

DEBRECENI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS TECHNOLÓGIAI KAR
MATEMATIKAI INTÉZET, ANALÍZIS TANSZÉK

Hutchinson tétele szemimetrikus terekben

Témavezető:

DR. PÁLES ZSOLT
Egyetemi tanár

Készítette:

KOCSIS MÁTYÁS
Alkalmazott matematikus
MSc

DEBRECEN
2022

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönöm a témavezetőmnek, Dr. Páles Zsoltnak az odaadó támogatását, a hasznos észrevételeit és a fáradhatatlan munkáját, mellyel a Tudományos Diákköri dolgozatom elkészítését segítette.

BEVEZETÉS

Legyen X egy nemüres halmaz, továbbá $T_1, \dots, T_n : X \rightarrow X$ leképezések. Egy nemüres $H \subseteq X$ halmazt $(T_1, \dots, T_n)$ -fraktálnak nevezünk, ha megoldása az úgynevezett *invariancia egyenletnek*:

$$H = \bigcup_{k=1}^n T_k(H).$$

Világos, hogy ha az egyenlet jobb oldalát egy halmazértékű leképezésnek tekintjük, akkor H ezen leképezés fixpontja. Az egyik legfőbb kérdés, mely ezt a témakört övezi, hogy az alaphalmaz, és a $T_1, \dots, T_n$ függvényrendszer mely tulajdonságai biztosítják a fraktálok létezését és egyértelműségét.

A fixponttételek elmélete gazdag eszköztárat biztosít ezen kérdés tárgyalásához. A teljesség igénye nélkül említünk néhány fontos és alapvető művet: Berinde [2], Granas és Dugundji [16], Rus [27], Rus, Petruşel és Petruşel [28], valamint Zeidler [31]. Hutchinson ([18]) dolgozatában a Banach-féle fixponttétel (ld. Banach [1] és Cacciopoli [12]) segítségével igazolta a fraktálok létezését és egyértelműségét teljes metrikus terekben.

A dolgozat célkitűzése Hutchinson eredményének általánosítása szemimetrikus terekre. A megközelítésünkben a hagyományos kontrakciók helyett Matkowski-féle nemlineáris kontrakciók szerepelnek, melyeknek a fixpont tulajdonságait Bessenyei és Páles [5] munkájukban, valamint Jachymski, Matkowski and Świątkowski [19] cikkükben vizsgálták, kiterjesztve ezzel Browder ([9, 10]) és Matkowski ([22]) felfedezéseit. Ezen eredmények további tárgyalása Miculescu és Mihail ([24]), továbbá Mitrović és Hussain ([25]) műveiben olvashatók. A jelen dolgozat fő állításának bizonyítása az [5] közlemény fő eredményein alapszik.

A jelen dolgozat eredményei egy a témavezetőmmel közös cikkben ([21]) kerültek publikálásra, amelyet a Journal of Fixed Point Theory and Applications 2022. szeptemberében közlésre elfogadott.

1. ALAPVETŐ FOGALMAK ÉS EREDMÉNYEK A SZEMIMETRIKUS TEREK ELMÉLETÉBEN

A továbbiakban jelölje $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ és $\overline{\mathbb{R}}_+$ a valós, a nemnegatív valós, valamint a nemnegatív bővített valós számok halmazát.

1.1. Definíció. Legyen X egy nemüres halmaz és $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre teljesülnek az alábbi feltételek:

- (i) $d(x, y) \geq 0$ minden $x, y \in X$ esetén, továbbá $d(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ bármely $x, y \in X$ -re.

Ekkor az (X, d) párt *szemimetrikus térnek*, a d függvényt pedig *szemimetrikának* nevezzük.

1.2. Definíció. Legyen (X, d) egy szemimetrikus tér. A $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ egy *háromszögfüggvény* a d szemimetrikára nézve, ha Φ szimmetrikus, mindkét változában monoton növekvő, $\Phi(0, 0) = 0$ és

$$d(x, y) \leq \Phi(d(x, z), d(z, y))$$

teljesül minden $x, y, z \in X$ esetén.

Minden metrikus tér egyben szemimetrikus tér is, mely a $\Phi(u, v) := u + v$ háromszögfüggvénnyel van felruházva.

Legyen $\Phi_d : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a következőképpen adott:

$$\Phi_d(u, v) := \sup\{d(x, y) \mid \exists p \in X : d(x, p) \leq u, d(p, y) \leq v\}.$$

Egyszerűen belátható, hogy a Φ_d leképezés egy háromszögfüggvény a d -re nézve. Ezen függvényt a d szemimetrikához tartozó *alap háromszögfüggvénynek* nevezzük. Az is igazolható, hogy Φ_d optimális abban az értelemben, hogy ha Φ egy háromszögfüggvény d -re nézve, akkor $\Phi_d \leq \Phi$ fennáll (ld. [5]).

A konvergens sorozatok és a Cauchy-sorozatok fogalmait szemimetrikus terekben a szokásos módon definiáljuk.

1.3. Definíció. Legyen (X, d) egy szemimetrikus tér. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat *konvergens*, és határértéke $x_0 \in X$, ha a $(d(x_n, x_0))$ sorozat a nullához tart. Az (x_n) sorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy ha $n, m > n_0$ fennáll, akkor $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ teljesül. Egy szemimetrikus teret *teljesnek* nevezünk, ha a tér minden Cauchy-sorozata konvergens.

Legyen (X, d) egy szemimetrikus tér, $p \in X$ és $r \in (0, \infty]$. A p pont körüli r sugarú gömböt $\mathcal{B}(p, r)$ -rel jelöljük:

$$\mathcal{B}(p, r) := \{x \in X \mid d(x, p) < r\}.$$

Egy $A \subseteq X$ halmaz átmérőjén az elemeinek a távolságainak a szuprémumát értjük, és $\text{diam}(A)$ -val jelöljük. Egy halmaz *korlátos*, ha az átmérője véges.

1.4. Definíció. Legyen (X, d) egy szemimetrikus tér és $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ egy háromszögfüggvény a d -re nézve. Azt mondjuk, hogy a Φ leképezés *reguláris*, ha folytonos az origóban. Az (X, d) szemimetrikus teret *regulárisnak* nevezzük, ha ellátható reguláris háromszögfüggvénnyel.

Reguláris szemimetrikus tér alap háromszögfüggvénye reguláris. A következő lemma jellemzi a reguláris szemimetrikus tereket, és összefoglalja az alapvető tulajdonságait (ld. [5]).

1.5. Lemma. Az (X, d) szemimetrikus tér akkor és csak akkor reguláris, ha

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{p \in X} \text{diam } \mathcal{B}(p, r) = 0.$$

Továbbá egy reguláris szemimetrikus térben a konvergens sorozatok teljesítik a Cauchy-tulajdonságot, és határértékük egyértelmű.

Ezen lemma ismeretében teljes, reguláris szemimetrikus terekben a konvergencia és a Cauchy-tulajdonság ekvivalens fogalmak. A reguláris szemimetrikus terek további jellemzéseit Chrzyszcz, Jachymski és Turoboś [13] munkájának 3.2. Tételében olvashatók. Ezen eredmény többek között kimondja, hogy egy (X, d) szemimetrikus tér pontosan akkor reguláris, ha egyenletesen metrizable, azaz létezik olyan ϱ metrika X -en, hogy az identikus leképezés egyenletesen folytonos (X, d) és (X, ϱ) között.

A szemimetrikus terek *topológiáját* a belső pontok segítségével definiáljuk: Legyen (X, d) egy szemimetrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $A \subseteq X$ részhalmaz *nyílt*, ha minden pontja belső pont, azaz ha bármely $p \in A$ pont esetén létezik $\varepsilon > 0$, hogy $\mathcal{B}(p, \varepsilon) \subseteq A$ teljesül. Egyszerűen belátható, hogy a nyílt halmazok topológiát alkotnak. Egy $A \subseteq X$ részhalmaz belső pontjainak halmazát A° -rel jelöljük.

1.6. Lemma. Legyen (X, d) egy szemimetrikus tér és $A \subseteq X$ egy zárt halmaz. Ekkor az A -beli elemekből álló konvergens sorozatok határértéke is A -beli. Továbbá ha (X, d) reguláris, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $r > 0$ úgy, hogy minden $x \in X$ -re $\mathcal{B}(x, r) \subseteq \mathcal{B}(x, \varepsilon)^\circ$ fennáll, következésképpen a topológia Hausdorff.

Bizonyítás. Legyen (x_n) egy A -beli sorozat, mely tart a $p \in A$ ponthoz. Tételezzük fel, hogy $p \notin A$, azaz $p \in X \setminus A$. Az $X \setminus A$ halmaz nyílt, ezért létezik $r > 0$, hogy

$\mathcal{B}(p, r) \subseteq X \setminus A$ teljesül, ennél fogva $\mathcal{B}(p, r) \cap A = \emptyset$. Másrésztől az (x_n) sorozat konvergenciája miatt létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex úgy, hogy ha $n > n_0$, akkor $d(x_n, p) < r$, azaz $x_n \in \mathcal{B}(p, r)$, amiből az következik, hogy $\mathcal{B}(p, r) \cap A \neq \emptyset$. Ez ellentmondás, így $p \in A$.

Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor a tér regularitása miatt létezik $r > 0$ úgy, hogy $\Phi_d(r, r) < \varepsilon$. Legyen $x \in X$, $y \in \mathcal{B}(x, r)$ és $z \in \mathcal{B}(y, r)$ tetszőlegesen. Ekkor

$$d(x, z) \leq \Phi_d(d(x, y), d(y, z)) \leq \Phi_d(r, r) < \varepsilon,$$

azaz $\mathcal{B}(y, r) \subseteq \mathcal{B}(x, \varepsilon)$. Ez azt mutatja, hogy y belső pontja a $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ halmaznak, így $\mathcal{B}(x, r) \subseteq \mathcal{B}(x, \varepsilon)^\circ$.

Legyenek $x, y \in X$ különböző pontok. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\Phi_d(\varepsilon, \varepsilon) < d(x, y)$, amiből következik, hogy $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ és $\mathcal{B}(y, \varepsilon)$ diszjunktak. Az előző állítás értelmében $\mathcal{B}(x, \varepsilon)^\circ$ és $\mathcal{B}(y, \varepsilon)^\circ$ az x -et és y -t tartalmazó diszjunkt nyílt halmazok, ami igazolja a Hausdorff-tulajdonságot. $\square$

1.7. Definíció. Legyenek (X, d) és (Y, ϱ) szemimetrikus terek. Azt mondjuk, hogy a $T : X \rightarrow Y$ függvény *Lipschitz-tulajdonságú*, ha létezik $L \geq 0$ úgy, hogy bármely $x, y \in X$ esetén

$$(1.1) \quad \varrho(T(x), T(y)) \leq Ld(x, y)$$

teljesül.

1.8. Lemma. Legyenek (X, d) és (Y, ϱ) szemimetrikus terek és $T : X \rightarrow Y$ egy Lipschitz-tulajdonságú leképezés. Ekkor T folytonos a szemimetrikus terek topológiájára nézve (azaz minden Y -beli nyílt halmaz T általi teljes inverz képe nyílt halmaz X -ben).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a T leképezés teljesíti az (1.1) egyenlőtlenséget minden $x, y \in X$ -re valamilyen $L \geq 0$ konstanssal. Legyen $U \subseteq Y$ egy nyílt halmaz, és legyen $p \in T^{-1}(U)$, azaz $T(p) \in U$. Az U halmaz nyíltsága miatt létezik $r > 0$ úgy, hogy $\mathcal{B}(T(p), r) \subseteq U$ fennáll. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{B}(p, r/L) \subseteq T^{-1}(U)$ teljesül. Legyen $x \in \mathcal{B}(p, r/L)$. Ekkor $d(x, p) < r/L$ fennáll. Továbbá a T leképezés Lipschitz-tulajdonsága miatt $\varrho(T(x), T(p)) \leq Ld(x, p) < r$, ennél fogva $T(x) \in \mathcal{B}(T(p), r) \subseteq U$, így $x \in T^{-1}(U)$. Ezzel beláttuk, hogy a $T^{-1}(U)$ minden pontja belső pont, azaz $T^{-1}(U)$ nyílt halmaz, így a T leképezés folytonos. $\square$

1.9. Definíció. Az (X, d) szemimetrikus tér egy H részhalmazát *teljesen korláatosnak* nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $P := \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq H$ úgy, hogy $H \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}(p_i, \varepsilon)$. Ekkor a P egy ε -háló a H halmaz részére.

Az (X, d) szemimetrikus tér nemüres, zárt és teljesen korlátos részhalmazainak halmazát $\mathcal{T}(X)$ -szel jelöljük. Szemimetrikus terekben a teljes korlátosságból általában nem következik a korlátosság. Azonban elmondható, hogy ha a tér ellátható véges értékű háromszögfüggvénnyel, akkor minden teljesen korlátos halmaz korlátos. A következő tétel szerint egy ennél gyengébb feltétel teljesülése esetén is igaz az előbbi implikáció.

1.10. Tétel. *Legyen (X, d) egy szemimetrikus tér. Tegyük fel, hogy létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy a $\Phi_d : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ alap háromszögfüggvény véges értékű a*

$$\Gamma_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \min(x, y) \leq \varepsilon\}$$

halmazon. Ekkor az X halmaz teljesen korlátos részhalmazai korlátosak.

Bizonyítás. Legyen $H \subseteq X$ egy teljesen korlátos halmaz. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq H$ úgy, hogy $H \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}(p_i, \varepsilon)$. Legyenek $x, y \in H$ tetszőlegesen. Ekkor léteznek $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indexek úgy, hogy $x \in \mathcal{B}(p_i, \varepsilon)$ és $y \in \mathcal{B}(p_j, \varepsilon)$ fennáll. Legyen

$$\alpha := \max_{1 \leq i < j \leq n} d(p_i, p_j).$$

Ekkor

$$d(x, y) \leq \Phi_d(d(x, p_i), d(p_i, y)) \leq \Phi_d(\varepsilon, \Phi_d(d(p_i, p_j), d(p_j, y))) \leq \Phi_d(\varepsilon, \Phi_d(\alpha, \varepsilon)).$$

Ezen számítások mutatják, hogy $\text{diam}(H) \leq \Phi_d(\varepsilon, \Phi_d(\alpha, \varepsilon))$. Mivel $(\alpha, \varepsilon) \in \Gamma_\varepsilon$, és így $(\varepsilon, \Phi_d(\alpha, \varepsilon)) \in \Gamma_\varepsilon$, ezért $d(x, y) < \infty$, következésképpen a H halmaz korlátos. $\square$

1.11. Definíció. Az (X, d) szemimetrikus tér H részhalmazát *kompaktnak* nevezzük, ha minden nyílt halmazokkal való lefedéséből kiválasztható véges sok halmaz, mely szintén lefedí H -t.

Az (X, d) szemimetrikus tér nemüres, kompakt részhalmazainak a halmazát $\mathcal{K}(X)$ -szel jelöljük.

Hausdorff tétele szerint metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha teljes és teljesen korlátos. Az alábbi tétel ezen állítás kiterjesztése szemimetrikus terekre.

1.12. Tétel. *Legyen (X, d) egy teljes, reguláris szemimetrikus tér. Az X részhalmaza akkor és csak akkor kompakt, ha zárt és teljesen korlátos.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $H \subseteq X$ halmaz kompakt. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor a $\{\mathcal{B}(p, \varepsilon)^\circ \mid p \in H\}$ egy nyílt lefedése a H halmaznak, így H kompaktsága

miatt

$$H \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}(p_i, \varepsilon)^\circ \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}(p_i, \varepsilon),$$

valamely $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq H$ halmaz esetén. Ez bizonyítja H teljes korlátosságát. A zártág igazolásához legyen $p \in X \setminus H$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy p belső pontja az $X \setminus H$ halmaznak. Legyen $r > 0$, és

$$U_r := \{x \in X : d(x, p) > \Phi(r, r)\}, \quad V_r := \{x \in X : d(x, p) > r\}.$$

Ekkor $x \in U_r$ és $y \in \mathcal{B}(x, r)$ esetén

$$\Phi(r, r) < d(x, p) \leq \Phi(d(x, y), d(y, p)) \leq \Phi(r, d(y, p)),$$

amiből az következik, hogy $r < d(y, p)$. Ennélfogva $y \in V_r$, azaz $\mathcal{B}(x, r) \subseteq V_r$. Tehát az x belső pontja a V_r halmaznak, ezért $U_r \subseteq V_r^\circ$.

Vegyük észre, hogy az $\{U_r : r > 0\}$ lefedi a H halmazt: ha $x \in H$, akkor $d(x, p) > 0 = \Phi(0, 0)$ teljesül. A háromszögfüggvény regularitása miatt létezik $r > 0$, hogy $d(x, p) > \Phi(r, r)$, így $x \in U_r$ valóban fennáll. Mivel $U_r \subseteq V_r^\circ$, így $\{V_r^\circ : r > 0\}$ egy nyílt lefedése H -nak, ezért a kompaktság miatt léteznek $r_1, \dots, r_n > 0$ számok, hogy $\{V_{r_i}^\circ : i \in \{1, \dots, n\}\}$ szintén lefedi a H halmazt. Mindezekből következik, hogy a $\{V_{r_i} : i \in \{1, \dots, n\}\}$ egy lefedése a H halmaznak. Egyszerűen látható, hogy $\bigcup_{i=1}^n V_{r_i} = V_{r_0}$, ahol $r_0 := \min(r_1, \dots, r_n)$. Végül komplementer képzéssel kapjuk, hogy

$$\mathcal{B}(p, r_0) \subseteq X \setminus V_{r_0} \subseteq X \setminus H,$$

azaz p valóban belső pontja az $X \setminus H$ halmaznak, következésképpen H zárt.

A fordított irányú állítás igazolásához legyen $H \subseteq X$ egy zárt és teljesen korlátos halmaz. Tegyük fel, hogy H nem kompakt, tehát létezik $\{C_i\}_{i \in I}$ nyílt lefedése, melyből nem választható ki véges elemszámú fedőrendszer. Legyen (ε_n) egy pozitív számokból álló monoton csökkenő nullsorozat, mely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

$$\varepsilon_1 := 1, \quad \Phi(\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+1}) < \varepsilon_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

A H halmaz teljes korlátossága miatt létezik olyan P_1 halmaz, mely egy ε_1 -hálója a $H_0 := H$ -nak. Ekkor van olyan $p_1 \in P_1$, hogy a $H_1 := \mathcal{B}(p_1, \varepsilon_1) \cap H_0$ nem fedhető le a $\{C_i\}_{i \in I}$ egyetlen véges részrendszerével sem. A H_1 teljesen korlátos (ugyanis részhalmaza a teljesen korlátos H_0 -nak), így létezik olyan P_2 halmaz, mely egy ε_2 -hálója H_1 -nek. Ekkor van olyan $p_2 \in P_2$, hogy a $H_2 := \mathcal{B}(p_2, \varepsilon_2) \cap H_1$ nem fedhető le a $\{C_i\}_{i \in I}$ egyetlen véges részrendszerével sem. Tegyük fel, hogy megkonstruáltuk a $H_{n-1} := \mathcal{B}(p_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \cap H_{n-2}$ halmazt, melyre a $\{C_i\}_{i \in I}$ -nek nem létezik véges részrendszere, mely lefedné H_{n-1} -et. A H_{n-1} teljesen korlátos,

így létezik P_n halmaz, mely egy ε_n hálójá H_{n-1} -nek. A P_n halmaznak van $p_n \in P_n$ eleme, melyre a $H_n := \mathcal{B}(p_n, \varepsilon_n) \cap H_{n-1}$ nem fedhető le a $\{C_i\}_{i \in I}$ egyetlen véges részrendszerével sem.

Belátjuk, hogy az így kapott (p_n) sorozat Cauchy-sorozat. A H_n nem lehet üres, így létezik $q_n \in H_n$. Ekkor $q_n \in \mathcal{B}(p_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \cap \mathcal{B}(p_n, \varepsilon_n)$, így $n > 2$ esetén

$$(1.2) \quad \begin{aligned} d(p_{n-1}, p_n) &\leq \Phi(d(p_{n-1}, q_n), d(q_n, p_n)) \\ &\leq \Phi(\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n) \leq \Phi(\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \leq \varepsilon_{n-2}. \end{aligned}$$

Megmutatjuk k -szerint teljes indukcióval, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ és $m > 2$ esetén

$$(1.3) \quad d(p_m, p_{m+k}) \leq \varepsilon_{m-2}.$$

Ha $k = 1$, akkor az (1.2) összefüggésből $n = m + 1$ választással a bizonyítandó egyenlőtlenség adódik. Tegyük fel, hogy az (1.3) valamilyen $k \geq 1$ és bármely $m > 2$ esetén fennáll. Ekkor, alkalmazva az (1.2) egyenlőtlenséget és az indukciós feltevést, kapjuk, hogy

$$d(p_m, p_{m+(k+1)}) \leq \Phi(d(p_m, p_{m+1}), d(p_{m+1}, p_{(m+1)+k})) \leq \Phi(\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_{m-1}) \leq \varepsilon_{m-2},$$

így az állítás $k + 1$ esetén is érvényes. Az (ε_n) sorozat a nullához tart, így az (1.3) összefüggésből adódik, hogy a (p_n) sorozat valóban Cauchy-sorozat. A szemimetrikus tér teljessége miatt a (p_n) sorozatnak létezik $p \in X$ határértéke. Ekkor

$$d(q_n, p) \leq \Phi(d(q_n, p_n), d(p_n, p)) \leq \Phi(\varepsilon_n, d(p_n, p)),$$

azaz, a Φ függvény regularitása miatt, a $(d(q_n, p))$ nullsorozat. Mivel $q_n \in H_n \subseteq H$, így H zártsága miatt $p \in H$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy a $\{C_i\}_{i \in I}$ halmazrendszernek van olyan eleme, mely tartalmazza a p pontot, jelöljük ezt C_α -val. A C_α nyíltsága miatt létezik $r > 0$ úgy, hogy $\mathcal{B}(p, r) \subseteq C_\alpha$ fennáll. Legyen $\varrho > 0$ olyan, hogy $\Phi(\varrho, \varrho) < r$ teljesül, továbbá válasszuk meg $n \in \mathbb{N}$ -et úgy, hogy $\varepsilon_n < \varrho$ és $d(p_n, p) \leq \varrho$ teljesüljön. Legyen $x \in H_n$ tetszőleges. Ekkor $x \in \mathcal{B}(p_n, \varepsilon_n)$, és

$$d(x, p) \leq \Phi(d(x, p_n), d(p_n, p)) \leq \Phi(\varepsilon_n, d(p_n, p)) \leq \Phi(\varrho, \varrho) < r,$$

ezért $H_n \subseteq C_\alpha$. Ez azonban ellentmond annak, hogy a H_n halmaz nem fedhető le a $\{C_i\}_{i \in I}$ egyetlen véges részrendszerével sem. A kapott ellentmondás mutatja, hogy a H halmaz lefedhető a $\{C_i\}_{i \in I}$ valamely véges részhalmazával, tehát H kompakt. $\square$

A 1.12. Tétel bizonyítására egy másik lehetséges érvelés a következő. Ismert, hogy az (X, d) szemimetrikus tér pontosan akkor reguláris, ha egyenletesen metrizálható (ld. [13]). Ez azt jelenti, hogy létezik olyan ϱ metrika X -en, mely egyenletesen ekvivalens d -vel, azaz minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy bármely $x, y \in X$ esetén, ha $d(x, y) < \delta$, akkor $\varrho(x, y) < \varepsilon$, és fordítva, minden $\varepsilon > 0$ -hoz

létezik $\delta > 0$ úgy, hogy bármely $x, y \in X$ esetén, ha $\varrho(x, y) < \delta$, akkor $d(x, y) < \varepsilon$ teljesül. Ekkor (X, d) teljességéből következik (X, ϱ) teljessége. Legyen H egy zárt és teljesen korlátos halmaz (X, d) -ben. Ekkor H zárt (X, ϱ) -ban is (ugyanis d és ϱ ekvivalensek). Megmutatjuk, hogy H teljesen korlátos (X, ϱ) -ban. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik $\delta > 0$ úgy, hogy minden $x, y \in X$ esetén, ha $d(x, y) < \delta$, akkor $\varrho(x, y) < \varepsilon$. A teljes korlátosság miatt létezik $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq H$, mely egy δ -háló a H -ra nézve (X, d) -ben. Ekkor minden $y \in H$ esetén van olyan $i \in \{1, \dots, n\}$, hogy $d(x_i, y) < \delta$. A d és ϱ ekvivalenciája miatt $\varrho(x_i, y) < \varepsilon$, ezért az $\{x_1, \dots, x_n\}$ egy ε -háló a H halmazra nézve (X, ϱ) -ban. A klasszikus Hausdorff tétel szerint H kompakt (X, ϱ) -ban, és így kompakt (X, d) -ben is szintén a d és ϱ ekvivalenciája miatt. A fordított irányú állítás hasonlóan látható be, felhasználva azon tényt, hogy az (X, ϱ) -ból (X, d) -be képző identikus leképezés egyenletesen folytonos.

2. A NEMÜRES, KORLÁTOS, ZÁRT HALMAZOK ÉS A NEMÜRES, KOMPAKT HALMAZOK SZEMIMETRIKUS TEREI

2.1. Definíció. Legyen (X, d) egy szemimetrikus tér. Az $A, B \subseteq X$ nemüres halmazok *Hausdorff–Pompeiu-távolságán* az alábbi mennyiséget értjük.

$$D(A, B) := \inf \left\{ \varepsilon \in (0, \infty] \mid A \subseteq \bigcup_{b \in B} \mathcal{B}(b, \varepsilon), \quad B \subseteq \bigcup_{a \in A} \mathcal{B}(a, \varepsilon) \right\}.$$

Megjegyezzük, hogy két halmaz Hausdorff–Pompeiu-távolsága lehet végtelen. A következő állítás a fenti definíció azonnali következménye.

2.2. Lemma. Legyen (X, d) egy szemimetrikus tér, és $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n \subseteq X$ nemüres halmazok. Ekkor

$$D(A_1 \cup \dots \cup A_n, B_1 \cup \dots \cup B_n) \leq \max(D(A_1, B_1), \dots, D(A_n, B_n)).$$

Bizonyítás. Ha valamely $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $D(A_i, B_i)$ végtelen, akkor az állítás nyilvánvalóan teljesül, ezért feltehetjük, hogy $\max(D(A_1, B_1), \dots, D(A_n, B_n))$ véges. Legyen $\varepsilon > \max(D(A_1, B_1), \dots, D(A_n, B_n))$ tetszőleges. Ekkor minden $j \in \{1, \dots, n\}$ -re

$$A_j \subseteq \bigcup_{x \in B_j} \mathcal{B}(x, \varepsilon) \quad \text{és} \quad B_j \subseteq \bigcup_{y \in A_j} \mathcal{B}(y, \varepsilon)$$

ezért

$$A_1 \cup \dots \cup A_n \subseteq \bigcup_{x \in B_1 \cup \dots \cup B_n} \mathcal{B}(x, \varepsilon) \quad \text{és} \quad B_1 \cup \dots \cup B_n \subseteq \bigcup_{y \in A_1 \cup \dots \cup A_n} \mathcal{B}(y, \varepsilon).$$

Ezen tartalmazásokból következik, hogy $D(A_1 \cup \dots \cup A_n, B_1 \cup \dots \cup B_n) \leq \varepsilon$. Képezve az

$$\varepsilon \longrightarrow \max(D(A_1, B_1), \dots, D(A_n, B_n))$$

határátmenetet éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk. □

Legyen (H_k) egy X -beli halmazokból álló sorozat. Azt mondjuk, hogy (H_k) konvergál egy $H_0 \subseteq X$ halmazhoz, ha $(D(H_k, H_0))$ a nullához tart, amennyiben $k \rightarrow \infty$.

2.3. Lemma. Legyen (X, d) egy szemimetrikus tér, és legyenek $(H_{k,1}), \dots, (H_{k,n})$ nemüres halmazokból álló sorozatok, melyek rendre a $H_{0,1}, \dots, H_{0,n}$ halmazokhoz konvergálnak. Legyen $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esetén

$$H_k := H_{k,1} \cup \dots \cup H_{k,n}.$$

Ekkor a (H_k) sorozat konvergál a H_0 halmazhoz.

Bizonyítás. Felhasználva az előző lemmát kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D(H_k, H_0) &= D(H_{k,1}, \dots, H_{k,n}, H_{0,1}, \dots, H_{0,n}) \\ &\leq \max(D(H_{k,1}, H_{0,1}), \dots, D(H_{k,n}, H_{0,n})). \end{aligned}$$

Ezen egyenlőtlenség jobb oldala a feltevéseink miatt a nullához tart, ha $k \rightarrow \infty$, így a $(D(H_k, H_0))$ sorozat nullsorozat. $\square$

A továbbiakban jelölje $\mathcal{F}(X)$ az (X, d) szemimetrikus tér nemüres, korlátos és zárt részhalmazainak a családját. Az $(\mathcal{F}(X), D)$ párt *fraktáltérnek*, vagy a *fraktálok terének* nevezzük.

2.4. Tétel. Legyen (X, d) egy szemimetrikus tér és $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy felülről félig folytonos háromszögfüggvény d -re nézve. Ekkor $(\mathcal{F}(X), D)$ szintén szemimetrikus tér, továbbá Φ háromszögfüggvény D -re nézve.

Bizonyítás. A Φ függvény felülről félig folytonosságából következik, hogy Φ folytonos az origóban, így az (X, d) szemimetrikus tér reguláris.

Először belátjuk, hogy D véges értékű az $\mathcal{F}(X)$ halmazon. Legyenek $A, B \in \mathcal{F}(X)$ tetszőlegesek. A korlátosságuk miatt az $\alpha := \text{diam}(A)$ és $\beta := \text{diam}(B)$ számok végesek. Legyenek $a_0 \in A$ és $b_0 \in B$. Ekkor bármely $a \in A$ és $b \in B$ esetén

$$d(a, b) \leq \Phi(d(a, a_0), d(a_0, b)) \leq \Phi(\alpha, \Phi(d(a_0, b_0), d(b_0, b))) \leq \Phi(\alpha, \Phi(d(a_0, b_0), \beta)),$$

így $\varepsilon > \Phi(\alpha, \Phi(d(a_0, b_0), \beta))$ választással

$$A \subseteq \bigcup_{b' \in B} \mathcal{B}(b', \varepsilon) \quad \text{és} \quad B \subseteq \bigcup_{a' \in A} \mathcal{B}(a', \varepsilon)$$

teljesül. A $D(A, B)$ éppen az ilyen számok infimuma, ezért $D(A, B) \leq \varepsilon < \infty$.

Ha $A = B$, akkor $D(A, B) = 0$ nyilvánvalóan teljesül. Megfordítva, tegyük fel, hogy $A, B \in \mathcal{F}(X)$ és $D(A, B) = 0$. Legyen $a \in A$ rögzített. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $b_n \in B$, melyre $d(a, b_n) < 1/n$. Ez azt jelenti, hogy a (b_n) sorozat határértéke $a \in A$. A B halmaz zártsága miatt $a \in B$ teljesül, és így $A \subseteq B$. A fordított irányú tartalmazás hasonló gondolatmenettel igazolható. Mindezekből következik, hogy $A = B$.

A D függvény szimetriája a definíció azonnali következménye.

Végezetül legyenek $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$ tetszőleges halmazok. Belátjuk, hogy ekkor

$$(2.1) \quad D(A, B) \leq \Phi(D(A, C), D(C, B))$$

fennáll. Ha $D(A, B) = 0$, akkor nincs mit bizonyítani. Ellenkező esetben legyen $\varepsilon < D(A, B)$. Ekkor $A \not\subseteq \bigcup_{b \in B} \mathcal{B}(b, \varepsilon)$, vagy $B \not\subseteq \bigcup_{a \in A} \mathcal{B}(a, \varepsilon)$ teljesül. Az első esetben létezik $a \in A$, melyre minden $b \in B$ esetén $d(a, b) \geq \varepsilon$. Ekkor bármely $c \in C$ -re

$$\varepsilon \leq d(a, b) \leq \Phi(d(a, c), d(c, b)).$$

Vegyük észre, hogy

$$(2.2) \quad \inf_{c \in C} d(a, c) \leq D(A, C).$$

Valóban, legyen $r > D(A, C)$. Ekkor a D definíciója miatt $a \in \mathcal{B}(c, r)$ valamely $c \in C$ esetén, és így

$$\inf_{c \in C} d(a, c) < r.$$

Véve az $r \rightarrow D(A, C)$ határátmenetet éppen a (2.2) egyenlőtlenséget kapjuk. Következésképpen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $c_n \in C$, melyre

$$d(a, c_n) \leq D(A, C) + \frac{1}{n}$$

teljesül. Hasonlóan

$$\inf_{b \in B} d(c_n, b) \leq D(C, B),$$

így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $b_n \in B$, melyre

$$d(c_n, b_n) \leq D(C, B) + \frac{1}{n}.$$

Innen kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\varepsilon \leq d(a, b_n) \leq \Phi(d(a, c_n), d(c_n, b_n)) \leq \Phi\left(D(A, C) + \frac{1}{n}, D(C, B) + \frac{1}{n}\right).$$

Kihasználva, hogy Φ felülről félig folytonos, $n \rightarrow \infty$ határátmenettel adódik, hogy

$$\varepsilon \leq \Phi(D(A, C), D(C, B)).$$

Mivel $\varepsilon < D(A, B)$ tetszőleges volt, így a (2.1) összefüggés valóban fennáll. Ez bizonyítja, hogy Φ háromszögfüggvény a D -re nézve. $\square$

A fraktáltér egyik fontos tulajdonsága, hogy átörökli az alaptér teljességét. Ezen eredményt két, a Blaschke-tétellel analóg állításban fogalmazzuk meg.

2.5. Tétel. *Legyen (X, d) egy teljes szemimetrikus tér és $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy felülről félig folytonos háromszögfüggvény d -re nézve. Ekkor $(\mathcal{F}(X), D)$ szintén teljes.*

Bizonyítás. Legyen (A_n) egy $(\mathcal{F}(X), D)$ -beli Cauchy-sorozat. Belátjuk, hogy az (A_n) sorozat tart az A halmazhoz, ahol

$$A = \{x \in X \mid \exists (x_k) : x_k \rightarrow x, x_k \in A_k (k \in \mathbb{N})\}.$$

Legyen $\varepsilon > 0$, továbbá (ε_n) egy pozitív számokból álló szigorúan monoton csökkenő nullsorozat az alábbi módon megadva:

$$\varepsilon_1 := \varepsilon, \quad \Phi(\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+1}) < \varepsilon_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

A Cauchy-tulajdonság miatt van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n, m > n_0$ esetén $D(A_n, A_m) < \varepsilon_3$. Megmutatjuk, hogy minden $n > n_0$ -ra teljesül a következő két tartalmazás.

$$(i) \quad A \subset \bigcup_{y \in A_n} \mathcal{B}(y, \varepsilon); \quad (ii) \quad A_n \subset \bigcup_{x \in A} \mathcal{B}(x, \varepsilon)$$

Legyen először $x \in A$ és $n > n_0$. Ekkor létezik olyan (x_k) sorozat, hogy $x_k \in A_k$, és $x_k \rightarrow x$. Legyen $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $k > n_0$ és $d(x_k, x) < \varepsilon_3$ egyszerre fennálljon. Ebben az esetben $D(A_k, A_n) < \varepsilon_3$ miatt létezik $y \in A_n$, melyre $d(x_k, y) < \varepsilon_3$. Így azt kapjuk, hogy

$$d(x, y) \leq \Phi(d(x, x_k), d(x_k, y)) \leq \Phi(\varepsilon_3, \varepsilon_3) < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 = \varepsilon,$$

azaz $x \in \mathcal{B}(y, \varepsilon)$, ami bizonyítja (i)-et.

A másik tartalmazás bizonyításához legyen $n > n_0$ és $y \in A_n$ tetszőleges. Az (A_k) sorozat Cauchy-tulajdonsága miatt van olyan szigorúan monoton növekvő (ℓ_j) indexsorozat, hogy $\ell_1 = n$ és $k > \ell_j$ esetén

$$(2.3) \quad D(A_{\ell_j}, A_k) < \varepsilon_{j+2}.$$

Konstruáljuk meg az (x_k) sorozatot a következőképpen: Ha $k < n$, akkor legyen $x_k \in A_k$ tetszőleges. Ha $k = n$, akkor legyen $x_k = y$. Végül, ha $k > \ell_1 = n$, akkor van $j \in \mathbb{N}$, melyre $k \in \{\ell_j + 1, \dots, \ell_{j+1}\}$. Legyen ebben az esetben $x_k \in A_k$ olyan, hogy $d(x_{\ell_j}, x_k) < \varepsilon_{j+2}$. Ilyen $x_k \in A_k$ elem a (2.3) összefüggés miatt biztosan létezik. Megmutatjuk, hogy az így kapott (x_k) sorozat Cauchy-sorozat.

Első lépésként belátjuk, hogy $1 \leq i \leq j$ esetén

$$d(x_{\ell_i}, x_{\ell_j}) < \varepsilon_{i+1}.$$

Ehhez k -szerinti teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy az előbbi egyenlőtlenség minden $i \in \mathbb{N}$ és $j \in \{i, \dots, i+k\}$ számokra teljesül. Ha $k = 0$, akkor $i = j$, így az állítás nyilvánvalóan teljesül. Tegyük fel, hogy az állítás valamely $k \geq 0$ számra igaz, és legyen $j \in \{i, \dots, i+k+1\}$. Ha $j < i+k+1$, azaz $j \in \{i, \dots, i+k\}$, akkor az indukciós feltevés miatt az állítás teljesül. Legyen $j = i+k+1$. Az (x_k)

sorozat definíciójából következik, hogy $d(x_{\ell_i}, x_{\ell_{i+1}}) < \varepsilon_{i+2}$, továbbá az indukciós feltevés miatt $d(x_{\ell_{i+1}}, x_{\ell_{i+k+1}}) < \varepsilon_{i+2}$, és így

$$d(x_{\ell_i}, x_{\ell_j}) \leq \Phi(d(x_{\ell_i}, x_{\ell_{i+1}}), d(x_{\ell_{i+1}}, x_{\ell_{i+k+1}})) \leq \Phi(\varepsilon_{i+2}, \varepsilon_{i+2}) < \varepsilon_{i+1},$$

tehát éppen a kívánt egyenlőtlenséghez jutunk.

Legyenek $l, m \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $l, m > \ell_2$. Ekkor vannak olyan $i, j \geq 2$ számok, melyekre

$$l \in \{\ell_i + 1, \dots, \ell_{i+1}\}, \quad m \in \{\ell_j + 1, \dots, \ell_{j+1}\}.$$

Feltehetjük, hogy $l \leq m$. Ekkor $i \leq j$ is fennáll, továbbá

$$\begin{aligned} d(x_l, x_m) &\leq \Phi(d(x_l, x_{\ell_i}), d(x_{\ell_i}, x_m)) \leq \Phi(\varepsilon_{i+2}, \Phi(d(x_{\ell_i}, x_{\ell_j}), d(x_{\ell_j}, x_m))) \\ &\leq \Phi(\varepsilon_{i+2}, \Phi(\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{j+2})) \leq \Phi(\varepsilon_{i+2}, \Phi(\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+1})) \leq \Phi(\varepsilon_{i+2}, \varepsilon_i) \\ &\leq \Phi(\varepsilon_i, \varepsilon_i) < \varepsilon_{i-1}. \end{aligned}$$

Legyen $\eta > 0$ tetszőleges. Az (ε_n) sorozat a nullához tart, így van olyan $i \geq 2$ index, melyre $\varepsilon_{i-1} < \eta$. Ekkor $m \geq l > \ell_i$ esetén $d(x_l, x_m) < \varepsilon_{i-1} < \eta$, tehát az (x_k) sorozat Cauchy-tulajdonságú.

Az alaptér teljessége miatt az (x_k) sorozatnak létezik $x \in X$ határértéke. Nyilván $x \in A$. Az (x_{ℓ_j}) sorozat konstrukciója következtében $d(x_{\ell_j}, y) = d(x_{\ell_j}, x_{\ell_1}) < \varepsilon_2$. Legyen $j \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $d(x_{\ell_j}, x) < \varepsilon_2$. Ekkor

$$d(x, y) = d(x, x_{\ell_1}) \leq \Phi(d(x, x_{\ell_j}), d(x_{\ell_j}, x_{\ell_1})) \leq \Phi(\varepsilon_2, \varepsilon_2) < \varepsilon,$$

azaz $y \in \mathcal{B}(x, \varepsilon)$ fennáll. Mivel $y \in A_n$ tetszőleges volt, így az adódik, hogy $D(A_n, A) \leq \varepsilon$, következésképpen az (A_n) sorozat konvergál az A halmazhoz.

A bizonyítás befejezéséhez meg kell mutatnunk, hogy $A \in \mathcal{F}(X)$, azaz hogy A nemüres, korlátos és zárt.

Ha $n > n_0$, akkor (ii) érvényes, így ha A_n nemüres, akkor A sem lehet üres. Hasonlóan, ha $n > n_0$, akkor (i) fennáll, ezért A_n korlátosságából következik A korlátossága. Valóban, ha $x_1, x_2 \in A$, akkor léteznek $y_1, y_2 \in A_n$ elemek úgy, hogy $d(x_1, y_1) < \varepsilon$ és $d(x_2, y_2) < \varepsilon$, azaz

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq \Phi(d(x_1, y_1), d(y_1, x_2)) \leq \Phi(\varepsilon, \Phi(d(y_1, y_2), d(y_2, x_2))) \\ &\leq \Phi(\varepsilon, \Phi(\text{diam}(A_n), \varepsilon)). \end{aligned}$$

Tehát

$$\text{diam}(A) \leq \Phi(\varepsilon, \Phi(\text{diam}(A_n), \varepsilon)),$$

amely bizonyítja az A korlátosságát.

A zártság igazolásához legyen z az A halmaz lezártjának egy tetszőleges eleme. Ekkor létezik $(z_n) \subset A$ sorozat, melyre

$$d(z_n, z) < D(A_n, A) + \frac{1}{n} =: \delta_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A (δ_n) nullsorozat, és $D(A_n, A) < \delta_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re. Ezért bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $x_n \in A_n$, hogy $d(x_n, z_n) < \delta_n$, így

$$d(x_n, z) \leq \Phi(d(x_n, z_n), d(z_n, z)) \leq \Phi(\delta_n, \delta_n).$$

A Φ függvény a $(0, 0)$ -ban felülről félig folytonos, valamint $\Phi(0, 0) = 0$, így a fenti egyenlőtlenség jobb oldala a nullához tart. Ez azt jelenti, hogy $x_n \rightarrow z$, azaz $z \in A$, ami bizonyítja, hogy A zárt. $\square$

2.6. Tétel. Legyen (X, d) egy teljes szemimetrikus tér és $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy felülről félig folytonos háromszögfüggvény d -re nézve. Ekkor $(\mathcal{K}(X), D)$ szintén teljes.

Bizonyítás. Legyen (A_n) egy $(\mathcal{K}(X), D)$ -beli nemüres halmazokból álló Cauchy-sorozat. A feltevéseink miatt a Φ függvény folytonos az origóban, így (X, d) reguláris. Az 1.12. Tétel értelmében A_n zárt és teljesen korlátos, továbbá mivel Φ véges értékű, az 1.10. Tétel következtében A_n korlátos is. Ekkor a 2.5. Tétel miatt az (A_n) sorozatnak létezik $A \in \mathcal{F}(X)$ határértéke. Megmutatjuk, hogy az A halmaz kompakt. Ehhez az 1.12. következtében elegendő igazolni, hogy A teljesen korlátos.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $\Phi(\delta, \delta) < \varepsilon$. Az (A_n) sorozat konvergenciája miatt van olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $D(A_n, A) < \delta$, azaz

$$A \subseteq \bigcup_{y \in A_n} \mathcal{B}(y, \delta).$$

Másrésről az A_n teljes korlátossága miatt létezik $\{p_1, \dots, p_m\} \subseteq A_n$, melyre

$$A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^m \mathcal{B}(p_i, \delta).$$

Belátjuk, hogy $\{p_1, \dots, p_m\}$ egy ε -háló az A számára. Legyen $a \in A$ tetszőleges. A fenti tartalmazások miatt létezik $y \in A_n$, melyre $a \in \mathcal{B}(y, \delta)$, azaz $d(a, y) < \delta$. Továbbá mivel $y \in A_n$, ezért van olyan $j \in \{1, \dots, m\}$, hogy $y \in \mathcal{B}(p_j, \delta)$, vagyis $d(y, p_j) < \delta$. Mindezekből következik, hogy

$$d(a, p_j) \leq \Phi(d(a, y), d(y, p_j)) \leq \Phi(\delta, \delta) < \varepsilon,$$

tehát $a \in \mathcal{B}(p_j, \varepsilon)$ valamely $j \in \{1, \dots, m\}$ indexre. Következésképpen

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^m \mathcal{B}(p_i, \varepsilon),$$

amely bizonyítja az A halmaz teljes korlátosságát. $\square$

A 2.5. és 2.6. Tételek szintén igazolhatók a metrikus terekben megismert analóg tételek és a [13] cikk 3.2. Tételének segítségével.

3. FIXPONTTÉTELEK

3.1. Definíció. Egy $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényt *összehasonlító függvénynek* nevezünk, ha monoton növekvő, és $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ minden $t > 0$ esetén.

3.2. Definíció. Legyen (X, d) egy szemimetrikus tér és $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy összehasonlító függvény. Ekkor egy $T : X \rightarrow X$ leképezést φ -kontrakciónak nevezünk, ha

$$d(T(x), T(y)) \leq \varphi(d(x, y))$$

teljesül minden $x, y \in X$ -re.

Egyszerűen látható, hogy $q \in [0, 1[$ esetén a $\varphi(t) := qt$ előírás összehasonlító függvényt definiál, ezért a φ -kontrakciók a klasszikus kontrakciók általánosításai.

A definícióból könnyen adódik, hogy ha $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy összehasonlító függvény, akkor $\varphi(t) < t$ minden $t > 0$ -ra. Emiatt ha $T : X \rightarrow X$ egy φ -kontrakció, akkor

$$d(T(x), T(y)) \leq \varphi(d(x, y)) \leq d(x, y),$$

azaz T Lipschitz-tulajdonságú $L = 1$ modulussal. Így az 1.8. Lemma szerint T folytonos.

A következő tételt, mely a Banach-féle fixponttétel általánosítása szemimetrikus terekre és φ -kontrakciókra, Bessenyei és Páles 2014-ben igazolták [5]. Megjegyezzük, hogy a [19] mű 2. Megjegyzésének figyelembe vételével, ezen eredmény speciális esete a [19] cikk 1. Tételének.

3.3. Tétel. Legyen (X, d) egy teljes, reguláris szemimetrikus tér, $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy összehasonlító függvény és $T : X \rightarrow X$ egy φ -kontrakció. Ekkor T -nek létezik egy egyértelműen meghatározott $x_0 \in X$ fixpontja. Továbbá bármely $x \in X$ esetén az

$$x_1 := x, \quad x_{k+1} := T(x_k)$$

módon megadott (x_k) sorozatnak éppen x_0 a határértéke.

Az alábbi lemma segítségével az előző tételben definiált iterációval kapcsolatos hibabecslést adhatunk meg.

3.4. Lemma. Legyen (X, d) egy teljes, reguláris szemimetrikus tér, $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy háromszögfüggvény d -re nézve, $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy összehasonlító függvény és $T : X \rightarrow X$ egy φ -kontrakció. Legyen $x_0 \in X$ a T leképezés egyértelműen létező fixpontja. Ekkor minden $x \in X$ esetén

$$(3.1) \quad d(x, x_0) \leq \psi(d(x, T(x))),$$

ahol $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a

$$(3.2) \quad \psi(t) := \sup\{s \geq 0 \mid s \leq \Phi(t, \varphi(s))\} \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

képlettel adott.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ψ monoton növekvő függvény. Legyen $x \in X$ tetszőleges. Ekkor a φ -kontrakciós tulajdonság miatt

$$d(x, x_0) \leq \Phi(d(x, T(x)), d(T(x), T(x_0))) \leq \Phi(d(x, T(x)), \varphi(d(x, x_0))),$$

ennélfogva

$$d(x, x_0) \in \{s \geq 0 \mid s \leq \Phi(d(x, T(x)), \varphi(s))\},$$

így

$$d(x, x_0) \leq \sup\{s \geq 0 \mid s \leq \Phi(d(x, T(x)), \varphi(s))\} = \psi(d(x, T(x))),$$

ami éppen a bizonyítani kívánt egyenlőtlenség. $\square$

3.5. Tétel. Legyen (X, d) egy teljes, reguláris szemimetrikus tér, $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy háromszögfüggvény d -re nézve, $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy összehasonlító függvény, valamint $T : X \rightarrow X$ egy φ -kontrakció. Legyen $x_0 \in X$ a T egyértelműen létező fixpontja, továbbá legyen $x \in X$ és definiáljuk az (x_k) sorozatot az

$$x_1 := x, \quad x_{k+1} := T(x_k)$$

rekurzióval. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén érvényesek az alábbiak.

$$d(x_k, x_0) \leq \psi \circ \varphi^{k-\ell}(d(x_\ell, x_{\ell+1})) \quad \ell \in \{1, \dots, k\},$$

$$d(x_k, x_0) \leq \varphi(d(x_{k-1}, x_0)),$$

ahol $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a (3.2) képlettel adott.

Ha $\ell = 1$ vagy $\ell = k$, akkor az első egyenlőtlenséget rendre *a priori*, illetve *a posteriori* hibabecslésnek nevezzük. A második egyenlőtlenség a *konvergencia sebességére* vonatkozó becslés.

Bizonyítás. Legyen $\ell \in \{1, \dots, k\}$. Alkalmazzuk az (3.1) egyenlőtlenséget $x := x_k$ választással. Ezután felhasználva a φ -kontrakciós tulajdonságot $(k - \ell)$ -szer és a ψ monotonitását a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} d(x_k, x_0) &\leq \psi(d(x_k, T(x_k))) = \psi(d(x_k, x_{k+1})) = \psi(d(T^{k-\ell}(x_\ell), T^{k-\ell}(x_{\ell+1}))) \\ &\leq \psi(\varphi^{k-\ell}(d(x_\ell, x_{\ell+1}))). \end{aligned}$$

A második egyenlőtlenség a φ -kontrakciós tulajdonság azonnali következménye:

$$d(x_k, x_0) = d(T(x_{k-1}), T(x_0)) \leq \varphi(d(x_{k-1}, x_0)).$$

Ezzel a bizonyítás teljes. $\square$

A most következő eredmény a fixpontok stabilitását állítja φ -kontrakciók egy adott, pontonként konvergens sorozatára nézve [5, 2. Tétel].

3.6. Tétel. *Legyen (X, d) egy teljes, reguláris szemimetrikus tér; $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy összehasonlító függvény és $T_k : X \rightarrow X$ egy φ -kontrakcióból álló sorozat, melynek pontonkénti határfüggvénye $T_0 : X \rightarrow X$ szintén φ -kontrakció. Jelölje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esetén $x_k \in X$ a T_k leképezés egyértelmű fixpontját. Ekkor az (x_k) sorozat tart az x_0 -hoz.*

A soron következő állítás a dolgozat egyik legfőbb eredménye. Bizonyításában fontos szerepet kap a 3.3. Tétel.

3.7. Tétel. *Legyen (X, d) egy teljes szemimetrikus tér; $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy felülről félig folytonos háromszögfüggvény d -re nézve, $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy felülről félig folytonos összehasonlító függvény, valamint legyenek a $T_1, \dots, T_n : X \rightarrow X$ leképezések φ -kontrakciók. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $(T_1, \dots, T_n)$ -fraktál $\mathcal{K}(X)$ -ben.*

Bizonyítás. Legyen a $T : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ leképezés a következőképpen adott:

$$(3.3) \quad T(H) = \bigcup_{i=1}^n T_k(H).$$

A T valóban a $\mathcal{K}(X)$ önmagába való leképezése, ugyanis, ha a H halmaz kompakt, akkor a T_k leképezések folytonossága miatt $T_k(H)$ is kompakt, ezért $T(H)$ szintén kompakt halmaz.

Megmutatjuk, hogy a T függvény egy φ -kontrakció a $(\mathcal{K}(X), D)$ téren. Legyenek $A, B \in \mathcal{K}(X)$ és $\varepsilon > \varphi(D(A, B))$. A φ függvény felülről félig folytonossága miatt létezik $\delta > D(A, B)$, melyre $\varphi(\delta) < \varepsilon$. Ekkor minden $a \in A$ elemhez létezik $b \in B$ úgy, hogy $d(a, b) < \delta$. Így ha $k \in \{1, \dots, n\}$, akkor

$$d(T_k(a), T_k(b)) \leq \varphi(d(a, b)) \leq \varphi(\delta) < \varepsilon,$$

ezért

$$T_k(a) \in \mathcal{B}(T_k(b), \varepsilon) \subseteq \bigcup_{y \in T(B)} \mathcal{B}(y, \varepsilon).$$

Mivel $a \in A$ tetszőleges volt, azt kapjuk, hogy

$$T(A) \subseteq \bigcup_{y \in T(B)} \mathcal{B}(y, \varepsilon).$$

Hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy

$$T(B) \subseteq \bigcup_{x \in T(A)} \mathcal{B}(x, \varepsilon).$$

Mindezekből következik, hogy $D(T(A), T(B)) \leq \varepsilon$. Képezve az $\varepsilon \rightarrow D(A, B)$ határátmenetet az adódik, hogy $D(T(A), T(B)) \leq \varphi(D(A, B))$, tehát T valóban φ -kontrakció. A 3.3. Tétel következtében a T leképezésnek létezik egy egyértelmű $H_0 \in \mathcal{K}(X)$ fixpontja, ami éppen a keresett $(T_1, \dots, T_n)$ -fraktál. $\square$

A 3.7. Tétellel analóg állítás más gondolatmeneten alapuló bizonyítása olvasható Bessenyei és Péntes cikkében (ld. [7, 2. Tétel]).

3.8. Tétel. Legyen (X, d) egy teljes szemimetrikus tér, $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy felülről félig folytonos háromszögfüggvény d -re nézve, $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy felülről félig folytonos összehasonlító függvény, valamint legyenek a $T_1, \dots, T_n : X \rightarrow X$ leképezések φ -kontrakciók. Jelölje H_0 az egyértelműen létező $(T_1, \dots, T_n)$ -fraktált $\mathcal{K}(X)$ -ben. Legyen $H \in \mathcal{K}(X)$ és definiáljuk a (H_k) sorozatot az alábbi iterációval:

$$H_1 := H, \quad H_{k+1} := T(H_k),$$

ahol $T : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ a (3.3) képlettel adott. Ekkor érvényesek az alábbi hibabecslések:

$$\begin{aligned} D(H_k, H_0) &\leq \psi \circ \varphi^{k-\ell}(D(H_\ell, H_{\ell+1})) \quad \ell \in \{1, \dots, k\}, \\ D(H_k, H_0) &\leq \varphi(D(H_{k-1}, H_0)). \end{aligned}$$

Itt $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a (3.2) módon definiált.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.5. Tételt a $(\mathcal{K}(X), D)$ szemimetrikus térre, és a (3.3) módon definiált $T : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ leképezésre. $\square$

3.9. Lemma. Legyen (X, d) egy teljes, reguláris szemimetrikus tér, $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy felülről félig folytonos háromszögfüggvény d -re nézve és $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy felülről félig folytonos összehasonlító függvény. Legyen (T_k) olyan φ -kontrakcióknak a sorozata, melyek pontonkénti határfüggvénye T_0 szintén φ -kontrakció. Ekkor bármely kompakt $H \subseteq X$ halmaz esetén a $(T_k(H))$ sorozat tart a $T_0(H)$ -hoz.

Bizonyítás. Legyen $H \subseteq X$ kompakt halmaz és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszuk meg a $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ számokat úgy, hogy

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_1) < \varepsilon, \quad \Phi(\varepsilon_2, \varepsilon_2) < \varepsilon_1$$

teljesüljön. A $\{\mathcal{B}(p, \varepsilon_2)^\circ \mid p \in H\}$ egy nyílt fedése H -nak, így a kompaktság miatt létezik $\{p_1, \dots, p_n\} \in H$, melyre

$$H \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}(p_i, \varepsilon_2)^\circ.$$

A p_i belső pontja a $\mathcal{B}(p_i, \varepsilon_2)$ halmaznak, ezért van olyan $0 < r_i < \varepsilon_2$, hogy $\mathcal{B}(p_i, r_i) \subseteq \mathcal{B}(p_i, \varepsilon_2)^\circ$. Továbbá a (T_k) sorozat pontonkénti konvergenciája miatt létezik $k_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy ha $k > k_0$, akkor $d(T_k(p_i), T_0(p_i)) < r_i$ fennáll.

Legyen $x \in H$. Ekkor van olyan $i \in \{1, \dots, n\}$, hogy $d(p_i, x) < \varepsilon_2$. Ennélfogva $k > k_0$ esetén

$$\begin{aligned} d(T_k(x), T_0(x)) &\leq \Phi(d(T_k(x), T_k(p_i)), d(T_k(p_i), T_0(x))) \\ &\leq \Phi(d(x, p_i), \Phi(d(T_k(p_i), T_0(p_i)), d(T_0(p_i), T_0(x)))) \\ &\leq \Phi(d(x, p_i), \Phi(d(T_k(p_i), T_0(p_i)), d(x, p_i))) \\ &\leq \Phi(\varepsilon_2, \Phi(r_i, \varepsilon_2)) \leq \Phi(\varepsilon_2, \Phi(\varepsilon_2, \varepsilon_2)) \leq \Phi(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \leq \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_1) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy $k > k_0$ esetén

$$T_k(H) \subseteq \bigcup_{y \in T_0(H)} \mathcal{B}(y, \varepsilon), \quad \text{és} \quad T_0(H) \subseteq \bigcup_{x \in T_k(H)} \mathcal{B}(x, \varepsilon),$$

azaz $D(T_k(H), T_0(H)) \leq \varepsilon$, ami éppen a bizonyítandó állítás. $\square$

3.10. Tétel. Legyen (X, d) egy teljes szemimetrikus tér, $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy felülről félig folytonos háromszögfüggvény és $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ egy felülről félig folytonos összehasonlító függvény. Legyenek $(T_{k,1}), \dots, (T_{k,n})$ olyan φ -kontrakciókból álló sorozatok, melyek pontonként konvergálnak rendre a $T_{0,1}, \dots, T_{0,n}$ leképezésekhez, melyek szintén φ -kontrakciók. Továbbá $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ -ra a $\mathbb{T}_k : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ leképezés legyen a

$$\mathbb{T}_k(H) := \bigcup_{j=1}^n T_{k,j}(H)$$

képlettel adott, és jelölje H_k az egyértelműen létező $(T_{k,1}, \dots, T_{k,n})$ -fraktált $\mathcal{K}(X)$ -ben. Ekkor a (H_k) sorozat konvergál a H_0 halmazhoz.

Bizonyítás. Legyen H az X tér nemüres, kompakt részhalmaza. A 3.9. Lemma értelmében minden $j \in \{1, \dots, n\}$ -re $D(T_{k,j}(H), T_{0,j}(H)) \rightarrow 0$. Ekkor a 2.3. Lemma miatt ekkor $D(\mathbb{T}_k(H), \mathbb{T}_0(H)) \rightarrow 0$, tehát a $\mathbb{T}_k$ leképezés pontonként konvergál a $\mathbb{T}_0$ -hoz. A 3.7. Tétel bizonyításából következik, hogy $\mathbb{T}_k$ is φ -kontrakció, így az állítás a 3.6. Tétel következménye. $\square$

HIVATKOZÁSOK

- [1] S. Banach. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fund. Math.*, 3:133–181, 1922.
- [2] V. Berinde. *Iterative approximation of fixed points*, volume 1912 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, second edition, 2007.
- [3] M. Bessenyei. Nonlinear quasicontractions in complete metric spaces. *Expo. Math.*, 33(4):517–525, 2015.
- [4] M. Bessenyei. The contraction principle in extended context. *Publ. Math. Debrecen*, 89(3):287–295, 2016.
- [5] M. Bessenyei and Zs. Páles. A contraction principle in semimetric spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 18(3):515–524, 2017.
- [6] M. Bessenyei and E. Péntes. Hutchinson without Blaschke: An alternative way to fractals. *Expo. Math.*, 39(1):25–32, 2021.
- [7] M. Bessenyei and E. Péntes. Generalized fractals in semimetric spaces. *Nonlinear Anal.*, 220: Paper No. 11285339, 2022.
- [8] W. Blaschke. *Kreis und Kugel*. Chelsea Publishing Co., New York, 1949.
- [9] F. E. Browder. On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations. *Indag. Math.*, 30:27–35, 1968.
- [10] F. E. Browder. Remarks on fixed point theorems of contractive type. *Nonlinear Anal.*, 3(5):657–661, 1979.
- [11] D. K. Burke. Cauchy sequences in semimetric spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 33:161–164, 1972.
- [12] R. Caccioppoli. Un teorema generale sulla esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale. *Rend. Acc. Naz. Lincei*, 11:794–799, 1930.
- [13] K. Chrząszcz, J. Jachymski, and F. Turoboś. On characterizations and topology of regular semimetric spaces. *Publ. Math. Debrecen*, 93(1-2):87–105, 2018.
- [14] K. Chrząszcz, J. Jachymski, and F. Turoboś. Two refinements of Frink’s metrization theorem and fixed point results for Lipschitzian mappings on quasimetric spaces. *Aequationes Math.*, 93(1):277–297, 2019.
- [15] F. Galvin and S. D. Shore. Completeness in semimetric spaces. *Pacific J. Math.*, 113(1):67–75, 1984.
- [16] A. Granas and J. Dugundji. *Fixed point theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [17] F. Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre*. Chelsea Publishing Co., New York, N. Y., 1949.
- [18] J. E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981.
- [19] J. Jachymski, J. Matkowski, and T. Świątkowski. Nonlinear contractions on semimetric spaces. *J. Appl. Anal.*, 1(2):125–134, 1995.
- [20] J. Jachymski and F. Turoboś. On functions preserving regular semimetrics and quasimetrics satisfying the relaxed polygonal inequality. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 114(3):Paper No. 159, 11, 2020.
- [21] M. Kocsis and Zs. Páles, *Hutchinson’s theorem in semimetric spaces*, *J. Fixed Point Theory Appl.* 24 (2022), no. 4, Paper No. 75.
- [22] J. Matkowski. Integrable solutions of functional equations. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 127:68, 1975.
- [23] L. F. McAuley. A relation between perfect separability, completeness, and normality in semi-metric spaces. *Pacific J. Math.*, 6:315–326, 1956.
- [24] R. Miculescu and A. Mihail. A generalization of Matkowski’s fixed point theorem and Istrăţescu’s fixed point theorem concerning convex contractions. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 19(2):1525–1533, 2017.
- [25] Z. D. Mitrović and N. Hussain. On weak quasicontractions in b -metric spaces. *Publ. Math. Debrecen*, 94(3-4):289–298, 2019.
- [26] D. Pompéiu. Sur la continuité des fonctions de variables complexes. *Toulouse Ann. (2)*, 7:264–315, 1905.
- [27] I. A. Rus. *Generalized contractions and applications*. Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001.
- [28] I. A. Rus, A. Petruşel, and G. Petruşel. *Fixed point theory*. Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008.
- [29] Nguyen Van Dung and Vo Thi Le Hang. On regular semimetric spaces having strong triangle functions. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 19(3):2069–2079, 2017.
- [30] W. A. Wilson. On semi-metric spaces. *Amer. J. Math.*, 53(2):361–373, 1931.
- [31] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. I*. Springer-Verlag, New York, 1986. Fixed-point theorems, Translated from the German by Peter R. Wadsack.

TARTALOMJEGYZÉK

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	3
BEVEZETÉS	5
1. ALAPVETŐ FOGALMAK ÉS EREDMÉNYEK A SZEMIMETRIKUS TEREK ELMÉLETÉBEN	7
2. A NEMÜRES, KORLÁTOS, ZÁRT HALMAZOK ÉS A NEMÜRES, KOMPAKT HALMAZOK SZEMIMETRIKUS TEREI	14
3. FIXPONTTÉTELEK	21
HIVATKOZÁSOK	27