendszer viselkedését. Ezen leképezés meghatározásához az f_u beavatkozó erő állandó értékűnek vehető, azonban lehetséges, hogy a mozgásirány megváltozásával az f_s súrlódási erő ugrásszerűen változik. Ennek hatásai a fázissíkon könnyen vizsgálhatók. A (2.1) mozgásegyenlet átírható elsőrendű alakba az $\mathbf{x} = [x \ v]^\top$ állapot bevezetésével az alábbi módon

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}(f_u - f_s) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

ahol a $v = \dot{x}$ a sebesség. Az $x - v$ fázissíkon történő analízishez a megoldásgörbék (trajektóriák) egyenleteit kell meghatározni. Tekintsük az $x(v(t))$ pozíciót, mint a sebesség függvényét, melynek idő szerinti deriváltja kifejezhető a láncszabály szerint

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dv} \cdot \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\dot{v}} = v, \quad (2.38)$$

valamint behelyettesítve a sebesség deriváltját a

$$\frac{dx}{dv} \cdot \frac{1}{m}(f_u - f_s) = v \quad (2.39)$$

szétválasztható változójú differenciálegyenlet adódik. A szétválasztás elvégzése után

$$dx \cdot \frac{1}{m}(f_u - f_s) = v \cdot dv, \quad (2.40)$$

valamint mindkét oldalt integrálva

$$x \cdot \frac{1}{m}(f_u - f_s) = \frac{v^2}{2} + \tilde{C} \quad (2.41)$$

adódik, ahol $\tilde{C}$ tetszőleges valós paraméter. Az egyenlet rendezhető a pozícióra

$$x = \frac{mv^2}{2(f_u - f_s)} + C \quad (2.42)$$

alakban, ahol C szabad paraméter, és így előáll a trajektóriák egyenlete. Ez egy parabolából álló görbesereg, ami C paraméter függvényében x irányban eltolható. Az $x - v$ fázissíkon ábrázolva a parabolák jobbra nyílnak, ha az $f_u - f_s$ különbség pozitív, valamint balra nyílnak, ha negatív. Minél nagyobb abszolút értékben az $f_u - f_s$ különbség, a parabolák annál laposabbak lesznek.

2.4.3. Coulomb-súrlódás okozta Filippov-dinamika

A Coulomb-súrlódás hatására (2.23) egyenletből kiindulva a rendszer viselkedése kettéválik az

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}(f_u - f_c) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_1(\mathbf{x})} \quad \text{ha } v > 0 \quad (2.43)$$

és az

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}(f_u + f_c) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_2(\mathbf{x})} \quad \text{ha } v < 0 \quad (2.44)$$

közönséges differenciálegyenlettel leírható dinamikára, ami így egy Filippov-rendszert eredményez, ahol a kapcsolóvonalat a $H(\mathbf{x}) = v$ függvény zérushelyei alkotják. A kapcsolóvonal irányítottságát a

$$\nabla H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

gradiensvektor jelöli ki.

A $v = 0$ kapcsolóvonal (2.27) egyenlet alapján áthajtó jellegű, ha $\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 > 0$, ami jelen esetben az

$$\begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}(f_u - f_c) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}(f_u + f_c) \end{bmatrix} = \underbrace{v^2}_0 + \frac{1}{m^2}(f_u^2 - f_c^2) > 0 \quad (2.46)$$

egyenlőtlenséghez vezet. Fizikai megfontolások alapján $m > 0$ és $f_C > 0$, így az egyenlőtlenség a

$$|f_u| > f_C \quad (2.47)$$

alakra egyszerűsödik.

A kapcsolóvonal vonzó (csúszó) jellegű (2.28) egyenlet alapján, ha $\mathbf{F}_1 \cdot \nabla H < 0$ és $\mathbf{F}_2 \cdot \nabla H > 0$. Az első feltétel

$$\begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}(f_u - f_C) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{m}(f_u - f_C) < 0, \quad (2.48)$$

ami egyszerűbb alakban

$$f_u < f_C \quad (2.49)$$

módon írható fel. A (2.28) egyenlet második feltétele

$$\begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}(f_u + f_C) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{m}(f_u + f_C) > 0 \quad (2.50)$$

ami az

$$f_u > -f_C \quad (2.51)$$

alakra egyszerűsíthető. A (2.49) és (2.51) feltételek együttesen teljesülnek, ha az

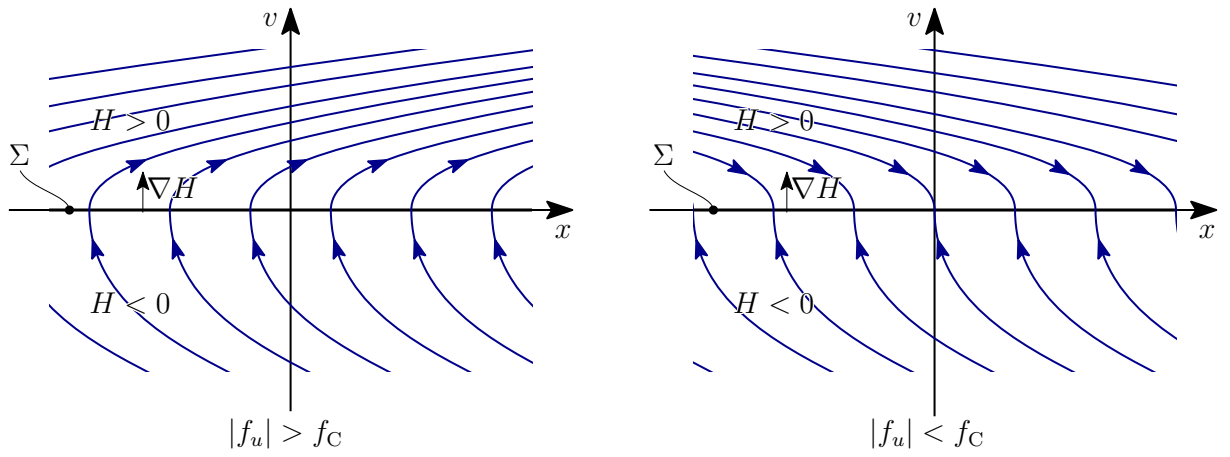
$$|f_u| < f_C \quad (2.52)$$

egyenlőtlenség teljesül, ekkor a kapcsolóvonal csúszó jellegű.

A 2.9. ábra a Coulomb-súrlódásos rendszer működését mutatja a fázissíkon, a jellegzetes trajektóriák feltüntetésével. Az előzőekben levezetett feltételek az áthajtó és a csúszó dinamika kialakulására minden esetet lefednek, taszító jellegű kapcsolóvonal nem alakulhat ki.

A csúszó megoldások dinamikáját leíró $\dot{\mathbf{x}} = (1 - \alpha)\mathbf{F}_1 + \alpha\mathbf{F}_2$ konvex kombináció α együtthatója (2.32) egyenlet alapján

$$\alpha = \frac{\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) \cdot \nabla H(\mathbf{x})}{(\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_2(\mathbf{x})) \cdot \nabla H(\mathbf{x})} = \frac{\begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}(f_u - f_C) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left(\begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}(f_u - f_C) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}(f_u + f_C) \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \quad (2.53)$$



2.9. ábra. A Coulomb-súrlódás okozta nemsima dinamika hatása a fázissíkon. A kapcsolóvonalon áthajtó (balra) és csúszó (jobbra) dinamika is kialakulhat.

ahol a skaláris szorzásokat elvégezve az

$$\alpha = \frac{\frac{1}{m}(f_u - f_C)}{-\frac{2}{m}f_C} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{f_u}{f_C} \quad (2.54)$$

eredmény adódik. Ezt behelyettesítve a (2.29) egyenletbe

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (1 - \alpha) \mathbf{F}_1(t) + \alpha \mathbf{F}_2(t) = \\ &\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{f_u}{f_C} \right) \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}(f_u - f_C) \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{f_u}{f_C} \right) \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}(f_u + f_C) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.55)$$

adódik, ahol jól láthatóan a konvex kombinációban résztvevő vektorok csak a $\mp f_C$ tagban térnek el, így elegendő csak ezen tagokon alkalmazni a kombinációt az alábbi módon

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m} \left(f_u - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{f_u}{f_C} \right) f_C}_{1-\alpha} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{f_u}{f_C} \right) f_C}_{\alpha} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

ami a $v = 0$ kapcsolóvonalon a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

nullvektort eredményezi. Ez azt jelenti, hogy a megoldásfüggvények amint elérik a kapcsolóvonalat, statikus egyensúlyi helyzet áll be. A 2.9. ábrán ez abból a megfigyelésből is következik, hogy a trajektóriák mindkét oldalról merőlegesen esnek a kapcsolóvonalra, így a csúszó megoldások nem mozognak el a kapcsolóvonal mentén, hanem a metszéspontban maradnak.

A kapott eredmények összeegyeztethetők a mechanikai tapasztalatokkal is: ha egy mozgó testet egy, a súrlódásnál nagyobb erőhatás lassít, akkor az a megállás után az ellenkező irányba fog tovább haladni. Ekkor mindvégig csúszási súrlódás hat, viszont ennek iránya megváltozik. Abban az esetben, ha a külső erő kisebb a súrlódási erőnél, a megállás után a test *letapad*, és a tapadási súrlódási erő egyensúlyt fog tartani a külső erővel.

2.4.4. Diszkrét idejű modell

Az előzőekben bemutatott megfontolások alapján elkészíthető az diszkrét idejű modell, amely az alábbi leképezést adja meg

$$\begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

ahol x_k és v_k a pozíció és a sebesség a k -adik mintavételi pillanatban ($t = k\tau$ időpillanatban), valamint x_{k+1} és v_{k+1} a következő mintavételi pillanathoz tartozó értékek. Ezek a változók együttesen írják le a rendszer állapotát diszkrét időben. A leképezés meghatározása során a mozgásegyenletet a $t \in [k\tau, (k+1)\tau]$ intervallumon kell megoldani. Ehhez következő fő megfontolásokat szükséges figyelembe venni:

1. A rendszer a vizsgált mintavételi időintervallumon elérheti a $v = 0$ kapcsolóvonalat.
2. Lehetséges, hogy már a kiindulási állapot is a kapcsolóvonalon van.
3. A kapcsolóvonalon meg kell különböztetni a csúszó és az áthajtó viselkedést.
4. Lehetséges, hogy a vizsgált mintavételi intervallum során a rendszer nem éri el a kapcsolóvonalat.

Ennek megfelelően 5 eset különböztethető meg, melyeket a 2.1. táblázat és a 2.10. ábra foglal össze. Ezen esetek kezeléséhez szükséges formulák a továbbiakban kerülnek bemutatásra.

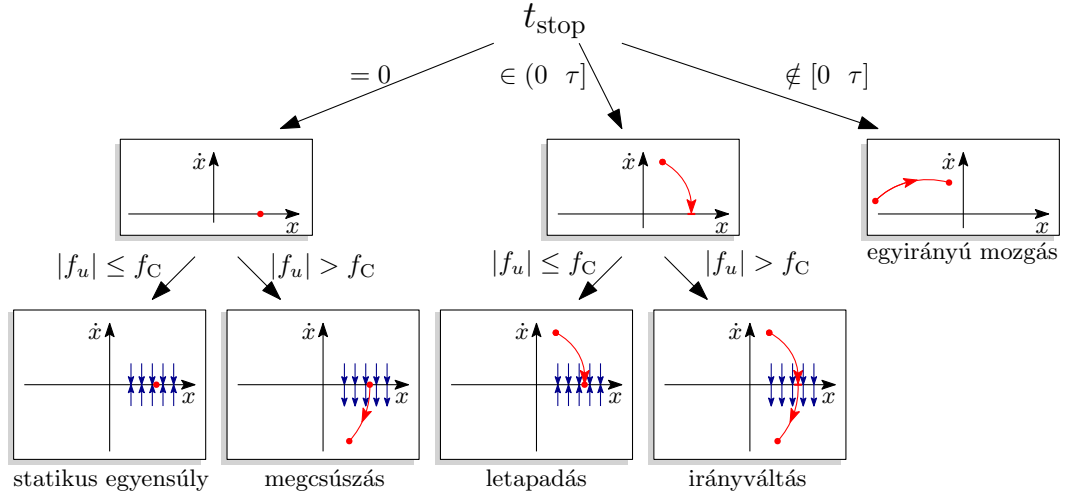
Minden mintavételi időpillanatban a szabályozó kiszámolja és előállítja az új

$$f_u = -k_p x_k - k_d v_k \quad (2.59)$$

beavatkozó jelet, amit a zérusrendű tartó állandó értéken tart a teljes mintavételi intervallum során. Ezen idő alatt szükséges vizsgálni, hogy a rendszer átlépi-e a $v = 0$

2.1. táblázat. A diszkrét idejű modell leképezésének esetei.

Eléri-e a rendszer a kapcsolóvonalat?	Kapcsolás jellege	Eset neve
igen, már a kezdeti pillanatban	vonzó	statikus egyensúly
	áthajtó	megcsúszás
igen, a mintavételi intervallum során később	vonzó	letapadás
	áthajtó	irányváltás
a mintavételi intervallum során nem	–	egyirányú mozgás



2.10. ábra. A diszkrét idejű modell leképezésének esetei.

kapcsolóvonalat. Jelölje t_{stop} azt az időtartamot, amennyi elteltével ez az esemény bekövetkezik. A (2.35) egyenlet alapján felírható

$$v(k\tau + t_{\text{stop}}) = \frac{f}{m}t_{\text{stop}} + v_k = 0, \quad (2.60)$$

ahol csúszási súrlódást feltételezve az eredő erő $f = f_u - f_C \operatorname{sgn}(v_k)$ értékű, így a t_{stop} megállási idő kiszámítható az alábbi alakban

$$t_{\text{stop}} = \frac{mv_k}{f_C \operatorname{sgn}(v_k) - f_u}, \quad (2.61)$$

így ennek értéke alapján eldönthető, hogy még a vizsgált mintavételi intervallumban eléri-e a rendszer a kapcsolóvonalat. Ezt a számítást azonban célszerű kiegészíteni további esetekkel

$$t_{\text{stop}} = \begin{cases} 0 & \text{ha } v_k = 0 \\ \frac{mv_k}{f_C \operatorname{sgn}(v_k) - f_u} & \text{ha } v_k \neq 0 \text{ és } f_C \operatorname{sgn}(v_k) - f_u \neq 0, \\ \infty & \text{ha } v_k \neq 0 \text{ és } f_C \operatorname{sgn}(v_k) - f_u = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

így a $t_{\text{stop}} = 0$ feltétel a kapcsolóvonalról indulást vizsgálja, valamint a $t_{\text{stop}} = \infty$ azt az esetet is lefedi, amikor a mozgás megállás nélkül történik. Ezzel a 2.10. ábrán felsorolt esetek matematikai feltételei is megadhatók.

Statikus egyensúly

Statikus egyensúly során a rendszer a kapcsolóvonalról indul, ahol vonzó dinamika van érvényben. Ennek feltétele az alábbi módon írható le

$$t_{\text{stop}} = 0 \quad \text{és} \quad |f_u| \leq f_C, \quad (2.63)$$

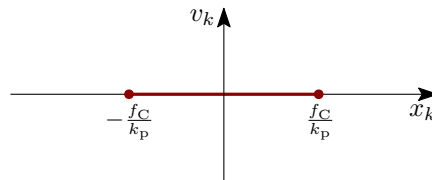
amibe (2.62) és (2.10) egyenleteket behelyettesítve

$$v_k = 0 \quad \text{és} \quad |-k_p x_k - k_d v_k| \leq f_C \quad (2.64)$$

adódik. Mivel a gyakorlatban a k_p és k_d szabályozási paraméterek pozitívak, így az alábbi

$$v_k = 0 \quad \text{és} \quad |x_k| \leq \frac{f_C}{k_p} \quad (2.65)$$

feltételek mellett lesz a rendszer statikus egyensúlyi helyzetben, amint azt a 2.11. ábra is szemlélteti.



2.11. ábra. Az állapottér statikus egyensúlyi helyzeteket tartalmazó része.

Mivel a vonzó jellegű kapcsolófelületen (2.57) egyenlet alapján statikus nyugalom van, így a mintavételi intervallum végén a felvett állapot

$$x_{k+1} = x_k \quad \text{és} \quad v_{k+1} = v_k = 0. \quad (2.66)$$

Megcsúszás

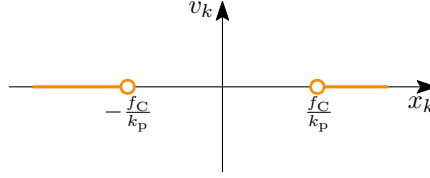
Megcsúszás esetén a rendszer a kapcsolóvonalról indul, azonban áthajtó dinamika érvényesül. Ennek feltétele az alábbi módon írható le

$$t_{\text{stop}} = 0 \quad \text{és} \quad |f_u| > f_C, \quad (2.67)$$

ami az x_k és v_k változókkal kifejezve a

$$v_k = 0 \quad \text{és} \quad |x_k| > \frac{f_C}{k_P} \quad (2.68)$$

alakban írható fel. Ezt a feltételt a 2.12. ábra szemlélteti.



2.12. ábra. A megcsúszás feltétele az állapottérben.

A fellépő súrlódási erő

$$f_s = f_C \operatorname{sgn}(f_u) \quad (2.69)$$

szerint számítható, ahol f_u előjele határozza meg a megfelelő irányt, ugyanis a kapcsolóvonalon pozitív beavatkozó erő mindig a $v > 0$ félsík felé indítja a trajektóriákat. Az indítás pillanata után a teljes mintavételi intervallum alatt állandó a súrlódási erő, így a végső állapot

$$(x_{k+1}, v_{k+1}) = \Phi(x_k, v_k, f_u - f_s, \tau) \quad (2.70)$$

segítségével számítható.

Letapadás

Letapadás esetén a rendszer nem a kapcsolóvonalról indul, azonban még a következő mintavételi pillanatig eléri a kapcsolóvonalat, ami vonzó jellegű. Ennek feltétele az alábbi módon írható le:

$$t_{\text{stop}} \in (0, \tau] \quad \text{és} \quad |f_u| \leq f_C, \quad (2.71)$$

melybe (2.62) egyenletet behelyettesítve

$$0 < \frac{mv_k}{f_C \operatorname{sgn}(v_k) - f_u} \leq \tau \quad \text{és} \quad |f_u| \leq f_C \quad (2.72)$$

adódik. Belátható, hogy a törtkifejezés biztosan nagyobb nullánál, ugyanis számlálója és nevezője is v_k -val megegyező előjelű. Így a feltételek egyszerűsíthetők, azonban v_k előjele szerint az alábbi

$$\begin{cases} \frac{mv_k}{f_C - f_u} \leq \tau & \text{ha } v_k > 0 \\ \frac{mv_k}{-f_C - f_u} \leq \tau & \text{ha } v_k < 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad |f_u| \leq f_C \quad (2.73)$$

esetszétválasztást kell megtenni. Az egyenlőtlenségeket rendezve

$$\begin{cases} mv_k \leq \tau f_C - \tau f_u & \text{ha } v_k > 0 \\ mv_k \geq -\tau f_C - \tau f_u & \text{ha } v_k < 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad |f_u| \leq f_C \quad (2.74)$$

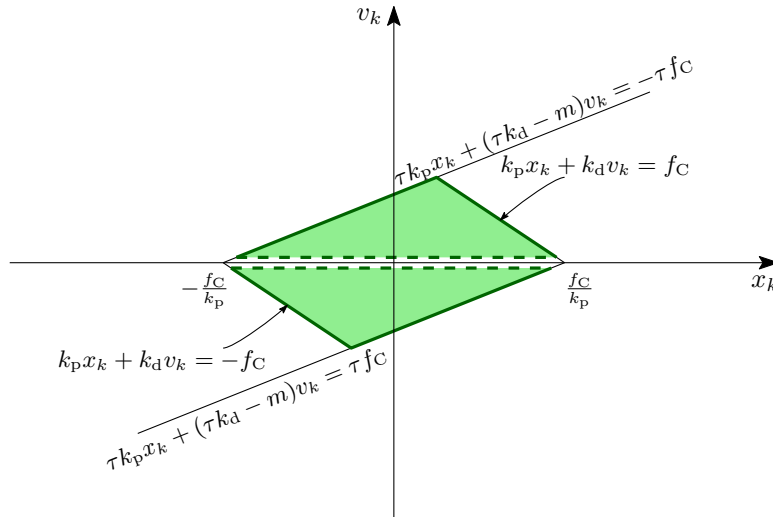
adódik, melyekbe behelyettesítve a (2.10) egyenletet

$$\begin{cases} mv_k \leq \tau f_C + \tau k_p x_k + \tau k_d v_k & \text{ha } v_k > 0 \\ mv_k \geq -\tau f_C + \tau k_p x_k + \tau k_d v_k & \text{ha } v_k < 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad |-k_p x_k - k_d v_k| \leq f_C \quad (2.75)$$

és további összevonásokat elvégezve a

$$\begin{cases} -\tau f_C \leq \tau k_p x_k + (\tau k_d - m)v_k & \text{ha } v_k > 0 \\ \tau f_C \geq \tau k_p x_k + (\tau k_d - m)v_k & \text{ha } v_k < 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad |k_p x_k + k_d v_k| \leq f_C \quad (2.76)$$

feltételrendszer adódik, melyet a 2.13. ábra illusztrál.



2.13. ábra. A letapadás feltételéhez tartozó állapotok.

A kezdetben érvényes csúszási súrlódási erő

$$f_s = f_C \operatorname{sgn}(v_k) \quad (2.77)$$

szerint számítható, ami a megállás (letapadás) pillanatáig érvényesül. Ekkor a rendszer új, köztes állapota

$$(x^*, \underbrace{v^*}_{=0}) = \Phi(x_k, v_k, f_u - f_s, t_{\text{stop}}), \quad (2.78)$$

ami után a fennmaradó $\tau - t_{\text{stop}}$ időben már statikus egyensúly áll be. Így a következő mintavételi pillanatban a rendszer állapota

$$x_{k+1} = x^* \quad \text{és} \quad v_{k+1} = v^* = 0. \quad (2.79)$$

Irányváltás

Irányváltás esetén a rendszer nem a kapcsolóvonalról indul, azonban még a következő mintavételi pillanatig eléri a kapcsolóvonalat, ami áthajtó jellegű. Ennek feltétele az alábbi módon írható le:

$$t_{\text{stop}} \in (0 \ \tau] \quad \text{és} \quad |f_u| > f_C, \quad (2.80)$$

melybe (2.62) egyenletet behelyettesítve

$$0 < \frac{mv_k}{f_C \operatorname{sgn}(v_k) - f_u} \leq \tau \quad \text{és} \quad |f_u| > f_C, \quad (2.81)$$

valamint v_k előjele szerint esetszétválasztást végezve

$$\begin{cases} 0 < \frac{mv_k}{f_C - f_u} \leq \tau & \text{ha } v_k > 0 \\ 0 < \frac{mv_k}{-f_C - f_u} \leq \tau & \text{ha } v_k < 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad |f_u| > f_C \quad (2.82)$$

adódik. Itt a törtkifejezések számlálójának előjelét v_k határozza meg, azonban a nevező előjele f_u előjelével egyezik meg. Emiatt további esetszétválasztások szükségesek az alábbiak szerint

$$\begin{cases} 0 > mv_k \geq \tau f_C - \tau f_u & \text{ha } v_k > 0 \text{ és } f_u > 0 \\ 0 < mv_k \leq \tau f_C - \tau f_u & \text{ha } v_k > 0 \text{ és } f_u < 0 \\ 0 > mv_k \geq -\tau f_C - \tau f_u & \text{ha } v_k < 0 \text{ és } f_u > 0 \\ 0 < mv_k \leq -\tau f_C - \tau f_u & \text{ha } v_k < 0 \text{ és } f_u < 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad |f_u| > f_C, \quad (2.83)$$

azonban jól látható, hogy az első és a negyedik esetek nem teljesülhetnek. Így az alábbi két

$$\begin{cases} mv_k \leq \tau f_C - \tau f_u & \text{és } f_u < 0 \text{ ha } v_k > 0 \\ mv_k \geq -\tau f_C - \tau f_u & \text{és } f_u > 0 \text{ ha } v_k < 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad |f_u| > f_C \quad (2.84)$$

feltétel marad. Az $|f_u| > f_C$ egyenlőtlenség felhasználásával további egyszerűsítések végezhetők el

$$\begin{cases} mv_k \leq \tau f_C - \tau f_u & \text{és } f_u < -f_C \text{ ha } v_k > 0 \\ mv_k \geq -\tau f_C - \tau f_u & \text{és } f_u > f_C \text{ ha } v_k < 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

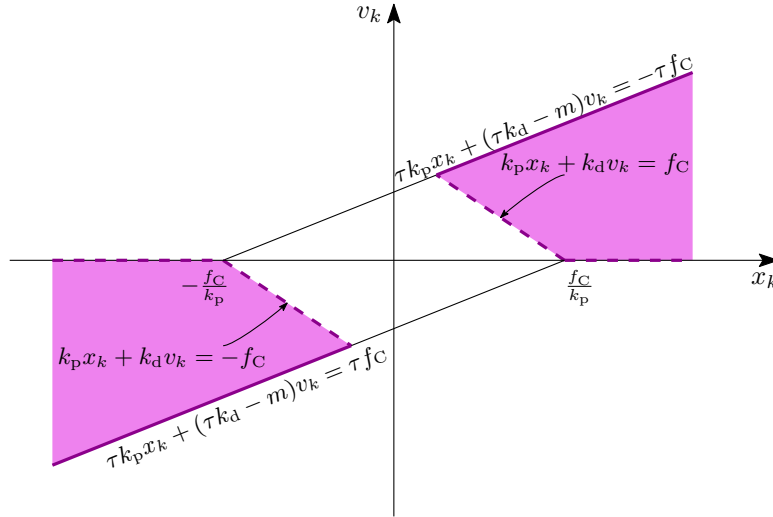
ahol (2.10) felhasználásával

$$\begin{cases} mv_k \leq \tau f_C + \tau k_p x_k + \tau k_d v_k & \text{és } -k_p x_k - k_d v_k < -f_C \text{ ha } v_k > 0 \\ mv_k \geq -\tau f_C + \tau k_p x_k + \tau k_d v_k & \text{és } -k_p x_k - k_d v_k > f_C \text{ ha } v_k < 0 \end{cases} \quad (2.86)$$

alakban írható fel, valamint az egyenlőtlenségek rendezésével előállítható az alábbi

$$\begin{cases} -\tau f_C \leq \tau k_p x_k + (\tau k_d - m)v_k & \text{és} & k_p x_k + k_d v_k > f_C & \text{ha} & v_k > 0 \\ \tau f_C \geq \tau k_p x_k + (\tau k_d - m)v_k & \text{és} & k_p x_k + k_d v_k < -f_C & \text{ha} & v_k < 0 \end{cases} \quad (2.87)$$

feltételrendszer, melyet a 2.14 ábra is szemléltet.



2.14. ábra. Az irányváltást eredményező kiindulási állapotok az állapottérben.

A kezdetben érvényes csúszási súrlódási erő

$$f_s = f_C \operatorname{sgn}(v_k), \quad (2.88)$$

ami t_{stop} ideig érvényes, így a megállásig a rendszer az alábbi köztes állapotba kerül

$$(x^*, \underbrace{v^*}_{=0}) = \Phi(x_k, v_k, f_u - f_s, t_{\text{stop}}), \quad (2.89)$$

mely után az áthajtó dinamika hatására a súrlódási erő megfordul és a fennmaradó $\tau - t_{\text{stop}}$ ideig hat. A következő mintavételi pillanatban a rendszer állapota

$$(x_{k+1}, v_{k+1}) = \Phi(x^*, k^*, f_u + f_s, \tau - t_{\text{stop}}), \quad (2.90)$$

ami az alábbi kompakt formában is leírható

$$(x_{k+1}, v_{k+1}) = \Phi(\Phi(x_k, v_k, f_u - f_s, t_{\text{stop}}), f_u + f_s, \tau - t_{\text{stop}}) \quad (2.91)$$

két Φ leképezés kompozíciójaként.

Egyirányú mozgás

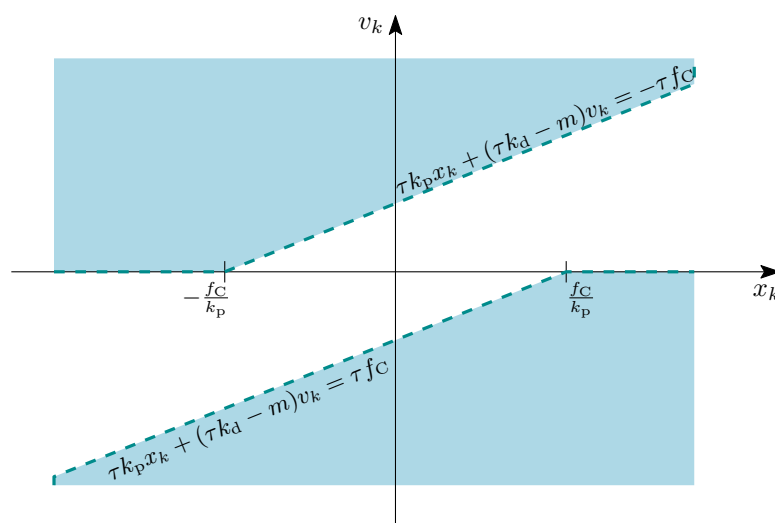
Egyirányú mozgás esetén a rendszer nem éri el a kapcsolóvonalat a következő mintavételi pillanatig bezárólag. Ennek matematikai feltétele

$$t_{\text{stop}} \notin [0, \tau], \quad (2.92)$$

ami a korábban bemutatott esetek feltételeinek együttes kizárásával az alábbi

$$\begin{cases} -\tau f_C > \tau k_p x_k + (\tau k_d - m)v_k & \text{ha } v_k > 0 \\ \tau f_C < \tau k_p x_k + (\tau k_d - m)v_k & \text{ha } v_k < 0 \end{cases} \quad (2.93)$$

alakban fejthető ki.



2.15. ábra. Az egyirányú mozgást eredményező kiindulási állapotok az állapottérben.

Ebbe beletartoznak a $t_{\text{stop}} < 0$, $t_{\text{stop}} > \tau$ és a $t_{\text{stop}} = \infty$ eset is. Ilyenkor végig az

$$f_s = f_C \operatorname{sgn}(v_k) \quad (2.94)$$

csúszási súrlódás van érvényben, így a rendszer állapota a következő mintavételi pillanatban

$$(x_{k+1}, v_{k+1}) = \Phi(x_k, v_k, f_u - f_s, \tau) \quad (2.95)$$

szerint számítható.

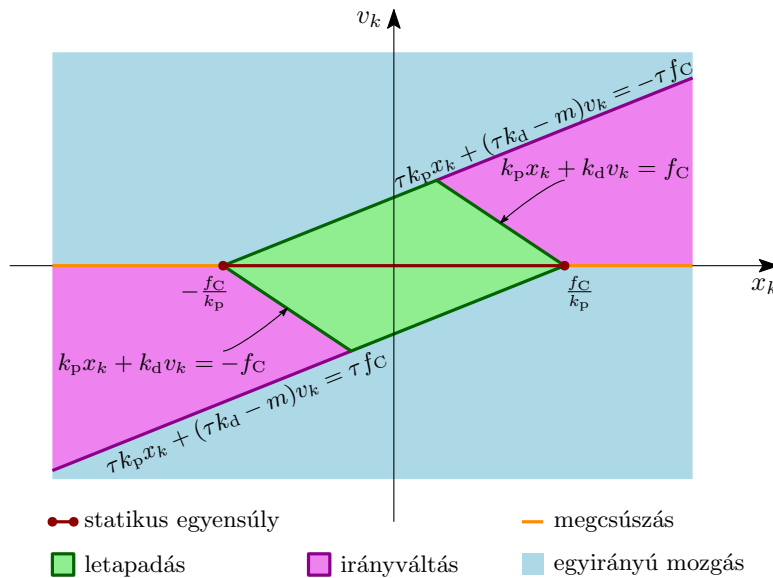
A teljes diszkrét idejű modell

Az előzőekben levezetett feltételek és esetek együttesen kiadják a teljes diszkrét idejű modellt, ami a mintavételezés és a Coulomb-súrlódás hatásait is figyelembe veszi.

A 2.2. táblázat összefoglalja a legfontosabb levezetett összefüggéseket, amelyekkel tetszőleges x_k, v_k kiindulási állapotból kiszámítható a rendszer következő mintavételi pillanatának x_{k+1}, v_{k+1} állapota. Az állapottér különböző régióit az esetszétválasztásnak megfelelően a 2.16. ábra mutatja.

2.2. táblázat. A teljes diszkrét idejű modell esetei és az állapotok leképezései.

Eset	Feltétel x_k, v_k -re	Leképezés x_{k+1}, v_{k+1} -re
statikus egyensúly	(2.65)	(2.66)
megcsúszás	(2.68)	(2.70)
letapadás	(2.76)	(2.79)
irányváltás	(2.87)	(2.91)
egyirányú mozgás	(2.93)	(2.95)



2.16. ábra. Az állapottér felosztása a diszkrét idejű modell esetszétválasztása szerint.

A leképezéseket iteratív módon ismételve tetszőleges ideig végezhető szimuláció, ami a későbbiekben a stabilitásvizsgálat alapjául szolgál. Ezen felül belátható, hogy az $f_C = 0$ megkötéssel újra előáll a (2.19) egyenlettel leírt lineáris modell.

3. Stabilitásvizsgálat

Az előző fejezetben levezetésre került, hogy miként lehet egy egy szabadsági fokú rendszert modellezni, melyben a száraz súrlódás és a mintavételezés hatásai együtt jelennek meg. Az eredményül kapott modell a vizsgált rendszer időbeli lefutására ad választ tetszőleges kezdeti állapotból kiindulva, ami felhasználható szimulációk futtatására.

Ezen fejezet tárgya a stabilitásvizsgálat, ami az előzőekhez képest minőségileg eltérő problémafelvetésből indul ki. A stabilitásvizsgálat ugyanis nem arra keres választ, hogy véges idő múlva milyen állapotba kerül a rendszer, hanem arra, hogy milyen viselkedés tapasztalható végtelenül sok idő elteltével.

A szabályozók tervezése során *stabil* viselkedést szeretnénk elérni, melyben a rendszer egy statikus egyensúlyi állapothoz közelít, valamint az esetlegesen létrejövő rezgések időben lecsengenek. Az *instabil* rendszerek ezzel szemben öngerjesztő vagy növekvő amplitúdójú rezgéseket folytatnak, mozgásuk minden korláton túlnő, ami a fizikailag megvalósított rendszer tönkremenetelét eredményezi. Éppen ezért a legfőbb tervezési prioritást a stabilitás élvezi. A továbbiakban a stabilitásvizsgálat főbb megközelítései kerülnek tárgyalásra.

3.1. Analitikus megközelítés

Az analitikus stabilitásvizsgálat célja egy olyan stabilitási kritérium megfogalmazása a rendszer paramétereire vonatkozóan, melynek levezetése precíz matematikai módszerekkel végezhető el. Ennek a feladatnak a bonyolultsága, valamint az így kapott eredmények összetettsége nagyban függ a szabad paraméterek számától, így célszerű a vizsgált rendszer modelljét a dimenzióanalízis módszereivel redukálni.

Az (2.12) egyenlet által leírt szabályozási törvény, valamint az (2.23) egyenlettel leírt Coulomb-súrlódási modell együttes alkalmazásával kapott

$$m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -f_C \operatorname{sgn} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) - k_P \cdot x(t)|_{t=k\tau} - k_d \cdot \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=k\tau} \quad (3.1)$$

$$k\tau \leq t < (k+1)\tau$$

mozgásegyenletben öt független paraméter található: az m tömeg, az f_C Coulomb-súrlódási erő, a τ mintavételi idő, valamint a k_P és k_d szabályozási paraméterek. A tömeggel leosztva az egyenletet a

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{f_C}{m} \operatorname{sgn} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) - \frac{k_P}{m} \cdot x(t)|_{t=k\tau} - \frac{k_d}{m} \cdot \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=k\tau} \quad (3.2)$$

$$k\tau \leq t < (k+1)\tau$$

alak adódik, így a független paraméterek száma négyre csökkenthető. A stabilitás szempontjából kizárólag a rendszer $t \rightarrow \infty$ határátmenetben történő viselkedése lényeges, így az idő átskálázása nincs hatással a stabilitásvizsgálat végeredményére. Bevezethető a

$$T = \frac{t}{\tau} \quad (3.3)$$

dimenziótlan mintavételi idő, ami a mintavételezési időpillanatokhoz rögzített időskálát adja meg. Ennek függvényében a szabályozási modell is felírható

$$\frac{d^2x(T)}{dT^2} = -\frac{f_C}{m} \operatorname{sgn} \left(\frac{dx(T)}{dT} \right) - \frac{k_P}{m} \cdot x(T)|_{T=k} - \frac{k_d}{m} \cdot \frac{dx(T)}{dT} \Big|_{T=k} \quad (3.4)$$

$$k \leq T < k+1$$

alakban, azonban a deriváltakat is az új időskála szerint kell felírni. A az első derivált az alábbi módon számítható

$$\frac{dx(T)}{dT} = \underbrace{\frac{dx(T)}{dT}}_{:=x'(T)} \cdot \underbrace{\frac{dT}{dt}}_{1/\tau} = \frac{1}{\tau} x'(T) \quad (3.5)$$

a láncszabály felhasználásával, ahol az x' a dimenziótlan idő szerinti deriválást jelöli. Hasonlóan a második derivált is kifejezhető:

$$\frac{d^2x(T)}{dT^2} = \frac{1}{\tau^2} x''(T). \quad (3.6)$$

A deriváltakat behelyettesítve a modellbe

$$\frac{1}{\tau^2} x''(T) = -\frac{f_C}{m} \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{\tau} x'(T) \right) - \frac{k_P}{m} \cdot x(T)|_{T=k} - \frac{k_d}{m\tau} x'(T)|_{T=k} \quad (3.7)$$

$$k \leq T < k+1$$

valamint az egyenletet rendezve az

$$x''(T) = -\frac{f_C \tau^2}{m} \operatorname{sgn} (x'(T)) - \frac{k_P \tau^2}{m} \cdot x(T)|_{T=k} - \frac{k_d \tau}{m} x'(T)|_{T=k} \quad (3.8)$$

$$k \leq T < k+1$$

alak áll elő, ahol már csak három független paraméter maradt. Ezekre bevezethető az alábbi jelölés

$$x''(T) = -\sigma \operatorname{sgn} (x'(T)) - p \cdot x(T)|_{T=k} - d x'(T)|_{T=k} \quad (3.9)$$

$$k \leq T < k+1$$

ahol $p = \frac{k_P \tau^2}{m}$ és $d = \frac{k_d \tau}{m}$ a szabályozó dimenziótlan erősítési tényezői és $\sigma = \frac{f_C \tau^2}{m}$ a dimenziótlan súrlódási paraméter.

A továbbiakban vizsgáljuk az

$$x''(T) = -p \cdot x(T)|_{T=k} - d x'(T)|_{T=k} \quad k \leq T < k+1 \quad (3.10)$$

egyenlettel leírható, súrlódásmentes speciális esetet. A 2.2.2. fejezetben tárgyalt módszerrel erre a modellre is levezethető egy lineáris leképezéssorozat, amivel meghatározható a rendszer állapota a mintavételi pillanatokban. A modell formálisan megegyezik a (2.12) egyenlettel $\tau = 1$ és $m = 1$ behelyettesítésével, így a korábban meghatározott (2.19) diszkrét idejű modell is felhasználható az alábbiak szerint:

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ x'(T) \end{bmatrix} \bigg|_{T=k} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{p}{2} & 1 - \frac{d}{2} \\ -p & 1 - d \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Ennek a kifejezésnek a tagjai egy úgynevezett *Neumann-sort* alkotnak, ami a mértani sor többdimenziós általánosítása. A tagok sorozatának konvergenciája az **A** együtthatómátrix sajátértékei alapján a

$$|z_{1,2}| < 1 \quad (3.12)$$

egyenlőtlenséggel vizsgálható, ahol $z_{1,2}$ az **A** mátrix sajátértékei. Ez a jelölés a diszkrét idejű rendszereknél megszokott $\mathcal{Z}$ -transzformációra utal. A karakterisztikus egyenlet

felírható

$$z^2 - z \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{A}) = 0 \quad (3.13)$$

alakban, ahol a mátrix nyomát és determinánsát kifejtve a

$$z^2 + z \left(\frac{p}{2} + d - 2 \right) + \left(1 + \frac{p}{2} - d \right) = 0 \quad (3.14)$$

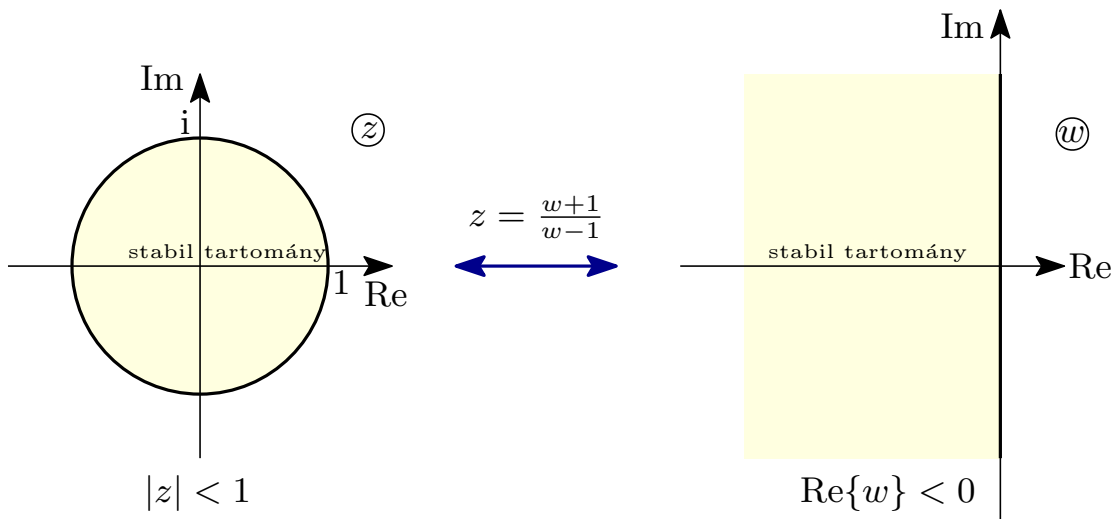
egyenlet adódik, melynek direkt megoldásával meghatározható $z_{1,2}$. Ez azonban sok számítást igényel, valamint magasabb dimenziójú rendszerek esetén már nem lenne kivitelezhető. A direkt megoldás azért sem célszerű megközelítés, mert a stabilitás szempontjából nem a gyökök pontos értéke releváns, hanem csak az, hogy a komplex egységkörön belül helyezkednek-e el vagy sem.

A fenti problémákra hatékony megoldást ad a Routh-Hurwitz stabilitási kritérium, amivel meghatározható, hogy egy polinom gyökei a negatív valós félsíkon helyezkednek-e el vagy sem. Ez folytonos idejű rendszerek esetén közvetlenül alkalmazható, de a vizsgált diszkrét idejű modell esetén nem.

Az eredeti rendszer gyökei a komplex z síkról átttranszformálhatók w síkra az alábbi

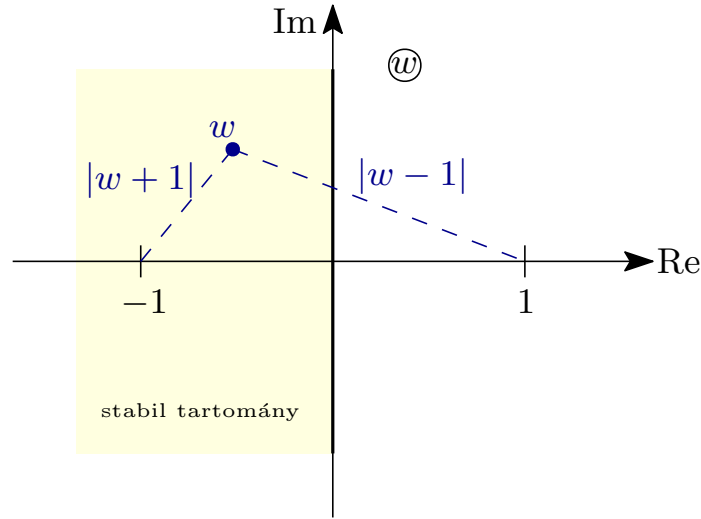
$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad (3.15)$$

úgynevezett Möbius-transzformáció segítségével, amit a 3.1. ábra is szemléltet.



3.1. ábra. A diszkrét idejű rendszer karakterisztikus gyökeinek z síkja, valamint a stabilitásvizsgálatra bevezetett w sík közötti leképezés.

Az itt alkalmazott Möbius-transzformáció az egységkörön belüli tartományt a negatív valós részű félsíkra képezi. Ez az állítás geometriai módon könnyen belátható az 3.2. ábra alapján, ami egy stabil gyök képét ábrázolja w síkon.



3.2. ábra. A stabil karakterisztikus gyökök elhelyezkedése w síkon.

A w pont -1 ponttól mért távolsága a $|w + 1|$, valamint az 1 ponttól mért távolsága $|w - 1|$. A negatív valós részű félsíkon w mindig közelebb lesz a -1 ponthoz, így teljesül a

$$\frac{|w + 1|}{|w - 1|} < 1 \quad (3.16)$$

kritérium. Mivel komplex számok hányadosának abszolút értéke a számok abszolút értékének hányadosával megegyezik, így az

$$\left| \frac{w + 1}{w - 1} \right| < 1 \quad (3.17)$$

egyenlőtlenség adódik, ami az alkalmazott $z = \frac{w+1}{w-1}$ transzformáció esetén valóban kielégíti a $|z| < 1$ stabilitási kritériumot.

A (3.14) karakterisztikus egyenlet a transzformáció elvégzése után

$$\frac{pw^2 + (2d - p)w + 4 - 2d}{(w - 1)^2} = 0 \quad (3.18)$$

alakot veszi fel. Jól látható, hogy ennek $w = 1$ szinguláris pontja, azonban ez a stabilitásvizsgálat szempontjából nem lényeges, így az egyenlet tovább egyszerűsíthető

$$\underbrace{p}_{a_2} w^2 + \underbrace{(2d - p)}_{a_1} w + \underbrace{4 - 2d}_{a_0} = 0 \quad (3.19)$$

módon. A Routh-Hurwitz stabilitási kritérium szükséges feltétele, hogy az együtthatók

azonos előjelűek legyenek. Amennyiben mindegyik együttható pozitív, úgy az alábbi

$$a_0 > 0 \Leftrightarrow d < 2 \quad (3.20)$$

$$a_1 > 0 \Leftrightarrow d > \frac{p}{2} \quad (3.21)$$

$$a_2 > 0 \Leftrightarrow p > 0 \quad (3.22)$$

feltételrendszer adódik a stabilitásra. Könnyen belátható ez alapján az is, hogy az együtthatók nem lehetnek egyszerre negatívak sem, így ezen feltételrendszerből kiindulva folytatható a stabilitásvizsgálat, melynek elégséges feltétele az, hogy a

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

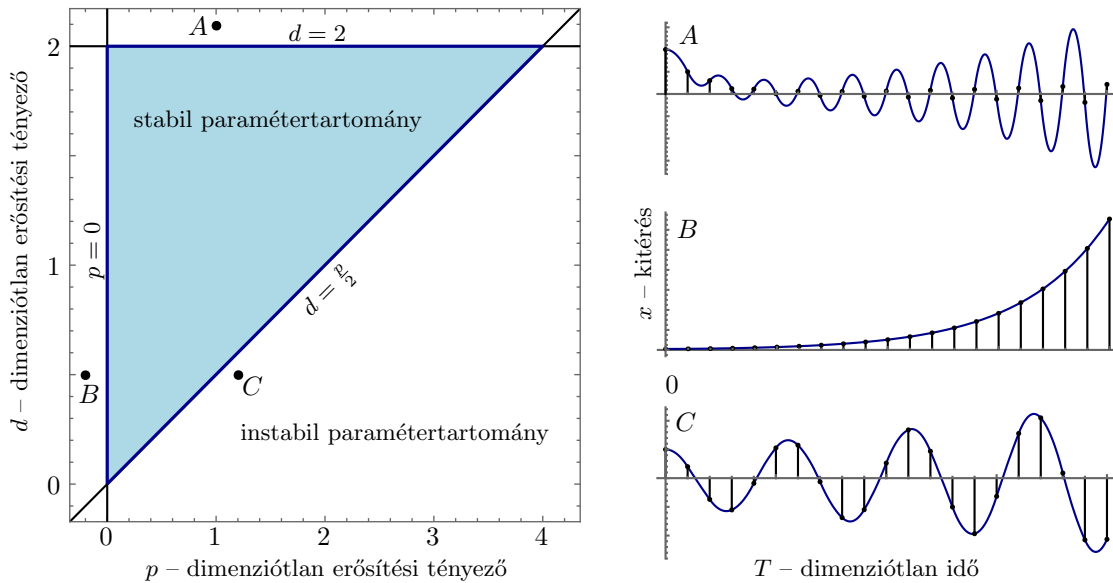
Hurwitz-mátrix főátlójára kifizített aldeterminánsok pozitívak legyenek. Az első aldeterminánsra vonatkozó

$$H_1 = a_0 > 0 \quad (3.24)$$

egyenlőtlenséget már a szükséges feltétel kielégíti. A második aldeterminánsra vonatkozó

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_0 > 0 \quad (3.25)$$

egyenlőtlenség szintén automatikusan teljesül a szükséges feltételek alapján. Így a stabil paramétertartományt a (3.20), (3.21) és (3.22) egyenlőtlenségek jelölik ki. Ezen feltételek a paramétertérben ábrázolva alkotják a stabilitási térképet, ami a 3.3. ábrán látható.



3.3. ábra. A stabilitási térkép súrlódásmentes rendszer esetén és a stabilitásvesztés különböző eseteihez tartozó jellemző időfüggvények.

A 3.3. ábrán feltüntetésre került a három stabilitási határhoz tartozó stabilitásvesztési eset is. A kitérések időfüggvényeinél a fekete pontok jelölik a mintavételi pontokat, melyekre a diszkrét idejű modell érvényes. Az „A” jelű esetben minden rezgésperiódusra két mintavétel jut, aminek nincs gyakorlati jelentősége, ugyanis a mintavételes rendszerek tervezésénél ennél jóval sűrűbb mintavételezés javasolt. A „B” jelű eset az úgynevezett *statikus stabilitásvesztés*, amikor nem alakul ki lengés, ami eredendően elkerülhető pozitív p erősítési tényező választásával. A „C” jelű eset a *dinamikus stabilitásvesztés* esete, melyben a gyakorlati alkalmazásokban is előforduló rezgésalakok fordulnak elő, ezért a további vizsgálatok ezen stabilitáshatár környezetére fognak fókuszálni.

Az analitikus stabilitásvizsgálat könnyen és gyorsan kiértékelhető eredményhez vezetett, azonban csak a súrlódásmentes, lineáris rendszerre vonatkozik. A súrlódás figyelembevétele esetén az itt bemutatott módszerek már érvényüket veszítik, így másmilyen megközelítés szükséges.

3.2. Szimulációs megközelítés

A Coulomb-súrlódás hatásai szimulációk során precízen figyelembe vehetők, ahogy az a 2.4. fejezetben is bemutatásra került, azonban szimulációkat csak véges ideig lehet futtatni, ami a stabilitásvizsgálat során korlátot jelent: hogyan lehet eldönteni egy véges ideig számított mozgás alapján, hogy az végtelen idő elteltével megáll-e vagy sem? Ennek vizsgálatára a továbbiakban egy jól ismert probléma alapján kerül sor.

3.2.1. Escape-time algoritmus

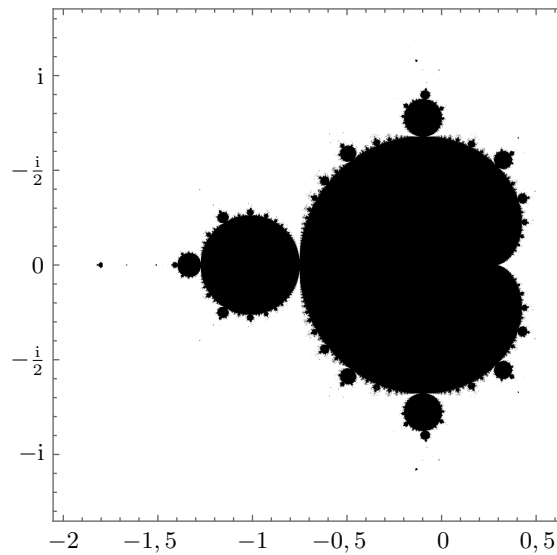
Tekintsük az alábbi

$$z_1 = 0 \tag{3.26}$$

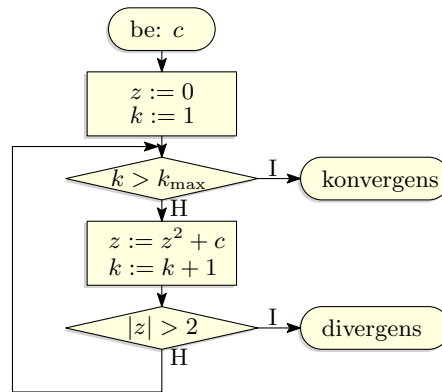
$$z_{k+1} = z_k^2 + c \tag{3.27}$$

komplex számsorozatot, ahol $c \in \mathbb{C}$ egy komplex értékű paraméter. A Mandelbrot-halmaz azon c paraméterek halmaza, melyekre a $\{z_k\}$ sorozat konvergál. Ezen pontokat ábrázolja a 3.4. ábra a komplex síkon.

A konvergencia meghatározására nincs zárt alakban felírható, analitikus megoldás, ehelyett az úgynevezett *escape-time algoritmus* alkalmazható, melynek folyamatábrája a 3.5. ábrán látható.



3.4. ábra. A Mandelbrot-halmaz.



3.5. ábra. A Mandelbrot-halmaz meghatározásához alkalmazott escape-time algoritmus folyamatábrája.

Az algoritmus működése azon alapul, hogy ha a sorozat eléri

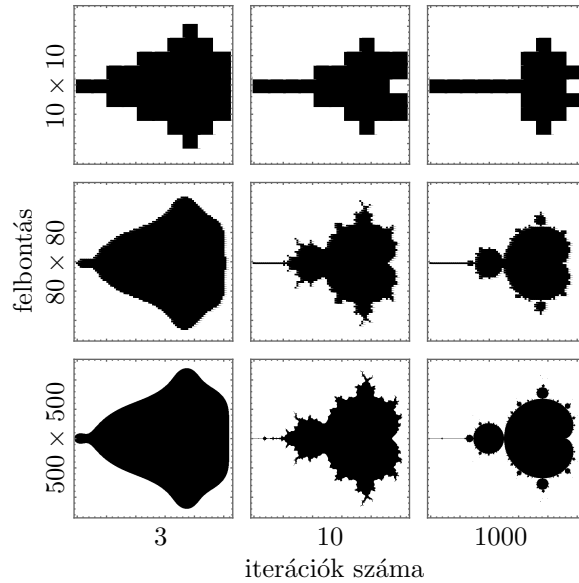
$$|z_k| > 2 \quad (3.28)$$

egyenlőtlenséggel leírható feltételt, akkor bizonyíthatóan divergálni fog. Ezt felhasználva az escape-time algoritmus kellően sok iterációig kiértékeli a sorozatot, és ha ez a feltétel bekövetkezik, akkor az adott c érték biztosan nem része a Mandelbrot-halmaznak. A maximális iterációs szám elérése után feltételezhető, hogy a vizsgált komplex szám a Mandelbrot-halmaz tagja.

Azt a k iterációs számot, amire a (3.28) feltétel teljesül, kilépési időnek (escape-time) nevezzük, amivel a divergencia „sebessége” jellemezhető. Gyakran a Mandelbrot-halmaz ábrázolásánál ezen érték alapján színezik a halmazon kívüli tartományt.

A módszer által kapott eredmény minőségileg egy időbeli és egy térbeli felbontással is jellemezhető. Időbeli felbontásnak tekinthető a az a maximális iterációs szám, amíg

az escape-time algoritmus kiértékeli a sorozatot, térbeli felbontásnak pedig a komplex síkon vizsgált c pontok sűrűsége. A 3.6. ábrán különböző beállítások mellett látható az algoritmus eredménye.



3.6. ábra. Az escape-time algoritmus eredménye különböző térbeli és időbeli felbontás esetén.

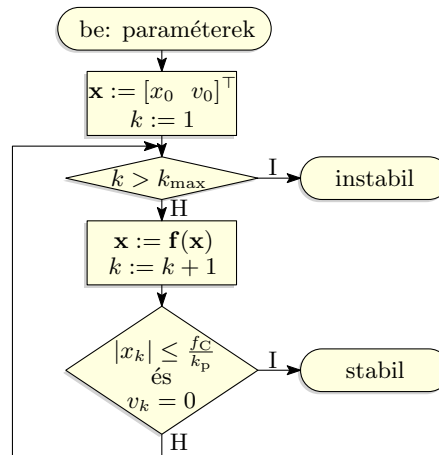
3.2.2. Numerikus stabilitásvizsgálat

Látszólag a Mandelbrot-halmaz nem kapcsolódik szorosan a mintavételes nemlineáris rendszerek stabilitásvizsgálatához, azonban bizonyos aspektusaikban fontos hasonlóságokat mutatnak:

1. Mind a $\{z_k\}$ számsorozat, mind az egy szabadsági fokú pozíciósabályozás modellje diszkrét idejű, nemlineáris dinamikai rendszert alkot.
2. Mindkét dinamikai rendszer kétdimenziós, ugyanis a z_k komplex szám, mint állapotváltozó egy valós és egy képzetes részből tevődik össze.
3. A $\{z_k\}$ komplex számsorozat konvergenciájának vizsgálata lényegében egy stabilitásvizsgálatnak is tekinthető.
4. A Mandelbrot-halmaz „szokásos” ábrázolása egyfajta stabilitási térképként is értelmezhető, ugyanis azokat a komplex c paramétereket jelöli, amelyre a konvergencia teljesül.
5. A $\{z_k\}$ sorozat esetén a $|z_k| > 2$ feltétel esetén garantált a divergencia, a konvergenciára azonban nincs egzakt feltétel. A pozíciósabályozásnál a statikus

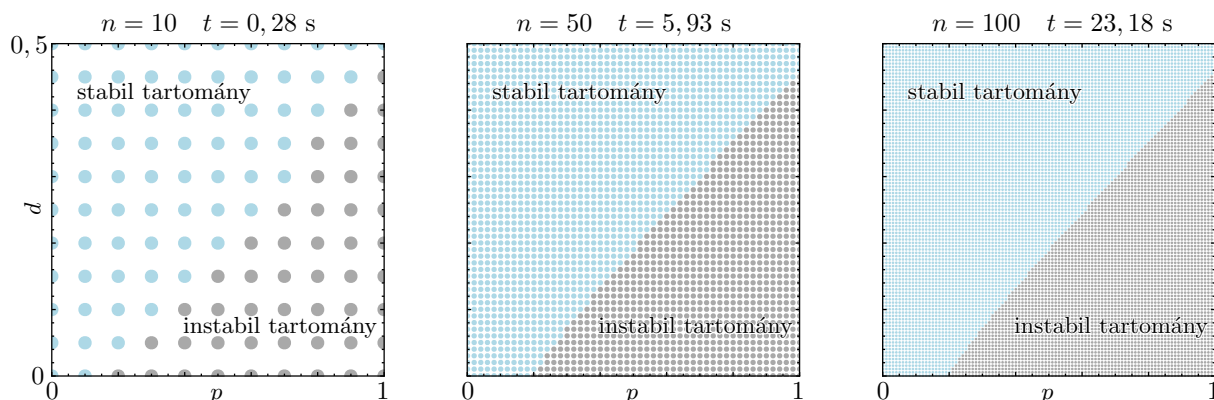
egyensúly elérése az a feltétel, amiből garantáltan következik a stabilitás, azonban az instabilitásra nincs ilyen kritérium. Mindkét rendszer esetén csak az egyik végkimenetel ellenőrizhető egzakt módon.

Ezen hasonlóságok alapján az escape-time algoritmus alkalmas lehet a pozíciószabályozási feladat során stabilitásvizsgálatra, ennek folyamatábrája a 3.7. ábrán látható. Az egyes iterációkban az állapot $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ leképezése a 2.4. fejezetben tárgyalt módon végezhető.



3.7. ábra. A stabilitásvizsgálathoz alkalmazott escape-time algoritmus folyamatábrája.

A stabilitási térkép meghatározásához a p - d paramétersíkon egy rács mentén felvehető $n \times n$ darab pont. Rögzített σ súrlódási paraméter és x_0, v_0 kezdeti feltételek mellett minden pontban meghatározható a kialakuló rezgések stabilitása az escape-time algoritmus segítségével. A paramétertartomány n felbontása meghatározza a kapott stabilitási térkép minőségét, ahogy azt a 3.8. ábra mutatja.

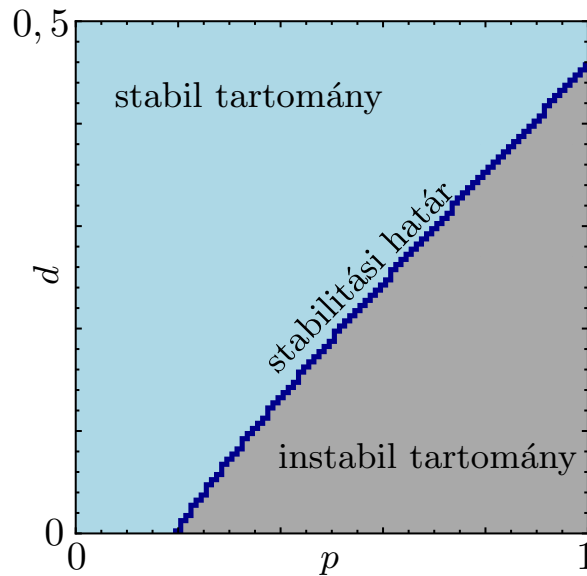


3.8. ábra. A numerikus stabilitásvizsgálat eredménye különböző felbontások esetén.

A számítások során a súrlódási paraméter értéke $\sigma = 0,0065$, valamint kezdeti feltételek $x_0 = 0,2$ és $v_0 = 0$ voltak, ami a 5. fejezetben későbbiekben bemutatásra kerülő kísérleti eszköz paramétereinek felel meg. A maximális iterációszám $k_{\max} = 1000$.

Látható, hogy a felbontás növelésével a számítási idő is növekszik, hiszen az a kiértékelendő pontok számával arányos. Az egyes elemi szimulációk számítási igénye különböző paraméterek esetén is közelítőleg megegyező (de legalábbis adható rá felső korlát), így az n^2 elvégzendő szimuláció $\mathcal{O}(n^2)$ számítási komplexitással írható le.

A stabilitási térkép színezhető aszerint, hogy a paraméterrács celláit milyen stabilitású pontok határolják: ha egy cella mind a négy sarka stabil, akkor a teljes cella tekinthető stabilnak, és fordítva. Bizonyos cellák sarkaiban azonban eltérő eredményt ad a stabilitásvizsgálat, ekkor a cellán belül húzódik a stabilitási határ, viszont annak pontos helyét a felbontásból eredő bizonytalanság terheli, ahogy azt a 3.9. ábra is mutatja.



3.9. ábra. A numerikus úton meghatározott stabil és instabil paramétertartományok és a stabilitási határ.

A bemutatott módszer előnye, hogy a száraz súrlódás hatásait is képes figyelembe venni, azonban a stabilitási térkép csak véges felbontással számítható. A stabilitási határ pontosabb meghatározásához, vagy akár magasabb dimenziójú paramétertér esetén az algoritmus hatékonysága már komoly problémákat jelenthet.

4. Optimalizálási módszerek

A numerikus stabilitásvizsgálati módszer legfőbb hátránya, hogy egy-egy szimuláció csak az adott paraméterkombinációra és kezdeti feltételre érvényes. Stabilitási térképek meghatározásához ilyen szimulációk sokaságát szükséges elvégezni, ami nagy számítási kapacitást igényel. Ez a fejezet olyan optimalizálási módszereket mutat be, melyekkel ez a számítási igény csökkenthető.

4.1. Szimulációk párhuzamosítása GPU-val

Az optimalizálásra kézenfekvő megközelítést jelent a szimulációk párhuzamos futtatása, ugyanis két különböző paraméterkombináció esetén a stabilitásvizsgálatok eredménye független egymástól, így azok időben egyszerre is elvégezhetők.

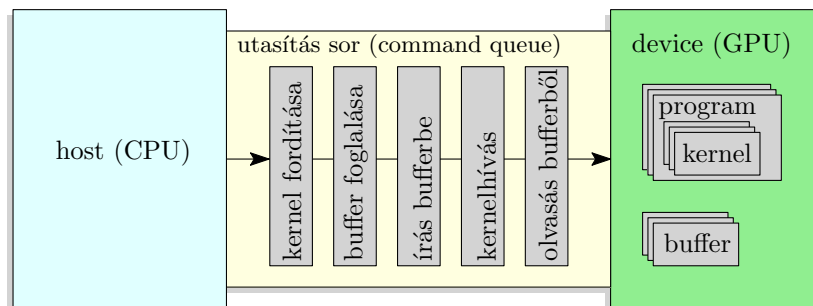
A párhuzamos végrehajtás több processzormag kihasználásával is megvalósítható, azonban a magok száma korlátozza az egyidőben futtatható szimulációk számát. Jóval nagyobb fokú párhuzamosítás érhető el a grafikus processzor (GPU) segítségével, ugyanis a grafikai számítási feladatok jellemzően több ezer számítás egyidejű elvégzését igénylik.

A grafikus processzorok nem kizárólag grafikai feladatokra alkalmazhatók, hanem általános célú számításokra is beprogramozhatók. Ezen felhasználási terület angol rövidítése a GPGPU (general-purpose computing on graphics processing units), melyre különböző fejlesztési platformok érhetők el.

4.1.1. Az OpenCL keretrendszer

Az OpenCL (Open Computing Language) egy párhuzamos számítási feladatokra alkalmazható, nyílt szabványú keretrendszer [18], ami különféle hardveres platformokat támogat, többek között grafikus kártyákat. Egy OpenCL alkalmazás működésének két

fő szereplője van, ahogy azt a 4.1. ábra is szemlélteti. A host (gazda) egy konvencionális, CPU-ra írt program, ami a teljes működést koordinálja. A device (eszköz) a párhuzamos számításokra alkalmas eszköz, jelen esetben egy GPU.



4.1. ábra. Egy OpenCL alkalmazás sematikus felépítése.

Az OpenCL párhuzamos végrehajtási modelljének legfontosabb objektuma a *kernel*: ez egy, a konvencionális függvényekhez hasonló rutin vagy programrészlet, azonban a végrehajtása jelentősen eltér: egy számítási feladat során annyi darab kernelhívás jön létre egymástól függetlenül, ahány párhuzamosítható munkaegységre osztható az adott feladat. Jelen esetben a szimulációt végző kernel meghatározza, hogy egyetlen paraméter- és kezdetiérték-kombináció esetén stabil vagy instabil viselkedést mutat-e a rendszer. Meghívásakor azonban több ezer példányban fut le, különböző paraméterekkel, így a GPU-n párhuzamosítva kerül végrehajtásra.

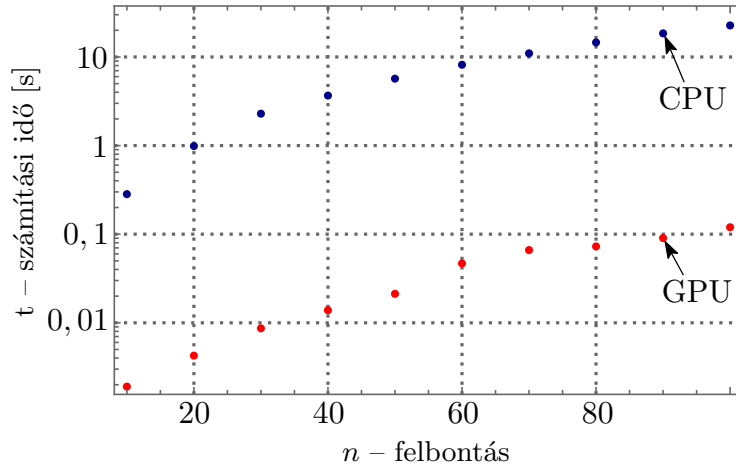
A kernelek azonban nem férnek hozzá a host memóriájához, csak a GPU-n létrehozott memóriaobjektumokhoz, a *bufferek*hez. A kernelhívásokat legtöbbször bufferek létrehozása és azok adatokkal való feltöltése előzi meg, majd a kernel közvetlenül ezeken az adatokon képes számításokat végezni. Az eredményeket ezután vissza kell másolni a host memóriájába. A memóriaelérés és a másolási műveletek sávszélessége alapvetően meghatározza a program hatékonyságát, így a memóriakezelést nagy körültekintéssel kell megtervezni.

A host és a device közötti kommunikációt egy *utasítás sor* (command queue) teszi lehetővé, amire a host különböző utasításokat helyezhet el. Ilyen például egy program és a hozzá kapcsolódó kernelek létrehozása és lefordítása, kernelhívások és különböző adatcsere műveletek.

4.1.2. Implementáció

A numerikus stabilitásvizsgálat OpenCL nyelven is implementálásra került, ami nagymértékben lecsökkentette a szükséges számítási időt, ahogy az a 4.2. ábrán is látható. Jól látható, hogy a GPU-s implementáció több, mint két nagyságrenddel gyorsabban

állítja elő az eredményt. Ez annak köszönhető, hogy a GPU-n egyszerre több ezer párhuzamos szálon történik a végrehajtás, így annyiszor kevesebb idő szükséges az összes paraméterkombináció vizsgálatához. Jól látszik azonban az is, hogy a számítási komplexitást ez nem befolyásolja, ami az előzőekhez hasonlóan $\mathcal{O}(n^2)$ maradt.



4.2. ábra. A stabilitásvizsgálat CPU-s és GPU-s implementációjának számítási ideje különböző felbontások esetén.

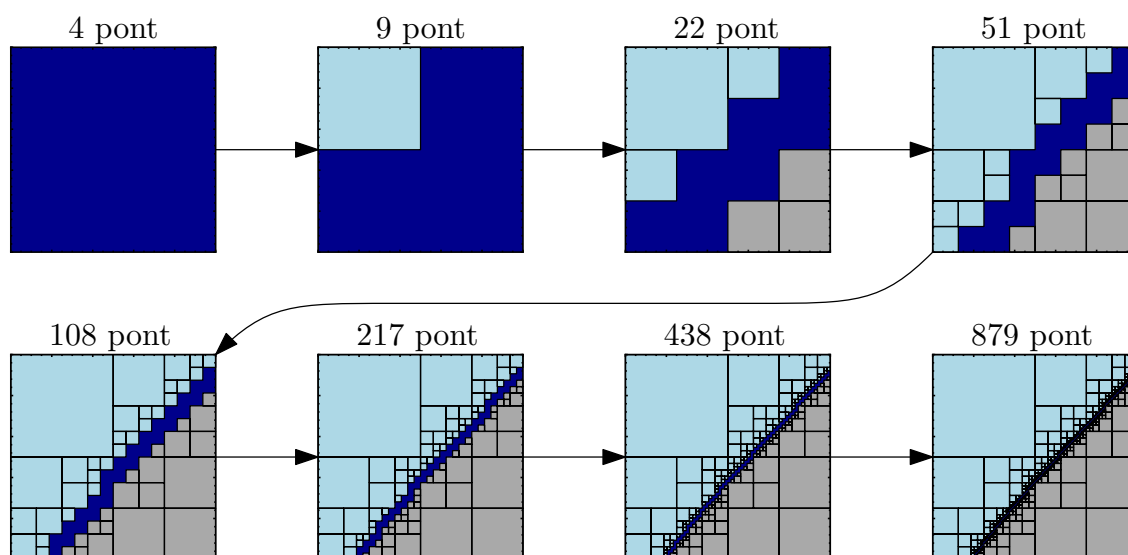
4.2. Mezők adaptív felosztása

A stabilitási határ pontosabb meghatározásához a vizsgált paraméterrácsot sűrűbbnek kell választani. Ez jobb minőségű végeredményhez vezet, azonban a rács sűrítése csak a stabilitási határ környezetében indokolt, az egybefüggő nagyobb stabil vagy instabil területeken nem ad többletinformációt.

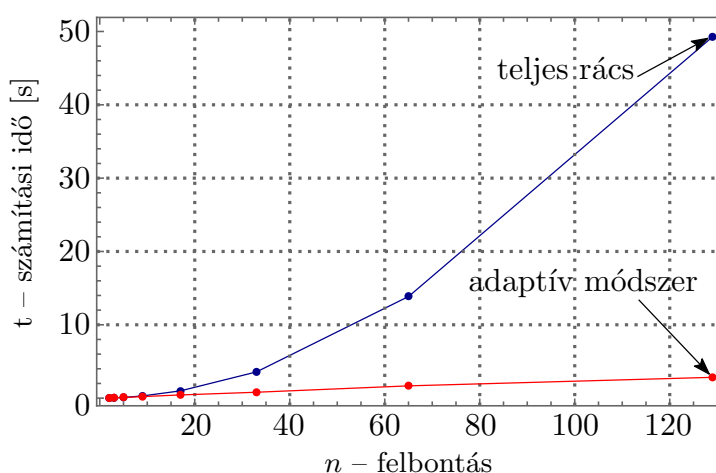
Hatékony megoldást jelenthet az, ha egy durvább kiindulási paraméterrácsnak csak azok a mezői kerülnek újrafelosztásra és finomításra, ahol a stabilitási határ keresztül-megy. Ez az intervallumfelezési módszer többdimenziós kiterjesztésével [19] könnyen elvégezhető.

Két dimenziós paramétertér esetén azokat a cellákat kell négy részre osztani, amelyek sarkain a stabilitásvizsgálat eltérő eredményt mutat, majd a négy részterületen kell folytatni a vizsgálatot. Ezt rekurzív módon ismételve a 4.3. ábrán látható módon egyre nagyobb felbontásban határozható meg a stabilitási határ.

A területek adaptív módon történő minden újabb felosztása megduplázza a kapott eredmény felbontását. Az eredeti megközelítéssel szemben azonban sokkal kevesebb újabb szimuláció elvégzése szükséges, ugyanis azok csak a stabilitási határ környezetére koncentrálnak. A módszer hatékonyságát az eredeti megközelítéssel szemben a 4.4. ábra szemlélteti.



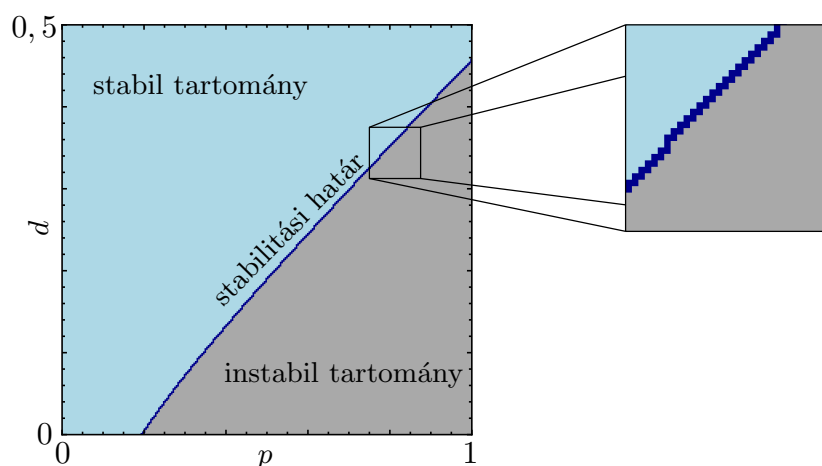
4.3. ábra. A stabilitási térkép felbontásának növelése a területek adaptív felosztásával.



4.4. ábra. Az adaptív területfelosztási módszer és az eredeti megközelítés számítási ideje különböző felbontások esetén.

Jól látható, hogy amellet, hogy a számítási idő jelentősen lecsökkent, a négyzetes komplexitás helyett az adaptív módszer lineáris jelleget mutat. Ez könnyen belátható, hiszen a kétdimenziós paramétertartományon a stabilitási határ egy egydimenziós sokaság, és csak ennek mentén történik a felbontás növelése, így ez a megközelítés $\mathcal{O}(n)$ komplexitású.

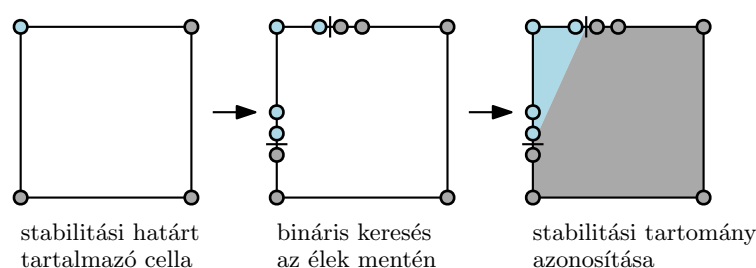
A módszer hátulütője azonban a 4.5. ábrán látható módon az, hogy bármennyire növeljük a felbontást, maga a stabilitási határ nem lesz előállítható sima, rektifikálható görbeként.



4.5. ábra. Az adaptív területfelosztási módszerrel meghatározott stabilitási térkép és az így kapott stabilitási határ.

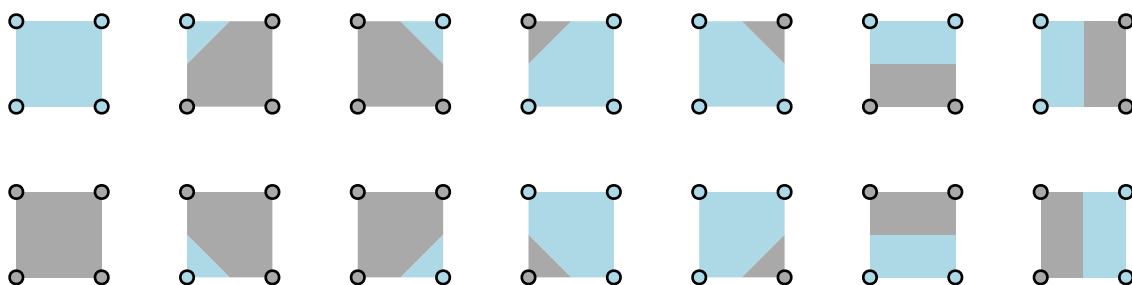
4.3. Marching squares algoritmus

A stabilitási határ pontosabb közelítésének módja a *marching squares algoritmus* [20], melyet széles körben alkalmaznak implicit függvények rajzolására. A módszer lényegét a 4.6. ábra szemlélteti: ha egy cella négy sarkán eltérő a stabilitás, akkor azon a stabilitási határ áthalad. Meghatározható az a cella azon két éle, melyeket a határvonal átmetsz, és ezeken bináris kereséssel (intervallumfelezéssel) meghatározhatók a metszéspontok. A cella sarkai és a metszéspontok összekötésével a stabil és instabil paramétertartomány is meghatározható. A stabilitási határt a cellán belül a metszéspontok összekötésével kapott szakasz közelíti.



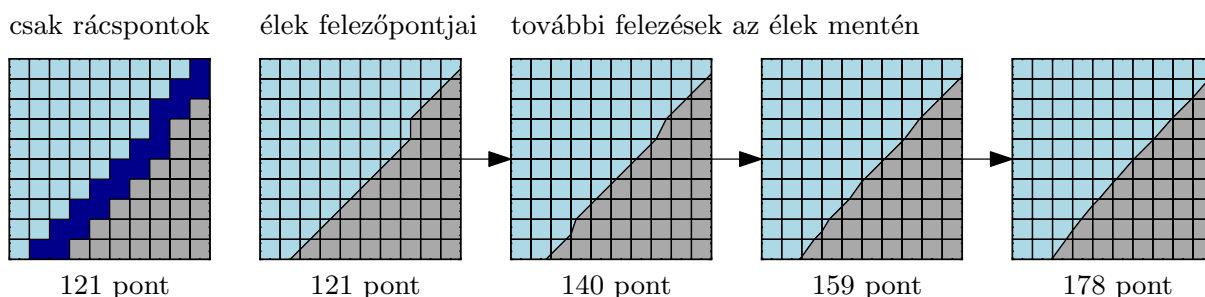
4.6. ábra. A marching squares algoritmus egy határvonalat tartalmazó cella esetén.

Attól függően, hogy a vizsgált cella mely sarkán milyen eredményt ad a stabilitás-vizsgálat, különböző esetek különböztethetők meg. Ezeket az alapeseteket a 4.7 ábra szemlélteti.



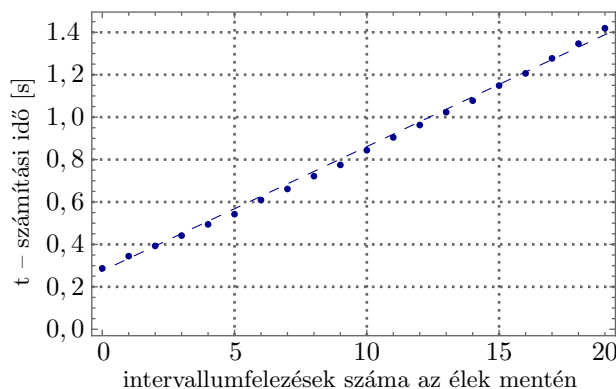
4.7. ábra. Különböző cellák alapesetei a marching squares algoritmusban.

A marching squares algoritmus stabilitásvizsgálatra történő alkalmazását a 4.8. ábra mutatja. Jól látható, hogy a stabilitási határ egy töröttvonalaként áll elő, ami az intervallumfelezések elvégzésével pontosítható, azonban az eredeti rács mentén a határvonal töréspontokat tartalmazhat.



4.8. ábra. A marching squares algoritmussal kapott stabilitási térkép különböző él menti felbontás esetén.

Az algoritmus számítási igényét a 4.9. ábra mutatja. Jól látható, hogy az intervallumfelezések számának növelése és a számítási idő között lineáris kapcsolat áll fenn. Ez azzal magyarázható, hogy minden lépésben ugyanazokon az éleken egy-egy újabb felezőpontra kell elvégezni a stabilitásvizsgálatot, így a szimulációk száma egyenletesen növekszik $\mathcal{O}(n)$ komplexitás szerint.



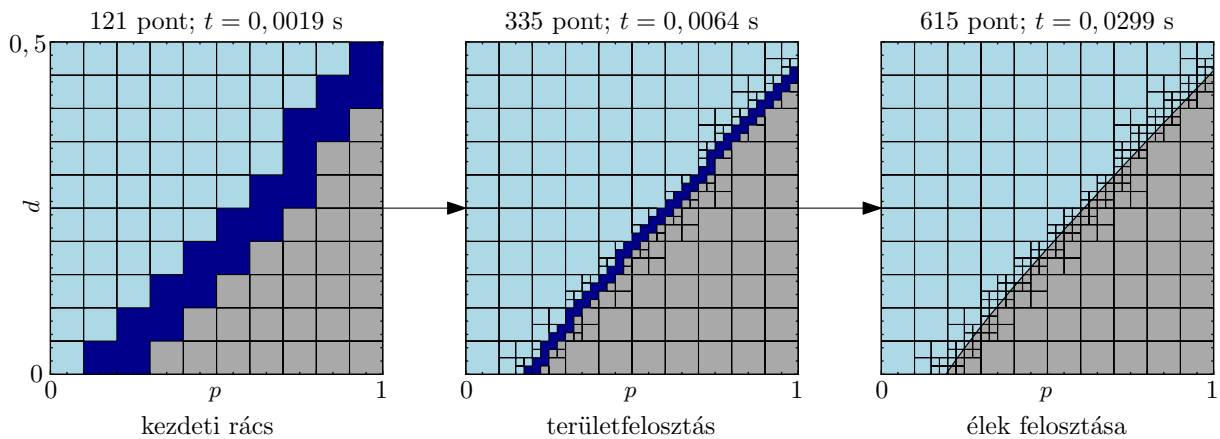
4.9. ábra. A számítási idő növekedése különböző számú intervallumfelezés esetén.

A marching-squares algoritmus már minőségileg más eredményt ad, hiszen az egydimenziós stabilitási határ közelítését állítja elő, és nem adott kétdimenziós résztartományok stabilitását határozza meg. Éppen ezért a korábbi módszerekkel történő összehasonlítás ebben az esetben nem végezhető el.

4.4. Párhuzamos adaptív marching squares algoritmus

Az előzőekben különféle optimalizálási módszerek kerültek bemutatásra a stabilitási térkép meghatározásához. Jelen dolgozat fő javaslatlétéle ezen módszerek együttes alkalmazása és az így kapott *párhuzamos adaptív marching squares algoritmus*, amellyel az összes bemutatott megközelítés előnye kombinálható.

A módszer alkalmazásának fő lépéseit a 4.10. ábra szemlélteti. A stabilitásvizsgálatot először egy kiindulási paraméterrács mentén kell elvégezni, ami a különböző tartományok durva közelítését adja meg. Ezt követően több lépésben finomítható adaptív területfelosztásokkal a stabilitási határt tartalmazó régió, amin belül végül a marching squares algoritmus segítségével kerül meghatározásra a pontos stabilitási határ. Ezen felül az egyes részlépések során újonnan elvégzendő stabilitásvizsgálatok kiértékelése GPU-n párhuzamosítva történik a legnagyobb hatékonyság elérése végett.

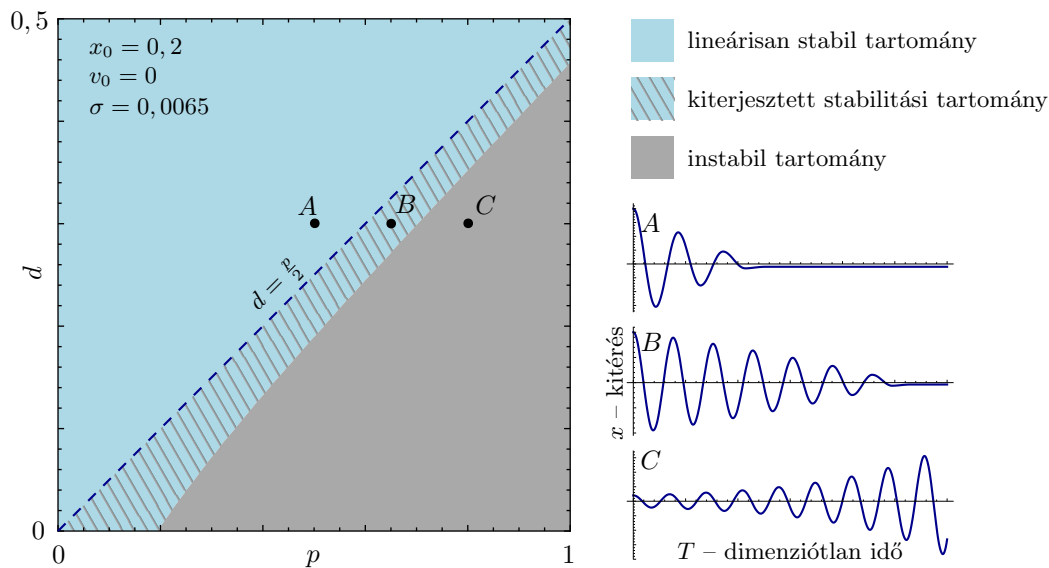


4.10. ábra. A párhuzamos adaptív marching squares algoritmus lépései.

A párhuzamos adaptív marching squares algoritmus paraméterei a következők:

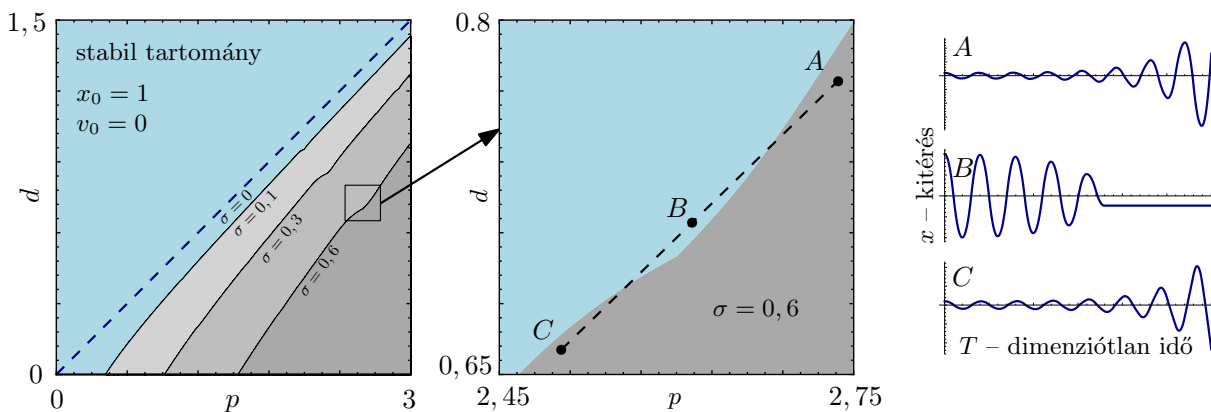
1. A kezdeti paraméterrács kiosztása.
2. Az adaptív területfelosztások (negyedelések) száma.
3. Az intervallumfelezések száma a marching squares algoritmus során.

A bemutatott rendszerrel elvégezve a stabilitásvizsgálatot a 4.11. ábrán látható stabilitási térkép áll elő. A lineáris esettel szemben a stabil paramétertartományt a Coulomb-súrlódás kiterjeszti, így szélesebb működési tartományban is alkalmazható a vizsgált szabályozási rendszer. Ezt a feltüntetett szimulációk eredménye is megerősíti.



4.11. ábra. A száraz súrlódásos rendszer stabilitási térképe a kiterjesztett stabil paramétertartománnyal.

A bemutatott módszert különböző σ dimenziótlan súrlódási paraméterek esetén alkalmazva meghatározható az is, hogy a súrlódás növelésével milyen módon tolódik el a stabilitási határ. A 4.12. ábrán látható, hogy a stabilitási határnak nem csak a helye, hanem a jellege is megváltozik.



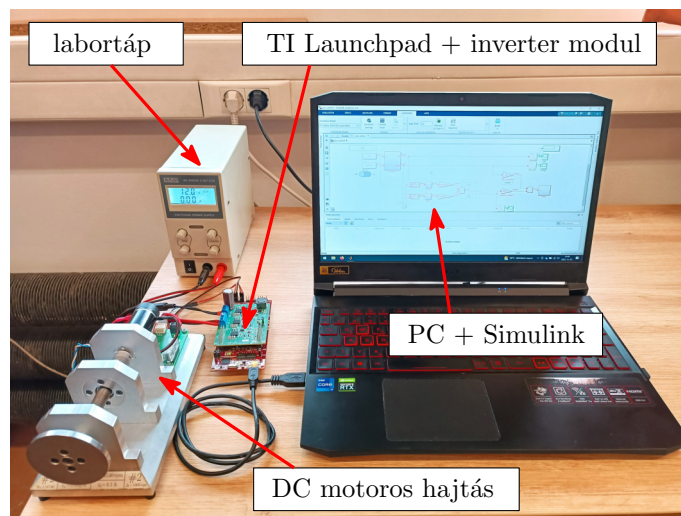
4.12. ábra. A súrlódás hatása a stabil paramétertartományra.

A legszembetűnőbb változás az, hogy a stabil paramétertartomány a 3.3. ábrán látott lineáris esettől eltérően nem konvex, hanem apró kitülemkedéseket tartalmaz. A feltüntetett szimulációs eredmények alapján látható, hogy ez nem a stabilitásvizsgálat numerikus hibája, hanem a rendszer valóban így viselkedik.

5. Kísérleti eredmények

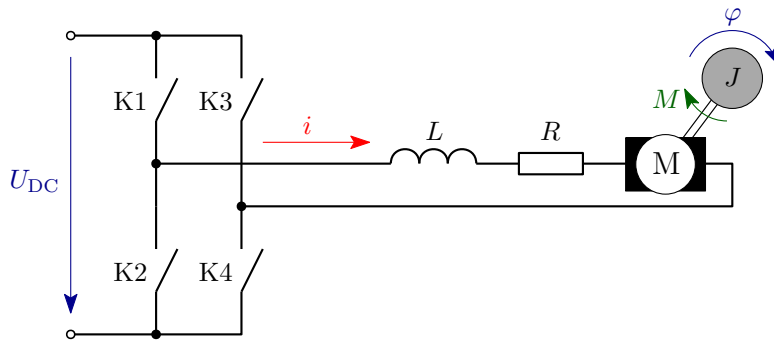
Az előző fejezetekben bemutatott eredmények kísérleti úton is igazolásra kerültek. Jelen fejezet a mérési elrendezés felépítését, az azon elvégzett paraméteridentifikációt, valamint a kísérleti eredményeket mutatja be.

Kísérleti eszközként az 5.1. ábrán látható elrendezésben szereplő keféssé, egyenáramú motoros hajtás szolgált. A képen látható Maxon 118746 típusú motor egy tengelykapcsolón keresztül egy csapágyazott acéltengelyt és a hozzá rögzített alumíniumtárcsát hajtotta meg. A forgórész szögelfordulásának mérése inkrementális enkóder segítségével történt.



5.1. ábra. A mérések során használt kísérleti elrendezés.

A mérés központi egysége egy Texas Instruments LAUNCHXL-F28379D fejlesztői kártya (Launchpad), amelyre egy BOOSTXL-3PHGANINV típusú inverter csatlakozott. Az inverter három hídágából a 5.2. ábrának megfelelően kettő került felhasználásra H-híd elrendezésben. A Launchpad programozása és a mérésadatgyűjtés Simulink környezetből történt kódgenerálással és az *external mode* segítségével, ami az adatrögzítés mellett lehetővé tette futás közben a paraméterek hangolását is.



5.2. ábra. A kísérleti elrendezés sematikus ábrája.

A DC motoros hajtások egyik legfontosabb jellemzője, hogy a leadott M villamos nyomaték arányos az armatúrán átfolyó i áram erősségével az alábbi

$$M = k_m \cdot i \quad (5.1)$$

összefüggés szerint, ahol $k_m = 43,9 \text{ mNm/A}$, a mért motor *nyomatékállandója*. A mérések során áramszabályozás került megvalósításra, így az áramszabályozónak adott i_{ref} referenciaáram tekinthető egy $M = i_{\text{ref}} \cdot k_m$ nagyságú nyomatékgerjesztésnek. Így a forgórész mozgásegyenlete Coulomb-súrlódást feltételezve

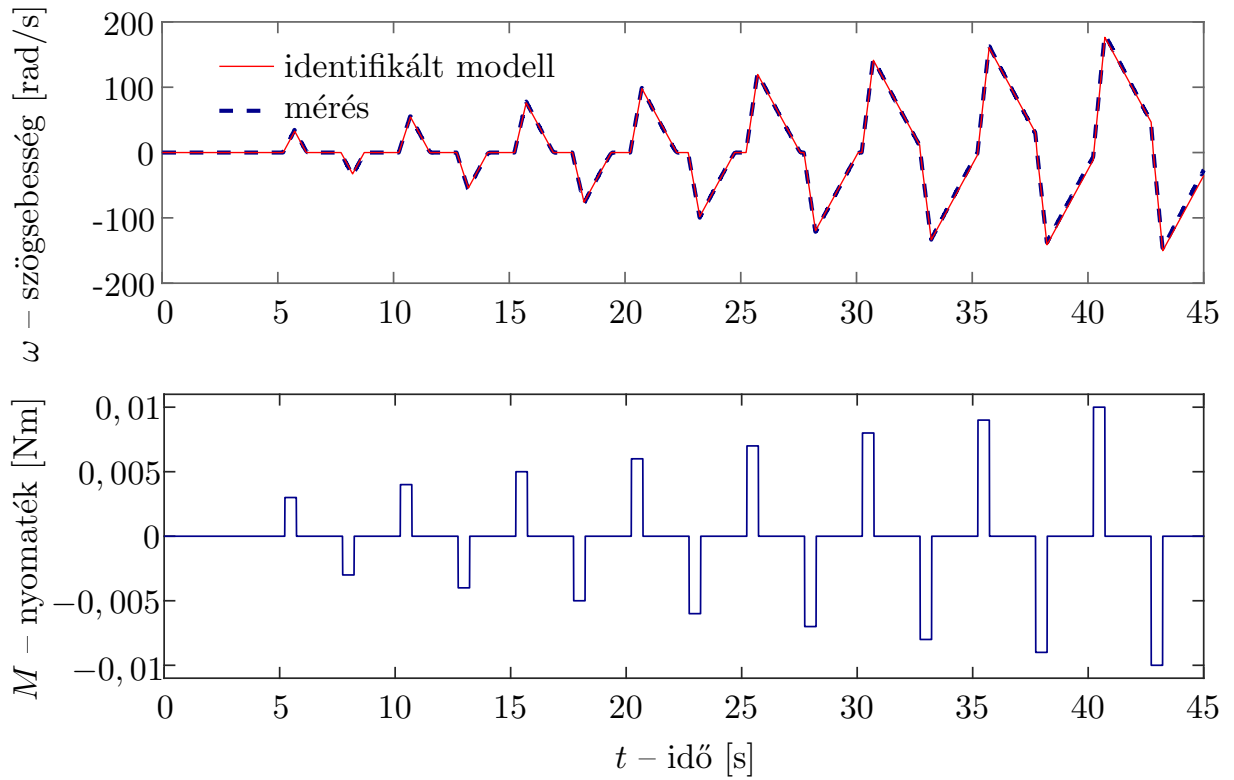
$$J \ddot{\varphi} = M - M_C \text{sgn}(\dot{\varphi}) \quad (5.2)$$

alakban írható fel, ahol J a forgórész tehetetlenségi nyomatéka, φ a szögelfordulás és M_C a Coulomb-súrlódás nagysága. A kapott mozgásegyenlet formálisan megegyezik az (2.1) egyenlettel, azonban a tehetetlenségi és a súrlódási paraméterek nem ismertek.

5.1. Paraméteridentifikáció

A mozgásegyenlet ismeretlen paraméterei paraméteridentifikáció segítségével becsülhetők. Az identifikáció a Matlab szoftver System Identification Toolbox kiegészítője segítségével történt a 2.4. fejezetben leírt modell, valamint a valós eszközön mért be- és kimeneti adatok megadásával.

A rendszer bemenete a forgórészeket gyorsító nyomaték, a kimenet pedig a forgórész ω szögsebessége, ami a szögelfordulás numerikus deriválásával állt elő. Mivel a bemeneti jel önkényesen megválasztható, célszerű olyan bemenetet konstruálni, ami széles működési tartományban gerjeszti a rendszert. Jelen esetben a gerjesztés az 5.3. ábrán látható nyomatékimpulzusokból állt, melyek felváltva pozitív és negatív előjelűek és időben növekvő nagyságúak.



5.3. ábra. A paraméteridentifikációs mérések eredménye.

Jól látható, hogy a szögsebesség szakaszosan lineáris függvény, ami a Coulomb súrlódási modellnek megfelel, hiszen ekkor szakaszosan állandó erő hat a forgórészre. Az identifikáció eredményeként az 5.3. ábra szerinti modell állt elő, mely 96,07%-os illeszkedést mutat a mért jelekre, és paraméterei az alábbiak:

$$J = 2,3015 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2 \quad \text{és} \quad M_C = 0,001495 \text{ Nm.} \quad (5.3)$$

5.2. Mérési eredmények

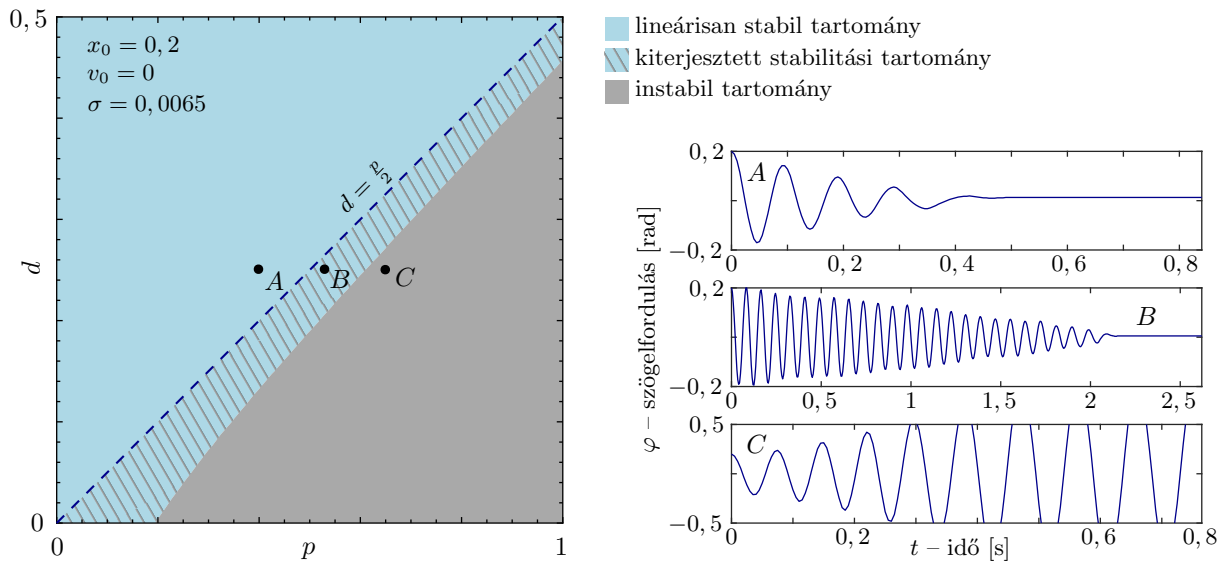
Az identifikáció elvégzése után a (2.10) egyenlettel leírt szabályozó is implementálásra került. Az alkalmazott $\tau = 0,01$ s mintavételi idő mellett a dimenziótlan súrlódási paraméter értéke

$$\sigma = \frac{M_C \tau^2}{J} = 0,0065, \quad (5.4)$$

valamint a szabályozó p és d dimenziótlan erősítési tényezői a mérések során szabadon megválaszthatók, a kezdeti feltételek pedig $\varphi_0 = 0,2$ rad és $\omega_0 = 0$ rad/s értékűek voltak.

A kísérletek célja a 5.4 ábrán látható különböző stabilitási zónák vizsgálata volt, és annak igazolása, hogy a stabil paramétertartományt a bemutatott numerikus módszer eredményeinek megfelelően a száraz súrlódás valóban kiterjeszti-e.

A vizsgált rezgések alapján látható, hogy azokon a tartományokon, amelyeket a numerikus stabilitásvizsgálat stabilnak ítélt meg, valóban lecsengő rezgések alakulnak ki, az instabil régiókon pedig a rezgés amplitúdója korlátlanul növekszik. A látottak alapján levonható a végső következtetés, miszerint a dolgozatban bemutatott módszerek jól alkalmazhatók mechatronikai rendszerek stabilitásvizsgálatára.



5.4. ábra. Mérési eredmények a különböző stabilitási tartományokban.

6. Összefoglalás

Jelen dolgozat olyan mechatronikai rendszerek stabilitásvizsgálatát tárgyalta, melyekben egyaránt megjelennek a mintavételezés és a száraz súrlódás hatásai. Bemutatásra került, hogy ezen jelenségek precíz figyelembevételéhez a szakaszosan folytonos hatásokat diszkrét idejű modellekkel és Filippov-típusú rendszerek analízisével szükséges vizsgálni.

Meghatározásra került egy diszkrét idejű szimulátor, amivel a vizsgálat tárgyát képező egy szabadsági fokú pozíciószabályozási modell mozgása egzakt módon leírható. Az ehhez szükséges feltétel- és leképezésrendszer levezetése a szakirodalomtól eltérő módon, a mintavételezés és a Coulomb-súrlódás, valamint ezek kölcsönhatásainak teljes figyelembevételével történt.

A célkitűzésnek megfelelően elkészült egy szimulációkon alapuló stabilitásvizsgálati eljárás, amellyel a vizsgált rendszer stabilitási térképe készíthető el. A numerikus módszer különböző optimalizálási lehetőségei is bemutatásra kerültek a számítási idő és a komplexitás figyelembevételével. Ezen módszerek újszerű kombinációjával nagy felbontással és hatékonyan határozhatók meg a stabilitási térképek.

A stabilitásvizsgálat eredményei alapján az a fontos következtetés is levonható, hogy a száraz súrlódás a stabilitási tartományt nem csak kiterjeszti, hanem a stabilitási határ alakja minőségileg is megváltozik. A bemutatott eredményeket szimulációk és kísérleti úton elvégzett mérések is igazolják.

A Kulturális és Innovációs Minisztérium **ÚNKP-22-2-III-BME-335** kódszámú
Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs
Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI
ÉS INNOVÁCIÓS HIVATAL



Új Nemzeti
Kiválóság Program

7. Felhasznált irodalom

- [1] Khosla, P., „Choosing sampling rates for robot control”, in: „Proceedings. 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation”, volume 4, pp. 169–174, Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1987. doi:[10.1109/robot.1987.1088017](https://doi.org/10.1109/robot.1987.1088017)
- [2] Lages, W. F., Alves, J. A. V., „REAL-TIME CONTROL OF a MOBILE ROBOT USING LINEARIZED MODEL PREDICTIVE CONTROL”, *IFAC Proceedings Volumes*, 39(16), pp. 968–973, 2006. doi:[10.3182/20060912-3-de-2911.00166](https://doi.org/10.3182/20060912-3-de-2911.00166)
- [3] Faulwasser, T., Weber, T., Zometa, P., Findeisen, R., „Implementation of nonlinear model predictive path-following control for an industrial robot”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(4), pp. 1505–1511, 2017. doi:[10.1109/tcst.2016.2601624](https://doi.org/10.1109/tcst.2016.2601624)
- [4] Colgate, J. E., Schenkel, G. G., „Passivity of a class of sampled-data systems: Application to haptic interfaces”, *Journal of Robotic Systems*, 14(1), pp. 37–47, 1997. doi:[10.1002/\(sici\)1097-4563\(199701\)14:1<37::aid-rob4>3.0.co;2-v](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-4563(199701)14:1<37::aid-rob4>3.0.co;2-v)
- [5] Salisbury, K., Conti, F., Barbagli, F., „Haptics rendering: Introductory concepts”, *IEEE computer graphics and applications*, 24(ARTICLE), pp. 24–32, 2004. doi:[10.1109/MCG.2004.1274058](https://doi.org/10.1109/MCG.2004.1274058)
- [6] Sheng, J., Liu, P., „A review of bilateral sampled-data control of teleoperators”, in: „2004 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics”, pp. 385–390, IEEE, 2004. doi:[10.1109/robio.2004.1521809](https://doi.org/10.1109/robio.2004.1521809)
- [7] Culbertson, H., Schorr, S. B., Okamura, A. M., „Haptics: The present and future of artificial touch sensation”, *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*, 1(1), pp. 385–409, 2018. doi:[10.1146/annurev-control-060117-105043](https://doi.org/10.1146/annurev-control-060117-105043)
- [8] Astrom, K. J., *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*, PRENTICE HALL, 1996
- [9] Feng, L., Song, Y., „Stability condition for sampled data based control of linear continuous switched systems”, *Systems and Control Letters*, 60(10), pp. 787–797, 2011. doi:[10.1016/j.sysconle.2011.07.006](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2011.07.006)

- [10] Goodwin, G. C., Yuz, J. I., Aguero, J. C., Cea, M., „Sampling and sampled-data models”, in: „Proceedings of the 2010 American Control Conference”, pp. 1–20, IEEE, 2010. doi:[10.1109/acc.2010.5531562](https://doi.org/10.1109/acc.2010.5531562)
- [11] Richard, J.-P., „Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems”, *Automatica*, 39(10), pp. 1667–1694, 2003. doi:[10.1016/s0005-1098\(03\)00167-5](https://doi.org/10.1016/s0005-1098(03)00167-5)
- [12] Ogata, K., Discrete-time control systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1987
- [13] Feng, G., „Stability analysis of piecewise discrete-time linear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(7), pp. 1108–1112, 2002. doi:[10.1109/tac.2002.800666](https://doi.org/10.1109/tac.2002.800666)
- [14] Chen, T., Francis, B., „Input-output stability of sampled-data systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(1), pp. 50–58, 1991. doi:[10.1109/9.62267](https://doi.org/10.1109/9.62267)
- [15] Budai, C., L., L. K., „On the stability of digital position control with viscous damping and coulomb friction”, *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, 61(4), p. 266, 2017. doi:[10.3311/ppme.10537](https://doi.org/10.3311/ppme.10537)
- [16] Budai, C., Kovács, L. L., Kövecses, J., „Combined effect of sampling and coulomb friction on haptic systems dynamics”, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 13(6), 2018. doi:[10.1115/1.4039962](https://doi.org/10.1115/1.4039962)
- [17] di Bernardo Laurea, M., Champneys, A. R., Budd, C. J., Kowalczyk, P., eds., Piecewise-smooth Dynamical Systems, Springer London, 2008. doi:[10.1007/978-1-84628-708-4](https://doi.org/10.1007/978-1-84628-708-4)
- [18] Scarpino, M., OpenCL in action, Manning Publications, 2011
- [19] Bachrathy, D., Stépán, G., „Bisection method in higher dimensions and the efficiency number”, *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, 56(2), p. 81, 2012. doi:[10.3311/pp.me.2012-2.01](https://doi.org/10.3311/pp.me.2012-2.01)
- [20] Maple, C., „Geometric design and space planning using the marching squares and marching cube algorithms”, in: „2003 International Conference on Geometric Modeling and Graphics, 2003. Proceedings”, pp. 90–95, 2003. doi:[10.1109/GMAG.2003.1219671](https://doi.org/10.1109/GMAG.2003.1219671)