

Edvy Máté

VISZONTBIZTOSÍTÁSI MODELLEK VIZSGÁLATA

Témavezető: Dr. Mihálykóné Dr. Orbán Éva

Műszaki Informatika Kar, Matematika Tanszék

Pannon Egyetem

Intézményi Tudományos Diákköri Konferencia

2022



Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1. Tématerület bemutatása	3
1.2. Célkitűzések	4
2. Az alapmodell	7
2.1. Az alapmodell matematikai megfogalmazása	7
2.2. Az alapmodellre vonatkozó eredmények: a folyamat jellemzőinek paramétereiktől való függése	16
3. Egyoldali viszontbiztosítás	22
3.1. Az alapmodell kibővítése egyoldali viszontbiztosítással és szimulációs eredmények	22
3.2. A program kibővítése egyoldali viszontbiztosítással	24
4. Kétoldali viszontbiztosítás	31
4.1. Az alapmodell kibővítése kétoldali viszontbiztosítással	31
4.2. A tönkremenési valószínűségek vizsgálata kétoldali viszontbiztosítás esetén	34
4.3. Szimulációs eredmények kétoldali viszontbiztosítás esetén	39
5. A program	49
5.1. A szimulációs program ismertetése	49
5.2. A program felépítése	49
6. Összefoglalás	51
7. Irodalomjegyzék	53
8. Ábrajegyzék	54

1. Bevezetés

1.1. Tématerület bemutatása

A mai világban elképzelhetetlen az életünk biztosítások nélkül. Lakásbiztosítás, autóbiztosítás, sok embernek még életbiztosítása is van, hogy egy bekövetkező kár vagy baleset esetén a társaság fedezze a kárt. Ezek csak a legalapvetőbb, magánszemélyekre vonatkozó biztosítások, de jogi személyek is kötnek biztosítást, és ezek jóval nagyobb összegűek, mint a magánembereké.

Látható tehát, hogy a biztosítás egy hatalmas pénzforgalommal rendelkező üzletág, melyben a társaságok elemi érdeke, hogy versenyképesek legyenek a konkurenciával szemben és minél nagyobb nyereségre tudjanak szert tenni. Nyilvánvalóan a cégek igyekeznek minél nagyobb ügyfélkört kiépíteni, azonban a versenytársakból is akad bőven, így olyat kell egy vállalatnak nyújtania, amit a másik nem tud, vagy ő alacsonyabb áron tudja azt kínálni. Az ügyfelek számára az a legfontosabb, hogy minél szélesebb körű biztosítások közül tudjanak választani és ezek árai kedvezőek legyenek számukra. Ennek meghatározása viszont nem könnyű, hiszen sok szempontot kell figyelembe venni. Egy olyan társaság, amely több évtizedes múltat tekint vissza, ismeretében van ezeknek a szempontoknak, de az új szereplőknek a piacon fel kell mérni a piacra lépés előtt, hogy milyen területen szeretnének biztosítást kínálni. Meg kell vizsgálniuk, hogy azon a területen milyen gyakoriságúak és nagyságúak a bekövetkező károk és ezáltal mekkora bevételt kell elérniük az ügyfelek által befizetett pénzből, hogy a cég ne menjen csődbe, ki tudja fizetni a beérkező követeléseket és közben még profitot is tudjon termelni, amit aztán kamatoztat, befektethet, vagy viszontbiztosításra fordít.

Dolgozatom a viszontbiztosítási modellek vizsgálatáról szól, mely magába foglalja a csőd bekövetkezésének várható idejét, a felmerülő hiány nagyságát különböző pénzügyi előfeltételek mellett. Ezen vizsgálatokat szimulációkkal szeretném szemléltetni és számításokkal alátámasztani.

A munkám során bemutatom az általam készített alapmodellel, hogy pontosan mik azok a komponensek, amiket figyelembe kell venni egy piacra lépő

biztosítótársaságnak, hogy talpon tudjon maradni és ne menjen tönkre. Majd szemléltetem különböző szimulációk segítségével, hogy hogyan alakulhatnak egy társaság pénzügyei, milyen szélsőséges helyzetek állhatnak elő, illetve mit kell tenni, hogy ilyen helyzetek minél inkább elkerülhetők legyenek. Minden szimulációnál 100.000 különböző esetet generálok le, majd kiértékelem az eredményeket.

A biztosítók pénzügyi helyzetét több ismérv alapján fogom vizsgálni, bemutatom a pénzmennyiség változását, hogy mekkora a valószínűsége egy vállalkozás tönkremenésének, mikor következhet be a csőd, és a tönkremenéskor fennálló hiánynak milyen az eloszlása és a mértéke. A károk nagyságának és a köztük levő időknek az eloszlása többféle lehet. A dolgozatban én hármat vizsgáltam: az egyenletes, a binomiális és a Poisson eloszlást fogom alkalmazni a szimulációknál. Vizsgálom, hogy a kezdőtőke függvényében, ha tönkremegy a cég, az mikor fog bekövetkezni. Az irodalomban használt viszontbiztosítási modellt alkalmazva próbálok választ adni arra, hogyan csökkenti a tönkremenési valószínűséget viszontbiztosítás kötése.

1.2. Célkitűzések

Mint minden pénzügyi vállalkozásnak, a biztosítóknak is az a legfontosabb, hogy talpon tudjanak maradni a versenytársakkal szemben: minél nagyobb ügyfélkörrel rendelkezzenek és a nyereséget maximalizálni, a kiadásokat minimalizálni tudják. Ehhez persze jól átgondolt pénzügyi stratégiára van szükségük.

Biztosítótársaságok alapításához jogszabályokban meghatározott minimum kezdőtőkével kell rendelkezni, ez adja az alapját a társaság pénzmennyiségének, ehhez jön majd az ügyfelek adott időnkénti befizetése, amiből majd a bekövetkező kárigényeket ki kell elégítenie. Magyarországon a kezdőtőke minimuma 100 millió Ft. A matematikai vizsgálatok azonban nincsenek a törvényi feltételekhez kötve. Látható lesz majd, hogy kellő mennyiségű befizetés és későn jövő, kis kárigényű kifizetés esetén előfordulhat, hogy a biztosítótársaság kasszájában levő pénz nem megy 0 alá akkor sem, ha nincs kezdőtőke. Így a szimulációkban vizsgálni fogok olyan eseteket is, amikor a kezdőtőke 0 Ft, hogy ezzel is jobban szemléltethessem a tönkremenés valószínűségét.

Nyilvánvalóan, ha a vállalat pénzmennyisége 0 alá esik, akkor a kárigényt nem tudja kielégíteni és elvileg csődbe megy a társaság. Ráadásul, ha a károsult ügyfél nem magánszemély, hanem jogi személy, akkor a biztosítótársaság csődje magával vonhatja egy másik cég csődjét is, ezáltal még nagyobb kárt okozva. Ezt a biztosítótársaságok

igyekeznek elkerülni. A folyamatosan beérkező díjbevétel segít a fedezet biztosításában. Ennek érdekében a biztosítóknak meg kell határozni, hogy a cég ügyfelei mekkora összeget fizessenek be a társaság kasszájába, hogy az anyagi helyzet tendenciájában ne romoljon. Az ideális ár meghatározásához ismerni kell a bejövő kárigények nagyságának várható értékét, és gyakoriságát. Az árral kapcsolatos döntések meghozatalában sok szempontot kell figyelembe venni. Nem csak a kárigények nagyságának a várható értéke, hanem az eloszlása is befolyásolja a tönkremenést, főleg a nagy összegű kárigények valószínűsége. Azonban egyes természeti katasztrófák (földrengés, hurrikán, tornádó) valószínűsége elég alacsony Magyarországon, cunamik, vulkánkitörések valószínűsége pedig 0. Az USA déli államaiban azonban gyakoriak a hurrikánok, így ott a biztosítóknak nagyobb bevételt kell elérniük, hogy a pénzügyi stabilitásukat fenn tudják tartani. Magyarországon, ha természet okozta károkról van szó, az elsősorban jégesőből, nagyobb viharokból származik. Szinte minden évben előfordul, hogy a termés egy része elfagy vagy elveri a jég, vagy egy vihar által kidőlt fa esik rá egy házra vagy autóra. Ezen károk mértéke bár összességében jelentős, de mégis eltörpül egy hurrikán által okozott pusztítástól. Így az itthoni biztosítóknak kisebb bevétel is elegendő ahhoz, hogy az ilyen típusú károk esetén felmerülő követeléseket ki tudják elégíteni.

Felmerülhetnek azonban olyan helyzetek is, amikor túl nagy és túl gyakori egy káresemény, és meghaladja az adott társaság pénzügyi kereteit, ezáltal növelve a valószínűségét annak, hogy a biztosító rendelkezésére álló pénzmennyisége 0 alá esik és a cég tönkremegy. Ezt megelőzendő kötnek a biztosítótársaságok viszontbiztosítást. Ha egy biztosító előrejelzései azt támasztják alá, hogy feltehetőleg nem tud bizonyos kárigényeket kielégíteni, akkor ezek a cégek viszontbiztosítást szoktak kötni egy másik biztosítótársasággal. Ilyenkor a viszontbiztosító a szerződésben foglaltak szerint a viszontbiztosított társaság helyett magára vállalja a károk egy részének a kifizetését, és ezáltal csökkenthető az eredeti cég tönkremenésének valószínűsége.

Azt, hogy milyen fontos lehet egy viszontbiztosítás, illetve mit okozhat annak hiánya, aminek következtében a keletkező kárért nem tud ellenszolgáltatást nyújtani a biztosító, egy megtörtént eseménnyel szeretném szemléltetni. A 2008-as válság előtt a nagy amerikai bankok (JP Morgan, Goldman Sachs, Bank of America, ...) biztosítást vásároltak az akkori világ legnagyobb biztosítójánál az AIG-nél. Erre azért volt szükség, hogy ha az értékpapírokba csomagolt és ingatlannal fedezett jelzáloghitelek értéke csökken, a veszteségük elkerülése érdekében a biztosító majd kifizeti a kárt. Az AIG azonban nem kötött viszontbiztosítást, mivel abban bíztak, hogy az ingatlanok értéke nem

fog csökkenni, és így hatalmas profitra tehetnek szert. Az ingatlanok árai azonban csökkenni kezdtek. Amikor a bankok az első veszteségeiket realizálták, az AIG-nak egyszerre kellett volna minden banknak fizetnie, de erre nem volt képes. Csak az amerikai kormány 180 milliárd dolláros mentőövével sikerült elkerülni az AIG csődjét. A csőd elkerülésével egyúttal a bankokat és több millió amerikai állampolgárt is megmentettek a pénzügyi csődtől. Látható hát, hogy még a legnagyobb társaságok is rákényszerülhetnek arra, hogy viszontbiztosítást kössenek. Azonban ez nem hátrány, hiszen ez a lépés biztosítja a vállalkozás stabilitását, csökkenti a tönkremenés kockázatát, ezáltal az ügyfelek bizodalmát is növeli a cég felé.

Ezért szeretném a dolgozatomban a biztosítótársaságok pénzügyi modelljét vizsgálni. A dolgozatban azt szándékozom bemutatni, hogyan alakulhat egy biztosítótársaság kasszájában levő pénz mennyisége viszontbiztosítás nélkül és viszontbiztosítással, ha ismerjük a beérkező károk nagyságának és gyakoriságának eloszlását. Mekkora a valószínűsége, hogy egy cég tönkremegy egy adott kezdőtőke szintnél. Ha csődbe megy, mikor következik ez be, mekkora annak a mértéke (mekkora hiány keletkezik), melyik az az időpillanat, amikor már felesleges figyelni a pénzmennyiséget, mert szinte biztosra vehető, hogy a társaság nem megy csődbe. Ha túl nagy a tönkremenés valószínűsége, akkor hogyan lehet viszontbiztosítással, illetve kölcsönös viszontbiztosítással azt csökkenteni.

A viszontbiztosításoknak több fajtája van. Nem mindegy, hogy a cég melyiket választja, mert ha rosszul választ nagy nyereségtől eshet el. Az egyik ilyen az az arányosság elvén alapuló kvóta-visitontbiztosítás, amikor a viszontbiztosító akkora részt vállal a kockázatból, amekkora részt kap az ügyfelektől érkező bevételekből. Ez inkább a viszontbiztosítónak kedvező, mert az alacsony kockázatú biztosítások által bejövő díjakból is részesül [1]. Ezért lehet sokkal előnyösebb a surplus viszontbiztosítás a viszontbiztosítást kötő, úgynevezett primér biztosító számára. Ekkor a primér biztosító a kockázatokat felosztja és elsősorban azokat bocsájtja csak viszontbiztosításba, amik magasabb kockázati kategóriába tartoznak. Ebben az esetben a fizetendő rész attól függ, hogy mekkora a károk nagysága. Magyarán a viszontbiztosító csak egy bizonyos szint fölött vállalja a kárigény kifizetését. Természetesen ezen szintet, illetve magát a károkat a szerződéskötéskor kell meghatározni.

Dolgozatomban azokkal a viszontbiztosításokkal foglalkozom, amikor a viszontbiztosító a befolyó pénzüsszeg egy részének fejében egy bizonyos határ felett átvállalja a kifizetések egy határ feletti részét. Vizsgálom a modellt csak a

viszontbiztosítást kötő társaság szempontjából is, valamint úgy is, hogy mindkét társaság pénzügyi folyamatát figyelembe veszem. Véletlen szimulációkat végezve arra a következtetésre jutottam, hogy nemcsak egyoldalú, hanem kétoldalú viszontbiztosítással is csökkenthető a tönkremenés kockázata, akár szimmetrikus paraméterek mellett is.

2. Az alapmodell

2.1. Az alapmodell matematikai megfogalmazása

Ebben a fejezetben ismertetem a biztosítótársaságok pénzügyi folyamatait modellező alapvető kockázati folyamatot, a Sparre Andersen alapmodellt [2].

A társaság kezdőtőkéjét jelöljük a -val. Ez egy nemnegatív szám. Ennek nagysága elméletileg akár lehet nulla is, ha a vállalat úgy értékeli, hogy elég nagy bevételt tud a befizetésekből elérni ahhoz, hogy nincs szüksége alaptőkére. Bár a valóságban ez nem megengedett, a matematikai vizsgálatokban mi ezt a lehetőséget is figyelembe vesszük.

Jelölje b a társaság egységnyi időre jutó bevételét. Ezt az összeget kell az ügyfeleknek a szerződésben meghatározott időnként befizetnie a biztosító kasszájába. Ezt az időt egységnyinek tekintjük. A b neve befizetési ráta. A modellben azt a feltételezést használják, hogy t idő alatt $t \cdot b$ mennyiségű befizetésekből származó bevétel növeli a kasszában levő pénzmennyiséget.

$N(t)$ jelöli, hogy hány kár érkezett a biztosítóhoz t időpillanatig, illetve S_l legyen az l . kárigény nagysága. Feltételezzük, hogy az egymást követő kárigények között eltelt idők (KI_i) $i=1, 2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Azt is feltételezzük, hogy a kárigények nagyságai (S_l $l=1, 2, \dots$) szintén függetlenek és azonos eloszlásúak. Továbbá a KI_i is független S_l -től, de ezek nem feltétlenül ugyanolyan eloszlásúak, mint a kárigények. Az irodalomban általában folytonos modelleket vizsgálnak, én dolgozatomban diszkrét eloszlásokkal fogok foglalkozni, és feltételezem, hogy mind a kárigények nagysága, mind a kárigények közt eltelt idők nemnegatív egész értéket vehetnek csak fel. Egészenek feltételezem továbbá a kezdőtőkét és a befizetési rátát is. Azonban a definíciókat mind a folytonos, mind a diszkrét modellben megadom.

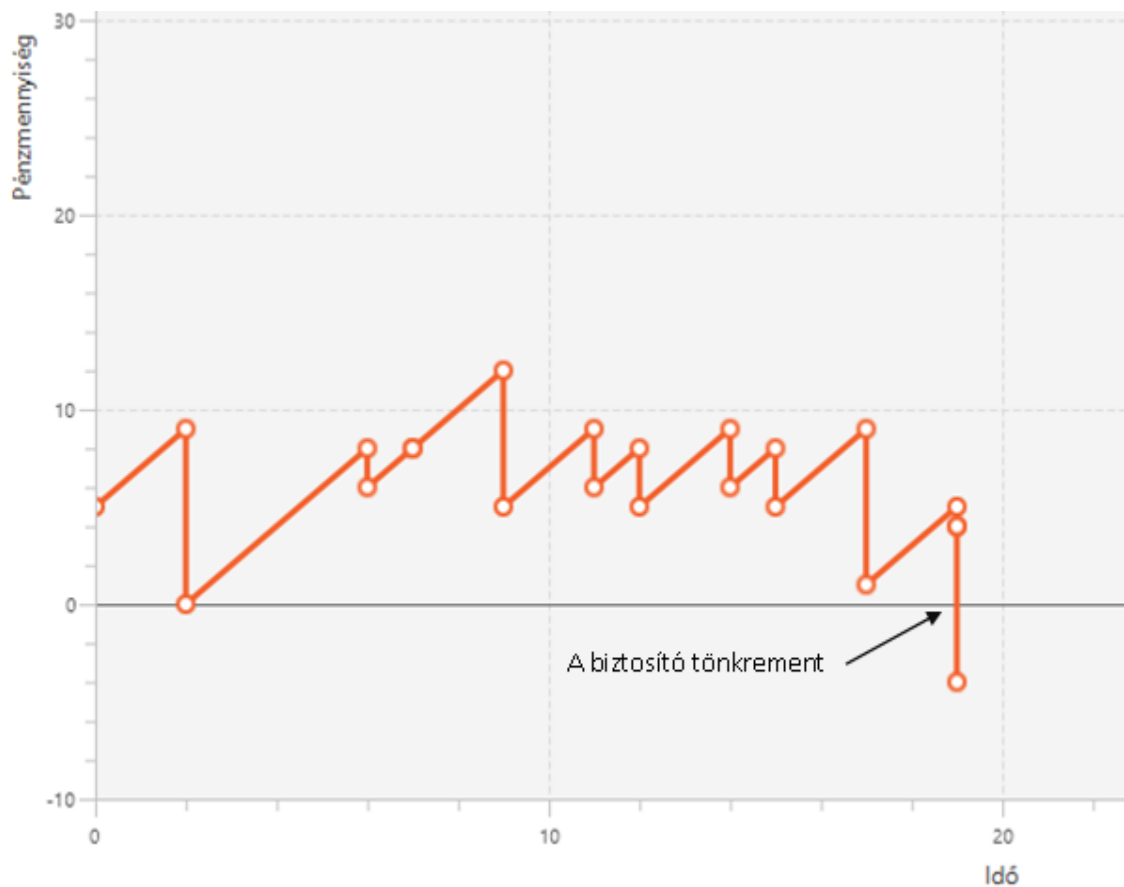
Legyen $T(t)$ a cég pénzmennyisége t időpillanatban. $T(t)$ -t a következőképpen lehet kiszámítani: az alaptőkéhez hozzá kell adni a t . időpillanatig beérkezett bevételt, azonban a t . pillanatig beérkezett károk csökkentik a társaság pénzmennyiségét, ezt le kell vonni:

$$T(t) = a + b \cdot t - \sum_{l=1}^{N(t)} S_l, \quad t \geq 0.$$

Diszkrét eloszlású valószínűségi változókat feltételezve

$$T(t) = a + b \cdot t - \sum_{l=1}^{N(t)} S_l, \quad t = 0, 1, 2, 3 \dots$$

A pénzmennyiség változását egy adott realizációnál az 1. ábrán követhetjük. A kezdőtőke értékét $a=5$ -nek választottam. Egységnyi idő alatt beérkező pénzmennyiség értékét $b=2$ -nek állítottam be. Az első kárigény a $t=2$ időpillanatban érkezett, nagysága 9 volt. Ez azt jelenti, hogy a kezdőtőke, és az addig beérkezett 4 egységnyi bevétel éppen fedezte a kárigényt. A folyamat folytatódik, újabb kárigények érkeznek újabb időpontokban, a $t=19$ időpontban érkező $S_{10}=8$ nagyságú kárigény azonban nagyobb, mint a pénztárban levő pénzmennyiség, így ezt levonva a rendelkezésre álló pénzmennyiségből, a kasszában levő pénzmennyiség negatívvá válna, vagyis a társaság ennek a követelésnek a hatására tönkremegy.



1. ábra: Egy biztosító tönkremenési folyamata

Jelölje $p(a)$ annak a valószínűségét, hogy a kezdőtőkének a cég pénzmennyisége nulla alá csökken, vagyis $p(a)$ a tönkremenés valószínűségét jelenti a kezdőtőke esetén.

$$p(a) = P(T(t) < 0, \text{ valamely } t \geq 0 \text{ esetén}).$$

Diszkrét modell esetén egész időpontokban nézve a biztosítótársaság rendelkezésére álló pénzeket, a tönkremenési valószínűség az alábbi módon definiálható:

$$p(a) = P(a + b \cdot t - \sum_{l=1}^{N(t)} S_l < 0, \quad \text{valamely } t = 0, 1, \dots \text{ esetén})$$

Ekkor természetesen a és b értékét is egésznek választjuk.

Jelölje $I(a)$ azt a t értéket, amikor a kezdőtőkéből indulva a társaság csődbe megy.

Azaz

$$I(a) = \begin{cases} \inf(t \geq 0: T(t) < 0), & \text{ha } \exists t \geq 0, \text{ hogy } T(t) < 0 \\ \infty, & \text{ha } \forall t - re \ T(t) \geq 0. \end{cases}$$

Diszkrét modell esetén

$$I(a) = \begin{cases} \min(t: T(t) < 0, t = 0, 1, \dots), & \text{ha } \exists t \geq 0, \text{ hogy } T(t) < 0 \\ \infty, & \text{ha } \forall t = 0, 1, 2, \dots - re \ T(t) \geq 0. \end{cases}$$

Az 1. ábra esetén a tönkremenési idő $I(5) = 19$ időegység.

Itt kell szót ejtenünk egy olyan feltételről, amelynek teljesülése vagy nem teljesülése alapvetően befolyásolja a biztosítótársaság pénzügyi folyamatait. Ez a feltétel az irodalomban nettó profit feltételnek nevezett feltétel, és azt fejezi ki, hogy az egységnyi idő alatt érkező bevételnek meg kell haladnia az egységnyi idő alatti kifizetések várható értékét. Ez azt jelenti, hogy az

$$\frac{E(S_l)}{E(Kl_l)} < b$$

egyenlőtlenségnek fenn kell állnia, ahol $E(S_l)$ a kárigények várható értéke, míg $E(Kl_l)$ a kárigények közt eltelt idők várható értéke. Mivel az $N(t)$ kárfolyamat egy felújítási folyamat, ezért az egységnyi időre jutó átlagos kárszám $\frac{1}{E(Kl_l)}$. A nettó profit feltétel nem teljesülése esetén a biztosítótársaság 1 valószínűséggel tönkremegy.

Vezessük be a kárigények közt eltelt idők eloszlására a $P(KI_l = i) = p_i, i=0, 1, 2, \dots$ a kárnagyságok eloszlására a $P(S_l = j) = q_j, j=0, 1, 2, \dots$ jelöléseket.

A biztosítási matematika irodalmából ismert, hogy $q(a) = 1 - p(a)$ kielégíti az alábbi differenciaegyenletet [2]

$$q(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{a+b \cdot i} q(a + b \cdot i - j) \cdot p_i \cdot q_j$$

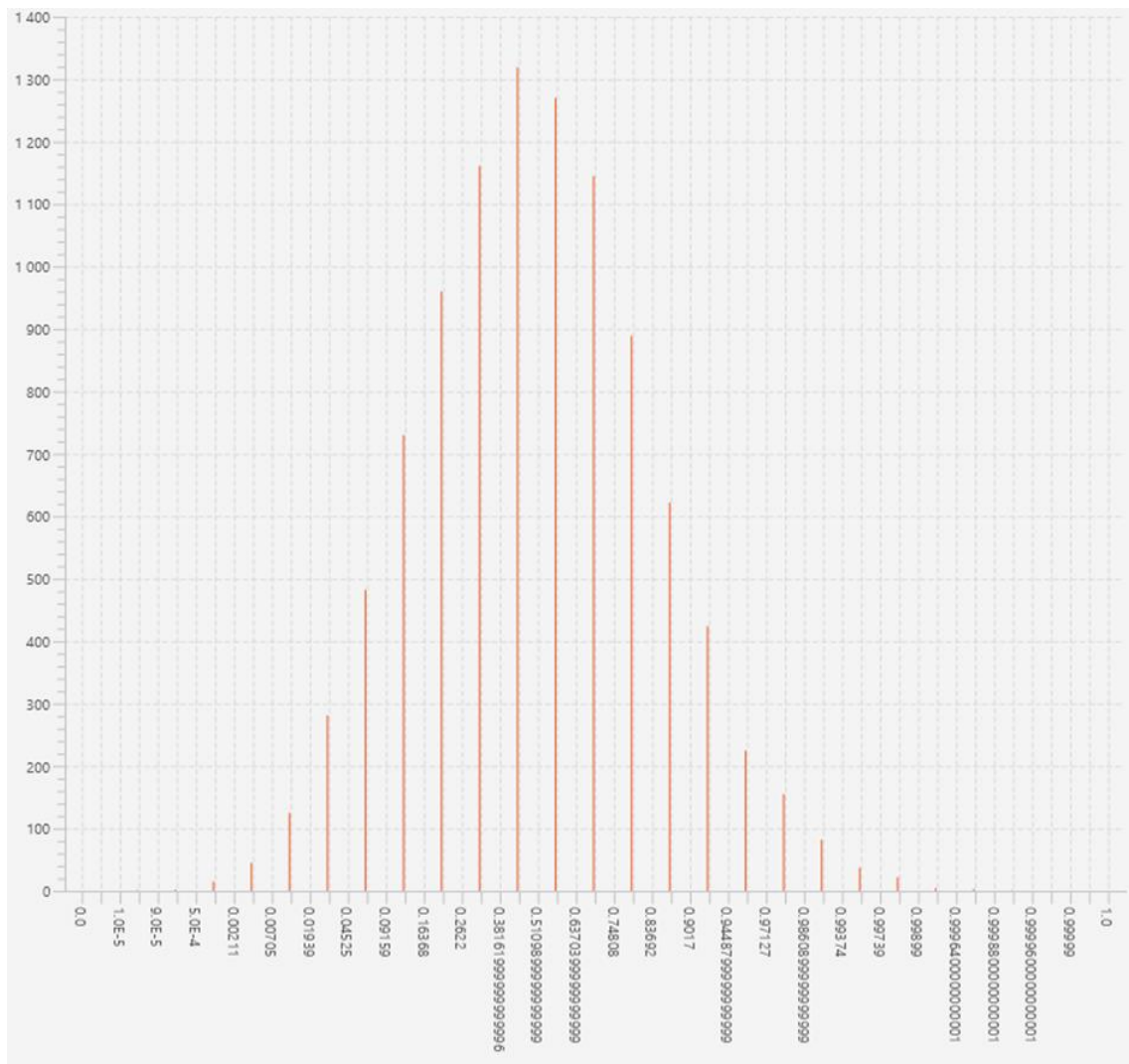
A fenti differenciaegyenlet úgy bizonyítható, hogy vágjuk el a folyamatot az első kárigény érkezésekor (i). Amennyiben a kárigény nagysága (j) nem nagyobb, mint a kasszában addig összegyűlt pénzmennyiség ($a + b \cdot i$), akkor a folyamat ebben a pillanatban újraindul. A bal oldalon levő feltétel nélküli valószínűség a feltételes valószínűségek súlyozott számtani közepe.

Ennek a differenciaegyenletnek általános megoldása nem ismert, de néhány speciális esetben, pl. geometriai eloszlású valószínűségi változók, vagy negatív binomiális eloszlású valószínűségi változók esetén a megoldás explicit módon felírható [3], [4].

Azokban az esetekben, amikor a differenciaegyenlet megoldása nem ismert, a pénzügyi folyamat Monte-Carlo szimulációval vizsgálható. A szimulációs eljárás elfogadott a kutatások során, napjainkban is alkalmazzák [5], [6].

A program, amelynek segítségével az előző pontokban megfogalmazott eseményeket szeretném elemezni, a következőképpen épül fel:

Ahhoz, hogy egy társaság pénzügyeit tudjuk vizsgálni, létre kellett hoznom egy függvényt, melyben meg kellett előre adni, hogy mennyi a cég kezdőtőkéje és mennyi bevétellel számol 1 egységnyi idő alatt az ügyfelek részéről. A károk nagyságának és a károk közt eltelt időnek a generálásához (binomiális, Poisson, egyenletes eloszlás esetén, természetesen ezek halmaza tovább bővíthető) beépített függvényeket hoztam létre. A 2. ábrán binomiális eloszlású károk beérkezésének az eloszlását szemléltetem $n_b=100$ és $p_b=0.5$ paraméterek mellett.



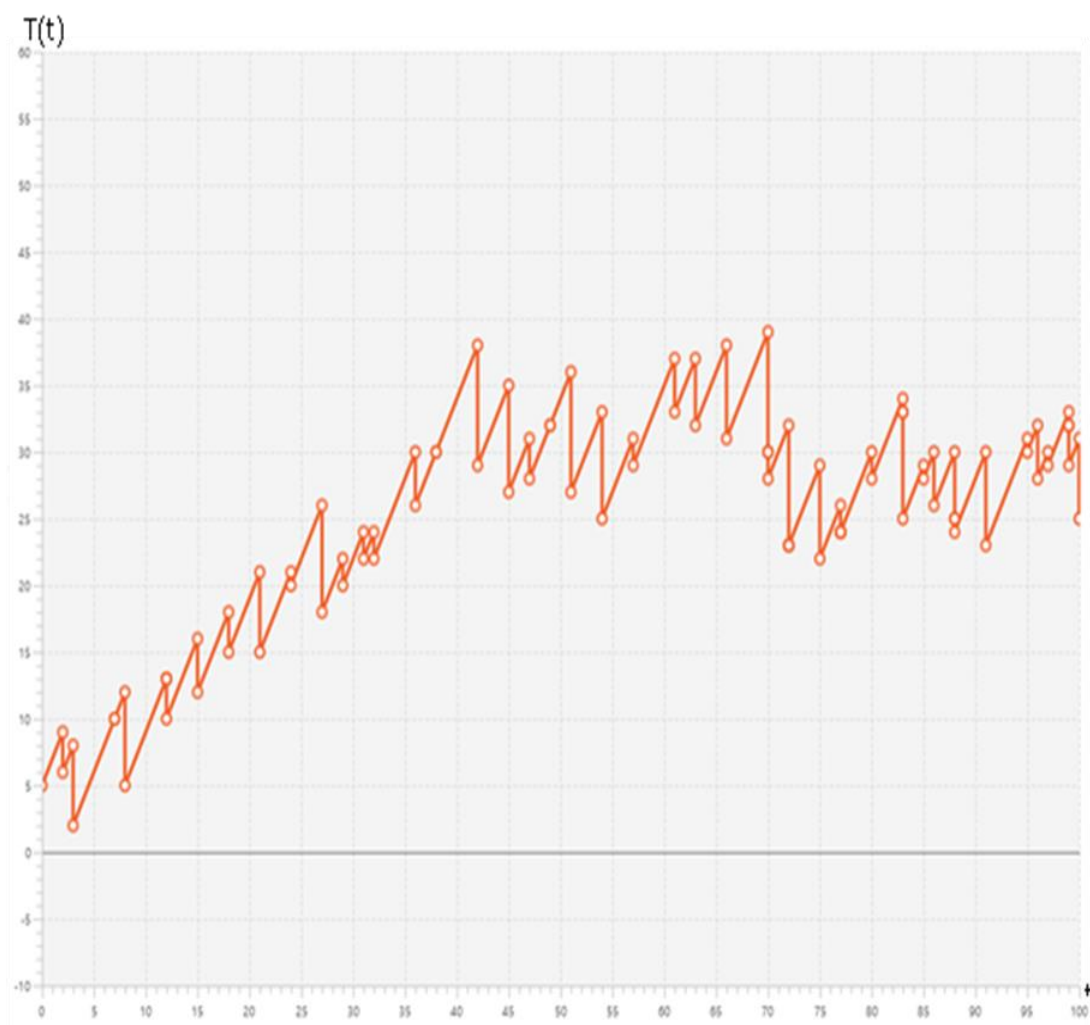
2. ábra: Binomiális eloszlású véletlen számok hisztogramja

A biztosítótársaság pénzügyi folyamatait véletlen szimuláció segítségével vizsgáltam. Legenerálva a kárigények közti időket és a kárnagyságokat, a kárigények időpontjaiban kiszámoljuk a kasszában levő pénzt. Mivel tönkremenés csak kárfizetés miatt jöhet létre, ezért elég ezen pillanatokban megvizsgálni, hogy a kasszában levő pénzmennyiség 0 alá került-e, azaz bekövetkezett-e a csőd. Ugyan a Sparre Andersen alapmodell végtelen hosszú intervallumon vizsgálja a folyamatot, egy szimulációs folyamatot csak véges ideig tudunk vizsgálni. Ha ez az idő nagy, akkor az esetek döntő részében a csőd vagy bekövetkezett ezen időn belül, vagy ha nem, akkor már a későbbiekben sem fog. Sok folyamatot generálunk, a csődök számának relatív gyakoriságával közelítjük a csőd valószínűségét. A csőd időpontjának várható értékét a csőd bekövetkezési időpontok átlagával becsüljük. Nyilvánvalóan pontos eredményeket így nem tudunk megadni, de ha sok kísérletet végzünk, a nagy számok törvénye jó közelítő értéket tudunk adni a pontos valószínűségekre és várható értékre. Az 1. ábrán egy

olyan eset volt látható, amikor a társaság tönkrement. Ebben az esetben a cég kezdőtőkéje 5, míg az ügyfelektől egységnyi idő alatt érkező bevételi ráta 2 volt. A káresemények egyenletes eloszlásúak voltak, várható értékük 5, illetve a károk bekövetkezésének ideje szintén egyenletes eloszlású volt 2,5 várható értékkel.

Az 1. ábra y tengelyén látható az aktuális pénzmennyiség az x tengelyen pedig az eltelt idő. Ezek alapján leolvasható, hogy a társaság pénzmennyisége a 1 időegységen keresztül nőtt, majd a $t=2$ időpillanatban egy beérkező kárigény miatt a pénzmennyiség lecsökkent 0-ra.

Ez azonban még nem jelenti a vállalkozás csődjét, mivel pont vissza tudta fizetni a kárigényt és nem halmozott fel veszteséget, ráadásul a következő káresemény bekövetkezésig növelni tudta a pénzmennyiséget. A $t=19$. pillanatban azonban már akkora volt a beérkező kárigény, hogy a rendelkezésre álló összeg nem tudta fedezni maradéktalanul az ügyfél követelését és a társaság pénzmennyisége 0 alá csökkent, vagyis tönkrement. A folyamat azonban másként is lejátszódhatna. A 3. ábrán egy olyan esetet mutatok be, ahol a biztosítótársaság nem megy tönkre ugyanazon paraméterek esetén, mint az előző szituációban, vagyis a kezdőtőke, a bevétel, a károk nagyságának és gyakoriságának eloszlása nem változtak.



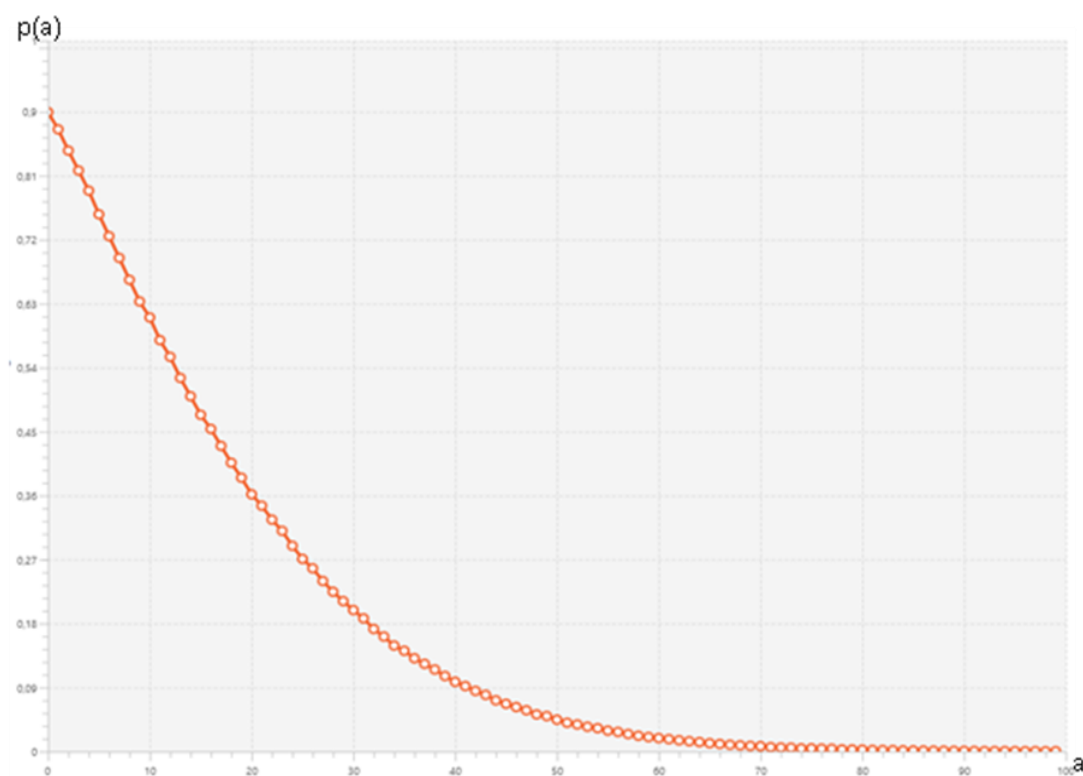
3. ábra: Biztosító pénzügyi folyamata nem-tönkremenés esetén

Míg az első esetben a vállalat a $t=19$ időpillanatban tönkrement, addig a 3. ábrából kivehető, hogy a cég 100 időegység alatt sem ment tönkre. Látható hát, hogy két teljesen eltérő pénzügyi folyamat játszódik a két esetben ugyanazon előfeltételek mellett. Azonban mivel a pénzügyi folyamat sztochasztikus folyamat, ez természetes: különböző realizációk különböző módon viselkednek. Emiatt szükséges egy szimuláción belül több (száz)ezer kísérletet lefuttatni, hogy a realizációk kimeneteleiből következtetni tudjunk a relatív gyakoriságra, a relatív gyakoriságokkal közelíthessük a tönkremenési valószínűségeket, a tönkremenési idők eloszlásából becsülhessük a tönkremenési idők várható értékét, szórását, és közelíthessük eloszlását.

Az előbb említett jellemzők természetesen a paraméterek függvényei. A következő diagrammon azt fogjuk szemléltetni, hogy hogyan függ a tönkremenés valószínűsége a kezdőtőke mennyiségétől.

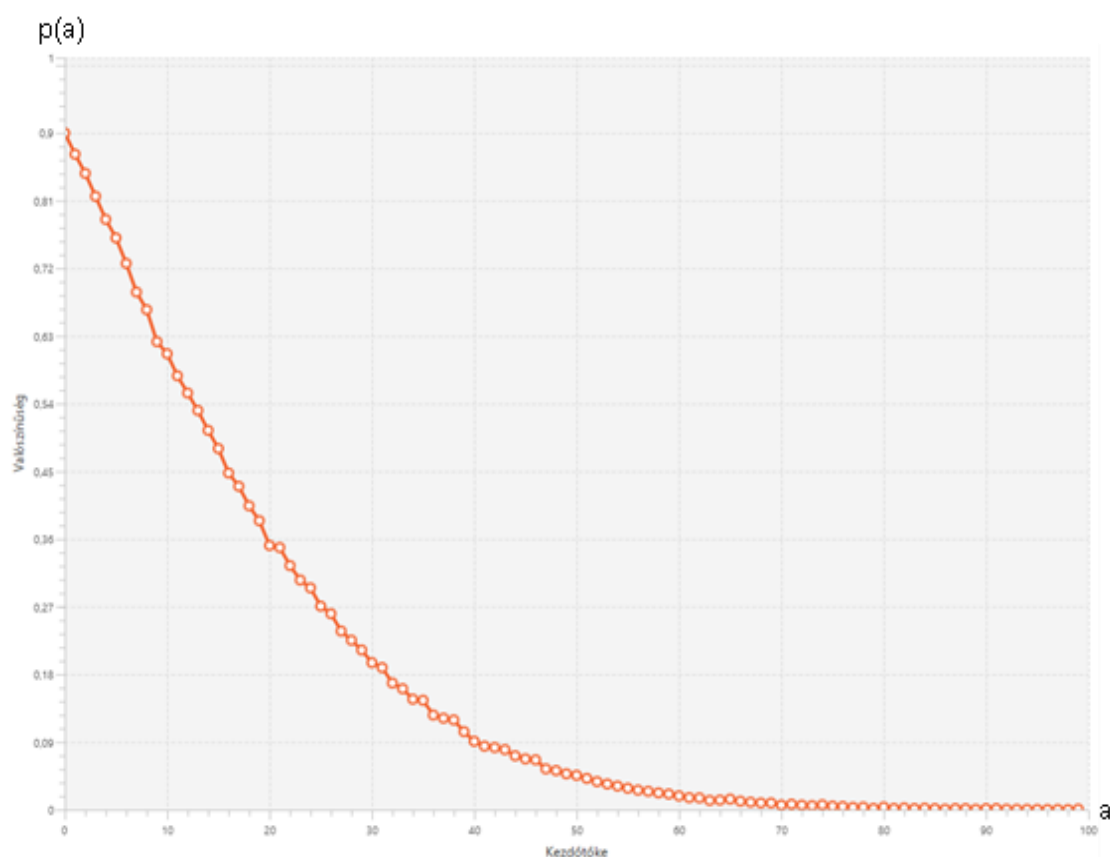
A 4. ábra y tengelyén ábrázoljuk, hogy adott kezdőtőke esetén mennyi a valószínűsége, hogy tönkremegy a biztosító, az x tengelyen pedig az aktuális kezdőtőke látható. Mint korábban említettem, nem lehetséges olyan, hogy egy társaságot 0 kezdőtőkével alapítsunk, a diagrammon csak szemléltetésképpen ábrázolom, hogy látható legyen a változás mértéke. Ezen diagramm már úgy készült, hogy nem egyetlen esetet vizsgáltunk meg, hanem minden kezdőtőke szint esetén 100 ezer különböző kísérletet futtattunk. Megnéztük, hogy egy-egy tőkeszint esetén a 100 ezerből hány alkalommal következik be csőd és vettük ennek arányát az összes kísérletszámhoz. Fontos még megjegyezni, hogy az egységnyi idő alatt beérkező bevételt $b=2$ -nek vettem, illetve a kárigények nagysága binomiális eloszlású volt 5 várható értékkel ($n=100, p=0.05$), illetve a károk beérkezésének gyakorisága szintén binomiális eloszlású 3 várható értékkel ($n=100, p=0.03$), a vizsgálat időtartalma 100 időegységig tart.

A 4. ábrán látható, hogy amennyiben a kezdőtőke 0, akkor közelítőleg 0.9 a valószínűsége, hogy a vállalat tönkremegy, azonban ahogy növeljük a kezdőtőkét, ez a valószínűség folyamatosan csökken. Az $a=80$ kezdőtőke szintnél már látható, hogy a csőd valószínűsége 0.01 alatti, 100-nál pedig már közel 0. Természetesen $a=100$ után is érdemes vizsgálni a tönkremerési valószínűségeket, de azok ezen az ábrán nehezen ábrázolhatók, így nem mutatjuk.



4. ábra: Alapmodell esetén a biztosító tönkremenési valószínűsége a kezdőtőke függvényében

A fejezet elején megemlítettem, hogy elméleti szempontból a nagy számok törvénye biztosítja, hogy a relatív gyakoriságok jól közelítik a tönkremenési valószínűségeket. A centrális határeloszlás-tétel lehetőséget ad a valószínűségek közelítési hibájának becslésére is [7]. Mivel a relatív gyakoriságok közelítőleg normális eloszlású valószínűségi változók $p(a)$ várható értékkel és legfeljebb $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ szórással, ezért annak a valószínűsége, hogy a relatív gyakoriság ε -nál kisebb mértékben tér el a pontos valószínűségtől, $2\Phi(2\varepsilon\sqrt{n}) - 1$ -gyel felülről becsülhető. Ez azt jelenti, hogy $n=10000$ szimuláció esetén az $\varepsilon=0.01$ hiba 0.95 valószínűséggel felső korlát az eltérésre. A képletből az is kiolvasható, hogy a szimulációk számának 10-szeresére emelésével a hiba $\sqrt{10} \approx 3.16$ -od részére csökken. Azt, hogy mit is jelent ez a valóságban, egy diagrammal szemléltettem. A 4. ábrán látható relatív gyakoriságok esetén tőkeszintenként 100 ezer szimulációt hajtottam végre és látható volt, hogy a függvényben az értékek milyen „szabályosan” követik egymást és nem lógnak ki. Az 5. ábrához viszont csak $n=10$ ezer szimulációt hajtottam végre minden tőkeszint esetén, és látható, hogy lesznek (ha nem is nagy) kilengések a 4. ábrához képest.

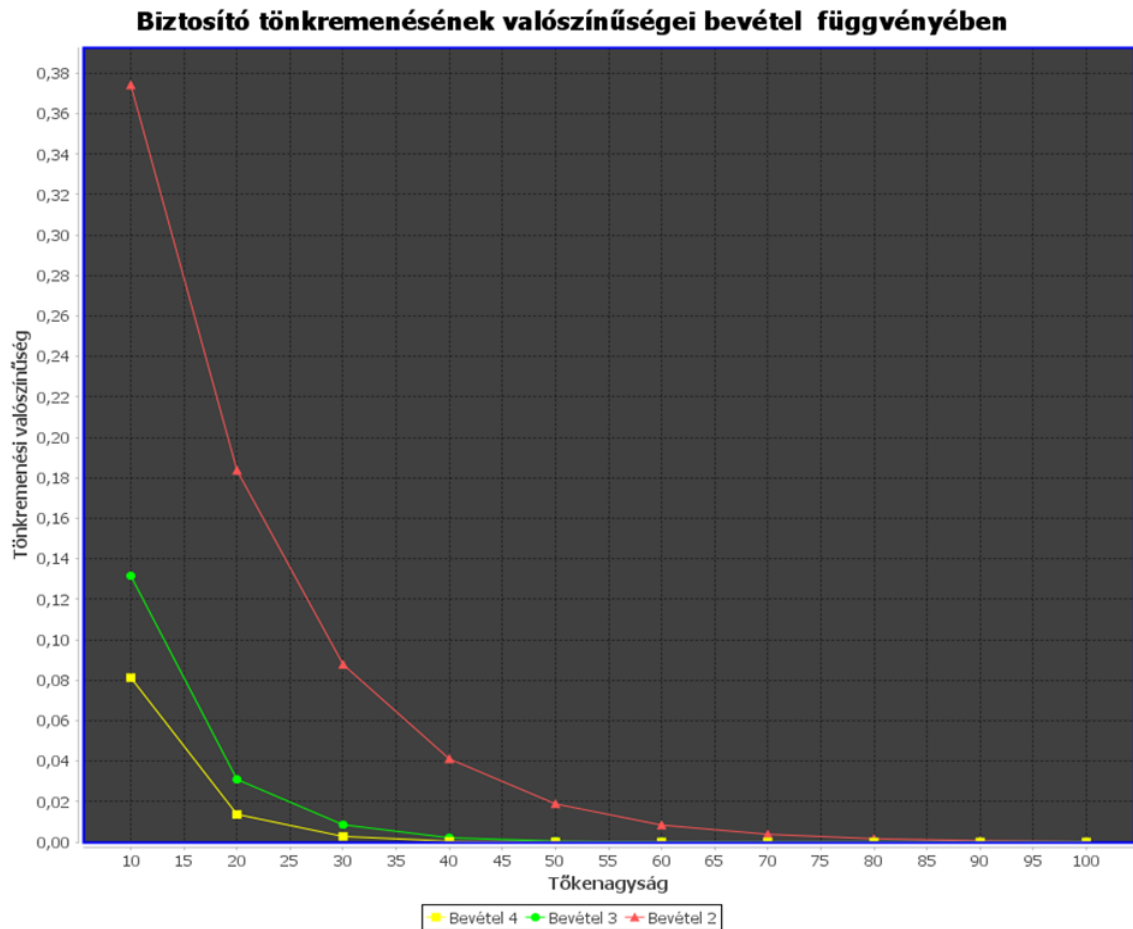


5. ábra: Biztosító tönkremenési valószínűsége kis szimulációs szám esetén

2.2. Az alapmodellre vonatkozó eredmények: a folyamat jellemzőinek paramétereiktől való függése

A tönkremenési valószínűség azonban nem csak a kezdőtőke, hanem a bevételi ráta nagyságától is függ. Minél nagyobb az egységnyi idő alatt realizálható bevétel, annál több pénzt tud felhalmozni egy cég, mielőtt beérkezne hozzá az első kárigény, s az egyes kárigények beérkezése közt is több tartalék tud képződni. A 6. ábrán ezt mutatom be. A kárnagyságok, illetve a káresemények között eltelt idők 0 és 16, valamint 0 és 10 közötti egész számok egyenletes eloszlást követve. A kezdőtőke először 10, majd 10 egységenként emelem egészen 100-ig. A bevételi ráta nagysága először 2, majd 3, majd 4. Ekkor a nettó profit feltétel teljesül, mert $\frac{E(S_I)}{E(KI_I)} = \frac{8}{5}$. Mindegyik bevételi ráta esetén 100 ezer szimulációt futtattam és ez alapján vizsgáltam, hogy adott kezdőtőke mellett

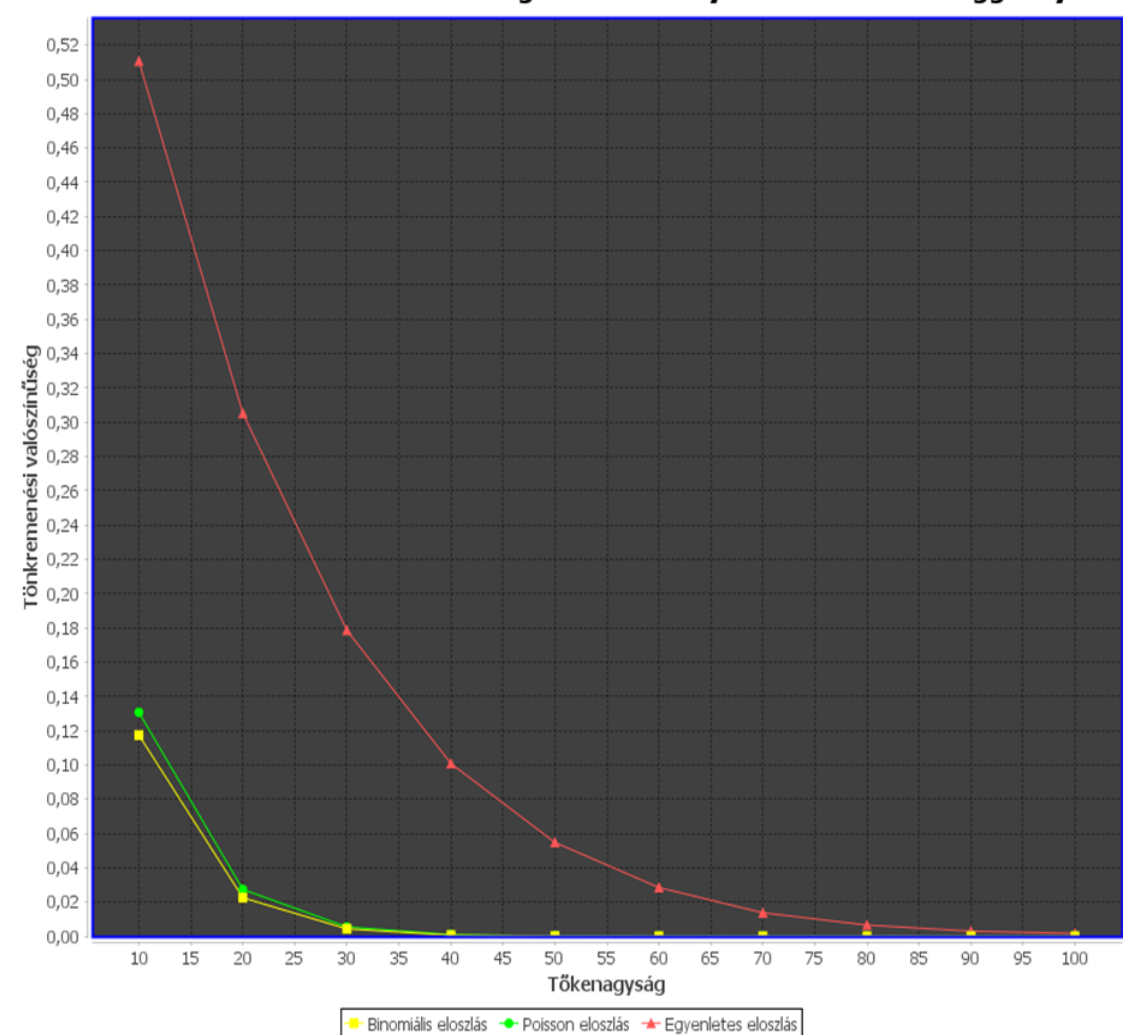
mekkora a tönkremenési valószínűségek közötti különbség a különböző bevételi ráták esetén.



6. ábra: Tönkremenési valószínűség alapmodellnél eltérő bevételek függvényében

A 6. ábrán jól látszik, hogy milyen drasztikusan csökken a tönkremenési valószínűség, ha megnöveljük a bevételt. Ha pedig megduplázzuk a bevételt, akkor igen alacsony kezdőtőke szintnél is alacsonyan tudjuk tartani a tönkremenés valószínűségét. Ráadásul a biztosító már 2 egységnyi bevétellel is biztosítja a nettó profit feltételt, s a bevételi ráta növelésével hatalmas nyereségre tud szert tenni.

Biztosító tönkremenésének valószínűségei káresemények eloszlásának függvényében



7. ábra: Tönkremenési valószínűségek alapmodellnél eltérő káreloszlások függvényében

A bevételi ráta és a kezdőtőke rögzítése esetén az sem mindegy, hogy a beérkező káresemények milyen eloszlást követnek. Akkor is eltérő eredményeket kaphatunk, ha a különböző eloszlásoknak megegyezik a várható értékük. A programomban a kárnagyságok és a kárigények közt eltelt idők esetében egyenletes, Poisson és binomiális eloszlásokat használtam. A következő esetben pedig meg fogom vizsgálni, hogy adott tőkeszintnél melyik eloszlásnál lesz a legkisebb esély arra, hogy a cég tönkremegy. Mindhárom eloszlásnál a várható értékük megegyezik. A károk nagyságának várható értéke 8, a bevételi ráta 2, a kezdőtőke 10, majd 10 egységenként növekszik 100-ig.

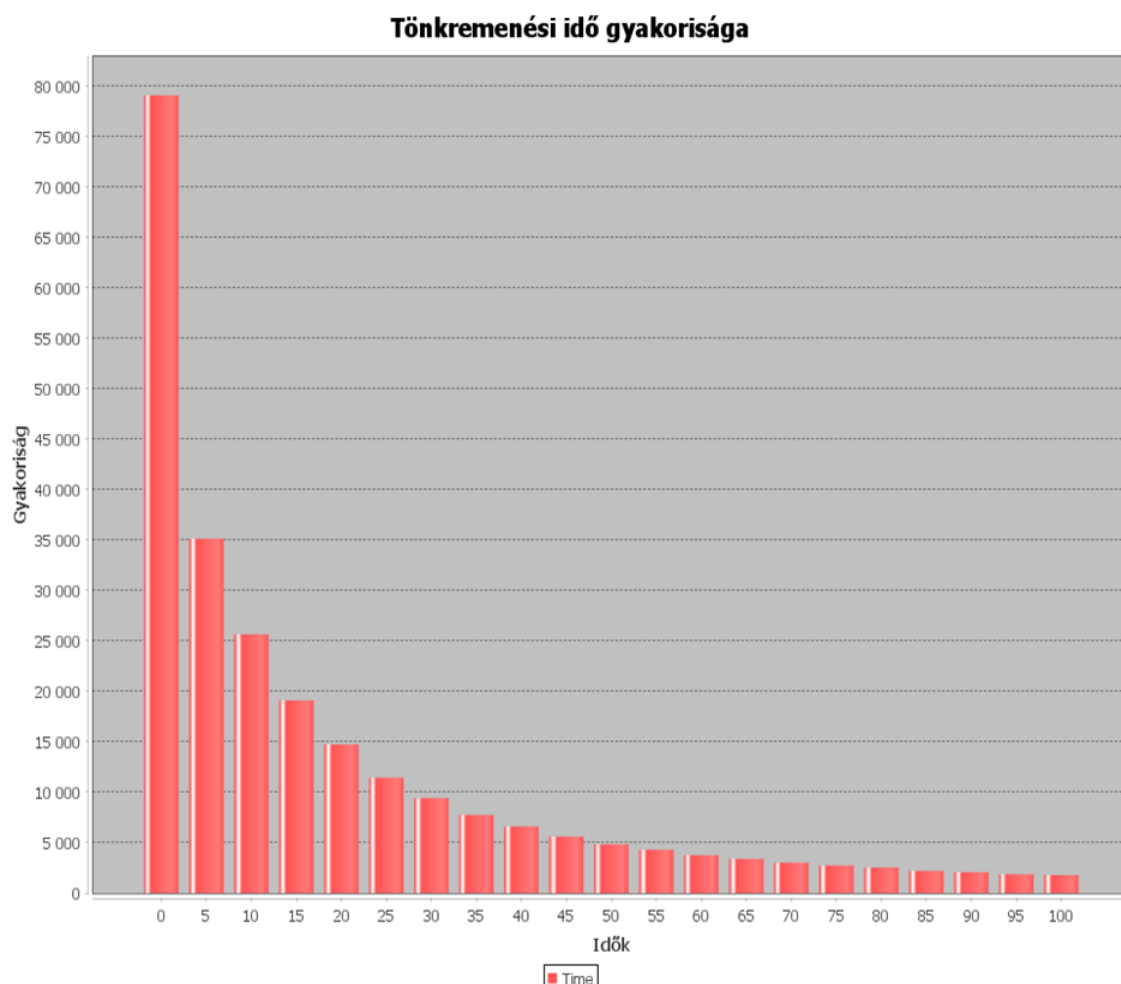
Látható a 7. ábrán, hogy Poisson és binomiális eloszlások esetében a valószínűségek szinte teljesen megegyeznek rögzített tőkeszinteknél, viszont az egyenletes eloszlásnál az alacsony tőkeszint esetében magasabb ez a valószínűség. Poisson és binomiális eloszlás

esetén az eltérés csekély mértéke azzal indokolható, hogy a binomiális eloszlású valószínűségi változók nagy n paraméter esetén jól közelíthetők Poisson eloszlású valószínűségi változóval [7]. A binomiális és az egyenletes eloszlás alkalmazása esetén tapasztalható eltérésnek az az oka, hogy bár a károk nagyságának/ kárigények közt eltelt időknek a várható értéke megegyezik a károk szórásában azonban eltérés van. Egyenletes eloszlás esetén a szórások $D(S_I) \approx 4.61$, $D(KI_I) \approx 2.88$, míg binomiális eloszlás esetén $D(S_I) \approx 2.71$, $D(KI_I) \approx 2.18$. Látható, hogy az egyenletes eloszlás esetén nagyobbak a szórások, emiatt nagyobb a bizonytalanság, a tönkremenési valószínűségek is nagyobbak kis kezdőtőke esetén. Ahogy a tőkét növeljük, a különbség szépen lassan csökken, majd egy idő után mindhárom eloszlás esetén belesimul nullába. Megjegyezzük, hogy azonos várható érték esetén a binomiális eloszlás szórása $\left(\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.08(1-0.08)}\right)$ mindig kisebb, mint a Poisson eloszlás szórása $(\sqrt{np} = \sqrt{8})$. Ez összhangban van azzal, hogy a binomiális eloszláshoz tartozó tönkremenési valószínűségek kisebbek, mint a Poisson eloszláshoz tartozóak.

Miután megvizsgáltuk, hogy milyen hatással van egy biztosító tönkremenésére a kezdőtőke és a bevételi ráta nagysága, valamint a véletlen mennyiségek eloszlása, most azt vizsgáljuk meg, hogy milyen a tönkremenési idők eloszlása, és melyek a legjellemzőbb tönkremenési idők. A 8. ábrán bemutatott esetről a kárnagyságok 0 és 16 közötti egész számok, a káresemények közt eltelt időpontok 0 és 9 közötti egészek egyenletes eloszlást követve, a bevételi ráta 2. A folyamatot $[0,100]$ időintervallumon vizsgálom. A kezdőtőke 10 és nem is változtatok rajta, csak erre a tőkeszintre futtatok le 500 ezer szimulációt és nézem meg, hogy a vizsgált időszakban (0 és 100 között) melyik időpillanatban megy tönkre a cég. A jobb szemléltetés kedvéért ezt a 0-100 közötti időszakot 20 intervallumra osztottam, továbbá a 0 időpillanatot külön vettem, és intervallumonként szemléltetem, hogy mennyi tönkremenés történt az adott intervallumban. A tönkremenési időkből készített oszlopdiagramm a 8. ábrán látható.

A 8. ábra azt mutatja, hogy a leggyakoribb tönkremenési idő a 0 időpillanat. Ennek az az oka, hogy amikor a biztosító elkezd a működését, mivel még nem telt el idő, így nem tudott bevételt realizálni, és csak a kezdőtőkére tudott támaszkodni és ez a pénzösszeg nem volt elegendő arra, hogy a beérkező kárigényeket maradéktalanul kielégítse. A 0 időpillanatban akár több kárigény is érkezhet, és tetemes (0.35) valószínűséggel érkezik a kezdőtőkénél nagyobb kárigény. A $t=5$ időpillanatra azonban már felére esik a tönkremenések száma és az idő előrehaladtával, ahogy a biztosító egyre

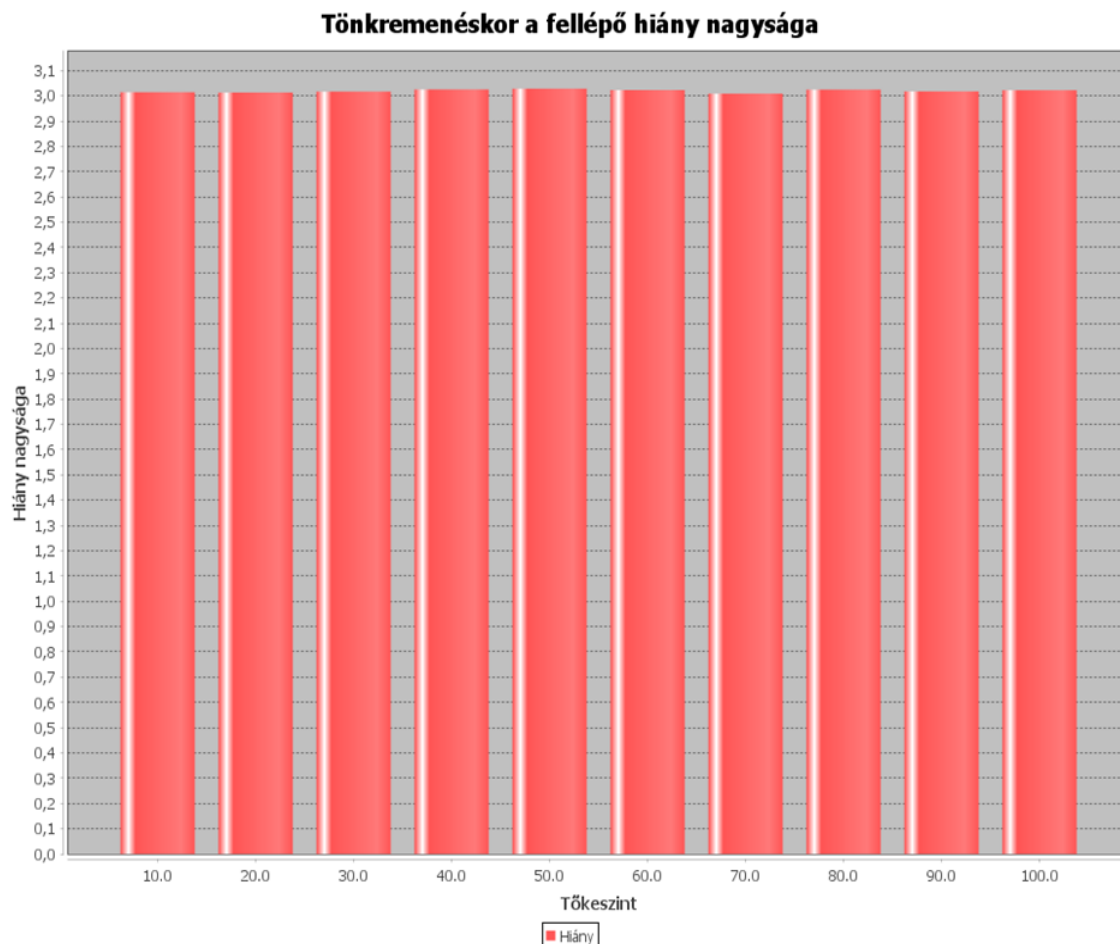
több bevételhez jut, úgy csökken az adott időintervallumba eső tönkremenések száma. A program segítségével a szimulációval azt is kiszámoltam, hogy a tönkremenési idők várható értéke 22.45, szórása pedig 5.84.



8. ábra: Tönkremenési idők alapmodellnél

Az utolsó vizsgálatunk ebben a fejezetben az, hogy megnézzük átlagosan mekkora hiány keletkezik, ha egy biztosító tönkremegy, és vajon milyen összefüggésben van ez a hiány a kezdőtőke szintjével. A bemutatott esetről a paraméterek a következők voltak: a kárnagyságok Poisson eloszlásúak, várható értékük 8, a károk között eltelt idők szintén Poisson eloszlásúak, várható értékük 4.5, az egységnyi idő alatt érkező bevétel pedig 1.5. Itt nem teljesül a nettó profit feltétel. Tudjuk, hogy ebben az esetben a biztosító, ha végtelen ideig vizsgáljuk a folyamatot, egy valószínűséggel tönkremegy. Györfi-Bátori András dolgozatában [8] speciális esetekben matematikai eszközökkel bebizonyította, hogy a tönkremenéskor kialakuló hiány nagysága nem függ a kezdőtőke nagyságától. Ez azért fontos eredmény, mert arra következtethetünk, hogy hiába fektet be a biztosító nagyobb kezdőtőkét, átlagosan ugyanannyi hiánnyal zár majd a folyamat. Györfi-Bátori

András geometriai eloszlású valószínűségi változókkal és ilyenek összegével dolgozott. Ezen példa (Poisson eloszlás) nem tartozik az említett eloszlások közé, mégis ugyanazt tapasztalhatjuk. Most a szimulációt 1000 időegységig, illetőleg a tönkremenés bekövetkezéséig futtattam. A 9. ábra azt mutatja, hogy a különböző kezdőtőke szintek nem befolyásolják a tönkremenéskor kialakuló hiány várható értékét.



9. ábra: Tönkremenéskor a hiány nagysága alapmodellnél

Miután az alapmodellben a legtöbb olyan lényeges tényezőt megvizsgáltuk, amely egy biztosító tönkremenését befolyásolni tudja, a dolgozat következő részében a modellt kibővítem először hagyományos, majd kölcsönös viszontbiztosítással. Megvizsgálom ezekben a modellekben is, hogy hogyan alakul annak a valószínűsége, hogy a biztosító csődbe megy.

3. Egyoldali viszontbiztosítás

3.1. Az alapmodell kibővítése egyoldali viszontbiztosítással és szimulációs eredmények

Az alapmodell csak egy biztosítótársaság pénzügyeit vizsgálja oly módon, hogy a biztosítótársaság nem kapcsolódik másik biztosítótársasághoz. Ebben a fejezetben módosítjuk az alapmodellt oly módon, hogy a biztosítótársaság lemond a bevétele egy részéről, cserébe a feléje benyújtott kárigények egy részét nem neki kell fizetnie. Ezt hívják viszontbiztosításnak. Ezt a modellt is az irodalomban főleg folytonos eloszlású valószínűségi változók esetén vizsgálják [2].

A viszontbiztosításnak két módját szokták alkalmazni. Az egyik az arányos viszontbiztosítás, ebben az esetben a kárigények egy adott hányadát a viszontbiztosító fizeti [9]. A másik a kártöbblet viszontbiztosítás, amikor a kárigények egy bizonyos határ feletti részét vállalja át a viszontbiztosító. Itt is igaz, hogy általában speciális eloszlások esetén vannak eredmények [10].

Ez a dolgozat a kártöbblet esetet taglalja. Először azt mutatjuk be, hogy megváltozik a viszontbiztosítást kötő (primer) cég tönkremenési valószínűsége, ha a társaság rendelkezik viszontbiztosítással. Nem vizsgáljuk azonban még a viszontbiztosítást végző társaság pénzügyeit.

Az alapmodell esetén használt jelölések a bővített modellnél is használatban maradnak, de felső indexszel lesznek jelölve, hogy látható legyen, hogy az adott képlet a kettő biztosító közül melyikre vonatkozik. Az alapmodell esetén $p(a)$ -val jelöltük annak a valószínűségét, hogy a kezdőtőkéről indulva a biztosító tönkremegy. Ebben a szakaszban bevezetünk egy új jelölést, $Y(a)$ jelöli mostantól annak a valószínűségét, hogy a kezdőtőkéről indulva a cég csődbe megy és $Z(a)$ jelöli azt a valószínűséget, hogy a cég nem megy csődbe, vagyis $Z(a)=1-Y(a)$.

A viszontbiztosítás egyik módja, hogy a biztosítók rögzítenek egy határt, és amennyiben a bejövő kárigény nagyobb, mint a meghúzott limit, akkor a határ fölötti részt a 2. számú (viszont)biztosítótársaság fizeti. Jelöljük h_1 -gyel ezt a határt. Vagyis az első biztosítótársaság által kifizetendő kárösszeg az l -edik kárigény esetén $SV_l^{(1)}$

$$SV_l^{(1)} = \begin{cases} S_l^{(1)}, & \text{ha } S_l^{(1)} \leq h_1 \\ h_1, & \text{ha } S_l^{(1)} > h_1. \end{cases}$$

A kárigények közt eltelt idők eloszlására a

$$P(KI_l^{(1)} = i) = p_i^{(1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

a kárnagyságok eloszlására a

$$P(S_l^{(1)} = j) = q_j^{(1)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

a befizetési rátára $b^{(1)}$ jelölést használva, az első biztosítótársaság pénztárában levő pénzmennyiséget az alábbi sztochasztikus folyamat írja le.

$$T^{(1)}(t) = a + b^{(1)} \cdot v^{(1)} \cdot t - \sum_{l=1}^{N(t)} SV_l^{(1)}$$

Itt $b^{(1)} \cdot v^{(1)} = b^{(1)} - V^{(1)}$, ahol $V^{(1)}$ a viszontbiztosítás miatt a viszontbiztosító részére egységnyi idő alatt kifizetett pénzmennyiség. Így a primer biztosító részére egységnyi idő alatt megmaradó bevétel $c^{(1)} = b^{(1)} \cdot v^{(1)}$. Nevezzük $c^{(1)}$ -et megmaradó bevételi rátának.

A tönkremenés valószínűsége a kezdőtőke esetén

$$Y(a) = P(a + c^{(1)} \cdot t - \sum_{l=1}^{N(t)} SV_l^{(1)} < 0, \text{ valamely } t = 0, 1, \dots \text{ esetén}),$$

míg a tönkremenési idő

$$I^{(1)}(a) = \begin{cases} \min(t = 0, 1, \dots : T^{(1)}(t) < 0), & \text{ha } \exists t \geq 0, \text{ hogy } T^{(1)}(t) < 0 \\ \infty, & \text{ha } \forall t = 0, 1, 2, \dots, -re \ T^{(1)}(t) \geq 0. \end{cases}$$

Az irodalomban megtalálható a tönkremenési valószínűségekre felírható integro-differenciál egyenlet folytonos eloszlások esetén [2]. Ebben a dolgozatban felírom a diszkrét modellre vonatkozó differenciaegyenletet.

Állítás: Ha $c^{(1)}$ egész szám, akkor a $Z(a)$ kielégíti az alábbi egyenletet:

$$\begin{aligned} Z(a) = & \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{h_1-a}{c^{(1)}} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{a+c^{(1)} \cdot i} Z(a + c^{(1)} \cdot i - j) \cdot p_i^{(1)} \cdot q_j^{(1)} + \\ & + \sum_{i=\left\lfloor \frac{h_1-a}{c^{(1)}} \right\rfloor+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{h_1} Z(a + c^{(1)} \cdot i - j) \cdot p_i^{(1)} \cdot q_j^{(1)} + \\ & + \sum_{i=\left\lfloor \frac{h_1-a}{c^{(1)}} \right\rfloor+1}^{\infty} \sum_{j=h_1+1}^{\infty} Z(a + c^{(1)} \cdot i - h_1) \cdot p_i^{(1)} \cdot q_j^{(1)}. \end{aligned}$$

Bizonyítás:

A fentebb felírt egyenlet bizonyítása a teljes valószínűség tételén alapul. Legyen

i az első kárigény időpontja, j az első kárigény nagysága. Ebben a pillanatban elvágva a folyamatot, amennyiben a csőd nem következett be, a folyamat az új tőkével újraindul. Az első összeg azokat az eseteket tartalmazza, amikor az első kárigény „hamar” érkezik. Ha a kárigény beérkezéséig a kezdőtőkével együtt nem gyűlt fel annyi pénz, hogy akár a határnyi kárigényt ki tudja fizetni a biztosító, akkor csak akkor nem megy tönkre a cég, ha a kárigény nem haladja meg az $a + c^{(1)} \cdot i$ pénzmennyiséget. A második szumma azokat az eseteket tartalmazza, amikor az első kárigény beérkezéséig felgyűlt annyi pénz a kasszában, hogy bármekkora, akár h_1 nagyságú kárigényt is ki tud fizetni a biztosító. Ekkor a kifizetett kárnagyság j , ami csökkenti az addig felgyűlt tőkét, és ilyenkor nem kell a viszontbiztosítónak semmilyen részt átvállalni. Az egyenlet harmadik része azt az esetet írja le, mikor a h_1 -nél nagyobb kárigény érkezik be a biztosítottak részéről. Ilyen helyzetben azonban mindig csak h_1 -et kell a társaságnak kifizetnie, hiszen a többi részt átvállalja a viszontbiztosító, így a primer biztosító pénzmennyisége csak h_1 -gyel csökken. Az újrainduló folyamathoz tartozó valószínűségeket azonban a feltételek valószínűségeivel, azaz a $p_i^{(1)}$ és $q_j^{(1)}$ valószínűségekkel súlyozni kell, s a súlyozás után kapjuk a tételben szereplő egyenletet. Az előbbi egyenlet még az alapmodell tönkremenési valószínűségekre vonatkozó egyenleténél is sokkal bonyolultabb, így a megoldására nem vállalkozunk. Ehelyett véletlen szimulációval vizsgáljuk a modellt. Az egyenlet felírása arra is alkalmas, hogy az egyes ágak végiggondolása segíti a szimulációs program algoritmusának kidolgozását.

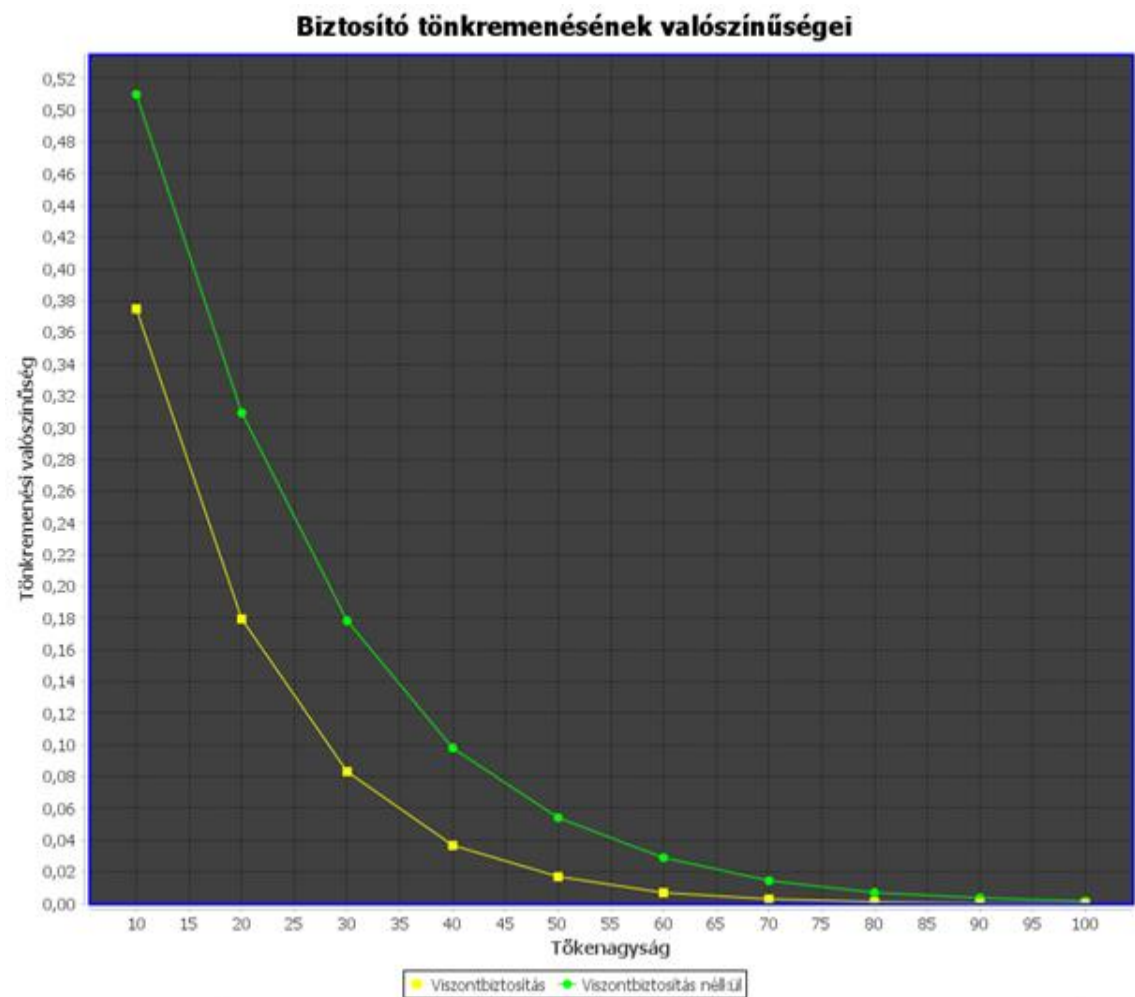
3.2. A program kibővítése egyoldali viszontbiztosítással

Az alapmodell szimulációs programjába beépítettem a viszontbiztosítást. A módosítás oly módon történt, hogy a kifizetendő kárnagyságokat a határnál csonkítottam. Mivel a primer biztosító kárfolyamata ugyanúgy zajlik le, mint a viszontbiztosítás nélküli esetben, csak a kifizetett kárnagyságok a csonkított értékek, ezért mind a tönkremenési valószínűségeket, mind a tönkremenési időket az alapmodell esetén bemutatott módon becsüljük.

Miután a modellt kibővítettem a részleges viszontbiztosítással, a program segítségével megmutatom, miért is éri meg viszontbiztosítást kötni. Jelen esetben is 100 ezer szimulációt futtattam, hogy a nagy számok törvénye alapján minél pontosabb eredményt kapjak. Először azt vizsgálom, hogy hogyan módosul a biztosító tönkremenési

valószínűsége adott h_1 határ esetén a kezdőtőke függvényében. Az első esetben a biztosító kezdőtőkéjét 10-re állítottam, majd tízesével növeltem egészen 100-ig. A bevételi rátát $b^{(1)} = 2$ -nek választottam. A kárigények nagysága 0-tól 16-ig terjedő egészek egyenletes eloszlást követve, két káresemény között eltelt idő 0-tól 9 -ig lehetnek, szintén egyenletes eloszlást követve. A h_1 határt először 12-re állítottam, ez azt jelenti, hogy az ennél nagyobb kárigények esetén a biztosító a 12 fölötti részt átruházza a viszontbiztosítóra. Minden tőkeszintre 100 ezer szimulációt futtattam és ez alapján állapítottam meg, hogy mennyi a valószínűsége, hogy adott tőkeszintnél a biztosító tönkremegy. Egy szimuláció vagy addig fut, amíg a biztosító pénzmennyisége nagyobb vagy egyenlő 0-val, vagy ha elérte a $t=100$ időegységet és nem ment még tönkre. Tekintsük először azt az esetet, amikor biztosító nem ad át a bevételéből a viszontbiztosítónak. Így látványosan nagyobb lesz az eltérés a második esettől, amikor nincs viszontbiztosítás, így a primer biztosítót terhel minden kár. A nettó profit feltétel viszontbiztosítás nélkül is teljesül, hiszen viszontbiztosítás nélkül a beérkező kárigények várható értéke $(0+16)/2=8$, míg a kárigények közt eltelt idők várható értéke $(0+9)/2=4.5$, így hányadosuk 2 alá esik. Viszontbiztosítással a hányados még kisebb, hiszen a kárigények várható értéke $(0+1+\dots+11+5*12)/17=7.41$ -re csökken. Így a viszontbiztosítással elért csődbe menési valószínűség csökkenés részben a kevesebb kiadásnak köszönhető.

A 10. ábrán láthatóak a szimulációkból kapott eredmények. A sárga vonal szemlélteti azt, amikor a biztosító beállítja a $h_1 = 12$ értéket, de nem ad át a másikkal a bevételéből, a zöld pedig a viszontbiztosítás nélküli eseteket. Ugyanakkor az is látszik, hogy a különbség a kettő tönkremenési valószínűség között folyamatosan csökken azáltal, hogy a kezdőtőkét növeljük. Az $a=90$ -es kezdőtőke szintnél már mindkét esetben nagyon kicsi a valószínűsége, hogy csőd következik be.

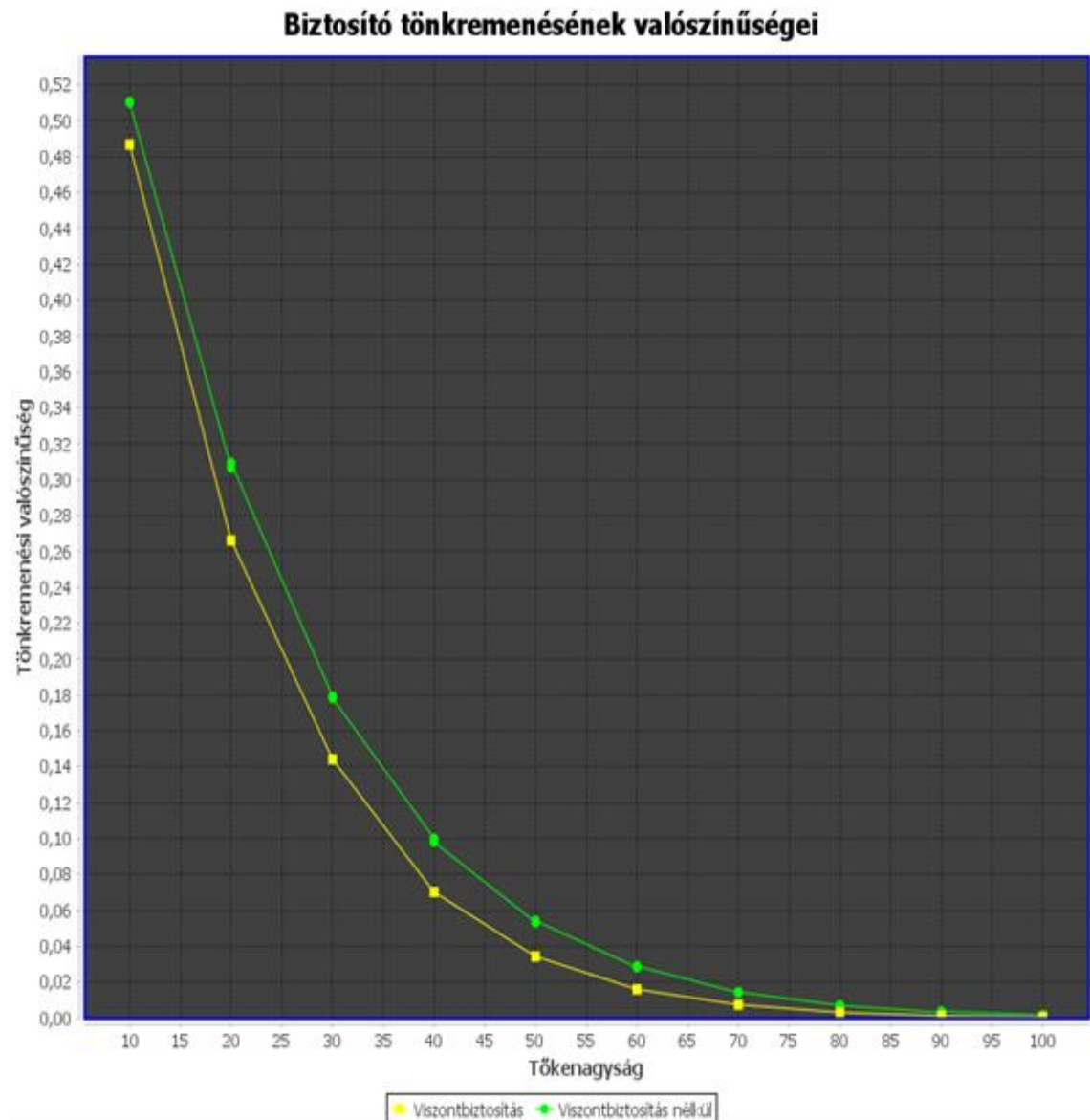


10. ábra: Tönkremenési valószínűség összehasonlítás egyoldali viszontbiztosítás esetén

Látható tehát, hogy azoknak a pénzügyi intézeteknek, akik kevesebb alaptőkével rendelkeznek érdemesebb viszontbiztosítást kötni, mert így alacsonyabb kezdő pénzmennyiséggel is olyan társaságot tudnak létrehozni, amelyeknek alacsony a tönkremenési valószínűsége. Azonban ez a vizsgálat nem életszerű, hiszen nincs olyan vállalkozási forma, amely ingyen vállalna át kifizetéseket egy másik cégtől. Csak akkor tesznek ilyet, ha az pénzügyi szempontból nekik is megéri. Vizsgáljuk meg, mekkora díj átfizetése mellett éri ez meg a biztosítóknak.

Nézzünk most olyan részleges egyoldali viszontbiztosítást, amikor már a kockázat átvállalásáért a biztosító bevételeinek egy részét átutalja a viszontbiztosítónak. A kárfolyamat és a kárnagyságok megegyeznek az előző példában szereplőkkel. A $h_1 = 12$ választás azt jelenti, hogy a viszontbiztosító által átvállalt károk nagysága 1, 2, 3, és 4 lehet. Így az átvállalt kárnagyság várható értéke $(1+2+3+4)/17 = 0,588$, ezt 4,5-del osztva

megkapjuk az egységnyi időre eső kifizetendő átvállalt kárnagyság várható értékét. A kapott hányados 0.13. Így a következő vizsgálatnál figyelembe vettem, hogy biztosító a viszontbiztosítónak időegységenként legalább ennyit, a példában 0.14 egységnyi pénzmennyiséget, azaz a bevételének 0.07-szorosát fizeti cserébe, hogy az vállalja a kárigények $h_1 = 12$ feletti részének kifizetését. Ez azt jelenti, hogy $c^{(1)} = 1.86$. A többi paraméterben nem történt módosítás.

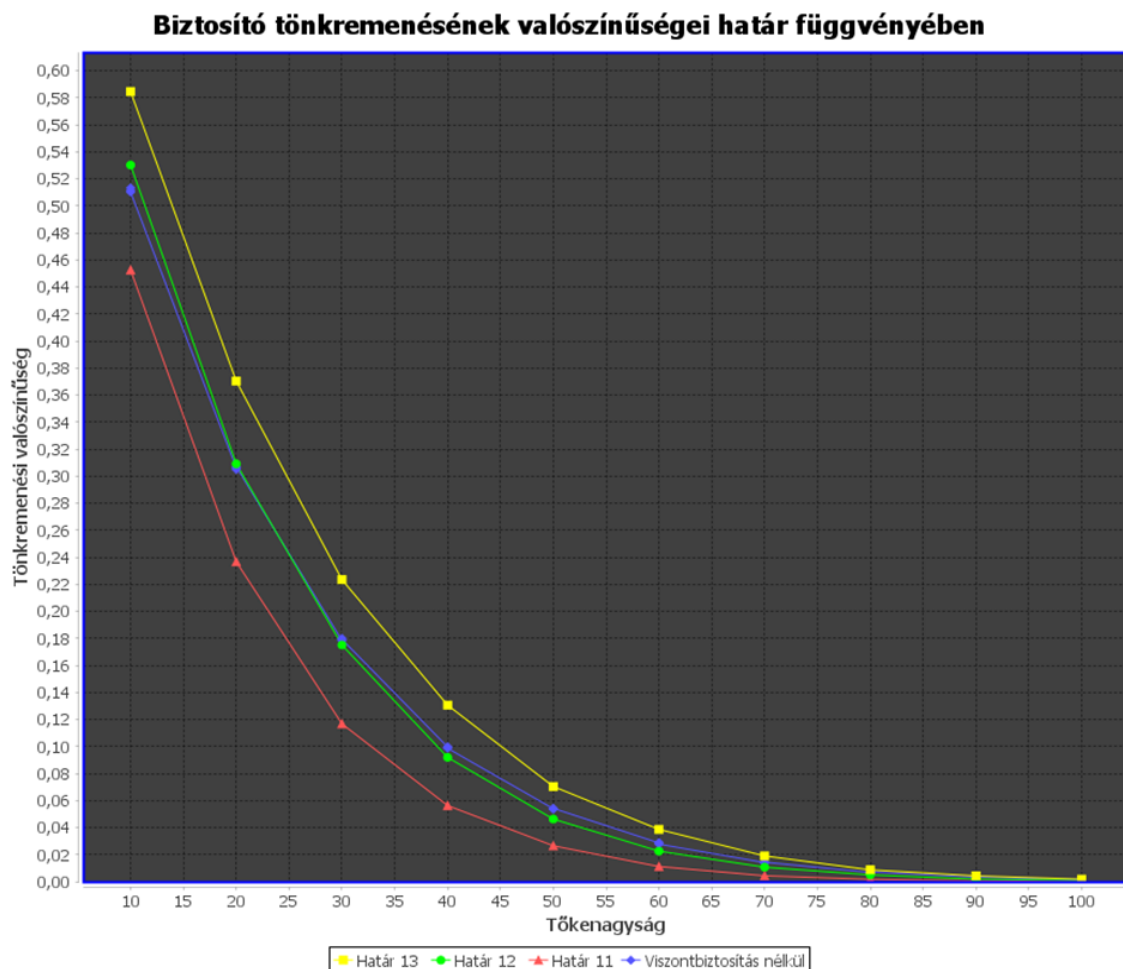


11. ábra: Tönkremenési valószínűség összehasonlítás egyoldali viszontbiztosítás esetén (más paraméterekkel)

A 11. ábrán látható, hogy a 10. ábrához képest megnőtt a tönkremenés valószínűsége, legfőképp az alacsony tőkeszint esetén. Ez természetes, hiszen most a bevételének egy részétől esik a cég, és a kifizetései maradtak ugyanolyanok, mint korábban, hiszen a

h_1 maradt 12, mint eddig volt. Viszont az is látható, hogy annak ellenére, hogy már pénzt is kell átadni, még mindig alacsonyabb a tönkremenési valószínűsége a társaságnak, mint ha nem lenne viszontbiztosítása. Az eltérés a legtöbb esetben nagyobb, mint a szimuláció hibája. Pénzügyi szempontból tehát kijelenthetjük, hogy a viszontbiztosítást kötő így is jobban jár, mintha nem mondana le a bevétele egy részéről, de cserébe neki kellene fizetnie az összes kárigényt.

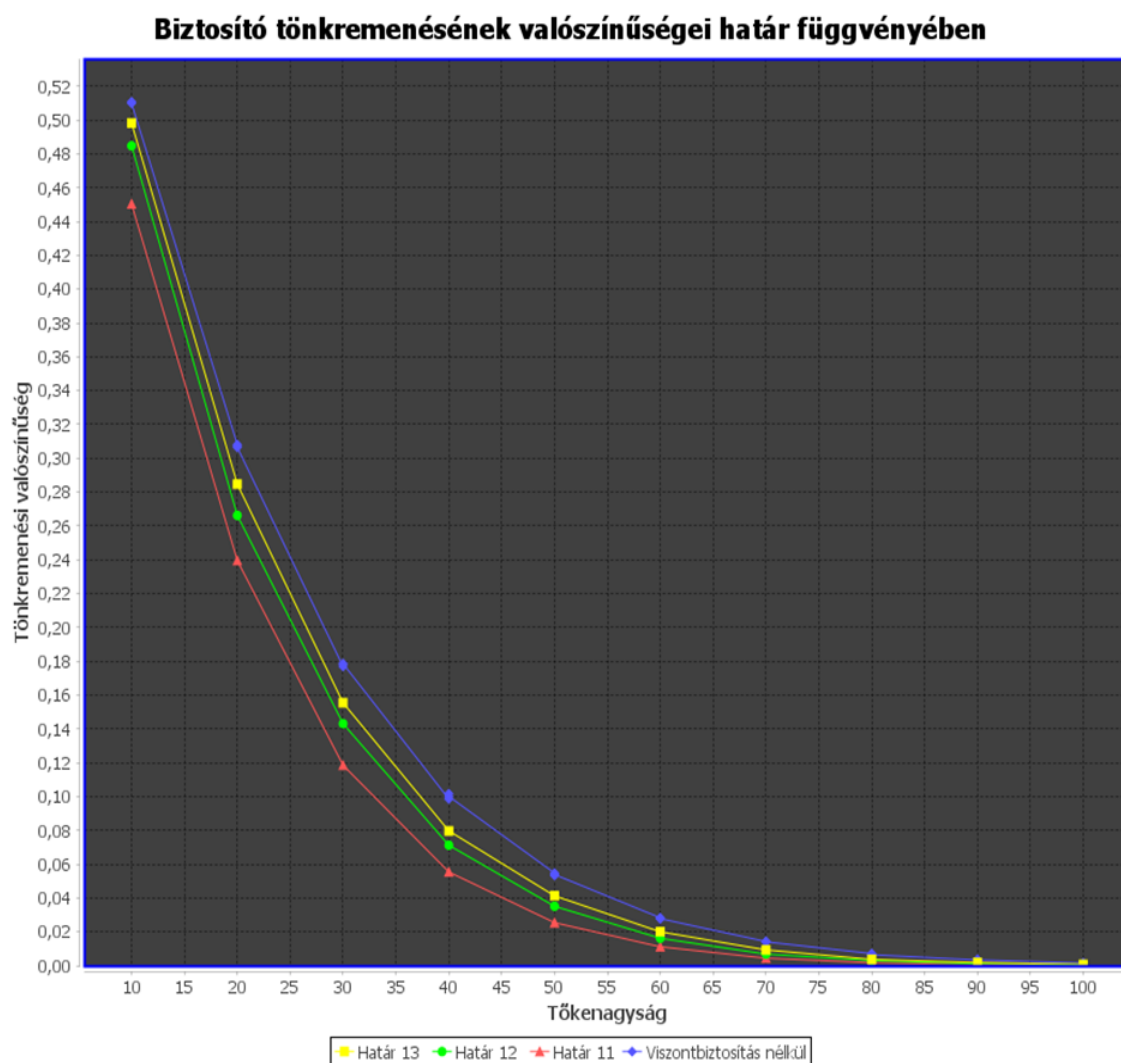
Felmerül a kérdés, mi az a h_1 határ, ami mellett a leginkább érdemes a viszontbiztosítást megkötnie a biztosítónak. A megfelelő h_1 meghatározása nem egyszerű, hiszen a biztosító érdeke részben az, hogy minél alacsonyabb legyen, s így a bevételnek is minél kisebb részét kelljen a viszontbiztosító részére átutalni, részben pedig az, hogy a nagyösszegű kifizetések következtében se menjen tönkre. A viszontbiztosítónak pedig az az érdeke, hogy a határ minél magasabb legyen és a részesedése is magas legyen a bevételből. Ezért készítettem egy olyan összehasonlítást, amelyben azt szeretném szemléltetni, hogy milyen pontig éri meg egy biztosítónak a h_1 növelése, amellet, hogy lemond a bevétele egy részéről. A kárnagyságok most is 0 és 16 közötti egészek egyenletes eloszlással, károk között eltelt idők 0-tól 9-ig terjedő egészek szintén egyenletes eloszlással, az alaptőke kezdetben 10 majd 10 egységgel növelem 100-ig, a bevételi ráta 2.0, ennek tizedrésze kerül átadásra. A bevétel átadásának a nagyságát úgy választottam ki, hogy minden vizsgált h_1 esetén a viszontbiztosító által átvállalt egységnyi időre eső többlet várható értéke kisebb legyen, mint az átutalt pénzösszeg. A h_1 -et először 11-re, majd 12-re, végül 13-ra változtattam és mindegyikre 100 ezer szimulációt futtattam. A 12. diagrammon az összehasonlítás érdekében ábrázolom azt is, amikor nincs viszontbiztosítás.



12. ábra: Tönkremenési valószínűség eltérő határok esetén, egyoldali viszontbiztosításnál

A 12. ábráról láthatjuk, hogy minél alacsonyabb a határ, annál kisebb a tönkremenés valószínűsége. A diagramból az is látható, hogy a 11 határszintnél még alacsonyabb a tönkremenés valószínűsége, mint amikor nem kötnek viszontbiztosítást. Ez a 12-es határszint esetében már csak néhány esetben igaz, ha pedig a határt 13-ra állítom, akkor már nem éri meg a cégnek viszontbiztosítást kötni, mert a tönkremenés valószínűsége (a szimuláció hibáján belül) minden esetben nagyobb, mint amikor nem köt viszontbiztosítást. Ennek az az oka, hogy a cég túl magasra állította a h_1 -et ezen átadott pénzmennyiség esetén. Más nézőpontból nézve ezen határ esetén a bevétel indokolatlanul nagy részét adja át a viszontbiztosítónak. Az átvállalt egységnyi időre eső kár várható értéke $(1+2+3)/17=0.353$, $0.353/4.5=0.078$, míg az átadott, egységnyi időre eső pénzmennyiség 0.2 egység. Bár a nettó profit feltétel teljesül, hiszen $(0+1+\dots+12+13)/17=7.647$; $7.647/4.5=1.699 < 1.8$, ez a különbség már nem mindig fedezi a beérkező károkat.

A következő esetben mindegyik határszintre arányos pénzátadást állítottam be. Kiszámoltam az átvállalt károk egységnyi időre eső várható értékét, s a 11-es határnál maradt az átadás 0.1, a 12-es határ esetén 0.070 és a 13-s szint esetében pedig 0.039 volt a bevételi ráta átadási aránya, azaz a megmaradó bevételi ráta 1.8, 1.86, illetve 1.964 lett. Ebben az esetben látható a 13. ábrán, hogy mindegyik határszint esetében alacsonyabb a tönkremenési valószínűség, mintha nem rendelkezne viszontbiztosítással a cég.



13. ábra: Tönkremenési valószínűség eltérő határok esetén, egyoldali viszontbiztosításnál, (más paraméterek esetén)

4. Kétoldali viszontbiztosítás

4.1. Az alapmodell kibővítése kétoldali viszontbiztosítással

A dolgozat első részében bemutattam, illetve szimulációkkal szemléltettem az alapmodellt, majd a következő fejezetben viszontbiztosítással kibővítettem oly módon, hogy az egyik biztosítótársaságnak van csak viszontbiztosítása. Ezen fejezetben rátérek arra az esetre, amelyben a biztosítók mindegyikének van viszontbiztosítása és ennek keretében egymást kölcsönösen viszontbiztosítják. A továbbiakban ezt a modellt kétoldali viszontbiztosításnak fogom nevezni.

Ebben az esetben két biztosítótársaságunk van, nevezzük őket első és második biztosítónak. A kétoldali viszontbiztosítás lényege, hogy ezek a biztosítók egymást viszontbiztosítják. A viszontbiztosítások esetén szokásos direkt biztosító és viszontbiztosító elnevezéstől azért térünk el, mert ebben a modellben mindkét biztosító direkt és viszontbiztosító is egyben. Eddig csak azt vizsgáltuk, hogy (legfeljebb) az első cég adja át bevételének egy részét a második vállalatnak, amely cserébe átvállalja a beérkező kárigények egy határ feletti részének a kielégítését. Ezen helyzetben mind az első, mind a második biztosító átadja a bevételének egy bizonyos (nem feltétlenül ugyanakkora) hányadát a másik félnek, és mindketten átveszik a másik kárigényének egy adott szint feletti részét. Jelen esetben természetesen a matematikai modellünk ki fog bővülni, a pénzáadási hányadok mellett a h_1 határon kívül immár a h_2 határ is benne lesz a modellben. Tovább bonyolítja a helyzetet, hogy most már mindkét társaság pénzügyi helyzetét figyelembe kell venni a tönkremenés vizsgálatakor. Azt tekintjük tönkremenésnek, amikor valamelyik cég részére rendelkezésre álló pénzmennyiség negatívvá válik, hiszen abban a pillanatban a kétoldali viszontbiztosítás megszűnik, hiába maradt még pozitív tartományban a másik társaság pénzmennyisége. Természetesen ennek megfelelően minden szimulációt legfeljebb addig futtatunk, amíg valamelyik cég tönkre nem megy. Szemléltetni fogom, hogy kétoldali viszontbiztosítás esetén annak a valószínűsége, hogy valamelyik biztosító tönkremegy, kisebb lehet, mint ha viszontbiztosítás nélkül vizsgálnám a folyamatot és nézném annak a valószínűségét, hogy valamelyik biztosító tönkremegy.

A kétoldalú viszontbiztosításnál is teljesülnie kell a nettó profit feltételnek, ráadásul mindkét biztosítóra külön-külön: vagyis az egységnyi idő alatti összes (megmaradó és viszontbiztosításból származó) bevételük legyen nagyobb, mint a beérkező kifizetendő

kárigények várható értéke és a kárigények közt eltelt idő várható értékének a hányadosa, plusz az átvállalt kárigények várható értékének nagysága és az átvállalt kárigények között eltelt idő várható értékének hányadosa.

Az első biztosító kárfolyamatára vonatkozó jelöléseket megtartjuk. Jelölje $KI_l^{(2)}$ a második biztosító által biztosított ügyfelektől beérkező kárigények közt eltelt időket, $N^{(2)}(t)$ jelölje a beérkező kárigények számát t ideig. Ha $S_l^{(2)}$ az l -edik kárigény nagysága, akkor a második biztosító által ténylegesen kifizetendő pénzmennyiség

$$SV_l^{(2)} = \begin{cases} S_l^{(2)}, & \text{ha } S_l^{(2)} \leq h_2 \\ h_2, & \text{ha } S_l^{(2)} > h_2 \end{cases}.$$

Jelölje $c^{(2)}$ a második társaság egységnyi idő alatt beérkező bevételét, illetve a_2 a cég kezdőtőkéjét. Mint az első társaság esetében itt is legyen $T^{(2)}(t)$ a cég pénzmennyisége a t időpillanatban. $T^{(2)}(t)$ -t a következőképpen lehet kiszámítani: az alaptőkéhez hozzá kell adni a t . időpillanatig beérkezett bevételt, azonban a t pillanatig beérkezett károk csökkentik a társaság pénzmennyiségét, ezt le kell vonni, továbbá a viszontbiztosítások miatt kifizetett pénzmennyiséget is:

$$T^{(2)}(t) = a_2 + c^{(2)} \cdot t - \sum_{l=1}^{N^{(2)}(t)} S_l^{(2)} - \sum_{l=1}^{N^{(1)}(t)} (S_l^{(1)} - SV_l^{(1)})$$

Mivel ezen esetben is diszkrét eloszlású valószínűségi változókat feltételezünk, így:

$$T^{(2)}(t) = a_2 + c^{(2)} \cdot t - \sum_{l=1}^{N^{(2)}(t)} S_l^{(2)} - \sum_{l=1}^{N^{(1)}(t)} (S_l^{(1)} - SV_l^{(1)}), t = 0, 1, 2, \dots$$

és

$$T^{(1)}(t) = a_1 + c^{(1)} \cdot t - \sum_{l=1}^{N^{(1)}(t)} S_l^{(1)} - \sum_{l=1}^{N^{(2)}(t)} (S_l^{(2)} - SV_l^{(2)}), t = 0, 1, 2, \dots$$

Annak a valószínűsége, hogy valamelyik biztosító tönkremegy mindkét biztosító pénzügyi helyzetétől függ. Ha a_1 jelöli az első társaság, a_2 a második társaság kezdőtőkéjét, és $Y(a_1, a_2)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy valamelyik társaság tönkremegy, akkor

$$Y(a_1, a_2) = P(T^{(1)}(t) < 0 \text{ vagy } T^{(2)}(t) < 0 \text{ valamely } t = 0, 1, 2, \dots \text{ esetén})$$

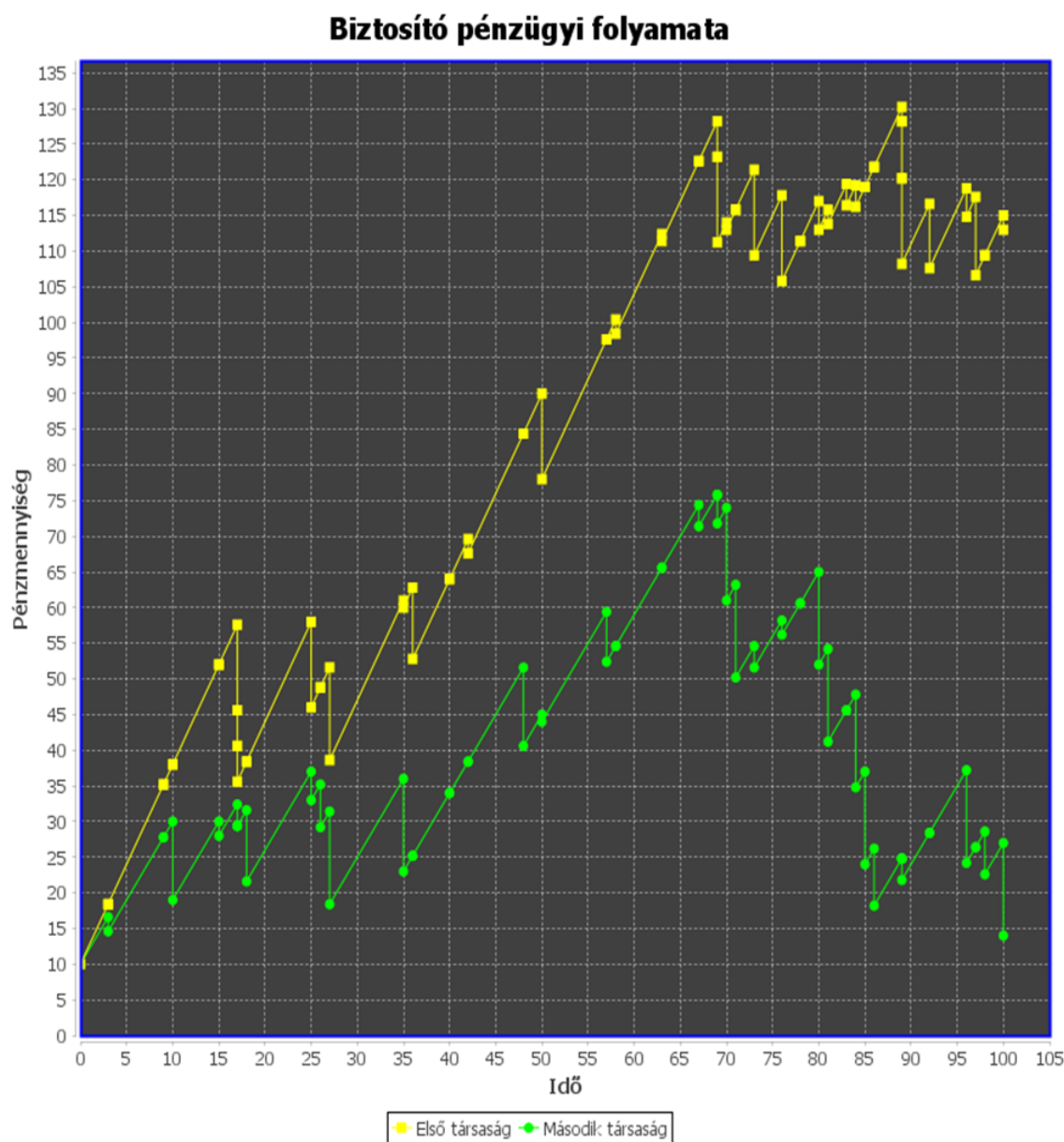
és annak a valószínűsége, hogy egyik társaság sem megy tönkre

$$Z(a_1, a_2) = 1 - Y(a_1, a_2) = P(0 \leq T^{(1)}(t) \text{ és } 0 \leq T^{(2)}(t), \text{ minden } t = 0, 1, 2, \dots \text{ esetén}).$$

A tönkremenési időt az alábbi módon definiáljuk:

$$I(a_1, a_2) = \begin{cases} \min(t = 0, 1, 2, \dots : T^{(1)}(t) < 0 \text{ vagy } T^{(2)}(t) < 0), \\ \quad \text{ha } \exists t \geq 0, \text{ hogy } T^{(1)}(t) < 0 \text{ vagy } T^{(2)}(t) < 0. \\ \infty, \text{ ha } \forall t = 0, 1, 2, \dots - \text{re } T^{(1)}(t) \geq 0 \text{ és } T^{(2)}(t) \geq 0 \end{cases}$$

Most szemléltetem, hogy hogyan is néz ki egy konkrét folyamat, ha két biztosító társaság viszontbiztosítják egymást. Ezt az egy folyamatot azért is érdemes szemléltetni, mert egy szimuláció esetén általában 100 ezer ilyen folyamatot generálunk, hogy az eredmények minél pontosabbak legyenek. Egy ilyen szimulált folyamat a 14. ábrán látható. A pontok azokat az időpontokat jelzik, amikor vagy az egyik, vagy a másik, esetleg mindkét társasághoz egy időben beérkezik egy kárigény. Ilyenkor a kasszá(k)ban levő pénzmennyiség(ek)ben egy lefelé való ugrás történik, a viszontbiztosítás miatt akár egyszerre mindkettőnél. Előfordulhat, hogy érkezik be kárigény, mégis azt látjuk, hogy nem csökken a cég pénzmennyisége. Ez azért lehet mert előfordulhat, hogy a kárigény nagysága nulla. Egy ilyen szimulációt általában addig vizsgálunk, amíg az egyik biztosító tönkre nem megy, vagy ha ez nem következik be, akkor egy rögzített ideig. Az ábrán mutatott példában ez az idő 100 időegység. Ezen folyamatnál a szimuláció végéig nem történik tönkremenés.



14. ábra: Biztosítók pénzügyi folyamata kétoldali viszontbiztosítás esetén

4.2. A tönkremenési valószínűségek vizsgálata kétoldali viszontbiztosítás esetén

Kétoldali viszontbiztosítás esetén a két folyamat részleges összefűzésére van szükség, s e szempontból elsősorban az időn van a hangsúly. Minden olyan időpillanatban ki kell számolnunk mindkét biztosítótársaság kasszájában levő pénzmennyiséget, amikor valamelyik társasághoz érkezik be kárigény. Figyelni kell, hogy melyikhez érkezik az adott kárigény, kell-e viszontbiztosítást fizetni, ez ugyanis mindkét társaság pénzmennyiségét befolyásolja. Nehezíti a helyzetet, hogy ugyanazon időpillanatban mindkét biztosítóhoz érkezhets kárigény. Látható tehát, hogy több ágot kell figyelnünk a korábbi modellekhez képest.

A szimulációs program megvalósításához képzeljük el a következő esetet: beérkezik két kárigény, az egyik az első, a másik a második biztosítóhoz. Meg kell nézni, hogy melyik kárigény érkezett előbb. Ha például $S_1^{(1)}$ az $KI_1^{(1)}=2$ időpillanatban, az $S_1^{(2)}$ az $KI_1^{(2)}=4$ időpillanatban érkezett be, akkor meg kell növelni az első társaság aktuális pénzmennyiségét a $t=2$ időpillanatig az első társasághoz beérkezett bevétellel és levonni az általa fizetendő kárnagyságot. A második társaság pénzmennyiségét is meg kell növelni a hozzá beérkező bevétellel a $t=2$ időpillanatig, s ha $h_1 < S_1^{(1)}$, akkor a megnövelt összegből levonandó a viszontbiztosításként általa fizetendő h_1 fölötti rész. Ezután azt gondolhatnánk, hogy már csak azt kell megnézni, hogy az $S_1^{(1)}$ mennyivel előbb érkezett be, mint az $S_1^{(2)}$ és ez alapján kiszámítani, hogy a két kár között mennyi idő telt el és az ezen idő alatt beérkező bevételeket hozzáadni a kasszában levő pénzmennyiséghez, majd $SV_1^{(2)}$ -vel csökkenteni kell a második biztosító kasszájában levő pénzmennyiséget, illetve az esetlegesen (a viszontbiztosítás miatt) $S_1^{(2)} - SV_1^{(2)}$ -vel az első biztosító kasszájában levő pénzmennyiséget. A dolog azonban nem ilyen egyszerű, mivel előfordulhat, hogy miután kifizettük az első társasághoz beérkező kárigényt, egy újabb kárigény érkezik be az első céghez a $t=3$ időpontban, még a $t=4$ időpont előtt. Ilyenkor a később beérkezett kárigényt addig „várakoztatjuk”, amíg az első társasághoz befutó kárigényekkel el nem érkezünk arra az időpontra. Tovább bonyolódik a helyzet, ha a két káresemény egyazon időpontban érkezik be, ilyenkor ugyanis egyszerre kell mindkét kárnagyságot megvizsgálni, hogy az 1. biztosító kárigénye nagyobb vagy kisebb, mint a h_1 , illetve a 2. biztosítóhoz beérkező igény szintén nagyobb vagy kisebb, mint a h_2 . Elképzelhető, hogy csak az egyiknek kell átvállalni a kár egy részét, lehet, hogy egyiknek sem kell és az is lehet, hogy egyszerre mindkettőnek át kell vállalnia a másiktól. Szerencsére az, hogy melyik kárigényt elégítjük ki előbb, az nem befolyásolja a tönkremenés tényét.

Látható tehát, hogy a kétoldali viszontbiztosítás esetében a matematikai modellünk jóval összetettebb lesz, amennyiben differenciaegyenletet kívánunk felírni a tönkremenés vagy nem-tönkremenés valószínűségére, sok-sok különböző ágot kell ehhez számba vennünk.

A differenciaegyenlet felírása most is azon múlik, hogy az első kárigény beérkezésének időpontjában elvágva a folyamatot, a folyamat más kezdőtőkékkel, de újraindul. Ez azonban csak arra a folyamatra teljesül automatikusan, amelyikhez a

kárigény beérkezik. A másik folyamatra csak akkor, ha a kárigények közt eltelt időkre teljesül az örökifjú tulajdonság. Ez azonban csak a geometriai eloszlású valószínűségi változókra igaz. Tegyük fel tehát, hogy mindkét folyamat esetén az egymást követő kárigények közt eltelt idők geometriai eloszlásúak. Mivel nem feltétlenül azonos paraméterűek, ezért megtartjuk a korábbi jelöléseket.

Használjuk az alábbi jelöléseket: az első társasághoz érkező első kárigény időpontja i_1 , a hozzá tartozó kárnagyság j_1 , a második társasághoz érkező első kárigény időpontja i_2 , a hozzá tartozó kárnagyság j_2 .

1. Először tegyük fel, hogy az első társasághoz érkezik be korábban a kárigény, azaz $i_1 < i_2$.

Az első ilyen aleset, amikor az igény túl korán érkezik be, vagyis nincs elég pénz még az első társaság kasszájában, hogy kifizesse az igényt, ha az meghaladja h_1 szintjét, tehát nem lehet a kár egy részét átruházni a másik társaságra. Ezt azt jelenti, hogy

$$a_1 + i_1 \cdot c^{(1)} \leq h_1,$$

azaz $i_1 \leq \frac{h_1 - a_1}{c^{(1)}}$. Csak az első társaság mehet tönkre. A nem-tönkremenés feltétele az, hogy a beérkező kárigény kisebb legyen, mint az addig felgyűlt pénzmennyiség, azaz $j_1 \leq a_1 + b_1 \cdot i_1$. Tehát ezen ág esetén annak a valószínűsége, hogy nem megy tönkre egyik biztosító sem

$$\sum_{i_1=0}^{\left\lfloor \frac{h_1 - a_1}{c^{(1)}} \right\rfloor} \sum_{j_1=0}^{a_1 + c^{(1)} \cdot i_1} \sum_{i_2=i_1+1}^{\infty} Z(a_1 + c^{(1)} \cdot i_1 - j_1, a_2 + c^{(2)} \cdot i_1) \cdot p_{i_1}^{(1)} \cdot q_{j_1}^{(1)} \cdot p_{i_2}^{(2)}.$$

A második aleset hasonlít az elsőre, vagyis az 1. biztosítóhoz érkezik be előbb az igény, annyi különbséggel az előző esethez képest, hogy a kárigény nem érkezik túl korán, vagyis az első biztosító akár ki is tudná fizetni a h_1 kárt, viszont továbbra sincs erre szükség, mert j_1 nem éri el a h_1 szintjét, így továbbra sincs viszontbiztosító által fizetett összeg. Ezen ág esetén annak a valószínűsége, hogy nem megy tönkre egyik biztosító sem

$$\sum_{i_1=\left\lfloor \frac{h_1 - a_1}{b_1} \right\rfloor + 1}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{h_1} \sum_{i_2=i_1+1}^{\infty} Z(a_1 + c^{(1)} \cdot i_1 - j_1, a_2 + c^{(2)} \cdot i_1) \cdot p_{i_1}^{(1)} \cdot q_{j_1}^{(1)} \cdot p_{i_2}^{(2)}$$

A harmadik alesetben már van viszontbiztosítás, vagyis a beérkező kárigény már meghaladja a h_1 -et. Ilyen helyzetben az 1. biztosítónak ki kell tudnia fizetni a kár h_1 -ig tartó részét, a 2. biztosítónak pedig az a fölötti részt kell tudnia kifizetnie. Tehát $a_1 + i_1 \cdot$

$c^{(1)} > h_1$ másrészt $a_2 + i_1 \cdot c^{(2)} \geq j_1 - h_1$, azaz $a_2 + i_1 \cdot c^{(2)} + h_1 \geq j_1$. Tehát ezen ág esetén annak a valószínűsége, hogy nem megy tönkre egyik biztosító sem

$$\sum_{i_1=\left[\frac{h_1-a_1}{c^{(1)}}\right]+1}^{\infty} \sum_{j_1=h_1+1}^{a_2+c^{(1)} \cdot i_1+h_1} Z(a_1+c^{(1)} \cdot i_1-h_1, a_2+c^{(2)} \cdot i_1-(j_1-h_1)) \cdot p_{i_1}^{(1)} \cdot q_{j_1}^{(1)} \cdot p_{i_2}^{(2)}$$

Ezzel az első eset lehetőségeit mind megnéztük. A második esetben már azokat a szituációkat nézzük meg, amikor a második társasághoz érkezik be előbb a kárigény.

2. A második esetben, illetve annak aleteiben azokat az alkalmakat kell felírunk, amikor a második biztosítóhoz érkezik be előbb a káresemény, azaz $i_2 < i_1$. Az előző esettel való szimmetria miatt az egyes ágakból származó tagok a következők:

$$\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{h_2-a_2}{c^{(2)}}\right]} \sum_{j_2=0}^{a_2+c^{(2)} \cdot i_2} \sum_{i_1=i_2+1}^{\infty} Z(a_1+c^{(1)} \cdot i_2, a_2+c^{(2)} \cdot i_2-j_2) \cdot p_{i_1}^{(1)} \cdot q_{j_2}^{(2)} \cdot p_{i_2}^{(2)},$$

$$\sum_{i_2=\left[\frac{h_2-a_2}{c^{(2)}}\right]+1}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{h_2} \sum_{i_1=i_2+1}^{\infty} Z(a_1+c^{(1)} \cdot i_2, a_2+c^{(2)} \cdot i_2-j_2) \cdot p_{i_1}^{(1)} \cdot q_{j_2}^{(2)} \cdot p_{i_2}^{(2)},$$

valamint

$$\sum_{i_2=\left[\frac{h_2-a_2}{c^{(2)}}\right]+1}^{\infty} \sum_{j_2=h_2+1}^{a_1+c^{(2)} \cdot i_2+h_2} \sum_{i_1=i_2+1}^{\infty} Z(a_1+c^{(1)} \cdot i_2-(j_2-h_2), a_2+c^{(2)} \cdot i_2-h_2) \cdot p_{i_1}^{(1)} \cdot q_{j_2}^{(2)} \cdot p_{i_2}^{(2)}$$

3. Az utolsó eset, ami bekövetkezhet, az, hogy a két káresemény egyszerre érkezik be. Ez az, ami a három közül a legbonyolultabb. Jelöljük a közös időpontot i -vel.

Először nézzük azt az alesetet, amikor egyiknél sem jöhet akkora kárigény, hogy viszontbiztosításra legyen szükség, mert mindkét biztosító számára hamar jön a kárigény. Ekkor $a_1 + c^{(1)} \cdot i \leq h_1$ és $a_2 + c^{(2)} \cdot i \leq h_2$. Annak a valószínűsége, hogy ebben az esetben nem megy tönkre egyik biztosító sem

$$\sum_{i=0}^{\min\left(\left[\frac{h_1-a_1}{c^{(1)}}\right], \left[\frac{h_2-a_2}{c^{(2)}}\right]\right)} \sum_{j_1=0}^{a_1+c^{(1)} \cdot i} \sum_{j_2=0}^{a_2+c^{(2)} \cdot i} Z(a_1+i \cdot c^{(1)}-j_1, a_2+i \cdot c^{(2)}-j_2) \cdot p_i^{(1)} q_{j_1}^{(1)} p_i^{(2)} q_{j_2}^{(2)}.$$

Most nézzük azt az alesetet, amikor egyiknél sincs szükség viszontbiztosításra, de ha akkora lenne a kárigény, akkor is ki tudnák fizetni. Ekkor annak a valószínűsége, hogy egyik biztosító sem megy tönkre

$$\sum_{i=\max\left(\left\lfloor \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rfloor\right)}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{h_1} \sum_{j_2=0}^{h_2} Z(a_1 + i \cdot c^{(1)} - j_1, a_2 + i \cdot c^{(2)} - j_2) \cdot p_i^{(1)} q_{j_1}^{(1)} p_i^{(2)} q_{j_2}^{(2)}.$$

Most vizsgáljuk azt az ágot, amikor mindkét biztosítónak szüksége van a viszontbiztosításra. Ekkor mindkét biztosítónak ki kell fizetnie a hozzá beérkező kárigény rá eső részén kívül a viszontbiztosítást is, azaz $0 \leq a_1 + i \cdot c^{(1)} - h_1 - (j_2 - h_2)$ és $0 \leq a_2 + i \cdot c^{(2)} - h_2 - (j_1 - h_1)$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy nem megy tönkre egyik biztosító sem

$$\sum_{i=\max\left(\left\lfloor \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rfloor\right)}^{\infty} \sum_{j_1=h_1+1}^{a_2+i \cdot c^{(2)}-h_2+h_1} \sum_{j_2=h_2+1}^{a_1+i \cdot c^{(1)}-h_1+h_2} Z(a_1 + i \cdot c^{(1)} - h_1 - (j_2 - h_2), a_2 + i \cdot c^{(2)} - h_2 - (j_1 - h_1)) \cdot p_i^{(1)} q_{j_1}^{(1)} p_i^{(2)} q_{j_2}^{(2)}.$$

Vizsgáljuk most azt az ágot, amikor az első biztosítónál nincs szükség viszontbiztosításra, de lehetne, a másodiknál viszont van, azaz $j_2 > h_2$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy nem megy tönkre egyik biztosító sem

$$\sum_{i=\max\left(\left\lfloor \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rfloor\right)}^{\infty} \sum_{j_2=h_2+1}^{a_1+i \cdot c^{(1)}+h_2-j_1} \sum_{j_1=0}^{h_1} Z(a_1 + i \cdot c^{(1)} - j_1 - (j_2 - h_2), a_2 + i \cdot c^{(2)} - h_2) \cdot p_i^{(1)} q_{j_1}^{(1)} p_i^{(2)} q_{j_2}^{(2)}.$$

A $\min\left(\left\lfloor \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rfloor\right)$ és $\max\left(\left\lfloor \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rfloor\right)$ közötti i első kárigényig eltelt idők esetén, $\left\lfloor \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rfloor$ mellett. Ez esetben az elsőnél elképzelhető akkora kárigény, hogy szüksége van a viszontbiztosításra, a másodiknál nem.

a) Ha nincs viszontbiztosító által fizetett rész, akkor a „nem-tönkremenés” valószínűsége

$$b) \sum_{i=\min\left(\left\lfloor \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rfloor\right)}^{\max\left(\left\lfloor \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rfloor\right)} \sum_{j_1=0}^{h_1} \sum_{j_2=0}^{a_2+i \cdot c^{(2)}} Z(a_1 + i \cdot c^{(1)} - j_1, a_2 + i \cdot c^{(2)} - j_2) \cdot p_i^{(1)} q_{j_1}^{(1)} p_i^{(2)} q_{j_2}^{(2)}$$

c) Ha van viszontbiztosító által fizetett rész, akkor a „nem-tönkremenés” valószínűsége

$$\sum_{i=\min\left(\left\lfloor \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rfloor\right)+1}^{\max\left(\left\lfloor \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rfloor\right)} \sum_{j_1=h_1+1}^{a_2+i \cdot c^{(2)}+h_1} \sum_{j_2=0}^{a_2+i \cdot c^{(2)}-(j_1-h_1)} Z(a_1 + i \cdot c^{(1)} - h_1, a_2 + i \cdot c^{(2)} - j_2 - (j_1 - h_1)) \cdot p_i^{(1)} q_{j_1}^{(1)} p_i^{(2)} q_{j_2}^{(2)}$$

Végül $\min\left(\left\lceil \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rceil, \left\lceil \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rceil\right)$ és $\max\left(\left\lceil \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rceil, \left\lceil \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rceil\right)$ közötti i első kárigényig eltelt idők esetén $\left\lceil \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rceil > \left\lceil \frac{h_2-a_2}{c^{(1)}} \right\rceil$ mellett. Ez esetben a második biztosítónál elképzelhető akkora kárigény, hogy szüksége van a viszontbiztosításra, az elsőnél nem.

- a) Ha nincs akkora kárigény, hogy a viszontbiztosítónak is kellene fizetnie, akkor a nem-tönkremenés valószínűsége:

$$\sum_{i=\min\left(\left\lceil \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rceil, \left\lceil \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rceil\right)+1}^{\left\lceil \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rceil} \sum_{j_2=0}^{h_2} \sum_{j_1=0}^{a_1+i \cdot c^{(1)}} Z(a_1+i \cdot c^{(1)}-j_1, a_2+i \cdot c^{(2)}-j_2) \cdot p_i^{(1)} q_{j_1}^{(1)} p_i^{(2)} q_{j_2}^{(2)}$$

- b) Ha van akkora kárigény, hogy a viszontbiztosítónak is kellene fizetnie, akkor a „nem-tönkremenés” valószínűsége:

$$\sum_{i=\min\left(\left\lceil \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rceil, \left\lceil \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rceil\right)+1}^{\max\left(\left\lceil \frac{h_1-a_1}{c^{(1)}} \right\rceil, \left\lceil \frac{h_2-a_2}{c^{(2)}} \right\rceil\right)} \sum_{j_2=h_2+1}^{a_1+i \cdot c^{(1)}+h_2; a_1+i \cdot c^{(1)}-(j_2-h_2)} \sum_{j_1=0}^{a_1+i \cdot c^{(1)}-j_2-(j_2-h_2)} Z(a_1+i \cdot c^{(1)}-j_1-(j_2-h_2), a_2+i \cdot c^{(2)}-h_2) \cdot p_i^{(1)} q_{j_1}^{(1)} p_i^{(2)} q_{j_2}^{(2)}$$

Minden esetet végignéztünk. Összefoglalva tehát annak a valószínűsége, hogy nem megy tönkre egyik biztosító sem a_1 illetve a_2 kezdőtőke esetén $Z(a_1, a_2) = 1 - Y(a_1, a_2)$ kielégíti azt az egyenletet, amelynek bal oldalán $Z(a_1, a_2)$ áll, jobb oldalán pedig az előzőleg megadott $1 - Y(a_1, a_2)$ kifejezések összege.

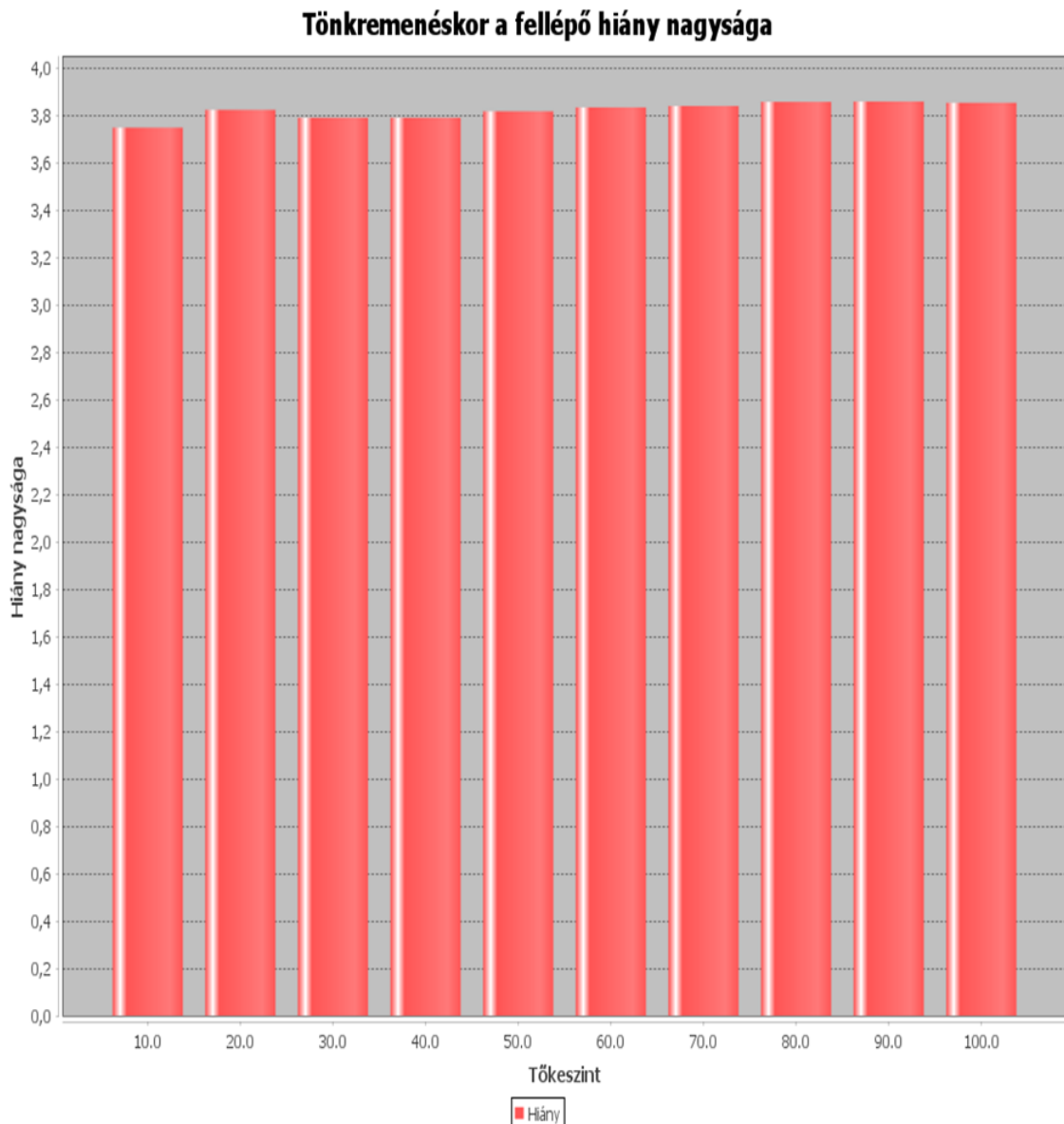
Ez az egyenlet igen bonyolult, megoldásával meg sem próbálkozunk. Szimuláció segítségével vonunk le következtetéseket a kétoldali viszontbiztosítási modell viselkedésére vonatkozólag.

4.3. Szimulációs eredmények kétoldali viszontbiztosítás esetén

Ebben a fejezetben olyan szimulációs vizsgálatok eredményeit mutatom be, amit azután kaptam, miután a szimulációs programot kiegészítettem a kétoldali viszontbiztosítással. Az első példában azt vizsgálom, hogy mekkora az egyes tőkeszintek esetén a biztosító tönkremenésénél a fellépő hiány nagysága. A szimulációnál a paraméterek a következőképpen alakultak: mindkét biztosító kezdőtőkéje 10 egység volt, majd 100-ig növeltem 10-es lépésközökkel. Minden tőkeszintre 100 ezer szimulációt futtattam le, majd megnéztem, hogy tönkremenéskor mekkora a hiány, majd ezeknek

vettem az átlagát. Az első biztosító esetén a káresemények egyenletes eloszlással érkeztek, 0-tól 16-ig terjedő egész számok voltak, várható értékük 8. A második biztosító esetén ugyancsak egyenletes eloszlással érkeztek a károk, de a várható értékük 8.5 volt, 0-tól 17-ig terjedő egész számok. A károk között eltelt idők szintén egyenletes eloszlást követve jöttek az első társaság esetén 0-tól 9-ig (a várható érték 4.5), míg a második esetében ez az érték 0-tól 10-ig (a várható érték 5 volt). A megmaradó bevételi ráta $b^{(1)} = 1$, $b^{(2)} = 1.5$. A viszontbiztosítási határokat az első társaság esetében 13-nak, míg a második cég esetében 12-nek választottam. Így nem teljesült a nettó profit feltétel, ugyanis sem a saját bevétel, sem a viszontbiztosításért kapott jutalék nem fedezi a kárigények várható értékét. Az első társaság esetén az átvállalt károk várható értékének (3) és a beérkezés várható értékének (5) hányadosa (0.6) nagyobb, mint az az összeg, amit az első biztosító kap a második biztosítótól, az átvállalt károkért cserébe. Ez az összeg az a_2 3%-a (0.045). A második társaság az első társaság bevételeinek 1%-át kapja meg, ami 0.015 és itt sem teljesül a nettó profit feltétel, mivel az átvállalt károk várható értékének és a köztük eltelt idők várható értékének hányadosa 0.23. A biztosítók pénzügyi helyzetét addig figyeljük, amíg vagy nem érik el az 1000 időegységet, vagy ezen időn belül nem mennek tönkre.

A szimuláció eredménye a 15. ábrán látható. A diagramon látható, hogy a fellépő hiány átlagos nagysága alig tér el egymástól a különböző tőkeszintek esetén, vagyis nem csökken a tönkremenéskor kialakuló hiány nagysága, ha a kezdőtőke értékét növeljük. Ez azt sejteti, hogy Györfi-Bátori András azon eredménye, hogy a nettó profit feltétel nem teljesülése esetén a tönkremenéskor fellépő hiány nagysága állandó speciális eloszlások esetén, igaz lehet kétoldali viszontbiztosítások esetére is, akár más eloszlásokat használva.

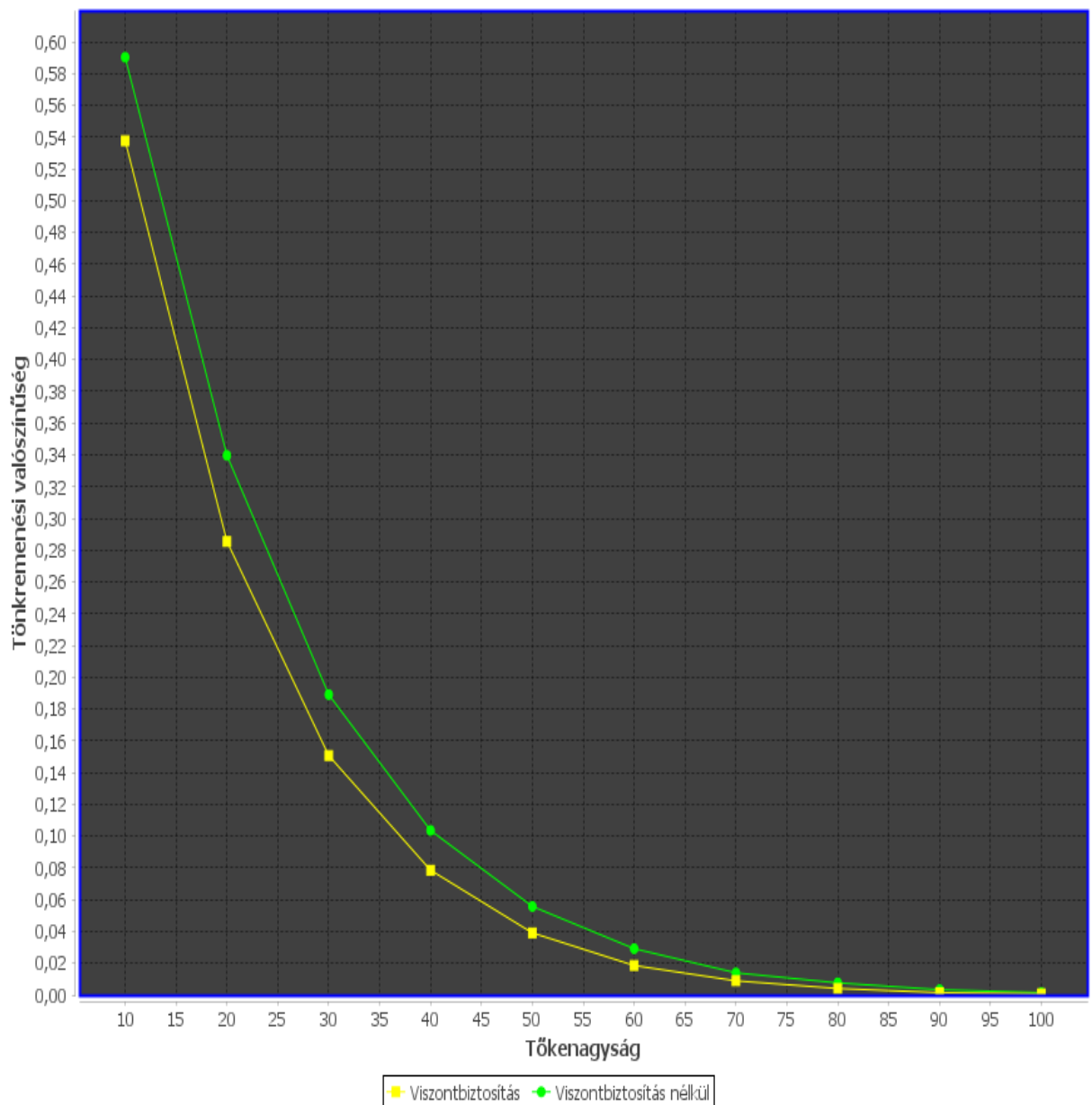


15. ábra: Tönkremenéskor a hiány nagysága, kétoldali viszontbiztosítás esetén

A következő vizsgálatnál azt fogom szemléltetni, hogy mennyivel alacsonyabb a tönkremenési valószínűség, ha a két társaság rendelkezik viszontbiztosítással, ahhoz képest, hogyha nem rendelkeznének. A paraméterek megegyeznek az előző szimulációban használt paraméterekkel. Vagyis első biztosító esetén a káresemények egyenletes eloszlásúak, várható értékük 8, a második cég esetén ugyancsak egyenletes eloszlást követnek a károk, de várható értékük 8.5 volt. A károk között eltelt idők szintén egyenletes eloszlást követve jöttek, az első társaság esetén a várható érték 4.5, míg a második esetében ez az érték 5.0 volt. A bevételt az első cég esetén 2-nek, a második biztosító esetén pedig 3-nak választottam. A határok az első társaság esetében 13, míg a második cég esetében 12 lett. Így teljesült a nettó profit feltétel, ugyanis az első társaság esetén az átvállalt károk várható értékének (0.833) és a beérkezés várható értékének (5)

hányadosa (0.16) kisebb, mint az az összeg, amit az első biztosító kap a második biztosítótól, az átvállalt károkért cserébe. Ez az összeg a b_2 10%-a (0.3). A második társaság az első társaság bevételeinek 0.09-szeresét kapja meg, ami (0.18), de itt is teljesül a nettó profit feltétel, mivel az átvállalt károk várható értékének és a közöttük eltelt idők várható értékének hányadosa 0.078. A biztosítók pénzügyi helyzetét most csak 100 időegységig, vagy ha előbb bekövetkezik, akkor az egyik tönkremenéséig figyeljük.

Biztosító tönkremenésének valószínűségei a kezdőtőke függvényében, kétoldali viszontbiztosítással

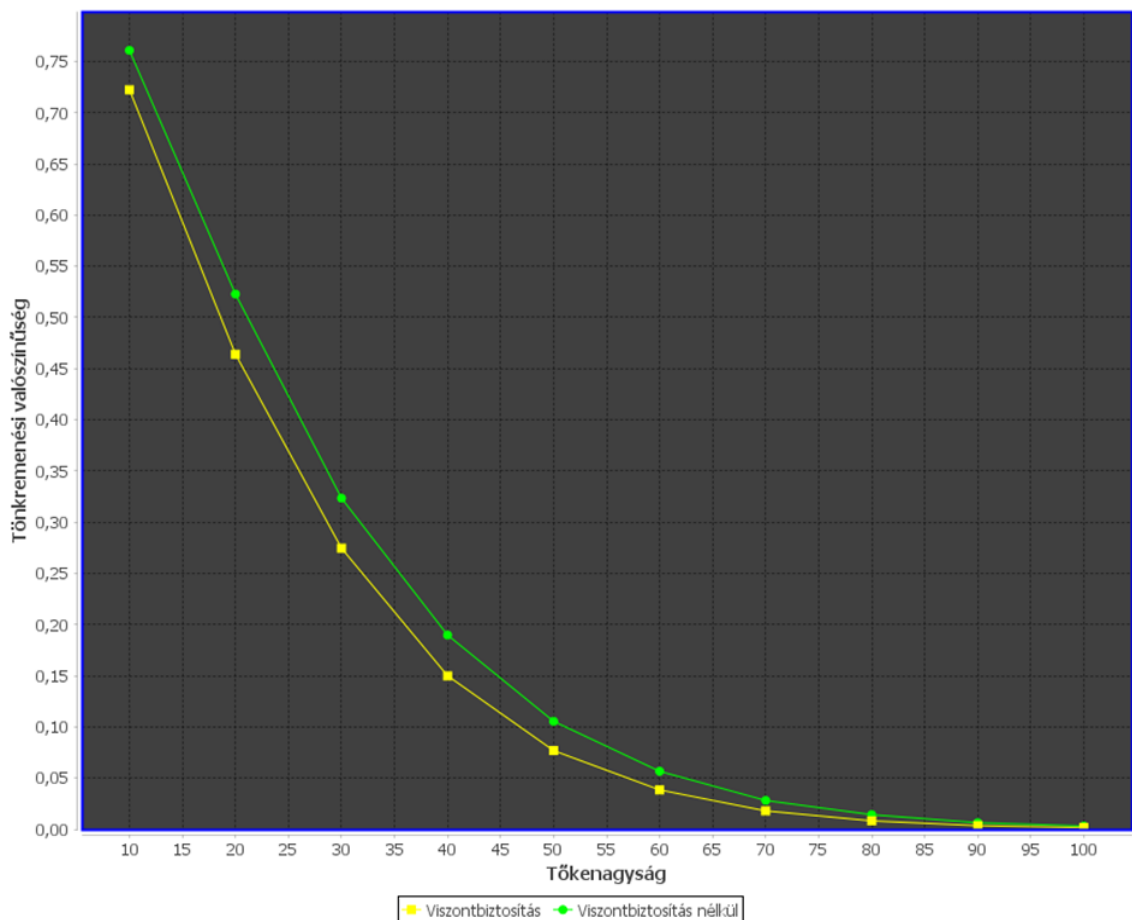


16. ábra: Tönkremenési valószínűség kétoldali viszontbiztosítás esetén, aszimmetrikus paraméterek mellett

A szimuláció alapján kapott diagramunk, amit a 16. ábra reprezentál, jól bemutatja, hogy mennyivel alacsonyabb a tönkremenés esélye, ha kétoldalú viszontbiztosítást kötünk. Ha nincs viszontbiztosítás, akkor annak a valószínűségét, hogy valamelyik biztosító tönkremegy az unió valószínűségére vonatkozó képlet alapján számoltuk. Természetesen a tőkeszint növelésével mind a viszontbiztosítás nélküli, mind viszontbiztosításos esetben a valószínűség csökken, 80-as kezdőtőkénél már nagyon kicsi a valószínűsége, hogy a két biztosító közül bármelyik csődbe menjen, még ha nem is kötöttek viszontbiztosítást.

Az előző szimuláció esetén a két cégnek különböző paraméterei voltak megadva. Felmerül a kérdés, mennyi a szerepe az aszimmetriának a tönkremenési valószínűségek csökkenésében. Ezért most egy olyan szimulációt fogunk végrehajtani, amikor a két biztosító működése teljesen szimmetrikus. Legyen a károk nagyságának várható értéke mindkettőnél 8, a köztük eltelt idő várható értéke 4.5, a bevétel mindkét esetben 2 lesz a h_1 és h_2 12 lesz, a cégek pedig bevételük 0.09-szeresét adják át a másiknak a károk egy részének átvállalásáért, teljesítve ezzel a nettó profit feltételt. Vagyis az egyik cég átvállal károkat a másiktól, cserébe a másik társaság is ugyanezt megteszi ugyanolyan mértékben.

Biztosító tönkremenésének valószínűségei a kezdőtőke függvényében, kétoldali viszontbiztosítással

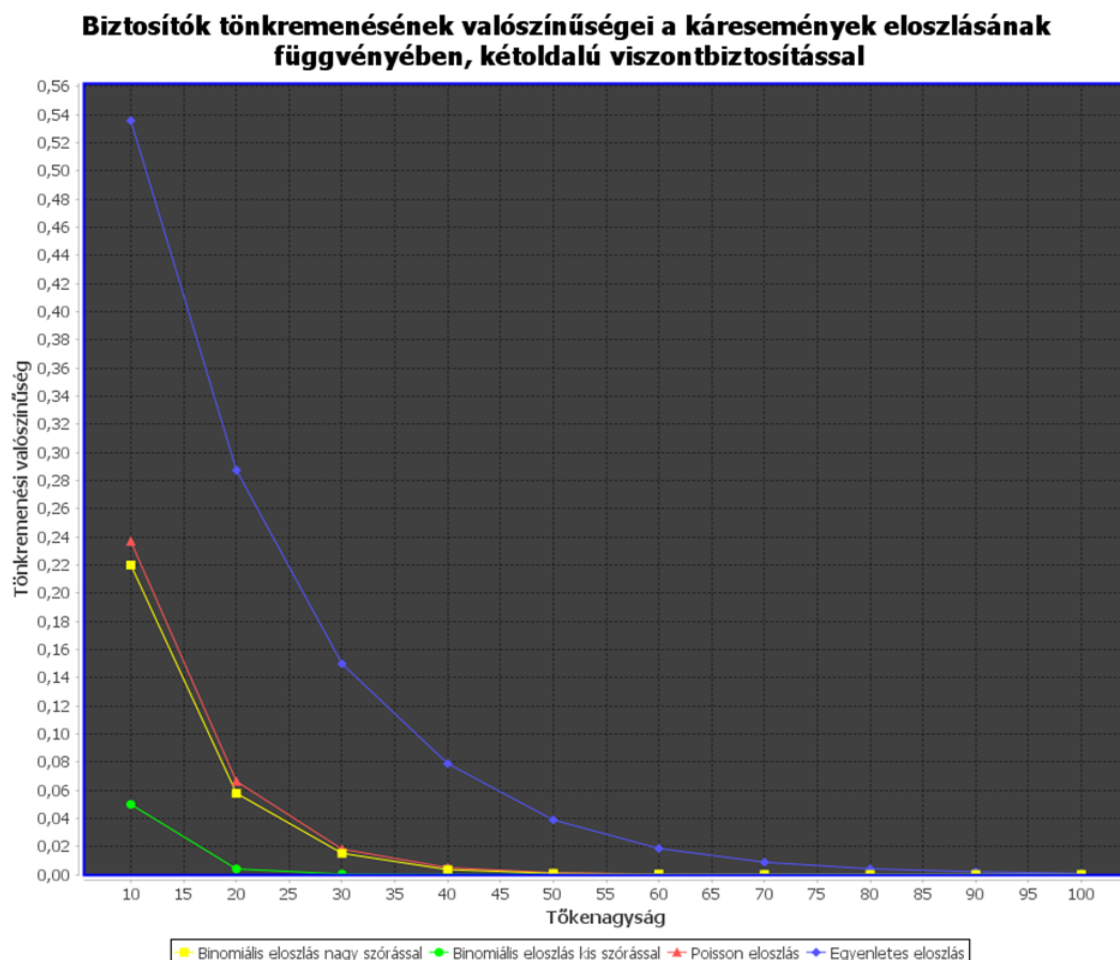


17. ábra: Tönkremenési valószínűség kétoldali viszontbiztosítás esetén, szimmetrikus paraméterek mellett

A 17. ábrán látható a szimmetrikus paraméterekkel készült szimuláció eredménye. Látható a 16. diagrammhoz képest, hogy a tönkremenési valószínűségek nagyobbak mind a viszontbiztosításnál, mind a viszontbiztosítás nélkül. Ennek oka, hogy a 16. ábránál alkalmazott szimulációnál összesen több bevétellel rendelkezett a két társaság a mostanihoz képest. Ám ennek ellenére is jól látható, hogy még mindig kisebb a csőd lehetősége, ha van viszontbiztosítás. Ennek oka az lehet, hogy bár összességében ugyanakkora bevétellel és várható kiadással kell számolniuk, mint viszontbiztosítás nélkül, mégis a nagyobb kárösszegek kifizetésének terhe megoszlik. Bár a két biztosító pénzügyi folyamata ugyanazon sztochasztikus folyamat, az egyes realizációk esetén más-más a lefolyás. Különböző esetekben van kevés forrása az egyiknek és a másiknak, így szükség esetén ki tudják segíteni egymást. Ez a szimuláció is bizonyítéka annak, hogy együttműködéssel csökkenthetők a kockázatok.

Miután megnéztük, hogy hogyan hat a tönkremenési valószínűségekre a kezdőtőke nagysága szimmetrikus és aszimmetrikus paraméterek mellett, a továbbiakban a

paraméterektől való függéseket vizsgáljuk. Először azt nézzük meg, hogy adott tőkeszintnél van-e hatása az eloszlásoknak a tönkremenési valószínűségekre. A paraméterek a következőképpen alakultak: a bevételi ráta az első társaság esetén 2.0, a második cégnél pedig 3.0. A határoknál a $h_1=13$, míg $h_2=12$ választással éltünk. Egyenletes, Poisson és binomiális eloszlásnál az első társaságnál a károk esetében a várható érték 8.0, a károk között eltelt időknél 4.5. A második társaságnál pedig 8.5 és 5.0 a várható értékek minden eloszlás esetén. Az első társaság a bevétele 0.09-szeresét, a második pénzintézet pedig a befizetések 0.3 szeresét adja a viszontbiztosítónak. Természetesen a szórások nem egyeznek meg teljesen, így adódhatnak jelentős eltérések is a valószínűségek esetén. Ezen eltérő esetek bemutatására két binomiális eloszlást is csináltam két különböző szórással. Az első binomiális eloszlásnál az első társaság esetén a károknál a paraméterek a következők voltak $n=10$, $p=0.8$, az időnél $n=10$, $p=0.45$; a második társaságnál a kár eloszlás paraméterei $n=10$, $p=0.85$, az időé pedig $n=10$, $p=0.5$ volt. A második binomiális eloszlásnál pedig az első cégnél a kárnál $n=100$, $p=0.08$, az időnél $n=10$, $p=0.045$; a második cégnél a kár esetén $n=100$, $p=0.085$, az időénél pedig $n=100$, $p=0.05$.



18. ábra: Tönkremenési valószínűség kétoldali viszontbiztosítás esetén, különböző eloszlások mellett

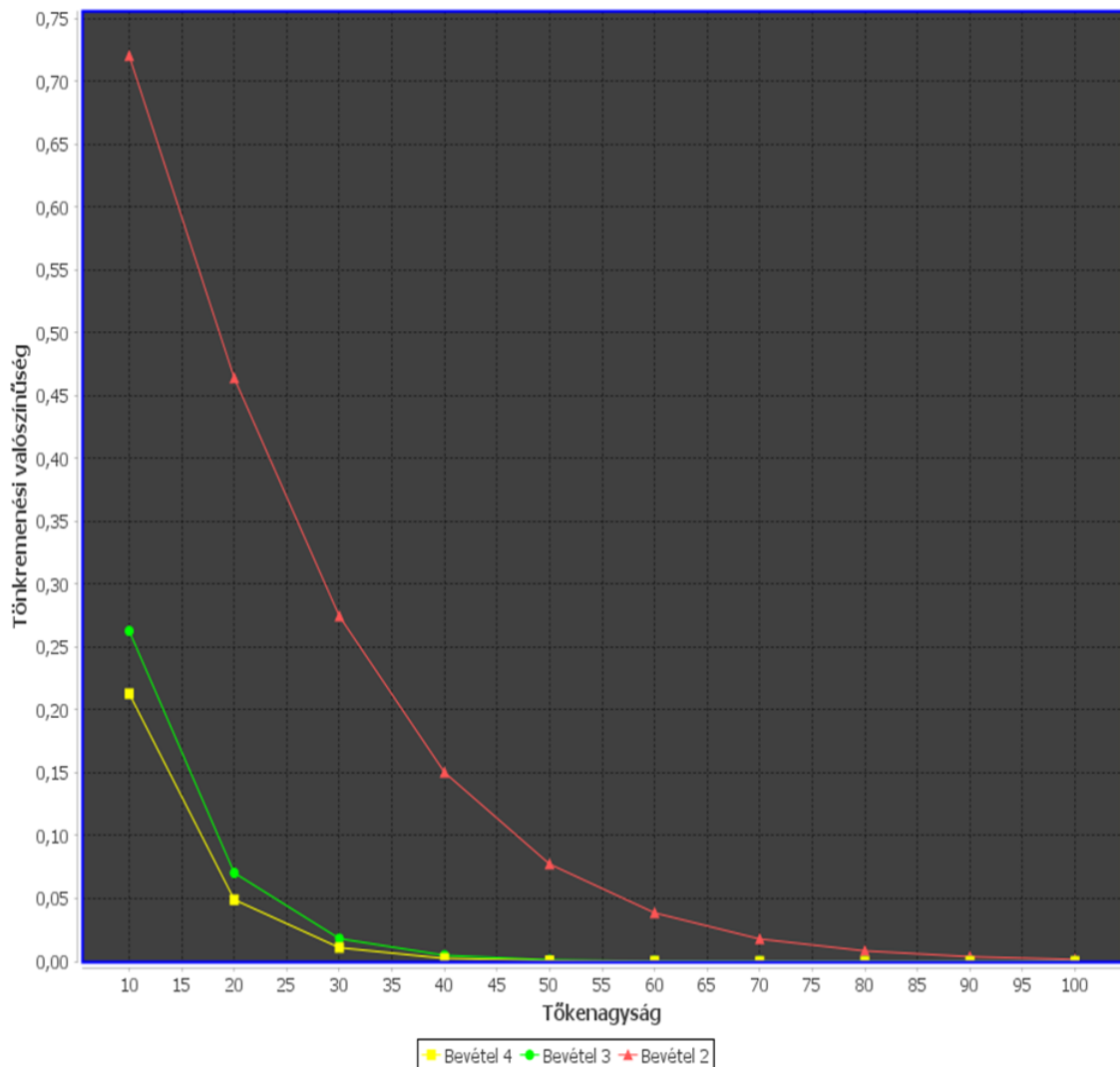
A fentebb említett eltérések jól láthatóak a 18. ábrán. Egyenletes eloszlás esetén több mint 2-szer nagyobb a tönkremenési valószínűség a nagyobb szórású binomiális, valamint a Poisson eloszláshoz képest. Az is jól látható, hogy hiába egyezik meg a két binomiális eloszlás esetén a várható értékük, a szórásuk különböző, és az eltérés tetemes.

A következő szimulációnál azt vizsgáltam, hogy csökken-e a tönkremenés lehetősége, ha a bevételeket csak minimálisan is, de növeljük. Ezen szimuláció esetén mindegyik paraméter megegyezik a két viszontbiztosító esetén. Azaz a káresemények egyenletes eloszlásúak, várható értékük 8. A károk között eltelt idők szintén egyenletes eloszlást követve jöttek a várható érték 4.5. A bevétel az első és második cég esetén is 2.0. A határ mindkét pénzintézetnél 13-ra lett beállítva, a pénzáradás 0.09.

Az alábbi 19. ábrán jól kivehető, hogy abban az esetben, ha a káresemények beérkezésének feltételei nem változnak és a bevételeket csak minimálisan növeljük, akkor a tönkremenési valószínűséget akár harmadára is csökkenthetjük. Ez természetesen a biztosítónak kedvez a legjobban, hiszen, ha megtalálja mi az a bevételi szint, ami esetén

nagy valószínűséggel nem megy tönkre a cég, és ezt a bevételt némileg megnöveli akkor a plusz bevétel tiszta haszon lesz számára. Az pedig, hogy a biztosító ne menjen tönkre, a biztosítónak és a biztosítottaknak egyaránt érdeke.

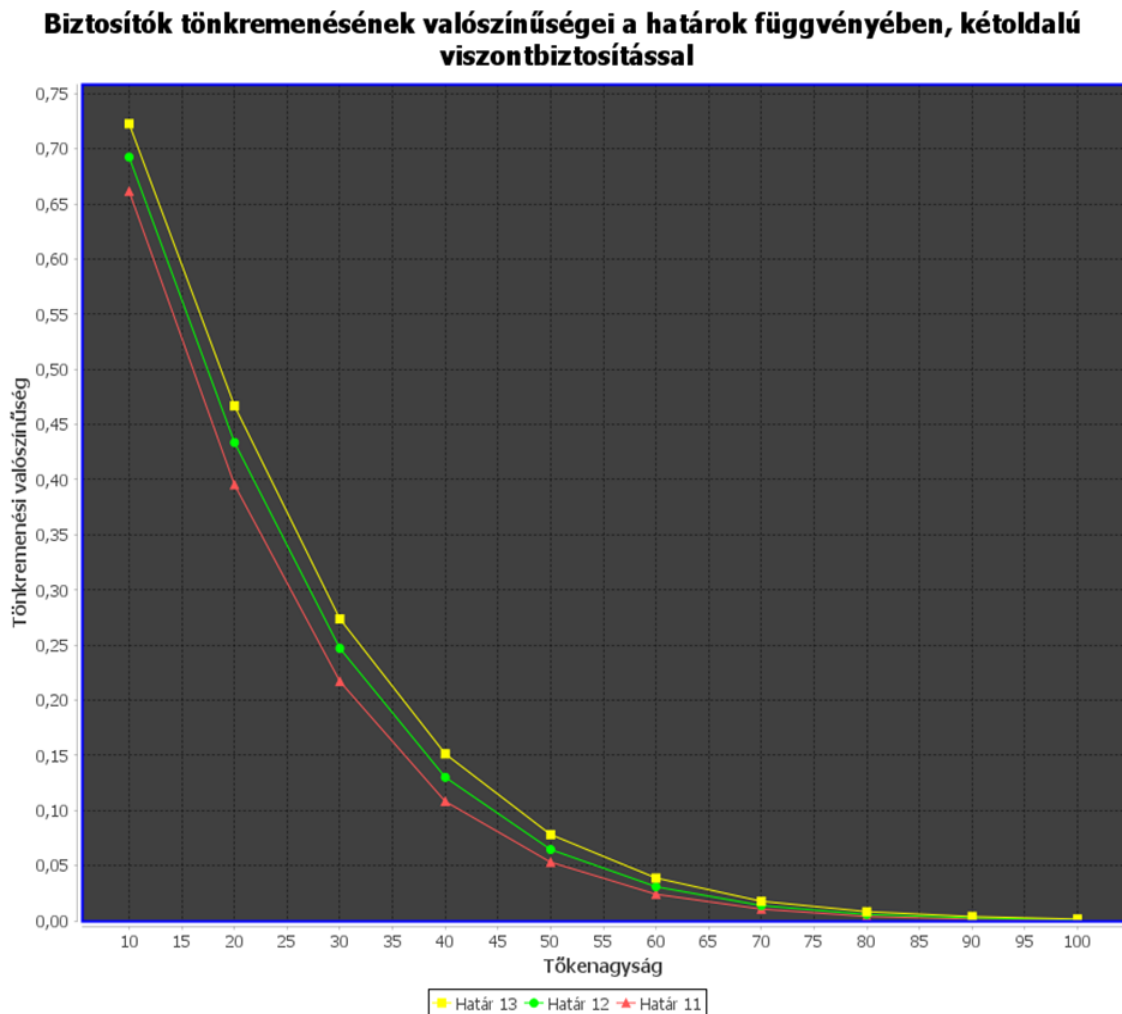
Biztosítók tönkremenésének valószínűségei a bevétel függvényében, kétoldali viszontbiztosítással



19. ábra: Tönkremenési valószínűség kétoldali viszontbiztosítás esetén, különböző bevételek mellett.

Az utolsó szimulációnál azt vizsgálom meg, hogy kétoldali viszontbiztosítások esetén, ha a h_1 és h_2 értékeket minél lejjebb állítom be és ezzel párhuzamosan az átadási arányokat pedig növelem, hiszen annál több kárigényt kell a két társaságnak átvállalnia, akkor hogyan alakulnak a tönkremenési valószínűségek. A paraméterek az egyszerűség kedvéért nem változtak az előző szimulációhoz képest, a káresemények egyenletes eloszlásúak, várható értékük 8. A károk között eltelt idők szintén egyenletes eloszlást követve jöttek, a várható érték 4.5. A bevétel az első és második cég esetén is 2.0. Ha a határ 11-re lett állítva, akkor a bevételek 0.19-szerese lett átadva, 12-es határszint esetén

0.13-szorosa, 13-as határ esetén pedig 0.078-szorosa. Minden esetben úgy lettek meghatározva az átadások és a határok, hogy a nettó profit feltétel teljesüljön. Az eredmény a 20. diagramon látható. A görbék jól szemléltetik, hogy bár a 11-es határszint esetén több pénzt kell áldoznia a bevételéből a pénzintézetnek a viszontbiztosításra, mégis jobban megéri neki, mert így tudja legjobban csökkenteni a tönkremenését a három opció közül. Természetesen akármeddig nem csökkenthetők a határok, optimális megválasztásuk szimulációs módszer segítségével megvalósítható.



20. ábra: Tönkremenési valószínűség kétoldali viszontbiztosítás esetén, különböző határok mellett.

5. A program

5.1. A szimulációs program ismertetése

Munkám jelentős részét jelentette a szimulációs program elkészítése, amellyel kapcsolatban elvárás volt a gyors futás és a szemléletes ábrák készítésének lehetősége.

A matematikai bonyolultság miatt olyan programnyelvet igyekeztem használni, amiben van tapasztalatom, és megfelel a kritériumoknak. Ezért döntöttem a Java nyelv és az Apache Netbeans fejlesztői környezete mellett. A grafika miatt Java Swing felületet használtam, a diagrammokat a JFreeChart csomag segítségével készítettem.

A program esetén a felhasználó szempontjából fontos a jól kezelhetőség, hogy a bevitt paraméterek jól el legyenek különítve és a szimulációk futása minél kevesebb időt vegyen igénybe. Erre azért volt szükség, hogy a sok szimulációs teszt miatt pontosan nyomon lehessen követni, hogy egy szimulációnál milyen adatokat adtunk meg, ezek milyen eredményt produkáltak, illetve, hogy ne kelljen a szimuláció által adott eredményre több órát várni. Szerencsére a program még a legbonyolultabb nagyszámú szimulációt is 10-15 percen belül elvégzi. Kíváncsi vagyok, hogy egy szimuláció esetén is több különböző jellemzőt lehessen számolni, és többfajta diagrammot lehessen készíteni, hogy ne kelljen három különböző diagramm miatt háromszor lefuttatni a szimulációt.

5.2. A program felépítése

A program főoldala az alábbi 21. ábrán látható. Mivel általában két társaság adataival végeztünk szimulációkat, így mindkét cégnek külön meg lehet adni paraméterben, hogy milyen eloszlással érkezzenek a károk és a köztük eltelt idő, illetve mi legyen a várható értékük. Továbbá külön lehet beállítani a bevételt a határokat és az átadást is. A gombok segítségével pedig a vektorosan eltárolt adatokat vizuálisan is meg tudjuk jeleníteni. Természetesen a gombok csak akkor aktiválódnak, ha minden szükséges paramétert megadtunk és valós értéket adtunk meg minden esetben. A paraméterek alatti két táblázatban pedig számszerűen is ábrázolni tudjuk, hogy mennyi lett a becsült tönkremenési valószínűség viszontbiztosítás, illetve viszontbiztosítás nélkül, így ellenőrzéseket is tudunk végezni.

Károk közötti eloszlás: Egyenletes

Két kár között eltelt idő eloszlása: Poisson

Szimuláció futtatása

Diagramm megjelenítés...

Adja meg a λ (lambda) értékét:

Tönkremenési idő...

Tönkremenési hi...

Legnagyobb káresemény (egész számot adjon meg):

Első társaság alaptőkéje:

Egységnyi bevétel első biztosítók:

Átadás1:

Határ1 (egész számot adjon meg):

Károk közötti eloszlás: Binomiális

Két kár között eltelt idő eloszlása: Egyenletes

Adja meg az n paramétert:

Adja meg a p paramétert:

Két kár között eltelt legnagyobb idő(egész számot adjon meg):

Második társaság alaptőkéje:

Egységnyi bevétel második biztosítók:

Átadás2:

Határ2 (egész számot adjon meg):

Szimuláció futtatási ideje(egész számot adjon meg):

Ciklusszám:

Lépésköz:

Viszontbiztosítással

Tőke

Tönkremenési valószínűs...

Viszontbiztosítás nélkül

Tőke

Tönkremenési valószínűs...

21. ábra: A program főoldala

6. Összefoglalás

Dolgozatomban viszontbiztosítási modelleket vizsgáltam különböző feltételek mellett. Bemutattam, hogy hogyan alakulnak egy pénzügyi intézet bevételei és kiadásai az idő előrehaladtával. Megvizsgáltam, hogy milyen eséllyel mehet tönkre és milyen tényezők tudják a tönkremenési lehetőséget növelni vagy csökkenteni.

A Sparre-Andersen féle általánosan kutatott alapmodell vizsgálata után beépítettem az egyoldali viszontbiztosítást, és differenciaegyenletet írtam fel tönkremenési valószínűségekre. A differenciaegyenlet mind késleltetést, mind siettetést, továbbá végtelen sorokat is tartalmaz, megoldására ezért még speciális esetben sem lehet vállalkozni. A matematikai modell bonyolultsága miatt szimulációkkal megmutattam, hogy azonos paraméterek mellett, a bevétel egy bizonyos részének átadásával is nagyobb a fennmaradás esélye egy biztosítónak, ha köt viszontbiztosítást.

A harmadik részben tovább bővítettem a modellt: azzal az esettel foglalkoztam, amikor két társaság viszontbiztosítja egymást. Erre a modellre nézve nem találtam vizsgálatokat a szakirodalomban. A tönkremenési valószínűségekre felírt egyenlet még az előző modellhez tartozó egyenletnél is jóval bonyolultabb. Bár felírtam, de megoldására nincs lehetőség. Így szimulációs vizsgálatokat végeztem. Megmutattam, hogy teljesen szimmetrikus feltételek mellett is csökkenthetők a biztosítók kockázatai kártöbblet viszontbiztosítással, azaz, ha a beérkező kárigény egy bizonyos szint feletti részét kölcsönösen átvállalják egymástól.

Szintén szimulációkkal vizsgáltam, hogy milyen szerepe van a kölcsönös viszontbiztosításnál a különböző eloszlásoknak, a határoknak, a bevételi ráták változásának. Megvizsgáltam azt is, hogy a kezdőtőke függvényében mekkora a tönkremenéskor fellépő hiány várható értéke, és azt tapasztaltam, hogy a nettó profit feltétel nem teljesülése esetén ez nem függ a kezdőtőke nagyságától. Ez az eredmény azért fontos, mert azt támasztja alá, hogy a nettó profit feltétel nem teljesülése esetén felesleges több kezdőtőkét használni, sem a tönkremenési valószínűségben, sem a hiány várható értékében nem lehet javulást elérni.

A munka többféleképpen tovább folytatható. Lehet vizsgálni arányos viszontbiztosítási modelleket. A futás gyorsítását párhuzamos futtatásokkal lehet javítani. A program flexibilitása miatt tovább lehet bővíteni a modellt, és akár több társaság kölcsönös viszontbiztosítására is ki lehet terjeszteni. A programba további eloszlásokat

lehet beimplementálni, ezzel is növelve a lehetséges összehasonlításokat. Ezen kívül lehetne kamatbevételt, osztalék- és egyéb kifizetéseket, mint például adófizetést is beépíteni a programba.

7. Irodalomjegyzék

- [1] Jeszenszky Gy. (2003) Viszontbiztosítások, kockázati folyamatok, csőd. Diplomamunka, BME.
- [2] Asmussen, S., Albrecher, H. (2010). *Ruin probabilities* (Vol. 14). World Scientific.
- [3] Györfi-Bátori, A., Mihálykó, C., & Mihálykóné Orbán, É. (2019). Diszkrét kockázati modell általános befizetési ráta mellett. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 36(2), 247-254.
- [4] Györfi-Bátori András (2016) Diszkrét kockázati folyamatok matematikai és számítógépes elemzése alkalmazásokkal. TDK dolgozat Pannon Egyetem
- [5] Boonta, S., & Boonthiem, S. (2019). An approximation of minimum initial capital of investment discrete time surplus process with Weibull distribution in a reinsurance company. *Journal of Applied Mathematics*, 2019.
- [6] Györfi-Bátori András (2017). A hiány nagyságának vizsgálata biztosítótársaságok csődjének bekövetkezése esetén. TDK dolgozat Pannon Egyetem.
- [7] Prékopa A. (1972). *Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal*. Műszaki Kiadó, Budapest.
- [8] Jing, H., Peng, J., Jiang, Z., & Bao, Q. (2022). Asymptotic estimates for finite-time ruin probability in a discrete-time risk model with dependence structures and CMC simulations. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 51(11), 3761-3786.
- [9] Lampaert, I., & Walhin, J. F. (2005). On the optimality of proportional reinsurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005(3), 225-239.
- [10] Luesamai, A. (2021). Lower and Upper Bounds of the Ultimate Ruin Probability in a Discrete Time Risk Model with Proportional Reinsurance and Investment. *The Journal of Risk Management and Insurance*, 25(1), 1-10.
- [11] Karlin, S., Taylor, H. M., (1985). *Sztochasztikus folyamatok*. Gondolat Kiadó.

8. Ábrajegyzék

1. ábra: Egy biztosító tönkremenési folyamata.....	8
2. ábra: Binomiális eloszlású véletlen számok hisztogramja.....	11
3. ábra: Biztosító pénzügyi folyamata nem tönkremenés esetén	13
4. ábra: Alapmodell esetén a biztosító tönkremenési valószínűsége a kezdőtőke függvényében.....	15
5. ábra: Biztosító tönkremenési valószínűsége kis szimulációs szám esetén.....	16
6. ábra: Tönkremenési valószínűség alapmodellnél eltérő bevételek függvényében	17
7. ábra: Tönkremenési valószínűségek alapmodellnél eltérő káreloszlások függvényében	18
8. ábra: Tönkremenési idők alapmodellnél.....	20
9. ábra: Tönkremenéskor a hiány nagysága alapmodellnél	21
10. ábra: Tönkremenési valószínűség összehasonlítás egyoldali viszontbiztosítás esetén	26
11. ábra: Tönkremenési valószínűség összehasonlítás egyoldali viszontbiztosítás esetén (más paraméterekkel)	27
12. ábra: Tönkremenési valószínűség eltérő határok esetén, egyoldali viszontbiztosításnál	29
13. ábra: Tönkremenési valószínűség eltérő határok esetén, egyoldali viszontbiztosításnál, (más paraméterek esetén)	30
14. ábra: Biztosítók pénzügyi folyamata kétoldali viszontbiztosítás esetén	34
15. ábra: Tönkremenéskor a hiány nagysága, kétoldali viszontbiztosítás esetén	41
16. ábra: Tönkremenési valószínűség kétoldali viszontbiztosítás esetén, aszimmetrikus paraméterek mellett	42
17. ábra: Tönkremenési valószínűség kétoldali viszontbiztosítás esetén, szimmetrikus paraméterek mellett	44
18. ábra: Tönkremenési valószínűség kétoldali viszontbiztosítás esetén, különböző eloszlások mellett.	46
19. ábra: Tönkremenési valószínűség kétoldali viszontbiztosítás esetén, különböző bevételek mellett.	47
20. ábra: Tönkremenési valószínűség kétoldali viszontbiztosítás esetén, különböző határok mellett.....	48

21. ábra: A program fõoldala	50
------------------------------------	----