



SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI, INFORMATIKAI ÉS
VILLAMOSMÉRNÖKI KAR

OTDK DOLGOZAT

Vasúti kerék rezgéseinek dinamikai leírása és stabilitásvizsgálata

Finta Ervin Péter

Gépészmérnöki BSc szak

Gépgyártástechnológiai specializáció

IV. évfolyam

Témavezető:

Dr. Antali Máté

tudományos főmunkatárs,

Alkalmazott Mechanika Tanszék

Győr, 2023

Tartalomjegyzék

Rezümé	1
1. Irodalmi áttekintés	2
1.1. A vasúti kerék kialakítása	2
1.1.1. A vasúti kerék jellemző méretei és enyhén kúpos kialakítása	2
1.1.2. A laterális elmozdulás meghatározása a jármű kanyarodása során	5
1.2. A vasúti kerék kinematikai rezgései	6
1.3. A kúszás	7
1.4. A vasúti kerék rezgései a kúszás figyelembevételével	9
1.5. Lineáris stabilitásvizsgálat, bifurkációk	9
1.6. Kérdésfeltevések	10
2. A vasúti kerékpár kinematikai vizsgálata	11
2.1. Geometria és általános koordináták	11
2.2. A kinematikai egyenletek felírása	12
2.3. Linearizálás és kinematikai rezgések	15
3. A vasúti kerékpár dinamikai egyenletei	18
3.1. Dinamikai modell	18
3.2. A dinamikai egyenletek felírása	19
4. A vasúti kerékpár dinamikai vizsgálata	22
4.1. A centrális mozgás vizsgálata	22
4.2. A két szabadságfokú modell alátámasztása	23
4.3. A rendszer stabilitásának feltételei	23
4.4. A paraméterek hatása a kritikus sebességre	26
4.4.1. A kúposság hatása a kritikus sebességre	27
4.4.2. A felfüggesztés merevségének hatása a kritikus sebességre	28
5. A stabilitási feltételek ellenőrzése szimulációval	30
Következtetések	32
Irodalomjegyzék	33

Rezümé

A vasúti járművek gördülését tengellyel mereven összekapcsolt kerek, úgynevezett kerékpárok biztosítják. A kerek enyhén kúpos kialakításával kapcsolatos mechanikai leírások, vizsgálatok közel másfél évszázados múltra tekintenek vissza. A szakirodalomból viszont hiányzik annak az általános gyakorlatnak az indoklása, hogy a rezgéseket miért lehet – a merev test modellből vártnál kevesebb – két szabadságfokú modellel leírni. A dolgozat célja egyrészt, hogy a kerékpár egy egyszerű mechanikai modelljéből kiindulva felállítsuk a kerékpár rezgéseire vonatkozó összefüggéseket, valamint hogy kielégítő magyarázatot nyerjünk arra vonatkozóan, hogy egyes egyenletek miért nem játszanak szerepet a kerékpár mozgásainak vizsgálatánál.

A dolgozat másik célja a vasúti kerékpár kigyózó mozgással szembeni stabilitására vonatkozik. Ez korunkban is meghatározó kérdés, elég csak a közelmúltban átadott Szeged-Hódmezővásárhely között járó vasútvillamos esetére gondolni, ahol az üzem alatt tapasztaltak nem várt kigyózó mozgást, rezgéseket. Ennek a problémának a megoldása azonban semmiképp sem volt triviális, a szakemberek először a kerék esztergálásával próbálkoztak, hogy módosítsák a kerékprofil, valamint szóba került a pálya állapota is, azonban a végső megoldást a lengéscsillapítók kicserélése jelentette, amellyel sikerült módosítani a jármű dinamikai tulajdonságait, és így nem léptek fel további jelentős rezgések. A dolgozatban azt a választ keressük, hogy milyen tényezők játszanak szerepet a kerékpár rezgésében, illetve hogy milyen esetekben válik a rendszer instabillá. Megállapítjuk, hogy a kerék kúposágának csökkentésével, valamint a rugómerevségek növelésével lehet a kritikus sebességet növelni.

1. Irodalmi áttekintés

Ebben a fejezetben a szakirodalom segítségével először is arra szeretnénk választ kapni, hogy mi az oka a vasúti kerék enyhén kúpos kialakításának, ezt milyen mennyiségekkel írhatjuk le. Ehhez tartozik, hogy a jármű kanyarodása során milyen összefüggés áll fenn a kerékpár mozgása és a pálya görbületi sugara között.

Kérdés továbbá, hogy a vasúti kerék kígyózó mozgása a legegyszerűbb esetben, azaz tiszta gördülést feltételezve hogyan írható le. Ezek után megvizsgáljuk a kúszási jelenséget, illetve, hogy hogyan vettük figyelembe ezt a rezgésekre vonatkozó összefüggésekben. Ezt követően arra keressük a választ, hogy milyen típusú stabilitási problémák lépnek fel, melyek a kerék és a jármű nem kívánt rezgéseit eredményezik.

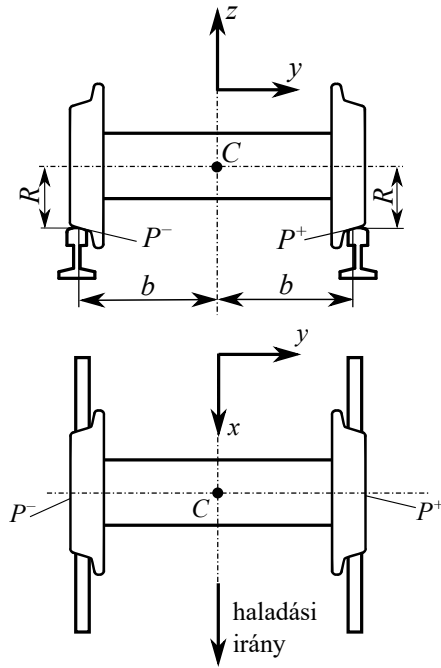
Az irodalomkutatás főként [1]-[5] források feldolgozásával készült. Ezekben az irodalmakban nem található az alábbi formában lévő összefoglalás. A fejezetben az egyes részleteknél az oda vonatkozó forrásokat külön jelezzük.

1.1. A vasúti kerék kialakítása

A két nyomon haladó járművek kanyarodásánál az az alapvető probléma merül fel, hogy a külső íven lévő kerekeknek ugyanannyi idő alatt nagyobb utat kell befutniuk, mint a belső kerekeknek. Ez a kerekek megcsúszását okozhatja, amit a jármű nem kívánt viselkedése követhet. Közúti járművekben differenciálművel orvosolják ezt a problémát, míg a vasúti járművek esetén a kerekek speciális, kúpos kialakításával. Ebben a szakaszban először a vasúti kerék geometriai leírásához szükséges mennyiségeket definiáljuk, majd a jármű kanyarodásának példáján keressük az összefüggést a kerékpár laterális elmozdulása, illetve a pálya görbületi sugara között.

1.1.1. A vasúti kerék jellemző méretei és enyhén kúpos kialakítása

A vasúti kerékpár modellje az 1. ábrán látható előlnézetben, illetve felülnézetben. Koordináta-rendszerként Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert használunk, amelynek x tengelye a vasúti szerelvény haladási irányába, y tengelye erre merőlegesen, a haladási irányból nézve balra, z tengely pedig a jobbkéz-szabály értelmében mindkét tengelyre merőlegesen, felfelé mutat. P^- és P^+ a két kerék érintkezési pontját jelöli a sínekkel, úgy, hogy az $y < 0$ helyen lévő kerékre P^- , az $y > 0$ helyen lévő kerékre pedig P^+ vonatkozik. A továbbiakban a mennyiségek felső indexébe tett „-” jelölés mindig az $y < 0$ oldali, a „+” jelölés pedig mindig $y > 0$ oldali kerékre vonatkozik. Az ábrán C jelöli a kerékpár geometriai középpontját. A továbbiakban, ha y irányú elmozdulásról beszélünk, ez alatt C pont elmozdulását értjük az y tengely irányába. R a kerekek gördülőkörének névleges sugarát



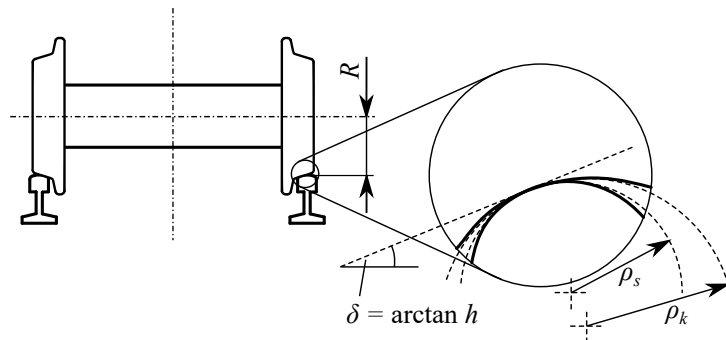
1. ábra. A vasúti kerékpár modellje elől- és felülnézetben

jelenti, amely másnéven a névleges futókörsugár. P^- és P^+ pontok, azaz az érintkezési pontok távolságát nevezzük a futókörtávolságnak, ezt $2b$ -nek vesszük.

A 2. ábrán egy tisztán kúpos kerékprofil van ábrázolva, ρ_s a sín, ρ_k a kerék görbületi sugarát jelöli, a δ kúpszög a h névleges kúposság arcustangense, amely tisztán kúpos kerékprofil esetén megfelelő leírást ad. A kutatások alapján azonban ha a kerékprofil görbült, h tényező változik a kerék, illetve a sín görbületi sugarának függvényében a

$$h^* = h \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho_k - \rho_s}} \quad (1)$$

összefüggés szerint, ahol h^* az úgynevezett egyenértékű kúposság [6]. Látszik a képletből,



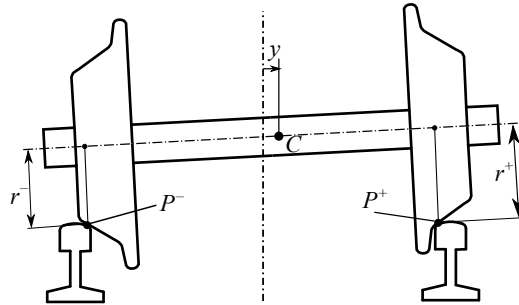
2. ábra. A kerék és a sín görbületi sugara kúpos kerékprofil esetén [1]

hogy ha a sín görbületi sugara elhanyagolható a kerékéhez képest, akkor

$$h^* \approx h \quad (2)$$

adódik, ezt azonban a dolgozatban nem feltételezzük.

Fontos kiemelni, hogy b és R mennyiségek csak a kerékpár úgynevezett centrális helyzetében érvényesek, azaz amikor nem lép fel laterális irányú elmozdulás, tehát $y = 0$. Ebben az esetben mindkét kerék sugara megegyezik a névleges sugárral, R -rel. Általános esetben, ha $y \neq 0$, akkor a két kerék sínnel érintkező sugara eltér egymástól, ez az, ami segít pályán tartani a vasúti szerelvényt. A kerék centrális helyzetből történő elmozdulását a 3. ábrán szemléltetjük. Látható, hogy a P^- pontnál r^- , P^+ pontnál pedig r^+ lett a két kerék tényleges futókörsugara.



3. ábra. A vasúti kerékpár a centrális helyzetből való elmozdulása esetén

Ezeket a mennyiségeket leírhatjuk a

$$\begin{aligned} r^- &= \tilde{r}(-y) = R - h^*y + O^2(y), \\ r^+ &= \tilde{r}(y) = R + h^*y + O^2(y). \end{aligned} \quad (3)$$

összefüggésekkel. Az $\tilde{r}$ függvény a kerék- és sínprofil geometriájából határozható meg analitikusan, méréssel; láthatjuk, hogy $\tilde{r}$ y elmozdulás függvénye. A függvény $y = 0$ körüli Taylor-sorában a lineáris együttható éppen a h^* egyenértékű kúposság [2]. $O^2(y)$ a másodfokú, illetve másodfokúnál nagyobb fokszerű, y -tól függő tagokat jelöli. A két futókör sugárkülönbségét

$$\Delta r = r^- - r^+ \quad (4)$$

módon definiáljuk. A (3) összefüggésekből adódóan

$$\Delta r = -2h^*y + O^3(y). \quad (5)$$

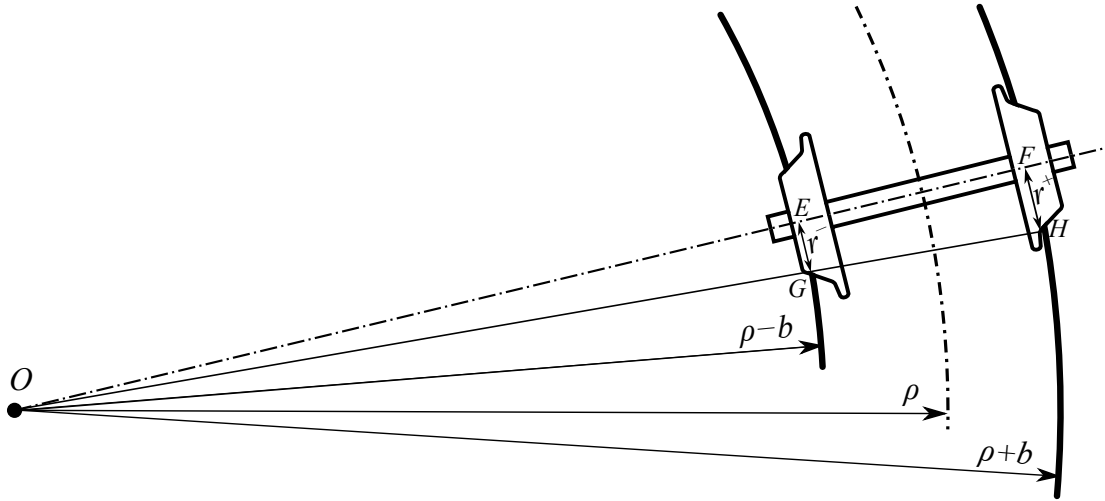
Szintén ebből a két összefüggésből látható, hogy a két összefüggésben a páros hatványú tagok megegyező, míg a páratlan hatványúak ellentétes előjelűek. Ebből az következik, hogy

kivonásnál a páros hatványú tagok kiesnek, a páratlan hatványúak megmaradnak. Ezért nem szerepel a (5) összefüggésben másodfokú tag.

A h tényező értéke a szakirodalom alapján 0.05-0.1 közötti, azonban nagysebességű járműveknél ez az érték 0.02-0.25 között mozog [8]. A kerék kopásával azonban a kúposág 0.3-ra is nőhet. h értékéből következik, hogy a jármű z tengely irányába történő elmozdulása, valamint a kerékpár szimmetriatengelyére merőleges, y tengellyel párhuzamos tengely körüli elfordulása elhanyagolható a többi elmozduláshoz és elforduláshoz képest [4].

1.1.2. A laterális elmozdulás meghatározása a jármű kanyarodása során

A vasúti kerekek enyhén kúpos kialakításának nagy előnye a kanyarodáskor figyelhető meg. A 4. ábrán egy vasúti kerékpár szerepel kanyarodás közben. ρ a pálya görbületi sugarát jelöli. Látható, hogy OGE háromszög hasonló OHF háromszöghöz. A hasonlóság miatt



4. ábra. A vasúti kerékpár kanyarodása

adódik, hogy $\rho + b$ úgy aránylik $\rho - b$ -hez, mint $r^+ r^-$ -hoz. Így felírható a

$$\frac{\rho + b}{r^+} = \frac{\rho - b}{r^-} \quad (6)$$

összefüggés. Átrendezve az egyenletet:

$$(r^- + r^+)b = (r^+ - r^-)\rho. \quad (7)$$

(3) egyenletekből látszik, hogy

$$r^- + r^+ \approx 2R, \quad (8)$$

hiszen a $O^2(y)$ tagok legalább másodrendben kicsinyek R -hez képest; valamint $r^+ - r^- = -\Delta r = 2h^*y$. Ekkor

$$2Rb = 2h^*y\rho. \quad (9)$$

Így megadható, hogy az y irányú kitérés miképp függ a pálya görbületi sugarától:

$$y = \frac{Rb}{\rho h^*}, \quad (10)$$

valamint

$$\rho = \frac{Rb}{h^* y}. \quad (11)$$

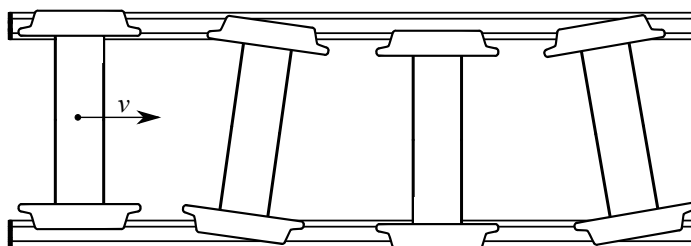
Ha bevezetjük az irodalomban inkább használt görbület $\kappa = 1/\rho$ fogalmát, akkor

$$\kappa = \frac{h^* y}{Rb}. \quad (12)$$

Ez tehát azt jelenti, hogy minél nagyobb a pálya görbülete, annál nagyobb laterális kitérés várható, vagy másképp: adott maximális y elmozdulás ismeretében megadható, hogy mekkora az a legnagyobb görbületű sínpálya, ami szükséges a kanyarodáshoz.

1.2. A vasúti kerék kinematikai rezgései

A vasúti kerékpár kigyózó mozgását az 5. ábra szemlélteti. Más szóhasználatnál ezt a jelenséget szinuszfutásnak is nevezik, mivel a kigyózó mozgással bejárt út szinusz-függvénnyel közelíthető. Az ábrán az az eset szerepel, amikor a vasúti jármű egyenletes v sebességgel halad a sínen, és az érintkezés a kerék és a sín között tiszta gördülésnek tekinthető. Ekkor a



5. ábra. A vasúti kerékpár kigyózó mozgása [1]

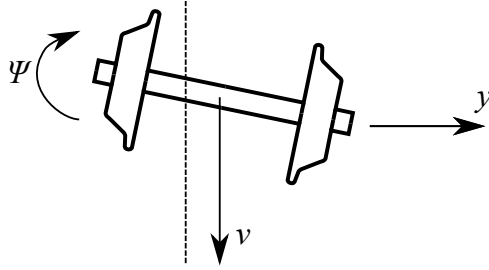
centrális helyzettől való periodikus eltéréseket kinematikai rezgésnek nevezzük. A jelenség legegyszerűbb esetben két változóval írható le, az egyik az y tengely irányú elmozdulás, a másik pedig z tengely körüli elfordulás, amelyet ψ -vel jelölünk, ezek a 6. ábrán láthatóak.

Kis elmozdulások és elfordulások esetén a

$$\dot{y} = v\psi \quad (13)$$

összefüggés adódik. Klingel [7] már korán megállapította a kerekek kúposágára vonatkozó számításai alapján, hogy ψ időbeli megváltozása:

$$\dot{\psi} = v \frac{\Delta r}{2bR} = v \frac{-hy}{bR}. \quad (14)$$



6. ábra. A vasúti kerékpár elmozdulása és elfordulása kinematikai rezgés esetén

Ez akkor érvényes, amikor y , ψ , illetve h kis mennyiségek. Ebből megállapítható kinematikai rezgésnél a Klingel-féle sajátkörfrekvencia:

$$\omega_{\text{Kli}} = v \sqrt{\frac{h}{bR}}. \quad (15)$$

Látszik, hogy a jármű haladási sebességének növekedésével, valamint nagyobb kúpszög esetében a sajátkörfrekvencia is növekszik. Ugyanakkor kisebb futókörsugár és futókörtávolság esetén is nagyobb a sajátkörfrekvencia értéke. A kifejezés javítására lehetőség h^* egyenértékű kúposság bevezetése az 1.1.1 alfejezetben részletezettek alapján. A Klingel-féle összefüggésekből megkapható a

$$\ddot{y} + \omega_{\text{Kli}}^2 y = 0 \quad (16)$$

differentiálegyenlet [8], amelynek megoldása $y(t) = A \sin(\omega t)$ alakú, ahol A a rezgés amplitúdója. Így ez egy állandó amplitúdójú, csillapítatlan rezgés, a centrális helyzet a stabilitás határán van.

1.3. A kúszás

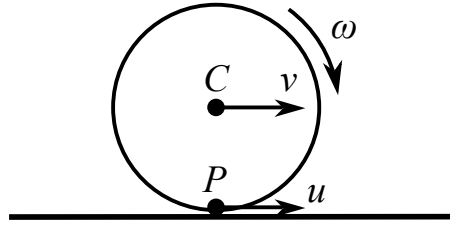
A vasúti kerék bonyolult alakú, térbeli test, ezért a modellalkotás szempontjából ebben az alfejezetben a kereket egy koronggal helyettesítjük, s így a korong síkon történő mozgását vizsgáljuk. Ha a korong tisztán gördülne, akkor sebessége egyenlő lenne a szögsebessége és a sugara szorzatával, azaz $v = \omega R$. Tapasztalati úton viszont már Reynolds [9] vizsgálta fém henger gumi asztalon történő mozgását, ahol a henger súly alatti deformációja miatt nem csupán egy pontban érintkezik az asztal síkjával.

Ahogy a 7. ábrán látható, az volt a megfigyelés, hogy a henger mozgása hasonlít a csúszáshoz, a sebesség pedig a

$$v = \omega R + u \quad (17)$$

összefüggéssel adható meg. A szakirodalom u -t a kúszási sebességnek nevezi, amelyre rendezve az egyenletet

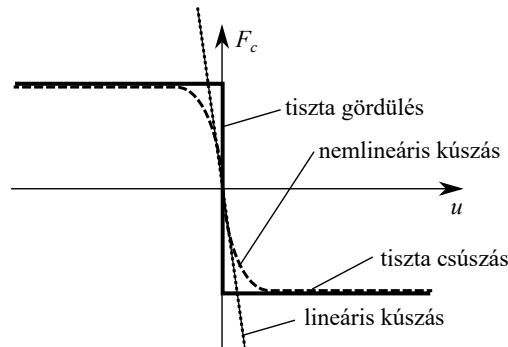
$$u = v - \omega R \quad (18)$$



7. ábra. A kúszási sebesség értelmezése

összefüggés adódik. A kúszás jelenségét tehát az érintkező testek deformációja okozza P érintkezési pont környezetében. Fém testek esetén csupán a lokális, azaz a P pont kis környezetében fellépő deformáció jelentős. Emiatt használhatjuk a merev test modellt azzal, hogy a kúszás hatását az érintkezési pont látszólagos csúszásával, a kúszási sebességgel vesszük figyelembe.

A 8. ábrán látszik, hogy a kúszási sebesség és a kontaktpontban ébredő kúszási erő (F_c)



8. ábra. A kúszási sebesség és a kúszási erő kapcsolatának közelítő jelleggörbéje [1]

közötti kapcsolat nagy kúszási sebességeknél jól közelíthető a Coulomb-súrlódás modelljével, kis kúszási sebességeknél pedig egy lineáris függvénnyel, amelynek meredeksége c kúszási tényező:

$$F_c = -cu. \quad (19)$$

A szakirodalom jellemzően egy másik mennyiséget használ a kúszás leírására, amelyet a „creepage” (kúszás mértéke, aránya, de a hazai szaknyelvben nem jelenik meg különbség az angol *creep*, illetve *creepage* között) jelöl, jele ξ , mértékegysége nincs. Képlete:

$$\xi = \frac{u}{v}. \quad (20)$$

Ekkor a kúszási erő átírható

$$F_c = -C\xi \quad (21)$$

alakra, ahol

$$C = cv, \quad (22)$$

sebességfüggetlen kúszási tényező. Értéke függ a kerekek és a sín érintkezési pontjában fellépő normálerőtől, a kerék és a sín anyagától, valamint a kontakt geometriától. Mivel a kúszás hatása nem hanyagolható el, a vasúti kerekek modelljét a fentiek alapján azzal a kibővítéssel vehetjük merev test modellnek, hogy figyelembe vesszük egyrészt, hogy a kúszási sebesség nem zérus, másrészt hogy a kúszási erőt a fenti módon határozzuk meg.

1.4. A vasúti kerék rezgései a kúszás figyelembevételével

Ha a kúszás jelenségét alkalmazni szeretnénk a modellre, már szükség van dinamikai összefüggések használatára is, figyelembe véve, hogy a kúszási sebesség x és y irányú komponense más c kúszási tényezővel ad összefüggést a kúszási erőre. Ezt először Carter [11] határozta meg, jelentőségét az bizonyítja, hogy a mai napig ez adja az alapját a vasúti kerék dinamikai vizsgálatának.

Szabó [3] alapján a dinamikai egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + k_y y + 2C_y \xi_1 &= 0, \\ J_{s\psi} \ddot{\psi} + k_\psi \psi + 2b^2 C_x \xi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

ahol C_x és C_y a (22) szerinti sebességfüggetlen kúszási tényező x , illetve y irányban, valamint a *creepage*-ek

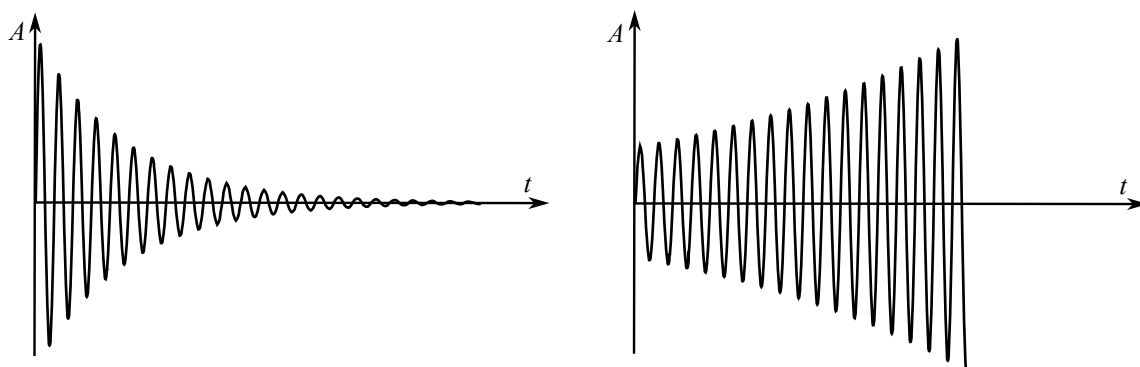
$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{v} \dot{y} - \psi, \\ \xi_2 &= \frac{b}{v} \dot{\psi} + \frac{h^*}{R} y, \end{aligned} \quad (24)$$

alakúak. Ezen egyenletek, valamint továbbfejlesztéseik (például [10], [12]) segítségével analitikusan és numerikusan vizsgálhatjuk a kerékpárok és a vasúti járművek rezgéseit.

1.5. Lineáris stabilitásvizsgálat, bifurkációk

A rezgések kis kitérései esetén lineáris stabilitásvizsgálatot végezhetünk el. Ha a rendszert leíró differenciálegyenlet-rendszert, például a (23) egyenletrendszert $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ mátrixos alakba átírva a $\mathbf{B}$ együtthatómátrix sajátértékeit vizsgáljuk, az adódik, hogy ha minden sajátérték valósrésze negatív, akkor a rendszer stabil, ellenkező esetben instabil.

A stabilitásvizsgálatok célja meghatározni azt, hogy milyen határhelyzetben válik a stabil rendszer instabillá, valamint ez hogyan függ a paraméterek értékétől. A 9. ábra bal oldalán a stabil helyzet látható, melyben a rezgés amplitúdója lecsengő jellegű. A jobb oldali ábrán az instabil helyzet szerepel, ez azért veszélyes, mert az idő haladásával a rezgés egyre



9. ábra. A stabil, illetve az instabil egyensúlyi helyzet

nagyobb amplitúdójú, és mivel valós szerkezetekben nem növekedhet a végtelenségig, előbb-utóbb a szerkezet károsodását, tönkremenetelét okozza. Ezért is kiemelkedő fontosságú a stabilitásvizsgálat, amellyel a szakirodalom is foglalkozik, lásd [10], [12].

Ha nem csupán kis kitérések esetére kiterjesztjük a vizsgálatot, az nemlineáris stabilitásvizsgálathoz vezet, melynek egyik, talán legfontosabb területe a bifurkáció-elmélet. Ezzel a dolgozat keretében nem foglalkozunk.

1.6. Kérdésfeltevések

A dolgozat célja a következő két kérdésre választ kapni:

- Megállapítottuk, hogy a kerékpár négy szabadságfokú modell, azonban az irodalomban két szabadságfokú modellel írják le. Miért nem négy szabadságfokú a szakirodalomban szereplő modell?
- A gyakorlatban a kerékrengés stabilizálására két megoldás jelenik meg: a kerék esztergálása a kerékprofil módosítására, és a kerékfelfüggesztés módosítása. Hogyan lehet kimutatni a modellből, hogy milyen hatást várhatunk ezektől a módosításoktól? Hogyan függ a stabilitás az egyes paraméterektől?

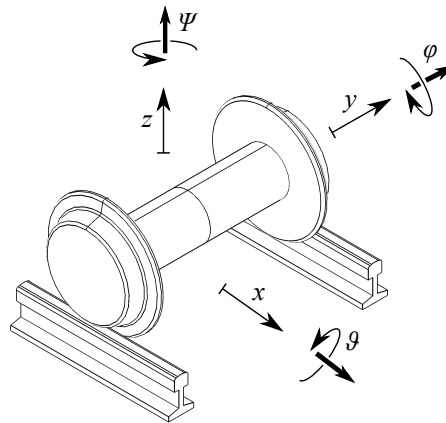
2. A vasúti kerékpár kinematikai vizsgálata

Ebben a fejezetben a vasúti kerékpár geometriájából kiindulva meghatározzuk a test sebesség- és gyorsulásállapotának leírásához szükséges mennyiségeket, összefüggéseket. Megmutatjuk, hogy tiszta gördülés esetén a kinematikai leírásból hogyan adódnak a kinematikai rezgés differenciálegyenletei.

2.1. Geometria és általános koordináták

A dolgozatban egyetlen vasúti kerékpár vizsgálatára koncentrálunk, amelynek mechanikai modelljét felvéve egyszerűsítésekkel kell élnünk. Először is, a kerékpárt merev testként vesszük figyelembe. Ez azt jelenti, hogy a test pontjainak távolsága a mozgás során egymáshoz képest nem változik meg. A második feltételezés, hogy a vasúti szerelvény egyenes vonalon, egyenletes sebességgel mozog.

A kerékpár modellje a 10. ábrán látható. Mivel a merev testnek térbeli esetben hat sza-



10. ábra. A vasúti kerékpár modellje és az általános koordináták [1]

badsági foka van, első megfontolásból a feladat leírásához hat általános koordinátára van szükség. A kerékpár x , y , illetve z tengelyek irányába mutató elmozdulását x -szel, y -nal, valamint z -vel, a kerékpár szimmetriatengelye körüli elfordulását φ -vel, a szimmetriatengelyre merőleges, x tengellyel párhuzamos tengely körüli elfordulást ϑ -val, a z tengely körüli elfordulást pedig ψ -vel jelöljük.

A sín a kerekre normálirányú geometriai kényszerként hat, ez összesen két szabadsági fokot köt le. Ha y , φ , y és ψ általános koordinátákat tartjuk meg, akkor z és ϑ kifejezhető a másik négy általános koordináta segítségével. A 3. ábrára visszatekintve belátható, hogy lineáris közelítésben

$$\vartheta \approx \tan \vartheta = \frac{-\Delta r}{2b} = \frac{h^* y}{b}, \quad (25)$$

valamint

$$z = y \sin \vartheta \approx y\vartheta = \frac{h^* y^2}{b}. \quad (26)$$

Így a kerékpár modellje leírható négy szabadságfokú rendszerként, amelynek négy általános koordinátája x , y , φ és ψ . Az általános koordinátákat a

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ y \\ \psi \end{bmatrix} \quad (27)$$

vektoros alakban adhatjuk meg.

Írjunk fel két, kitüntetett helyvektort, P^- és C pontok, valamint P^- és P^+ pontok között! P^- és C pontok távolsága z irányban r^- . ψ elfordulás következtében a helyvektort

$$\mathbf{r}_{P^-C} = -b \sin \psi \mathbf{i} + b \cos \psi \mathbf{j} + r^- \mathbf{k} \quad (28)$$

alakban íratjuk fel. Vegyük észre, hogy ϑ elfordulás elsőrendben, z elmozdulás pedig másodrendben kicsiny a többi általános koordinátához képest, ezért a helyvektorok felírásánál nem szükséges figyelembe venni őket. Mivel r^- és r^+ sugarak eltérő nagyságúak, P^- és P^+ pontok nem azonos magasságban helyezkednek el. A futókörsugár-különbség jelölése:

$$\Delta r = r^- - r^+ = -2h^* y + O^3(y). \quad (29)$$

A (29) összefüggés segítségével P^- és P^+ közötti helyvektor

$$\mathbf{r}_{P^-P^+} = -2b \sin \psi \mathbf{i} + 2b \cos \psi \mathbf{j} + \Delta r \mathbf{k} \quad (30)$$

alakú. Ezeket a helyvektorokat felhasználva a következő alfejezetben felírhatjuk a rendszer sebességállapotát.

2.2. A kinematikai egyenletek felírása

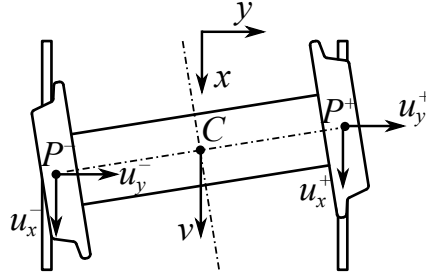
A kerék és sín érintkezési pontjainál, azaz P^- és P^+ pontokban kúszás lép fel, a kúszási sebesség mind a két pontban kétkomponensű. Ahogy a 11. ábrán látszik, a sebességkomponenseket pozitív irányba vettük fel. P^- és P^+ pont sebességét felírva a komponenseivel:

$$\mathbf{v}_{P^-} = u_x^- \mathbf{i} + u_y^- \mathbf{j}, \quad (31)$$

$$\mathbf{v}_{P^+} = u_x^+ \mathbf{i} + u_y^+ \mathbf{j}. \quad (32)$$

Írjuk fel még C pont, a kerékpár középpontjának sebességét! C pont az x tengely irányába $\dot{x}$ sebességgel halad, míg y tengely irányába $\dot{y}$ sebességgel. Ez alapján

$$\mathbf{v}_C = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j}. \quad (33)$$



11. ábra. A vasúti kerékpár felülnézetben és a kúszási sebességek

Olyan kikötést tettünk, hogy a vasúti szerelvény egyenletes sebességgel mozog, ha ennek a konstans sebességnek az értéke v , akkor

$$\dot{x} = v. \quad (34)$$

Mivel merev test modellt használunk C pont sebessége kifejezhető P^- pont sebességéből az alábbi képlet szerint:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{P^-} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P^-C}, \quad (35)$$

ahol $\boldsymbol{\omega}$ a merev test, azaz a kerékpár szögsebessége. Tekintsük úgy, hogy a rendszer először z tengely körül fordul el, majd ezt követően a kerékpár saját szimmetriatengelye körül is elfordul, azaz

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{e}_{\text{sym}}. \quad (36)$$

$\dot{\psi}$ a ψ , míg $\dot{\varphi}$ a φ általános koordináta idő szerinti differenciáltját jelöli. Az összefüggésben továbbá $\mathbf{e}_{\text{sym}}$ a kerékpár szimmetriatengelyének irányegységvektora. Mivel először a z tengely körül fordul el a modell, ezért a kerekek elfordulása már az elfordult szimmetriatengely körül következik be. Ez alapján az irányegységvektort a következő alakban kell felírnunk:

$$\mathbf{e}_{\text{sym}} = -\sin \psi \mathbf{i} + \cos \psi \mathbf{j}. \quad (37)$$

Tehát $\boldsymbol{\omega}$ -t megkapjuk (37) egyenletet (36)-be helyettesítve:

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi} \sin \psi \mathbf{i} + \dot{\varphi} \cos \psi \mathbf{j} + \dot{\psi} \mathbf{k}. \quad (38)$$

Helyettesítsük be (35)-be (28)-t, (31)-t, (33)-t, valamint (38)-t! Így a

$$\dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} = u_x^- \mathbf{i} + u_y^- \mathbf{j} + (-\dot{\varphi} \sin \psi \mathbf{i} + \dot{\varphi} \cos \psi \mathbf{j} + \dot{\psi} \mathbf{k}) \times (-b \sin \psi \mathbf{i} + b \cos \psi \mathbf{j} + r^- \mathbf{k}) \quad (39)$$

összefüggést kapjuk. Elvégezve a vektoriális szorzást, valamint összevonva az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ -s tagokat:

$$\begin{aligned} \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} = & (u_x^- + r^- \dot{\varphi} \cos \psi - b \dot{\psi} \cos \psi) \mathbf{i} + (u_y^- + \dot{\varphi} \sin \psi - b \dot{\psi} \sin \psi) \mathbf{j} + \\ & + (b \dot{\varphi} \sin \psi \cos \psi - b \dot{\varphi} \sin \psi \cos \psi) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (40)$$

Látható, hogy a $\mathbf{k}$ -s tag kiesik. (40) egyenletet először $\mathbf{i}$ -vel, majd $\mathbf{j}$ -vel skalárisan szorozva a következő két skalár egyenlethez jutunk:

$$\dot{x} = u_x^- + r^- \dot{\varphi} \cos \psi - b \dot{\psi} \cos \psi, \quad (41)$$

$$\dot{y} = u_y^- + r^- \dot{\varphi} \sin \psi - b \dot{\psi} \sin \psi. \quad (42)$$

Ezzel megkaptunk két, egymástól független kinematikai egyenletet.

Az előbbi módszerrel felírhatjuk P^+ sebességét P^- pont sebességével kifejezve:

$$\mathbf{v}_{P^+} = \mathbf{v}_{P^-} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P^- P^+}. \quad (43)$$

Mivel ugyanarról a testről van szó, a képletben $\boldsymbol{\omega}$ megegyezik a (38) összefüggéssel. A (43) egyenletbe behelyettesítve (31)-t, (32)-t, (38)-t és (30)-t a következő összefüggéshez jutunk:

$$u_x^+ \mathbf{i} + u_y^+ \mathbf{j} = u_x^- \mathbf{i} + u_y^- \mathbf{j} + (-\dot{\varphi} \sin \psi \mathbf{i} + \dot{\varphi} \cos \psi \mathbf{j} + \dot{\psi} \mathbf{k}) \times (-2b \sin \psi \mathbf{i} + 2b \cos \psi \mathbf{j} + \Delta r \mathbf{k}). \quad (44)$$

A vektoriális szorzást elvégezve, illetve rendezve a tagokat:

$$\begin{aligned} u_x^+ \mathbf{i} + u_y^+ \mathbf{j} = & (u_x^- - 2b \dot{\psi} \cos \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \Delta r) \mathbf{i} + (u_y^- - 2b \dot{\psi} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \Delta r) \mathbf{j} + \\ & + (2b \dot{\varphi} \sin \psi \cos \psi - 2b \dot{\varphi} \sin \psi \cos \psi) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (45)$$

Látható, hogy a $\mathbf{k}$ -s tag kiesik ebben az összefüggésben is. Szorozzuk meg (45) egyenletet skalárisan $\mathbf{i}$ -vel, majd $\mathbf{j}$ -vel. Ekkor a következő két skalár egyenletet kapjuk:

$$u_x^+ = u_x^- - 2b \dot{\psi} \cos \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \Delta r, \quad (46)$$

$$u_y^+ = u_y^- - 2b \dot{\psi} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \Delta r. \quad (47)$$

Ezzel szintén két, egymástól független kinematikai egyenletet kaptunk.

Oldjuk meg az (34), (41), (42), (46), (47) öt egyenletből álló egyenletrendszert $\dot{\psi}$ -re, $\dot{\varphi}$ -re, u_y^+ -ra, $\dot{y}$ -ra és $\dot{x}$ -ra!

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{u_x^- r^+ - u_x^+ r^- + v \Delta r}{b(r^- + r^+) \cos \psi}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{2v - u_x^- - u_x^+}{(r^- + r^+) \cos \psi}, \\ u_y^+ &= u_y^- + \frac{\tan \psi [v \Delta r - u_x^- r^- + u_x^+ r^+]}{r^- + r^+}, \\ \dot{y} &= u_y^- + \tan \psi (v - u_x^-), \\ \dot{x} &= v. \end{aligned} \quad (48)$$

Kaptunk tehát öt, egymástól független, sebességeket leíró egyenleteteket, amelyeket pusztán a rendszer kinematikai jellemzőiből írtunk fel, dinamikát nem használva.

2.3. Linearizálás és kinematikai rezgések

Vizsgáljuk meg, hogy viselkedik a rendszer centrális, kúszásmentes esetben! Ekkor $y = 0$, $\psi = 0$, illetve a $u_x^- = u_y^- = u_x^+ = u_y^+ = 0$. A (48) egyenletrendszerből így a következő adódik:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= 0, \\ \dot{\varphi} &= \frac{v}{R}, \\ \dot{y} &= 0, \\ \dot{x} &= v.\end{aligned}\tag{49}$$

Ez azt a mozgást írja le, amikor a kerékpár egyenletesen forog, egyenletesen halad előre, miközben mind a rezgéseket jellemző y és ψ , mind a kúszást jellemző u_x^- , u_y^- , u_x^+ és u_y^+ mennyiségek nullák. Így ezek az összefüggések a tiszta gördülés esetét írják le.

Figyelembe véve, hogy csupán a kis elmozdulások esetét vizsgáljuk, tehát a kúszási jellemzők, azaz y , ψ , u_x^- , u_y^- , u_x^+ , u_y^+ lényegesen kisebbek, mint 1, linearizálás végezhető el. A linearizálásból adódóan $\sin \psi \approx \psi$ és $\cos \psi \approx 1$. (3) összefüggésekből adódódik, hogy h^*y tag elsőrendben kicsiny R -hez képest, ezen kívül pedig csak másodrendben, vagy annál magasabb rendben kicsiny mennyiségek szerepelnek R mellett, így linearizálva $r^- \approx R$ és $r^+ \approx R$. Viszont Δr -nél a két sugár különbsége szerepel, amely $-2h^*y + O^3(y)$ alakban áll. Ez az összefüggés linearizálva $-2h^*y$ -t ad, hiszen a másodrendben, vagy annál magasabb rendben kicsiny mennyiségek az elsőrendben kicsiny y -os tag mellett elhanyagolhatóak. Ez alapján:

$$\Delta r \approx -2h^*y.\tag{50}$$

A (48) egyenletrendszert linearizálva:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \frac{u_x^- - u_x^+}{2b} - \frac{vh^*}{Rb}y, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{u_x^- + u_x^+}{2R} + \frac{v}{R}, \\ u_y^+ &= u_y^-, \\ \dot{y} &= u_y^- + \psi v, \\ \dot{x} &= v.\end{aligned}\tag{51}$$

Figyeljük meg, hogy (51) egyenletrendszer harmadik egyenlete kiadja a szakirodalomban is szereplő feltevést, azaz hogy a kerekek kúszási sebességének y irányú komponense nagyságban és irányultságban is megegyezik egymással. Egy további észrevétel, hogy ugyan-ezen egyenletrendszer első és második egyenletében önmagában nem szerepel u_x^- , vagy u_x^+ , csupán ezek összege, vagy különbsége. Érdemes így bevezetni két új kúszási mennyiséget:

$$u_a = \frac{u_x^+ - u_x^-}{2},\tag{52}$$

$$u_s = \frac{u_x^+ + u_x^-}{2}. \quad (53)$$

u_a a longitudinális kúszások különbségét fejezi ki, ezt aszimmetrikus kúszási sebességnek nevezzük. u_s pedig az átlagos longitudinális kúszási sebesség, azaz röviden szimmetrikus kúszási sebesség. Ezek mintájára helyettesíthetjük u_y^- -t és u_y^+ -t a

$$u_l = \frac{u_y^+ + u_y^-}{2} \quad (54)$$

mennyiséggel, ahol u_l a laterális, azaz y irányú kúszások átlaga. Lineáris közelítésben $u_y^- = u_y^+$, ebből $u_l = u_y^- = u_y^+$ adódik. Használjuk fel ezeket az egyenleteket (51) újbóli felírásához!

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{u_a}{b} - \frac{vh^*}{Rb}y, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{u_s}{R} + \frac{v}{R}, \\ \dot{y} &= u_l + \psi v, \\ \dot{x} &= v. \end{aligned} \quad (55)$$

Ezek az egyenletek részben összefüggést adnak a kúszási sebességek és az általános koordináták deriváltjai között, részben pedig az $\dot{x} = v$ kinematikai kényszert foglalják magukban. Mivel a rendszer négy szabadságfokú, a geometriai konfiguráció négy általános koordinátával írható le. Kikötöttük, hogy a jármű egyenletes v sebességgel halad, ez egy kinematikai kényszert jelent. Ebből az következik, hogy a rendszer sebességállapotát négy változó helyett három változóval tudjuk leírni. Ezen változóknak u_a -t, u_s -t és u_l -t választjuk, hogy a sebességeket egyszerűbb alakba ír hassuk.

A rendszer gyorsulásállapotát ψ , φ és y idő szerinti második differenciáltjával írhatjuk le. Nyilván $\ddot{x} = 0$, hiszen a vontató sebesség állandó. A (48) egyenletrendszer első, második, negyedik és ötödik egyenletét differenciálva, majd linearizálva:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= \frac{\dot{u}_x^- - \dot{u}_x^+}{2b} - \frac{vh^*}{Rb}\dot{y}, \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{\dot{u}_x^- + \dot{u}_x^+}{2R}, \\ \ddot{y} &= \dot{u}_y^- + \dot{\psi}v, \\ \ddot{x} &= 0. \end{aligned} \quad (56)$$

(56) egyenletrendszer is felírható (52), (53) és (54) felhasználásával:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -\frac{\dot{u}_a}{b} - \frac{vh^*}{Rb}\dot{y}, \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{\dot{u}_s}{R}, \\ \ddot{y} &= \dot{u}_l + \dot{\psi}v, \\ \ddot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (57)$$

(55) és (57) egyenletrendszerek felhasználásával a dinamikai egyenleteket kifejezhetjük a kúszási sebességekkel, azaz az általánoskoordináta-deriváltak kiküszöbölhetők.

Érdekességgéppen mutassuk meg a tiszta gördülés esetét! Ha nem lép fel kúszás, akkor $u_l = u_a = u_s = 0$ miatt a (55) egyenletrendszerből:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -\frac{vh^*}{Rb}y \\ \dot{\varphi} &= \frac{v}{R} \\ \dot{y} &= \psi v \\ \dot{x} &= v\end{aligned}\tag{58}$$

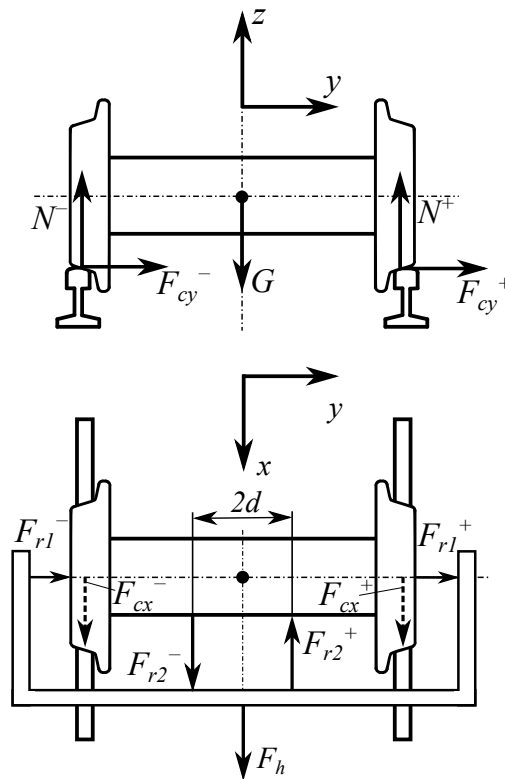
Kúszás nélküli esetben ezzel a négy egyenlettel teljeskörűen leírható a kerékpár mozgása és rezgései. Éppen ezért a szakirodalom ezt az esetet kinematikai rezgésnek nevezi.

3. A vasúti kerékpár dinamikai egyenletei

Ebben a fejezetben felírjuk a vasúti kerékpárra a merev testekre érvényes Newton-Euler egyenleteket, hogy összefüggéseket kapjunk a kúszási sebességek deriváltjaira. Ezen egyenletek, illetve az előző fejezetben kapott összefüggések segítségével felállítjuk azt az ötváltozós differenciálegyenlet-rendszert, amely leírja a vasúti kerékpár rezgéseit.

3.1. Dinamikai modell

A 12. ábrán a vasúti kerékpár modellje látható elől- és felülnézetben, a kerékpárra ható erőkkel. A rendszer egy merev kerethez kapcsolódik összesen négy rugóval. Ez egy, irodalomban szokásos lehetősége a rugalmas felfüggesztés modellezésének (pl. [13]). Mivel azonban az egyenletek felírásánál a később bevezetésre kerülő egyenértékű rugómerevség számít majd, nincs jelentősége a konkrét felfüggesztési esetnek. Ebben a modellben a rugók közül kettő a haladási irányra merőleges irányú, a kerekek középpontjába vannak bekötve, rugómerevségük k_1 . Ezekben F_{r1}^- és F_{r1}^+ rugóerő ébred. A másik két rugó a haladási iránnyal megegyező irányú, a C ponttól d távolságra kapcsolódnak a kerekeket összekötő tengelyhez. Ezek rugómerevsége k_2 , az ébredő rugóerők F_{r2}^- , illetve F_{r2}^+ Pozitív irányú y elmozdulást és



12. ábra. A vasúti kerékpár modelljére ható erők

ψ szögelfordulást feltételezve a rugóerők irányát az ábrán látható irányba vettük fel.

A merev kereket F_h húzóerő vonatja a haladási iránnyal megegyező irányba. A kerékpárra nehézségi erő hat, valamint a vonat súlyából származó erő nyomja, ezeket a kerékpár tömegközéppontjába, C pontba veszünk fel. A két kerék és a sín érintkezési pontjaiban normálerő ébred, ezt N^- és N^+ jelöli. A kúszóerők szintén az érintkezési pontokban hatnak, F_{cx}^- és F_{cx}^+ az x irányú, F_{cy}^- és F_{cy}^+ az y irányú kúszóerő-komponenseket jelöli.

3.2. A dinamikai egyenletek felírása

Írjuk fel a rendszerre a merev testekre érvényes Newton-Euler egyenleteket! Két vektoregyenletet kell felírunk, amely általános esetben összesen hat skalár egyenletre vezetne, azonban most csupán a dinamikát leíró három komponensét vesszük figyelembe, azaz az impulzustétel y komponensét, és a perdülettétel y , valamint z komponensét.

Az első egyenlet az y elmozdulásra adódik:

$$m\ddot{y} = F_{r1}^- + F_{r1}^+ + F_{cy}^- + F_{cy}^+. \quad (59)$$

Tudjuk, hogy a rugóerő nagysága arányos a rugó megnyúlásával, iránya pedig ellentétes vele, az arányossági tényező a rugómerevség. Tehát

$$F_{r1}^- = F_{r1}^+ = -k_1 y. \quad (60)$$

A kúszóerő komponensei felírhatók:

$$F_{cy}^- = -c_y u_y^-, \quad (61)$$

$$F_{cy}^+ = -c_y u_y^+. \quad (62)$$

(60), (61) és (62) egyenleteket visszahelyettesítve (59)-be, valamint az egyenletet $\ddot{y}$ -ra rendezve:

$$\ddot{y} = -2\frac{k_1}{m}y - \frac{c_y}{m}(u_y^- + u_y^+) \quad (63)$$

Helyettesítsük be az $\ddot{y}$ -ra kapott (57) egyenletrendszer-beli összefüggést, (55) egyenletrendszer első egyenletét és (54)-t (59) egyenletbe, majd rendezzük $\dot{u}_l$ -re!

$$\dot{u}_l = \left(\frac{v^2 h^*}{Rb} - 2\frac{k_1}{m} \right) y + \frac{v}{b} u_a - \frac{2}{m} c_y u_l. \quad (64)$$

Legyen k_y egyenértékű rugómerevsége az y irányba bekötött rugóknak, figyelembe véve a gravitációs merevséget [5] alapján. Jelen modellben ez

$$k_y = 2k_1 \quad (65)$$

összefüggésnek adódik. Ez alapján (64) egyenlet átírható

$$\dot{u}_l = \left(\frac{v^2 h^*}{Rb} - \frac{k_y}{m} \right) y + \frac{v}{b} u_a - \frac{2}{m} c_y u_l. \quad (66)$$

alakba.

A második Newton-Euler egyenletet a z tengely körüli elfordulásra írhatjuk fel. A rugók elmozdulása $d \sin \psi$, amely linearizálva ($\psi \ll 1$) $d\psi$. Így a következő egyenlet adódik:

$$J_{s\psi} \ddot{\psi} = -k_2 d^2 \psi + b F_{cx}^- - b F_{cx}^+. \quad (67)$$

Az egyenletben $J_{s\psi}$ a z tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték, a kúszóerő-komponensek pedig:

$$F_{cx}^- = -c_x u_x^-, \quad (68)$$

$$F_{cx}^+ = -c_x u_x^+. \quad (69)$$

(67) egyenletbe helyettesítsük be (57) egyenletrendszerből az első képletet, valamint (52), (55) egyenletrendszerből a harmadik egyenletet, illetve (68) és (69) összefüggést, és fejezzük ki $\dot{u}_a$ -t!

$$\dot{u}_a = \left(-\frac{v^2 h^*}{R} + \frac{k_2 d^2 b}{J_{s\psi}} \right) \psi - \frac{v h^*}{R} u_l - \frac{2b^2}{J_{s\psi}} c_x u_a. \quad (70)$$

Itt is érdemes egy egyenértékű merevséget definiálni, amely magában foglalja a gravitációs merevséget is:

$$k_\psi = k_2 d^2. \quad (71)$$

Ez alapján a második dinamikai egyenletet a

$$\dot{u}_a = \left(-\frac{v^2 h^*}{R} + \frac{k_\psi b}{J_{s\psi}} \right) \psi - \frac{v h^*}{R} u_l - \frac{2b^2}{J_{s\psi}} c_x u_a \quad (72)$$

alakban írhatjuk fel.

Az utolsó Newton-Euler egyenletet a szimmetriatengely körüli elfordulásra írjuk fel.

$$J_{s\varphi} \ddot{\varphi} = -R F_{cx}^- - R F_{cx}^+. \quad (73)$$

Behelyettesítve (57) egyenletrendszer második egyenletét, valamint (53), (68) és (69) képleteket, az összefüggést pedig $\dot{u}_s$ -re átrendezve:

$$\dot{u}_s = -\frac{2R^2}{J_{s\varphi}} c_x u_s. \quad (74)$$

Összegezve a 2. és a 3. fejezetet, egy öt differenciálegyenletből álló lineáris differenciálegyenlet-rendszerre jutottunk, amelyet a (55) egyenletrendszer első és harmadik egyen-

lete, valamint a (66) és a (72) egyenletek adnak a

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= -\frac{u_a}{b} - \frac{vh^*}{Rb}y, \\
\dot{y} &= u_l + \psi v, \\
\dot{u}_l &= \left(\frac{v^2 h^*}{Rb} - \frac{k_y}{m} \right) y + \frac{v}{b} u_a - \frac{2}{m} c_y u_l, \\
\dot{u}_a &= \left(-\frac{v^2 h^*}{R} + \frac{k_\psi b}{J_{s\psi}} \right) \psi - \frac{vh^*}{R} u_l - \frac{2b^2}{J_{s\psi}} c_x u_a \\
\dot{u}_s &= -\frac{2R^2}{J_{s\varphi}} c_x u_s
\end{aligned} \tag{75}$$

formában. (55) egyenletrendszer többi egyenletét azért hagyhatjuk el, mert x és φ koordináták az egyenletek jobb oldalán nem szerepelnek, így az egyenletrendszerrel leválaszthatók. Ez azt jelenti, hogy a modell invariáns az x irányban való eltolásra és a φ szöggel elforgatásra nézve. Más szóval ezen változók nem befolyásolják közvetlenül a dinamikát.

4. A vasúti kerékpár dinamikai vizsgálata

Ebben a fejezetben elvégezzük a rendszer dinamikai vizsgálatát. Megállapítjuk, hogy a kúposság és a rugómerevségek hogyan befolyásolják a rendszer kritikus sebességét.

4.1. A centrális mozgás vizsgálata

Legyen a rendszer állapotvektora

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \psi \\ y \\ u_l \\ u_a \\ u_s \end{bmatrix}, \quad (76)$$

az állapotvektor deriváltja pedig

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{y} \\ \dot{u}_l \\ \dot{u}_a \\ \dot{u}_s \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Tekintsük (75) egyenletrendszer trivális megoldását, ahol

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{y} \\ \dot{u}_l \\ \dot{u}_a \\ \dot{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Ez éppen a kerékpár centrális, gördülő mozgását adja vissza, amelyben y elmozdulás, ψ szögelfordulás, valamint a kúszási sebességek is zérus értékűek. A (75) egyenletrendszer e körül az egyensúlyi helyzet körül linearizálva lett levezetve. A (75) egyenleteket mátrixos formába írva a

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{y} \\ \dot{u}_l \\ \dot{u}_a \\ \dot{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{vh^*}{Rb} & 0 & -\frac{1}{b} & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v^2h^*}{Rb} - \frac{k_y}{m} & -\frac{2}{m}c_y & \frac{v}{b} & 0 \\ -\frac{v^2h^*}{R} + \frac{k_\psi b}{J_{s\psi}} & 0 & -\frac{vh^*}{R} & -\frac{2b^2}{J_{s\psi}}c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2R^2}{J_{s\varphi}}c_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi \\ y \\ u_l \\ u_a \\ u_s \end{bmatrix}. \quad (79)$$

összefüggésre jutunk, amelyben

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{v h^*}{Rb} & 0 & -\frac{1}{b} & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v^2 h^*}{Rb} - \frac{k_y}{m} & -\frac{2}{m} c_y & \frac{v}{b} & 0 \\ -\frac{v^2 h^*}{R} + \frac{k_\psi b}{J_{s\psi}} & 0 & -\frac{v h^*}{R} & -\frac{2b^2}{J_{s\psi}} c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2R^2}{J_{s\varphi}} c_x \end{bmatrix} \quad (80)$$

a rendszer együtthatómátrixa.

4.2. A két szabadságfokú modell alátámasztása

Vizsgáljuk meg végül (75) egyenletrendszer ötödik egyenletét:

$$\dot{u}_s = -\frac{2R^2}{J_{s\varphi}} c_x u_s. \quad (81)$$

Ez az összefüggés önmagában is megoldható, hiszen csak u_s változó szerepel benne, így ez egy elsőrendű, egyváltozós, lineáris differenciálegyenlet. Az ilyen jellegű differenciálegyenlet $Y'(x) = CY(x)$ alakban írható fel, amelyről ismert, hogy megoldása $Y(x) = Y(0)e^{Cx}$. Ez alapján az egyenlet megoldása

$$u_s = u_s(t=0)e^{-\frac{2R^2}{J_{s\varphi}} c_x t}. \quad (82)$$

Ez egy exponenciálisan lecsengő függvény, határértéke a végtelenben nulla. Ebből az következik, hogy adott idő után u_s értékét nullával közelíthetjük, azaz $u_s \approx 0$. Ebből visszkapjuk a szakirodalomban feltételezett esetet, hogy $u_x^+ = -u_x^-$, hiszen az (53) egyenletből adódóan

$$u_s = \frac{u_x^+ + u_x^-}{2} = \frac{u_x^+ - u_x^+}{2} = 0. \quad (83)$$

Így kimondható, hogy nem hibás (23) egyenletrendszer, hiszen látszik, hogy u_s dinamikája nem befolyásolja a többi változót, valamint a többi változó sem befolyásolja $\dot{u}_s$ -t. Ráadásul a külső zavarok hatására létrejött u_s szimmetrikus kúszást a dinamika eltünteti. Így ez az egyenlet leválasztható az egyenletrendszerről és külön vizsgálható.

4.3. A rendszer stabilitásának feltételei

A rendszer stabilitásának vizsgálatához $\mathbf{B}$ együtthatómátrix sajátértékeit kell vizsgálnunk. A sajátértékek a

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (84)$$

egyenletből határozhatók meg, λ értékeiként, ezeknek valós, illetve képzetes része is lehet. A rendszer triviális $\mathbf{x} = 0$ egyensúlyi helyzete akkor aszimptotikusan stabil, ha az

összes sajátérték negatív valós részű. Aszimptotikus stabilitás esetén az egyensúlyi helyzetnek létezik olyan környezete a fázistérben, ahonnan valamennyi megoldás az egyensúlyi helyzethez konvergál.

Ha a sajátértékek közül van legalább egy pozitív, akkor a rendszer instabil, azaz létezik olyan, az egyensúlyi helyzet környezetében indított megoldás, amely az egyensúlyi helyzettől eltávolodik. Speciális eset, ha a sajátértékek mindegyike nemnegatív valós részű és van olyan sajátérték, amelyik zérus valós részű, ugyanis ekkor a lineáris vizsgálat alapján nem tudjuk meghatározni, hogy stabil, vagy instabil-e a rendszer. Ekkor nemlineáris stabilitásvizsgálatra lenne szükség.

Jelen problémánál a mátrix karakterisztikus polinomja

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = \left[\lambda^4 + 2 \left(\frac{c_y}{m} + \frac{c_x b^2}{J_{s\psi}} \right) \lambda^3 + \left(\frac{4c_x c_y b^2}{m J_{s\psi}} + \frac{k_y}{m} + \frac{k_\psi}{J_{s\psi}} \right) \lambda^2 + 2 \left(\frac{c_y k_\psi}{m J_{s\psi}} + \frac{c_x k_y b^2}{m J_{s\psi}} \right) \lambda + \left(\frac{4b c_x c_y v^2 h^*}{m R J_{s\psi}} + \frac{k_y k_\psi}{m J_{s\psi}} \right) \right] \left(\lambda + \frac{2R^2}{J_{s\varphi}} c_x \right) \quad (85)$$

alakú lesz, amely ötödfokú kifejezés, így öt sajátértéket várunk. A képlet alapján a kifejezés egy első- és egy negyedfokú tényezőre bontható. Ha a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük 0-val, akkor az első sajátérték a

$$\lambda_1 + \frac{2R^2}{J_{s\varphi}} c_x = 0 \quad (86)$$

egyenletből adódik. Vagyis a λ_1 sajátérték mindig negatív lesz, azaz nem okoz instabilitást.

A többi sajátérték analitikus meghatározásához, azaz a negyedfokú polinom gyökeinek megadásához bonyolult matematikai összefüggésekre lenne szükség, negyedfokú megoldóképletre. Mivel a stabilitás szempontjából nincs szükség a sajátértékek pontos értékére, csupán a valós részük előjelének megállapítására, elegendő felhasználni a Hurwitz-kritériumot, amely azt mondja ki, hogy ha a karakterisztikus polinomja legnagyobb foksámú tagjának együtthatója pozitív, akkor a rendszer csak abban az esetben lesz aszimptotikusan stabil, ha a karakterisztikus egyenlet együtthatói és a Hurwitz-mátrix bal felső aldeteminánsai is pozitív előjelűek.

A karakterisztikus polinom

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (87)$$

általános alakra írható fel, ahol

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= 2 \left(\frac{c_y}{m} + \frac{c_x b^2}{J_{s\psi}} \right), \\
a_2 &= \frac{4c_x c_y b^2}{m J_{s\psi}} + \frac{k_y}{m} + \frac{k_\psi}{J_{s\psi}}, \\
a_3 &= 2 \left(\frac{c_y k_\psi}{m J_{s\psi}} + \frac{c_x k_y b^2}{m J_{s\psi}} \right), \\
a_4 &= \frac{4b c_x c_y v^2 h^*}{m R J_{s\psi}} + \frac{k_y k_\psi}{m J_{s\psi}}.
\end{aligned} \tag{88}$$

A Hurwitz-mátrix negyedfokú polinom esetén

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix} \tag{89}$$

Összegezve, a következő feltételek együttes fennállása szükséges a stabilitáshoz:

$$\begin{aligned}
a_0 &> 0, \\
a_1 &> 0, \\
a_2 &> 0, \\
a_3 &> 0, \\
a_4 &> 0, \\
\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} &> 0, \\
\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} &> 0.
\end{aligned} \tag{90}$$

Figyeljük meg, hogy a (88) egyenletekben szereplő összes mennyiség pozitív előjelű! Emiatt $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ és $a_4 > 0$ automatikusan teljesül.

A kifejezések alakjának egyszerűsítésére vezessünk be új mennyiségeket! Legyen

$$\alpha_y^2 = k_y / m \tag{91}$$

a rendszer y irányú,

$$\alpha_\psi^2 = k_\psi / J_{s\psi} \tag{92}$$

pedig a rendszer ψ irányú rugókra számolt sajátkörfrekvenciája. Ezen kívül jelölje

$$\begin{aligned}\gamma_y &= 2 \frac{C_y}{m} = 2 \frac{c_y v}{m}, \\ \gamma_\psi &= 2 \frac{C_x b^2}{J_{s\psi}} = 2 \frac{c_x v b^2}{J_{s\psi}}\end{aligned}\quad (93)$$

normalizált kúszási tényezőket, illetve legyen

$$\zeta = \frac{h^*}{bR} \quad (94)$$

normalizált kúposság. Felhasználva (91)-(94)-t, alakítsuk át (88) egyenleteket:

$$\begin{aligned}a_0 &= 1, \\ a_1 &= \frac{\gamma_y + \gamma_\psi}{v}, \\ a_2 &= \frac{\gamma_y \gamma_\psi}{v^2} + \alpha_y^2 + \alpha_\psi^2, \\ a_3 &= \frac{\gamma_y \alpha_\psi^2 + \gamma_\psi \alpha_y^2}{v}, \\ a_4 &= \gamma_y \gamma_\psi \zeta + \alpha_y^2 \alpha_\psi^2.\end{aligned}\quad (95)$$

Vizsgáljuk a két aldeterminánst!

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = \frac{\gamma_y \gamma_\psi^2 + (\gamma_y^2 + v^2 \alpha_\psi^2) \gamma_\psi + v^2 \alpha_y^2 \gamma_y}{v^3} > 0 \quad (96)$$

Mivel az összefüggésben szereplő összes mennyiség pozitív, a determináns értéke is pozitív előjelű, így ennél is, a paraméterektől függetlenül teljesül a stabilitás feltétele. A másik determinánssra:

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} &= - \left(\gamma_y \gamma_\psi^3 + 2 \gamma_y^2 \gamma_\psi^2 + \gamma_y^3 \gamma_\psi \right) v^2 \zeta + \alpha_y^2 \gamma_y \gamma_\psi^3 - \left(-\alpha_\psi^2 - \alpha_y^2 \right) \gamma_y^2 \gamma_\psi^2 - \\ &\quad \left[\left(-\alpha_\psi^4 + 2 \alpha_y^2 \alpha_\psi^2 - \alpha_y^4 \right) v^2 \gamma_y - \alpha_\psi^2 \gamma_y^3 \right] > 0.\end{aligned}\quad (97)$$

Erről az összefüggés már lehet negatív is, a stabilitása a paraméterektől függ. Mivel a gyakorlati cél legtöbbször annak a maximális sebességnek a megállapítása, amely esetén még stabil a rendszer, a következő alfejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy ez hogyan függ a többi tényezőtől.

4.4. A paraméterek hatása a kritikus sebességre

A vasúti kerékpár esetében több paraméter változtatására van lehetőség, amelyek közül a dolgozatban három tényező hatását vizsgáljuk. Először is módosítható a kerék kúpossági

jellemzője, például a kerék esztergálásával. Másodszor, a két sajátkörfrekvencia, α_y^2 és α_ψ^2 módosítható más merevségű rugók, rugalmas felfüggesztések használatával. A paraméterek itt használt konkrét értékei [10]-ből származnak. Ezek alapján a használt paraméterek számszerű értékei:

$$\begin{aligned} R &= 0.43 \text{ m}, \\ b &= 0.7465 \text{ m}, \\ m &= 2000 \text{ kg}, \\ J_{s\psi} &= 685 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ C_x &= 8.9 \cdot 10^6 \text{ N}, \\ C_y &= 8.8 \cdot 10^6 \text{ N}. \end{aligned} \tag{98}$$

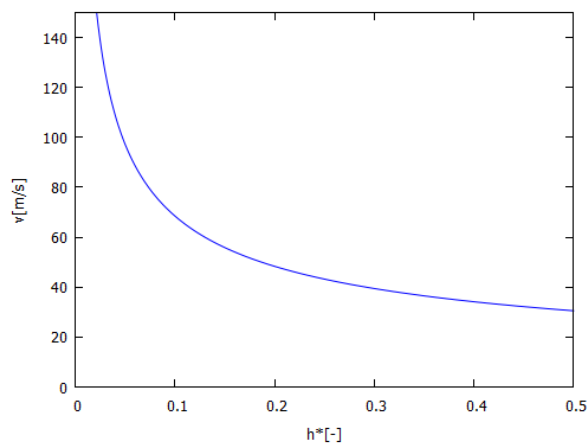
Mivel a kritikus sebesség meghatározása a cél, fejezzük ki (97)-ből v sebességet (természetesen csak a fizikailag értelmes gyökét vizsgáljuk):

$$v_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{(\gamma_\psi + \gamma_y) (\alpha_y^2 \gamma_\psi + \alpha_\psi^2 \gamma_y)}{(\gamma_y + \gamma_\psi)^2 \zeta - (\alpha_\psi^2 - \alpha_y^2)^2}}. \tag{99}$$

Vagyis a modell szerint, ha a jármű eléri ezen kritikus sebességet, a kerék centrális mozgása instabillá válik.

4.4.1. A kúposság hatása a kritikus sebességre

Vegyük adottnak a rendszer két rugalmas tagját $k_y = 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ és $k_\psi = 1.5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ rugómerevségekkel. Ekkor $\alpha_y = 31.62 \text{ 1/s}$ és $\alpha_\psi = 46.8 \text{ 1/s}$ sajátkörfrekvenciák adódnak. h^* egyenértékű kúposság és a kritikus sebesség összefüggését a 13. ábra mutatja. Látszik



13. ábra. Az egyenértékű kúposság hatása a kritikus sebességre

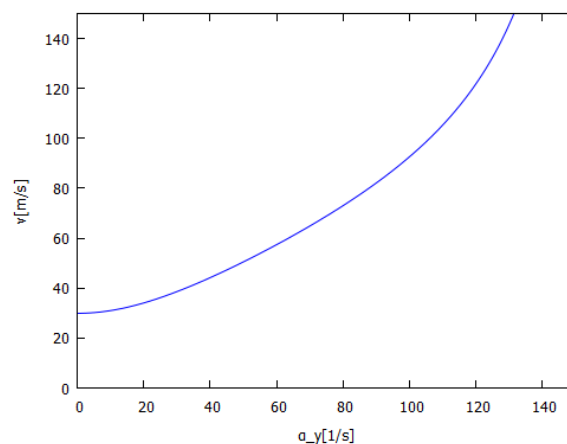
az ábrán, hogy a kúposság csökkentésével lehet növelni a kritikus sebességet. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy a kúpszöget kell csökkenteni. Ugyanakkor a (10) összefüggés

alapján a kúposág csökkentése a laterális kitérések növekedésével jár, így ezt a szempontot mindenképpen mérlegelni kell.

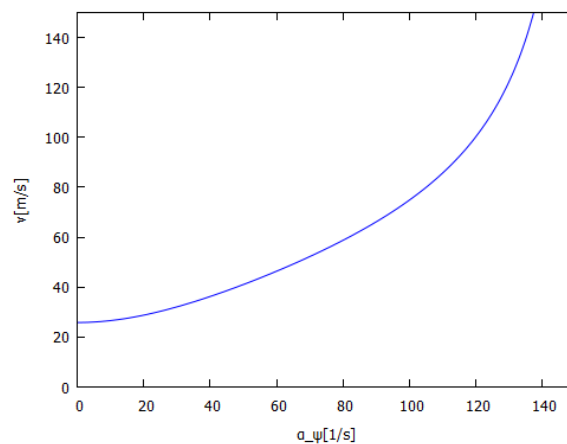
A kerék használata során kopik, és ezáltal növekszik a kúposága. Az ábra alapján látható, hogy ha például 0.3 a kúposág, akkor már 40 m/s sebességnél, azaz 144 km/h sebességnél és instabil lesz a jármű. Ezért kimondottan fontos a kerekek időszakos vizsgálata, és ha szükséges, kisebb kúposágra történő köszörülése.

4.4.2. A felfüggesztés merevségének hatása a kritikus sebességre

Ebben az alfejezetben a kúposágot adottnak vesszük, $h^* = 0.3$. Azt az esetet, amikor α_ψ adott értéke (46.8 1/s) mellett α_y függvényében vizsgáljuk a kritikus sebesség változását, a 14. ábrán láthatjuk, míg ha α_y -t vesszük adottnak (31.62 1/s) és α_ψ hatását vizsgáljuk, a kritikus sebesség változása a 15. ábrán szerepel. Arra az eredményre jutottunk, hogy mindkét esetben a nagyobb sajátkörfrekvenciák növelik a kritikus sebességet. Nagyobb körfrekvenciát



14. ábra. α_y hatása a kritikus sebességre



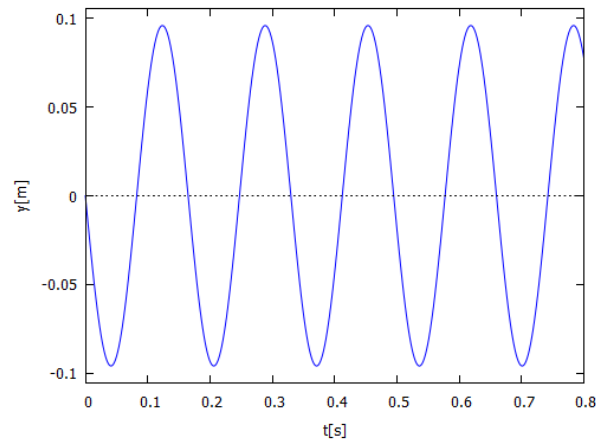
15. ábra. α_ψ hatása a kritikus sebességre

(91) és (92) alapján úgy értheünk el, hogy a rugómerevségeket növeljük, hiszen a tömeg, illetve a geometriai jellemzők általában adottak, nem módosíthatóak.

Vegyük észre, ha α_ψ sajátkörfrekvenciájú rugalmas elemet elhagyjuk a rendszerből, akkor 30 m/s, ha α_ψ sajátkörfrekvenciájú rugalmas elemet hagyjuk el, akkor körülbelül 26 m/s lesz a kritikus sebesség. Mindkét esetben az értékek az üzemi sebességtartományba tartoznak, azaz előfordulhat, hogy a jármű üzeme során átlépi ezeket az értékeket, és ezért stabilitásvesztés következik be. Ezért fontos mindkét rugalmas elem használata.

5. A stabilitási feltételek ellenőrzése szimulációval

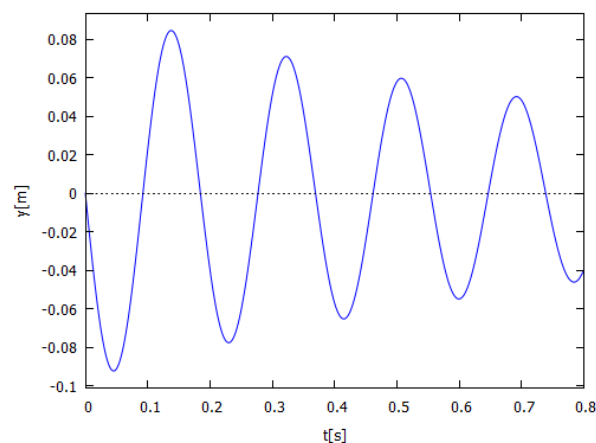
A feladatot megoldottuk a 4.4 alfejezetben szereplő paraméterekkel szimulációs úton is. Ehhez a negyedrendű Runge-Kutta módszert használtuk fel, 0.0004 s-os lépésközzel. A kritikus sebességre 39.44 m/s adódott. A (75) egyenletrendszerbe így a kritikus sebességet helyettesítve y kitérésre a 16. ábrán látható függvényt kaptuk megoldásul. Látható, hogy ez



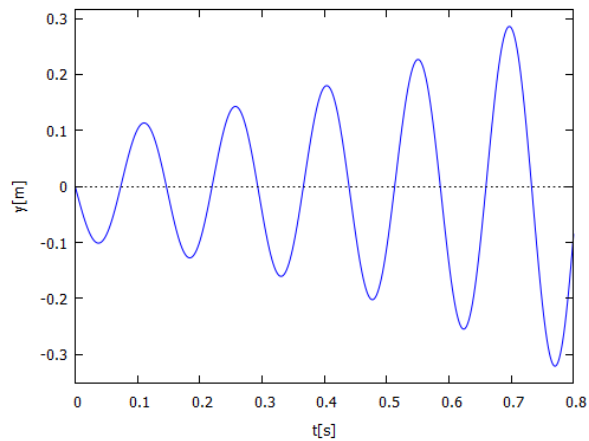
16. ábra. y kitérés az idő függvényében a kritikus sebességnél

egy állandó amplitúdójú rezgés.

Ellenőrzésképpen vizsgáljuk meg a kritikus sebességnél kisebb (35 m/s) és nagyobb (45 m/s) sebesség esetén y kitérését! A 35 m/s sebességre adódott függvény a 17. ábrán, a 45 m/s-es sebességnél jellemző függvény pedig a 18. ábrán látható. A kritikus sebességnél kisebb sebességgel haladó jármű esetében tehát a kitérések az idővel csökkennek, a rezgés csillapodik, így stabil marad a rendszer, idővel az egyensúlyi helyzetbe tér vissza. A kritikus



17. ábra. y kitérés az idő függvényében $v = 35$ m/s sebességnél



18. ábra. y kitérés az idő függvényében $v = 45$ m/s sebességnél

sebességnél nagyobb sebességű jármű esetében azonban a kitérések az idővel nőnek, a rezgés amplitúdója növekszik, így a rendszer instabil lesz, soha sem fog tartósan az egyensúlyi helyzetben maradni. Ez úgynevezett öngerjesztett rezgés, ami azt jelenti, hogy a külső erő nem periodikus, hanem a rendszer maga „alakítja” a külső gerjesztést (azaz a vontató erőt) rezgéssé.

Következtetések

A dolgozatban megvizsgáltuk a vasúti kerékpár rezgéseit kinematikai és dinamikai módszerekkel. Ebből adódott, hogy az eredetileg négy szabadságfokú rendszert elég pusztán két szabadságfokú rendszerként vizsgálni, ugyanis az egyenletes v sebességgel történő haladás kinematikai kényszere mellett a φ -t tartalmazó tagok leválaszthatók az egyenletrendszerrel. Emellett a dinamikai vizsgálatból adódott $\dot{\varphi}$ -t tartalmazó összefüggés is független a többi változótól, azaz szintén külön vizsgálható.

Másrészt megállapítottuk azt a kritikus sebességet, amelyet átlépve a rendszer instabillá válik. Megvizsgáltuk, hogy a kritikus sebesség növelhető a kúposság csökkentésével, valamint a rugómerevségek növelésével. A feladatot szimulációval is ellenőriztük.

A dolgozatban feltettük, hogy a kerék mozgása nem hat vissza a járműre. Egy későbbi vizsgálat tárgya lehet ennek a feltételnek a feloldása. Releváns vizsgálat lenne továbbá a giroszkópikus hatás, a kúszás által létrehozott nyomaték hatása, a stabilitásvizsgálat nem-lineáris esetben, valamint a teljes járműmodell vizsgálata, amely két kerékpárból és egy merev kocsiból áll.

Irodalomjegyzék

- [1] Antali M.: *Dynamics of Dual-Point Rolling Bodies*, PhD értekezés, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Budapest, 2018
- [2] Wickens, A. H.: *Fundamentals of Rail Vehicle Dynamics*, Swets & Zeitlinger Publishers, Lisse, 2007, 300p.
- [3] Szabó Zs., Lóránt G.: *Parametric Excitation of a Single Railway Wheelset*, Vehicle System Dynamics, vol. 33, is. 1, 2000, pp. 49–55
- [4] Antali M., Stépán G., Hogan, S. J.: *Kinematic oscillations of railway wheelsets*, Multi-body System Dynamics, vol. 34, 2015, pp. 259–274
- [5] Iwnicki, S.: *Simulation of wheel-rail contact forces*, Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures, vol. 26, is. 10, 2003, pp. 887–900
- [6] Heumann, H.: *Lauf der Drehgestell-Radsätze in der Geraden*, Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, vol. 92, 1937, pp. 149–173
- [7] Klingel, J.: *Über den Lauf von Eisenbahnwagen auf gerader Bahn*, Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, vol. 38, 1883, pp. 113–123
- [8] Wickens, A. H.: *A History of Railway Vehicle Dynamics*, in: Iwnicki, S., Spiriyagin, M., Cole, C., McSweeney, T. (eds): *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*, CRC Press, Boca Raton, 2019, pp. 5–38
- [9] Reynolds, O.: *On rolling friction*, Philosophical Transactions, vol. 166, 1876, 155
- [10] Wu, X., Chi, M.: *Parameters Study of Hopf Bifurcation in Railway Vehicle System*, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, vol. 10, is. 3, 2015, 031012
- [11] Carter, F. W.: *On the action of a locomotive driving wheel*, Proceedings of The Royal Society, vol. 112, 1926, pp. 151–157
- [12] Guo, J., Shi, H., Luo, R., Zeng, J.: *Bifurcation analysis of a railway wheelset with nonlinear wheel–rail contact*, Nonlinear Dynamics, vol. 104, 2021, pp. 989–1005
- [13] Lóránt G., Stépán G.: *The Role of Non-Linearities in the Dynamics of a Single Railway Wheelset*, Machine Vibration, vol. 5, 1996, pp. 18–26