



Pénzügy MSC

TDK dolgozat

Portfólió optimalizációs technikák empirikus tesztjei

Láng András

Dr. Ormos Mihály

Budapest, 2022.11.05.

Eredetiségnyilatkozat

1. Alulírott Szerző, nyilatkozom, hogy jelen dolgozat saját szellemi termékem, önálló munkám eredménye. A dolgozat készítése során betartottam a hivatkozásokra vonatkozó szabályokat, a szó szerinti idézéseket idézőjellel is jelöltem. Jelöltem azt is, ahol saját korábbi munkáimból használtam fel részleteket. Tudomásul veszem, hogy a plágiumot elkövető hallgatóval szemben fegyelmi eljárás indítható.
2. Alulírott Szerző, nyilatkozom, hogy a dolgozatban szereplő adatokat jogszerűen használtam fel. Tudomásul veszem, hogy a dolgozat titkosítására nincs lehetőség.

Budapest, 2022.11.05

Láng András

Absztrakt

Az intézményi alapkezelők által alkalmazott kvantitatív kereskedési stratégiák legnagyobb része a kisbefektetők számára nem kivitelezhető a tőke nagysága a magas tranzakciós költségek és a pénzügyi közvetítők korlátjai miatt. A dolgozat célja annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy a hosszú időhorizonttal rendelkező kisbefektetőknek érdemes-e optimalizációs technikákat alkalmazni a „buy and hold” kereskedési stratégiával szemben.

A modern portfólióelméleten belül a portfólió optimalizációs technikákat tesztelem a gyakorlatban egy általam paraméterezett szimulációs környezet segítségével. A szimulációs környezetet úgy alakítottam ki, hogy az optimalizációs folyamat kisbefektetők számára is alkalmazható legyen. Munkámban bemutatom a Markowitz -portfólió optimalizáció módszertanát és más kutatások alapján prezentálom a modell hiányosságait. Ezután bemutatok és tesztelek két másik – a Markowitz modellnél szofisztikáltabb – optimalizációs technikát. A tesztek alapján mindhárom optimalizációs modell a saját céljának megfelelően jobb eredményeket ért el, mint a klasszikus passzív stratégia a 2012-2021- ig terjedő időszak alatt. Az általam tesztelt optimalizációs modellek közül a Markowitz- portfólió 1.36, a Black - Litterman portfólió 2.26-os alfát generált, a CVaR modell pedig 12.54%-os évesített szórással múlta felül a benchmark 14.03%-os évesített szórását. A három modell a kisbefektetők hosszú távú céljait és limitált tőkéjét figyelembe véve a tesztek alapján az optimalizációs modellek jobbnak bizonyultak a „buy and hold” stratégiával szemben.

Tartalomjegyzék

1. MODERN PORTFÓLIÓ ELMÉLET	5
1.1. HOZAM ÉS KOCKÁZAT KAPCSOLATA.....	6
1.2. PORTFÓLIÓ TELJESÍTMÉNYÉNEK MÉRÉSE.....	8
1.2.1. Hozam.....	8
1.2.2. Max drawdown/ maximális veszteség.....	9
1.2.3. Jensen alfa.....	9
1.2.4. Sharpe és Treynor ráta.....	9
2. KLASSZIKUS PORTFÓLIÓ OPTIMALIZÁCIÓ	11
3. SZIMULÁCIÓS KÖRNYEZET PARAMÉTEREZÉSE.....	13
3.1. STATISZTIKAI ANALÍZIS	13
4. MARKOWITZ OPTIMALIZÁCIÓ EMPIRIKUS VIZSGÁLATA	14
4.1. PORTFÓLIÓ TELJESÍTMÉNYÉNEK VIZSGÁLATA	16
5. CVAR OPTIMALIZÁCIÓ.....	19
5.1. MONTE -CARLO SZIMULÁCIÓ.....	19
5.2. VALUE AT RISK.....	19
5.3. CVAR PORTFÓLIÓ EMPIRIKUS TESZTJE	21
6. BLACK – LITTERMAN MODEL	25
6.1. A MODELL FELÁLLÍTÁSA.....	25
6.2. BLACK – LITTERMAN PORTFÓLIÓ EMPIRIKUS TESZTJE	27
7. ÖSSZEFOGLALÁS	29
IRODALOMJEGYZÉK.....	30
MELLÉKLET(EK).....	31

1. Modern portfólió elmélet

A modern portfólióelmélet (MPT) legfőbb célja a portfólió hozamának maximalizálására törekszik adott kockázati szint mellett. A modern portfólióelmélet központi eleme a diverzifikáció. A koncepciót először egy amerikai közgazdász Harry Markowitz vetette papírra 1952-ben. Egy olyan optimalizációs modellt dolgozott ki, mely segítségével a befektető a tőkéjét kockázatos eszközök között optimálisan tudja allokálni.

Az optimális portfólió a Markowitz modellben nemcsak egyetlen kimeneti portfólió lehetséges, hanem a befektető hozamelvárásának alapján hatékony portfóliók halmaza. A Markowitz féle görbe a hozam és kockázat függvényében mutatja meg, hogy mely eszközök kombinációjával érhető el az optimális portfólió. A modell vizsgálja a különböző eszközök közötti kapcsolatot is a maximális hozam- minimális kockázat elérése érdekében. Az 1. ábrán egy elméleti kételemű részvényportfólió látható különböző súlyokkal. „A” részvény 12%-os elvárt hozammal rendelkezik 20%-os szórás mellett, míg „B” részvénynek 18%-os elvárt hozama van 30%-os szórás mellett. A két részvény korrelációs együtthatója 0.23. A kételemű portfólió hozama az alábbi képletek segítségével adható meg:

$$R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2$$

ahol,

R_p = portfólió hozama

w_n = eszközök súlya

$$\sigma_p = \sqrt{w_A^2 \sigma^2 + w_B^2 \sigma^2 + 2w_A w_B \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2}$$

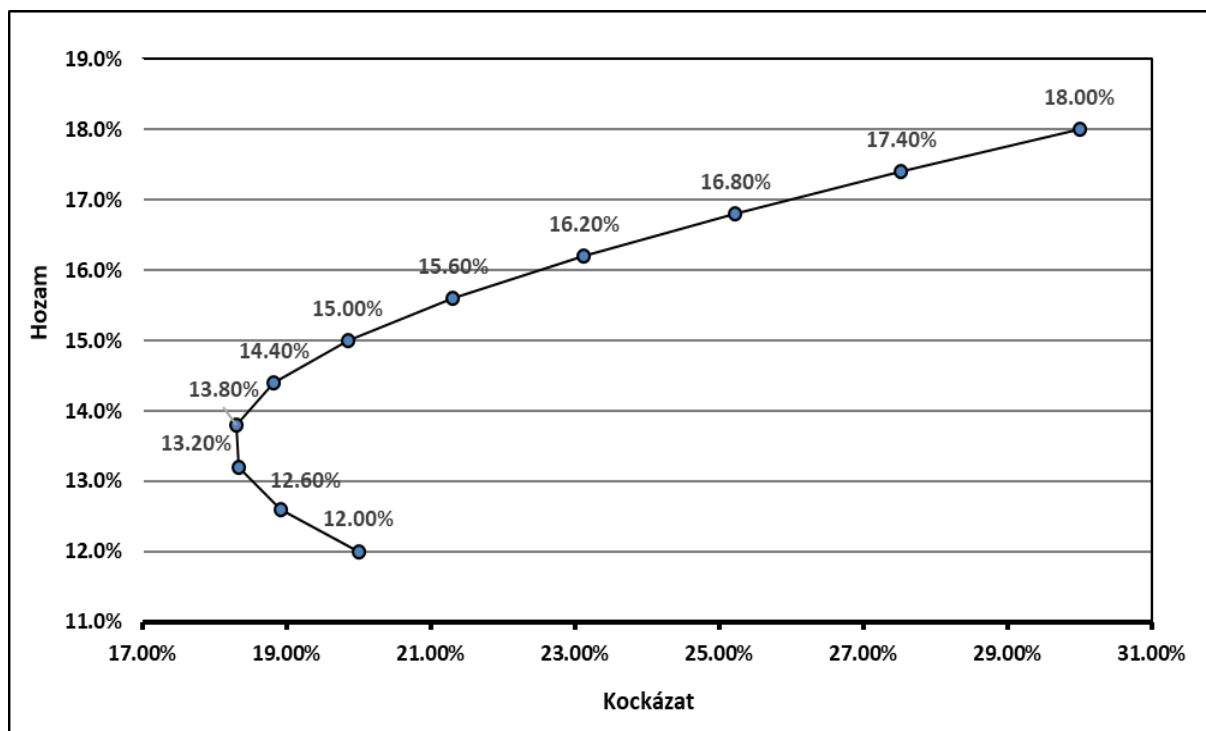
ahol,

σ_p = portfólió szórása

$\rho_{1,2}$ = korrelációs együttható

Az 1. ábrán látható görbén azon „A” és „B” eszköz kombinációja lesz hatékony, amely a görbe felső részén helyezkedik el. Ebből adódóan például a görbe legalsó pontjánál (12%) a felső szakasz pontja (15%) azonos kockázat mellett ígér nagyobb hozamot.

1. Ábra: Markowitz féle hatékony portfólió görbe



Forrás: Saját számítás

1.1. Hozam és kockázat kapcsolata

Ahhoz, hogy meg tudjuk mérni a portfólióban lévő eszközök teljesítményét, fontos lépés az előző fejezetben említett fogalmak, a hozam és a kockázat mérésének definiálása, vagyis annak a kérdésnek a feltárása, hogy hogyan tudjuk a portfólió hozamát és kockázatát meghatározni. Mind a hozam mind a kockázat fogalmára ugyanis sokféle definíció létezik. A pénzügyi eszközök statisztikai modelleken alapuló tesztjei során felmerül a kérdés, hogy logaritmikus hozamot, vagy szimpla hozamot érdemes-e vizsgálni. Ugyan nincs sok különbség a kettő között, viszont a portfólió optimalizáció során érdemes inkább a szimpla, lineáris hozamot választani (Meucci, 2010). A logaritmikus hozamokkal könnyebb becslési hibát ejteni a kovariancia mátrix kiszámításában, aminek esetleges következményeiről bővebben a 2. fejezetben lesz szó. A szimpla hozam a következő képlettel adható meg:

$$L_t \equiv \frac{V_{t+1}}{V_t} - 1$$

ahol,

V = az eszköz ára

$t = \text{időperiódus}$

A logaritmikus hozam pedig az alábbi képlettel számítható ki:

$$C_t \equiv \ln\left(\frac{V_{t+1}}{V_t}\right)$$

A logaritmikus hozamot inkább a sztochasztikus árazási modelleknél alkalmazzák a derivatív termékek esetében, mivel a logaritmikus hozamok normális eloszlást is követhetnek.

A teljes portfólió hozama a pozíciók egyszerű hozamának súlyozott átlagából számítható ki.

A portfólió hozama i elemű eszközre az alábbi képlettel adható meg:

$$R_p = \sum_{i=1}^n (w_i * r_i)$$

ahol,

$w_i = i$ eszközök súlya

$r_i = i$ eszközök hozama

Igen sokszínű módszerek léteznek a kockázat meghatározására és mérésére is. A kockázat egyik lehetséges definíciója a várható értéktől való eltérés valószínűsége. E meghatározás nemcsak a pénzvesztés valószínűségét adja meg kockázatként, de az elvárttól szignifikánsan jobb hozamokat is kockázatnak veszi. A vesztegből és a nyereségből adódó kockázatok külön mérhetőek, melyekre az 1.2 fejezetben térek ki a dolgozatomban. Egy eszköz kockázatát a definícióból adódóan a varianciája adja, vagyis, hogy az egyes adatpontok mennyire szóródnak az átlaghoz képest. Ahhoz, hogy az adat az elvárt hozammal összehasonlítható legyen, a variancia négyzetgyökét kell venni, azaz az eszköz szórását. Az eszköz szórása az alábbi képletből számítható ki:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

A teljes portfólió szórása a pozíciók szórásának súlyozott átlaga, és a kovarianciájuk összege.

A portfólió szórása i elemű eszközre az alábbi képlettel számítható ki:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma^2(k_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j}^n w_i w_j \text{Cov}(k_i k_j)}$$

ahol,

σ_p = portfólió szórása

w_i = eszközök súlya

$\sigma^2(k_i)$ = i eszköz hozamának varianciája

$\text{Cov}(k_i k_j)$ = i eszköz és k eszköz hozamának kovarianciája

A kovariancia helyett korrelációs koefficiens is beírható a képletbe az alábbi átrendezés segítségével:

$$R(k_i k_j) = \frac{\text{Cov}(k_i k_j)}{\sigma(k_i) \sigma(k_j)}$$

$$\text{Cov}(k_i k_j) = R(k_i k_j) \sigma(k_i) \sigma(k_j)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma^2(k_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq j}^n w_i w_j R(k_i k_j) \sigma(k_i) \sigma(k_j)}$$

ahol,

$R(k_i k_j)$ = korrelációs koefficiens

1.2. Portfólió teljesítményének mérése

Ebben a fejezetben a portfólió teljesítményének mérésére szolgáló mutatókat tárgyalom. A jó teljesítmény mutató az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik: informatív és összemérhető. Informatív, azaz megadja azt az információt, amely szükséges ahhoz, hogy értelmezni tudjuk az adott portfólió teljesítményét. Összemérhető, tehát a mutatókat össze tudjuk hasonlítani és tudjuk rangsorolni.

1.2.1. Hozam

A befektetők elsődleges célja a hozamrealizálás. Elsőre nem lenne rossz gondolat, ha a portfóliókat csak hozam alapján mérnénk. A portfólió hozamának méréséhez nem kell különösebb számításokat végezni, és implicit feltételezéseket elfogadni. Érdekes azonban

fejben tartani a modern portfólió elmélet egyik vezérgondolatát: a befektetőknek nem azonos a kockázatvállalási hajlandósága, ezért nem biztos, hogy a legmegfelelőbb cél a hozam maximalizálása alapján mérni a portfóliókat.

1.2.2. Max drawdown/ maximális veszteség

A maximális drawdown vizsgálata a kockázat - érzékeny befektetők számára lehet hasznos. A mutató lényege, hogy a kockázatkerülő befektetők nem szeretik az extra volatilitásból adódó nem realizált veszteséget. A max drawdown megmutatja, hogy adott időszakban mekkora volt a portfólió napi vesztesége. Ha ez alapján értékeljük a teljesítményt, akkor azon portfóliók jobbak lesznek, amelyeknek kisebb a volatilitása.

1.2.3. Jensen alfa

A Jensen alfa a piaci portfólió feletti hozamtöbbséget mutatja meg a portfólió kockázatoságát is figyelembe véve. A pozitív alfa magasabb hozamot jelent, mint a piaci portfólió hozam-kockázat értéke. Pozitív alfa esetén tehát a portfólió abnormális hozamot ér el. Annak ellenére, hogy Eugene Fama és más akadémiai professzorok a hatékony piaci elmélet szerint kizárják a pozitív alfával rendelkező portfóliók hosszú távú létezését (Fama, 1970), az intézményi alapkezelők között mégis gyakorta használt a portfólió teljesítményének mérésére.

A Jensen alfát az alábbi képlet segítségével lehet megadni:

$$Jensen \alpha = R_p - [R_f + (R_m - R_f) * \beta_{p,m}]$$

ahol,

R_p = portfólió hozama

R_f = kockázatmentes hozam

R_m = piaci portfólió hozama

$\beta_{p,m}$ = a portfólió hozamának érzékenysége a piaci hozammal szemben

1.2.4. Sharpe és Treynor ráta

A Sharpe és a Treynor ráta szintén a piaci portfólió hozama feletti többséget adja meg. A Sharpe ráta nevezőjében a portfólió szórása, míg a Treynor rátában a portfólió bétája szerepel. Ahhoz, hogy össze tudjuk hasonlítani a Sharpe rátát, szükség van a benchmark Sharpe rátájának kiszámítására is. Amennyiben a portfólió Sharpe rátája magasabb, mint a benchmark, úgy hozam- kockázat oldalon jobb a portfólió teljesítménye, mint a benchmark.

A Sharpe és a Treynor ráta kiszámítását az alábbi képletek segítségével tudjuk kiszámolni:

$$\textit{Sharpe ráta} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

$$\textit{Treynor ráta} = \frac{R_p - R_f}{\beta_p}$$

2. Klasszikus portfólió optimalizáció

A Markowitz féle optimalizációs folyamatnak első ránézésre igen vonzó elméleti háttere van, ugyanakkor a klasszikus értelemben vett optimalizációt kevés befektetési szakember végzi el. Az alapkezelők úgy vélekednek, hogy a modellnek kikerülhetetlen becslési hibái vannak. Hasonlóan vélekedik egy korai tanulmány, mely kritikával illeti a Markowitz féle optimalizációt, (Michaud 1989): Sok befektetési szakember közömbössége az átlagos szórás-optimalizálási technológia iránt, elméleti vonzereje ellenére sok esetben érthető. Az optimalizáció fő probléma az inputokban lévő hibák hatásait maximalizálja. A korlátlan átlagos variancia optimalizálás gyengébb eredményeket hozhat az egyszerű egyenlő súlyú portfóliókhoz képest. Ennek alapján sok alapkezelő elutasítja a Markowitz féle portfólió optimalizációs technikákat, azonban a szerző (Michaud 1989) a következőket is említi a tanulmányában: mindazonáltal az optimalizálás felülmúlja az ad hoc jellegű portfóliókezelési technikákat az információk megfelelő felhasználásával. Az optimalizáció gyakorlati értékét növelheti, ha az input adatokat szofisztikált módszerekkel korrigáljuk.

Egy későbbi tanulmányban (Chopra és Ziemba 1993) a portfólió optimalizációt hasonlították össze egy olyan portfólióval, amely tökéletes információval rendelkezik a jövőre vonatkozóan. Kutatásukban arra a következtetésre jutottak, hogy az optimalizációs folyamattal létrehozott portfólió meglehetősen jó eredményeket hozott: teljesítményben szinte csak a kovariancia és a volatilitás becslési hibáinak köszönhetően maradt alul a tökéletes információval ellátott portfólióhoz képest.

DeMiguel et al. 2009-ben az azonos súlyokkal rendelkező portfólió stratégiát tesztelték 14 másik stratégiával szemben és arra a következtetésre jutottak, hogy egyik modelljük sem tudott versenyezni vele. Szerintük, ennek az az oka, hogy a diverzifikációs előnyöket kiegyenlítik a becslési hibák, amellyel az optimalizáció feleslegessé válik.

Kritzman 2014-es tanulmányában ezzel szemben erős érveket sorakoztatott fel az optimalizáció mellett, melyeket empirikus kutatás alapján támasztott alá. A tanulmányban így vélekedett: a cinikusok gyakran hiba maximalizálásként referálnak az optimalizációra, mert szerintük az inputok apró hibái nagy kimeneti hibákhoz vezetnek. A félreértés az inputok érzékenységre vezethető vissza. Nézzük például az azonos hozammal és szórással rendelkező eszközök optimalizációját. Az inputok becslési hibái szignifikánsan helytelenül állíthatják be az optimalizációt. A nem megfelelő allokáció ellenére a hozameloszlás-függvénye a hasonló lesz a helyes és a helytelen portfóliónak. Ebből adódóan az input becslési hibák nem

számítanak, mert a helytelen portfólió majdnem olyan teljesítménnyel rendelkezik, mint a helyes. Most nézzük meg a jelentős hozam és szóráskülönbségekkel rendelkező eszközöket. Az input becslési hibái megint csekély hatással lesznek az optimális allokációra, hiszen a helyes és a helytelen portfóliók hozameloszlása itt sem különbözik sokkal. Előfordulhatnak azonban olyan esetek is, melyeknél az inputok becslési hibái számítanak, de az esetek túlnyomó részében nem ez a gyakori.

3. Szimulációs környezet paraméterezése

A klasszikus optimalizációval kapcsolatos tanulmányok vegyes eredményei miatt létrehoztam egy szimulációs környezetet, amelynek a keretein belül vizsgáltam az optimalizációs folyamatot, illetve az eredmények robusztusságát. Kezdetben meghatároztam a portfólió benchmarkját, a korlátokat, illetve a kereskedési stratégiát. A benchmark a globális MSCI World index, amelynek teljesítményét 2012-től 2021-ig, 10 éves periódusra hasonlítottam össze a szimulált portfólióval. A szimuláció során a benchmark képezi a „buy and hold” stratégiát. A portfólió korlátait csak hosszú pozíciók felvételére állítottam be, azaz jelen szimulációban nem vizsgáltam a long-short kereskedési stratégiákat. A portfólióban továbbá éves periódussal alkalmaztam átsúlyozást a modell outputjának megfelelően. A portfólió célja, hogy a benchmarkot vagyis az MSCI World indexet felülteljesítse az indexben lévő részvények komponenseivel. Az MSCI World index egy globális nagy és közép kapitalizációjú cégekből áll, 23 fejlett ország piacáról. Az indexben lévő több mint 1500 vállalat nagyjából a világ teljes kapitalizációjának 85%-át fedi le. A globális részvénytőzshoz tehát ez az index áll a legközelebb. Az MSCI World indexet legnagyobb arányban három fő piac fedi le: az amerikai, a japán, illetve az angliai részvénytőzsde teljes egésze. A szimuláció során e három fő piac részvény aggregátumait építettem bele a portfólióba, mintsem az indexben lévő egyedi részvények sokaságát. Ez egyrészt egyszerűsítést tett lehetővé, másrészt a folyamat kisebb tőkével, akár kisbefektetők számára is elvégezhető a való életben, hiszen nem kell egyesével az indexben lévő részvénykomponenseket beletenni a portfólióba.

3.1. Statisztikai analízis

A hozamértékeket Shapiro-Wilk normalitás teszt alá vettem, ahol az adatok normál eloszlását igazoltam. F-próbával igazoltam az értékek azonos varianciáját, majd Student-féle T próbát alkalmaztam a szignifikancia kimutatásához. A szignifikancia szintet 5% alatt húztam meg.

4. Markowitz optimalizáció empirikus vizsgálata

A szimulációt 2012.01.01-jén indítottam 3 millió dolláros alaptőkével. Kiválasztottam három befektetési alapot, amelyek megfelelnek a fent említett teljes Amerikát, Japánt, illetve Angliát lefedő részvénytőkepiaci kritériumának. A portfólió kialakítása során az 1. táblázatban szereplő ETF-eket használtam:

1. Tábla: Portfólió eszközei

Név	Bloomberg Ticker
iShares Core S&P Total U.S. Stock Market ETF	ITOT US Equity
iShares MSCI Japan ETF	EWJ US Equity
iShares MSCI United Kingdom ETF	EWU US Equity

Forrás: Blackrock

Ahhoz, hogy megkapjam az optimális kezdeti súlyokat, öt évre visszamenőleg, 2007-től vizsgáltam a három befektetési alap évesített hozamát és szórását. Ezután kiszámoltam az egyes befektetési alapok várható hozamát a CAPM segítségével az éppen aktuális kockázatmentes hozamot és részvénykockázati prémiumot használva. A részvénykockázati prémium meghatározásánál a Damodaran által közzétett implikált részvénykockázati prémiumot alkalmaztam. A Markowitz modell alapján a portfólió varianciájának kiszámításához szükség volt továbbá a három instrumentum kovariancia mátrixára is. Az alábbi képlet segítségével határoztam meg a portfólió szórását.

$$\text{var}(r_p) = (\omega_1, \dots, \omega_n) \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \dots & \Sigma_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{n,1} & \dots & \Sigma_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

$\text{var}(r_p)$ = portfólió varianciája

ω_n = eszközök súlya

$\Sigma_{n,n}$ = kovariancia mátrix

A Markowitz-féle hatékonysági görbén azt a portfóliót kerestem, amelynek a legnagyobb a hozama a lehető legkisebb kockázat mellett. Más szóval a sharpe rátája maximális. Figyelembe vettem a fentebb említett korlátokat, azaz a portfólióban nincs tőkeáttétel, vagyis az eszközszúlyok összegének egynek kell lennie, illetve short pozíciók felvétele sem lehetséges,

azaz az eszközsúlyok értéke nagyobb, mint nulla. A maximális Sharpe rátát és a korlátokat az alábbi kvadratikus optimalizációs feladatként tudjuk felírni (Merton, 1972):

$$\max_{\omega} \frac{\mu^T \omega - r_f}{(\omega^T \Sigma \omega)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{feltétel: } \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

$$\omega_i \leq 1 \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\omega_i \geq 0 \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

ahol,

μ^T = átlaghozam vektor

A megoldást, vagyis az optimális eszközsúlyok vektorjait a Lagrange függvényrel és az általános redukált gradiens algoritmussal is meg tudjuk keresni.

$$\omega^{T*} = (\omega_1^*, \dots, \omega_n^*)$$

Az induló portfólió 2012 január elsején a következőképpen állt össze:

2. Tábla: Kezdeti portfólió súlyok

2012.01.01		Portfólió érték	3 000 000	
	Súly	Tőke	Ár	Pozíció
ITOT US Equity	26.20%	785 866	57.17	13 746
EWJ US Equity	38.53%	1 155 754	9.11	126 866
EWU US Equity	35.28%	1 058 381	16.16	65 494

Forrás: Bloomberg, saját számítás

A 2. táblázatban szereplő dátumnak megfelelő árfolyamokon számoltam ki a portfólió pozícióit, majd ennek alapján allokaláltam le a rendelkezésre álló tőkét a súlyoknak megfelelően. Az előző fejezetben kifejtettek alapján évente módosítottam a portfólióban lévő súlyokat a modell alapján. Összesen tehát a teljes vizsgált időszak alatt 10-szer súlyoztam át a szimulált portfóliót. Ahhoz, hogy az átsúlyozás folyamata jobban visszakövethető legyen, tranzakciós jegyeket hoztam létre, ahol rögzítettem, hogy a portfólióban mely elemből mekkora pozíció került megvásárlásra vagy eladásra.

A 3. tábla megmutatja, hogy a portfólió átsúlyozásakor milyen tranzakciók történtek meg a portfólión belül.

3. Tábla: Tranzakciós jegy

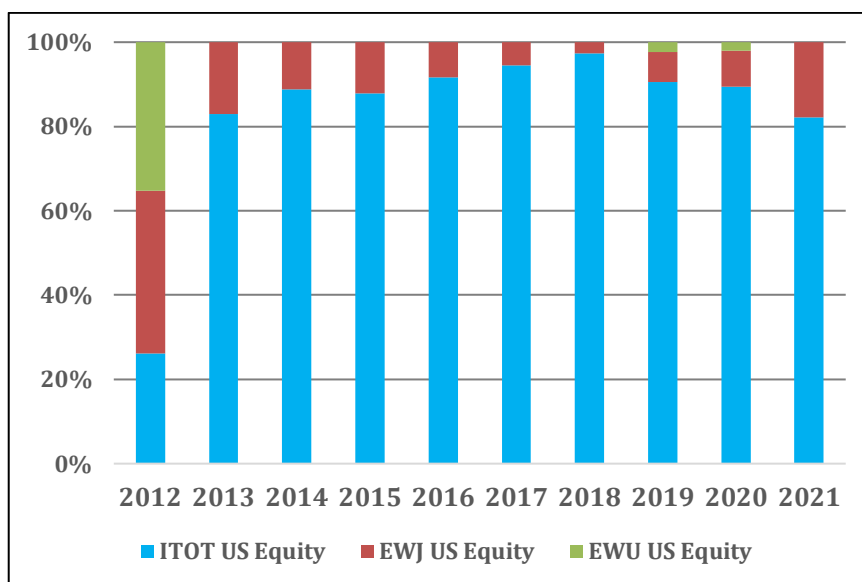
2013.01.01	Név	Pozíció	Ár	Tőkemozgás
ELADÁS	EWJ US Equity	-82 161	9.75	-801 074
ELADÁS	EWU US Equity	-65 494	17.94	-1 174 962
VÉTEL	ITOT US Equity	30 428	64.94	1 976 009

Forrás: Bloomberg, saját számítás

4.1. Portfólió teljesítményének vizsgálata

A 2. ábrán a portfólióban lévő eszközök súlyának alakulását láthatjuk a vizsgált 10-éves periódus alatt. Érdekes megfigyelni, hogy 2012-ben a modell kezdősúlyoknak nagyjából egyharmad arányt adott, majd az elkövetkezendő években masszívan felülsúlyozta az amerikai részvényt piacot lekövető befektetési alapot, illetve konzisztensen alul súlyozta az angliai ETF-et.

2. ábra: Portfólió súlyok alakulása



Forrás: Bloomberg, saját számítás

A modell az angol részvényt piaci ETF-et valószínűleg a volatilitása miatt súlyozta alul - ahogy azt a 4. tábla mutatja - a másik kettőhöz képest tartósan magasabb a szórása nagyjából azonos elvárt hozam mellett.

4. Tábla: Elvárt hozam- szórás

Év	Elvárt hozam (%)			Szórás (%)		
	ITOT US	EWJ US	EWU US	ITOT US	EWJ US	EWU US
2012	1.42	6.63	8.21	26.18	27.61	33.39
2013	6.58	5.99	7.30	25.91	27.51	32.95
2014	8.76	7.54	9.55	19.58	20.76	24.90
2015	8.31	7.08	9.11	16.23	18.54	20.72
2016	7.91	7.14	8.35	15.58	18.79	19.43
2017	7.46	7.11	7.85	12.99	17.52	17.60
2018	8.38	8.00	8.50	12.02	16.66	16.23
2019	7.88	7.11	7.44	13.31	15.72	16.70
2020	6.64	5.88	6.16	13.56	15.13	16.47
2021	5.22	3.89	4.88	19.25	17.12	21.59

Forrás: Bloomberg, saját számítás

Összességében a portfólió a vizsgált periódus alatt a Markowitz-féle optimalizációval sikerült felülteljesíteni az MSCI Word indexet. Az 5. táblában látható, hogy a szimulált portfólió összesítve 1.36-os alfát generált 0.98 Sharpe ráta mellett a benchmarkkal szemben, amelynek a Sharpe rátája az elmúlt 10 évben 0.94-volt.

5. Tábla: Portfólió és a benchmark teljesítménye

Év	M-Port			Benchmark
	Jensen alfa	Treynor ráta	Sharpe ráta	Sharpe ráta
2012-2015	2.08	0.18	1.53	1.49
2012-2017	2.79	0.14	1.07	0.94
2012-2021	1.36	0.14	0.98	0.94

Forrás: Bloomberg, saját számítás

Éves bontásban a 6. tábla alapján azonban a portfóliónak a Markowitz optimalizáció alapján már nem sikerült minden éven felülteljesítenie a benchmarkot. A szimulált portfólió tíz évből négyszer múlta alul az MSCI World index teljesítményét.

6. Tábla: Portfólió és a benchmark teljesítménye éves bontásban

Év	M-Port			Benchmark
	Jensen alfa	Treynor ráta	Sharpe ráta	Sharpe ráta
2012	-2.28	0.14	1.03	1.29
2013	4.96	0.32	2.85	2.73
2014	4.29	0.09	0.91	0.58
2015	3.09	0.03	0.19	-0.01
2016	4.51	0.12	0.84	0.55
2017	-2.25	0.19	2.94	3.70
2018	5.76	-0.06	-0.44	-0.83
2019	-2.73	0.26	2.42	2.73
2020	2.87	0.22	0.75	0.67
2021	-2.87	0.20	1.74	2.04

Forrás: Bloomberg, saját számítás

Érdemes megfigyelni továbbá, a 7. táblában feltüntetett adatokat. A teljes időszak alatt a portfólió szignifikánsan felülmúlta a benchmark értékét ($p=0,04$) - 70%-kal magasabb hozamot ért el, mint a benchmark, azonban ezt a hozam-többletet csak magasabb évesített szórással lehetett elérni. A portfóliónak továbbá három és öt éves periódusban kisebb volt a napon belüli vesztesége, azonban a 2020-as évben a napon belüli veszteség magasabb volt mint 10%.

7. Tábla: Portfólió és a benchmark hozam-szórása

Év	M-Port	Benchmark	M-Port	Benchmark	M-Port	Benchmark	M-Port	Benchmark
	Teljes hozam (%)		Max napi hozam (%)		Max napi veszteség (%)		Évesített szórás (%)	
2012-2015	63.47	53.97	2.41	2.98	-2.67	-3.45	12.18	10.74
2012-2017	86.07	64.09	3.72	2.98	-3.77	-4.90	13.09	11.71
2012-2021	301.59	231.03	9.03	8.78	-11.16	-9.90	16.12	14.03

Forrás: Bloomberg, saját számítás

A következő fejezetekben arra keresem a választ, hogy egyrészt, hogyan minimalizálható a portfólió alulteljesítése az egyes években, illetve, hogy hogyan lehet csökkenteni a napon belüli veszteségek mértékét.

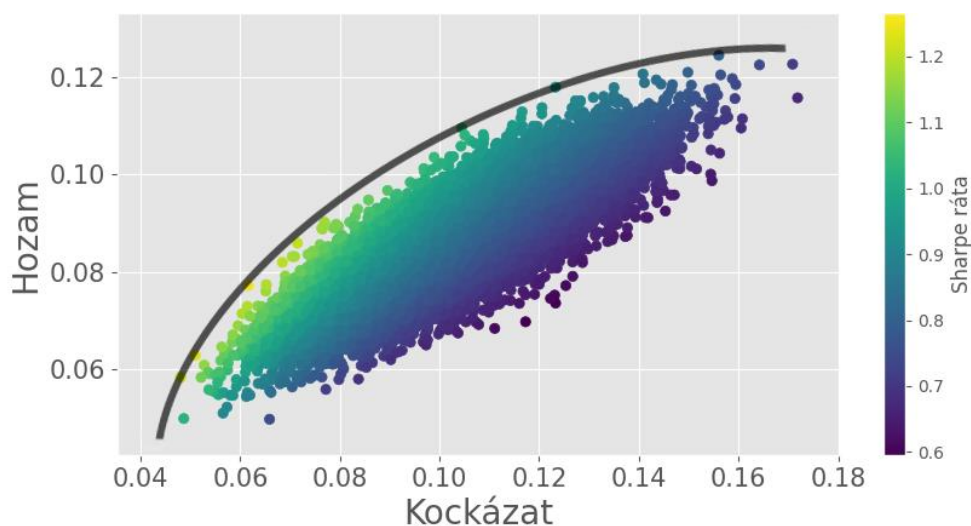
5. CVaR optimalizáció

Ebben a fejezetben a klasszikus optimalizáció egyik továbbfejlesztett modelljét mutatom be, illetve vizsgálom meg empirikusan. A CVaR optimalizáció lényege, hogy olyan portfóliót hozzunk létre, amelynek a lehető legkisebb a napon belüli vesztesége.

5.1. Monte -Carlo szimuláció

A Monte- Carlo szimuláció a pénzügyek területén belül arra szolgál, hogy egy lehetséges kimenetel helyett kimenetek sokaságát vizsgálja az bemeneti paraméterek megváltoztatásával. A módszert széles körben alkalmazzák, beleértve különböző derivatív termékek árazását, cégek belső értékének meghatározását és a nyersanyagárak előrejelzését is. A Monte- Carlo szimuláció módszerét az optimális portfóliók kialakításakor alkalmaztam. A 3. ábrán historikus adatok alapján véletlenszerűen generált portfóliók halmaza látható hozam és a szórás függvényében, melyen a fekete vonal jelképezi a hatékonysági görbét. Ezen vonalon lévő pontok halmaza adja a legnagyobb hozamot adott kockázat mellett.

3. ábra: Monte-Carlo szimulációval létrehozott portfóliók sokasága



Forrás: Bloomberg, saját számítás

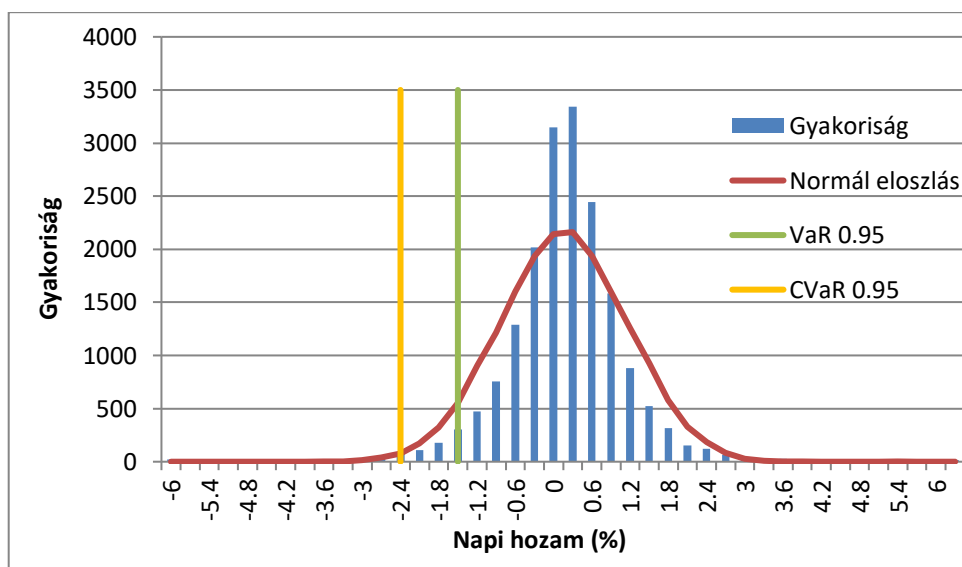
5.2. Value at Risk

A Value at Risk egy széles körben elterjedt kockázatkezelési módszer. A VaR modell az 1990-es évek környékén terjedt el a tőkepiacokon az 1987-es tőzsdekrach-ot követően. JP Morgan volt az első bank, amely üzletágszerűen alkalmazta a VaR modellt, annak érdekében,

hogy a különböző kereskedési részlegek ne legyenek kitéve ugyan annak a kockázatnak. A bank 1996-ban tette közzé a többi bank számára a módszert, utána egy évvel később az amerikai tőzsdedefelügyelet kötelezővé tette a tőzsdén lévő vállalatoknak, hogy a negyedéves jelentésekben a VaR modellel mutassák ki a derivatív termékek kockázatát.

A 4. ábrán az S&P 500 napi hozamainak gyakoriságfüggvénye látható 1950-től. A VaR megmutatja a várható veszteség mértékét egy bizonyos konfidenciaintervallum mellett, ami általában 95%, vagy 99% adott időszak alatt. Például, ha egy részvényportfóliónak az egy napos VaR 0.95 mutatója 100 000 dollár, akkor modell alapján 5% annak a valószínűsége, hogy a portfólió 100 000 dollárt vagy annál nagyobb esést szenvedhet el feltételezve, hogy a piaci hozamok normális eloszlást követnek. A modell tehát nem azt mondja meg, hogy az esés mértéke maximum 100 000 dollár lesz. A VaR szerint továbbá a portfólió minden 20. kereskedési napon várhatóan egyszer elszenvedi a 100 000 dollár mértékű, vagy annál nagyobb esést 5%-os konfidencia intervallum mellett. A való életben azonban egy ilyen egyenletes eloszlásnak igen csekély a valószínűsége mert a nagyobb piaci esések általában csoportokban jelentkeznek.

4. ábra: S&P 500 hozam-eloszlásfüggvénye



Forrás: Bloomberg, saját számítás

A VaR kiszámítására kétféle megközelítés létezik: a múltbéli adatokon alapuló, és a modellen alapuló. A múltbéli adatokkal dolgozó megközelítés a portfólió hozamának idősorát vizsgálja, majd a legalsó percentilis értékeket nézi meg. A modellen alapuló megközelítés a

portfólió várható szórását számítja ki és a normál eloszlás táblát használja, a legalsó percentilisek meghatározására.

5.3. CVaR portfólió empirikus tesztje

A CVaR szintén a kockázatok becslésére szolgáló eszköz, azonban a VaR-al ellentétben ez a modell a várható veszteség átlagát adja meg egy potenciális veszteség-tartományával szemben.

Hasonlóan a Markowitz portfólió tesztjéhez, a CVaR optimalizációt a portfólió paramétereinek kialakításával kezdtem. A CVaR tesztjét szintén 2012 január elsejétől végeztem el 3 millió dolláros alaptőkével. A Markowitz tesztrel megegyezően a portfóliót évente súlyoztam át, a CVaR modell outputjának megfelelő súlyokkal. A CVaR mértéke mértéke az alábbi képlettel adható meg:

$$CVaR_{\alpha}(x) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{f(x,y) \geq VaR_{\alpha}(x)} f(x,y)p(y)dy$$

ahol,

α = konfidenciaintervallum $0 < \alpha < 1$ között

$f(x,y)$ = x portfólió és y eszköz veszteségfüggvénye

$p(y)$ = y eszköz várható sűrűségfüggvénye

VaR_{α} = x portfólió Value at Risk értéke α konfidenciaintervallum mellett

A valószínűségi számításban a CVaR egy feltételes várható értékkel azonosítható, ami a következőképpen írható fel:

$$CVaR_{\alpha}(R) \cong E[R|R \leq VaR_{\alpha}(R)]$$

ahol,

R = napi hozam

E = várható hozam

Ha a CVaR portfóliót behelyettesítjük a Markowitz allokációs modellbe akkor a következőt kapjuk:

$$\min_{\omega} -CVaR_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i R_i \right)$$

$$\text{feltétel: } \mu^T \omega \geq \mu_x$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

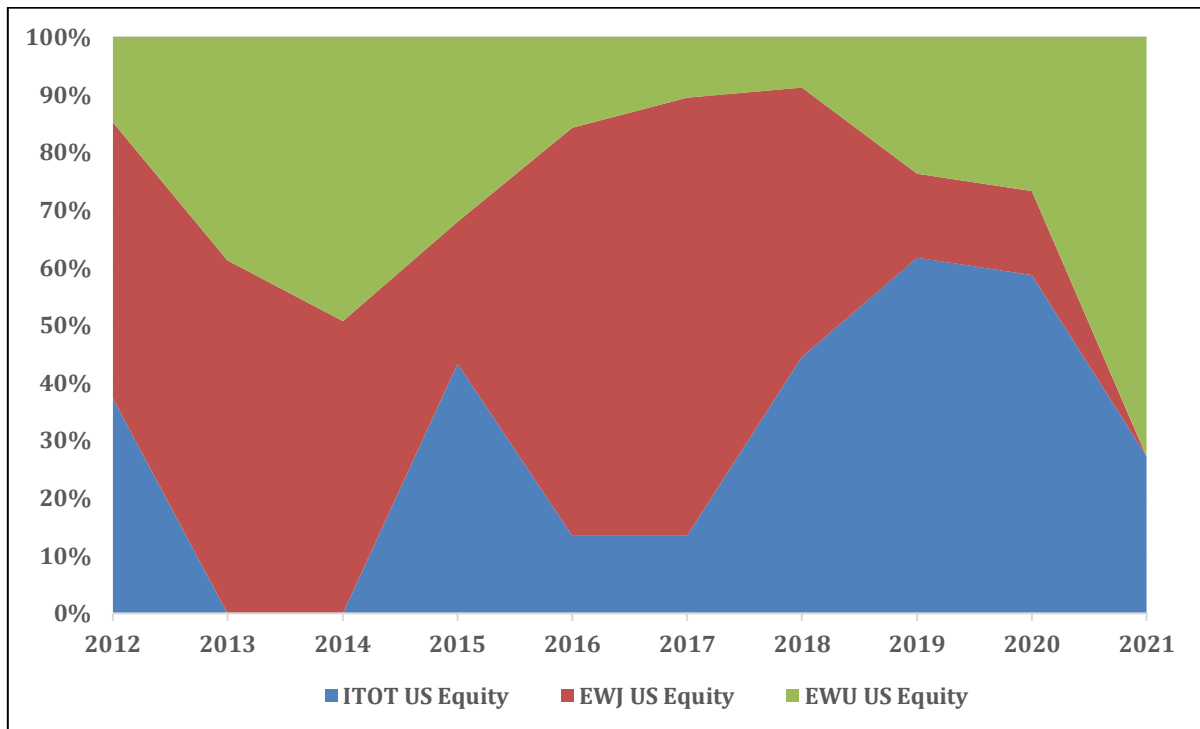
$$\omega_i \leq 1 \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\omega_i \geq 0 \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

A CVaR a definíció szerint egy negatív érték, ezért a negatív CVaR-t minimalizáljuk.

A CVaR optimalizációt a Matlab pénzügyi moduljának segítségével programoztam le. A CVaR minimalizálását a modul Monte- Carlo szimuláció segítségével végzi el, mely során historikus adatok alapján létrehoz 2000 féle portfóliót különböző súlyokkal, és a legkisebb CVaR értékkel rendelkezőt választja ki. A modult az éves átsúlyozás miatt évente frissítettem. A modell az 5. ábrán látható súlyokkal allokalta a tőkét.

5. ábra: CVaR portfólió eszköz-összetétele



Forrás: Bloomberg, saját számítás

A 8. táblából kiolvasható, hogy a CVaR portfólió a teljes időszakot vizsgálva alacsonyabb hozamot ért el (220% teljes hozam a 231%-hoz képest) viszont a szimulált portfólió maximális napon belüli vesztesége és szórása is konzisztensen alacsonyabb, mint a benchmark.

8. Tábla: CVar portfólió hozam- szórása

Év	CVar-Port Benchmark		CVar-Port Benchmark		CVar-Port Benchmark		CVar-Port Benchmark	
	Teljes hozam (%)		Max napon belüli hozam (%)		Max napon belüli veszteség (%)		Szórás	
2012	13.32	15.83	2.43	2.98	-2.05	-2.09	12.65	12.78
2013	30.09	26.67	2.42	2.16	-3.11	-3.45	10.39	9.98
2014	6.92	4.94	2.21	2.03	-2.34	-1.94	9.07	9.13
2015	3.32	-0.87	3.78	2.12	-3.72	-3.72	12.32	13.17
2016	9.17	6.64	2.62	2.60	-3.82	-4.90	13.72	12.92
2017	21.83	22.28	1.36	1.61	-1.18	-1.22	6.61	5.80
2018	-7.21	-9.50	4.51	3.10	-3.06	-3.13	13.07	12.81
2019	29.41	29.51	3.28	2.75	-2.30	-2.44	9.60	10.28
2020	11.67	14.94	9.50	8.78	-9.70	-9.90	26.39	29.11
2021	9.49	22.29	2.26	2.15	-2.15	-2.20	10.81	11.27
2012-2015	57.62	53.97	2.41	2.98	-2.67	-3.45	10.05	10.74
2012-2017	79.51	64.09	3.72	2.98	-3.77	-4.90	11.84	11.71
2012-2021	220.73	231.03	9.03	8.78	-8.52	-9.90	12.54	14.03

Forrás: Bloomberg, saját számítás

A 9. tábla adatait vizsgálva is hasonló következtetésre jutunk. Összességében a CVaR portfólió alulteljesítette a benchmarkot, bár voltak periódusok, amelyek során pozitív alfat generált a modell. Ha viszont Value at Risk mértékét nézzük, akkor a CVaR portfólió a vizsgált periódus alatt konzisztensen jobb eredményt nyújtott. Másképpen megfogalmazva, a CVaR portfólió stressz alatt lévő piaci környezetben kisebb esést szenved el, mint a benchmark.

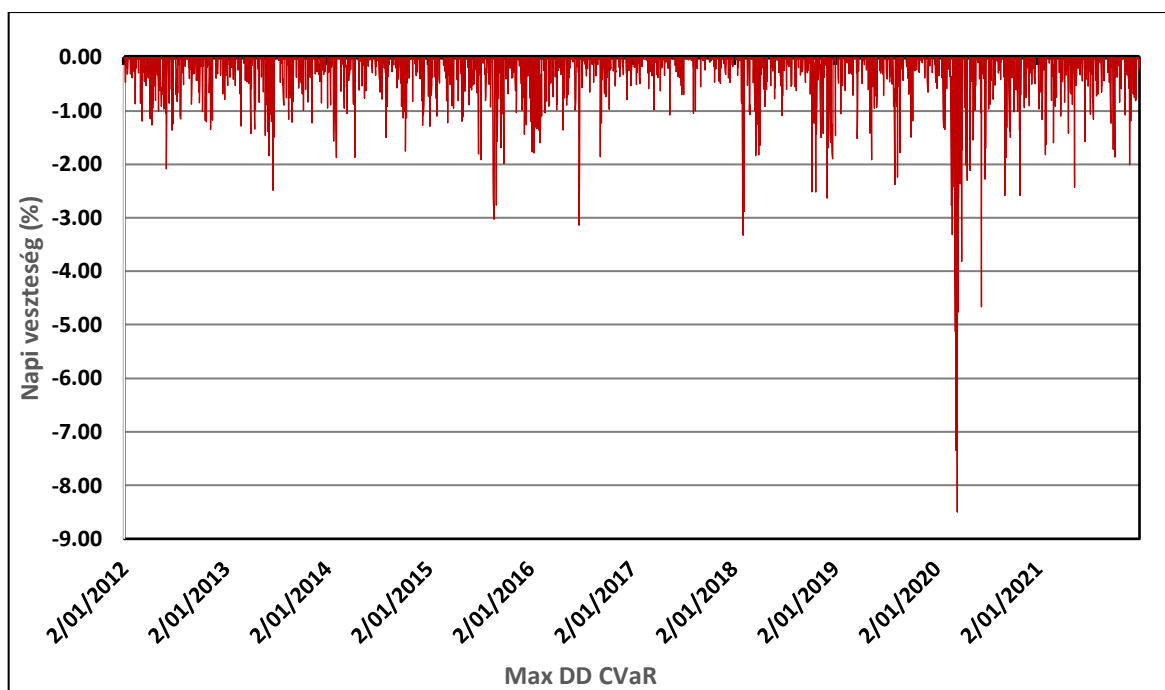
9. Tábla: CVaR portfólió hozam- szórása

Év	CVar-Port		Benchmark		CVaR- Port	Benchmark
	Jensen alfa	Treynor ráta	Sharpe ráta		VaR (0.95)	
2012	-0.65	0.16	1.05	1.24	-1.27	-1.32
2013	1.55	0.29	2.90	2.67	-1.08	-0.87
2014	1.54	0.07	0.76	0.54	-1.06	-1.19
2015	4.58	0.04	0.27	-0.07	-1.25	-1.47
2016	2.81	0.10	0.67	0.51	-1.20	-1.27
2017	-0.68	0.21	3.30	3.84	-0.47	-0.51
2018	5.08	-0.06	-0.55	-0.74	-1.58	-2.07
2019	-3.75	0.25	3.06	2.87	-0.98	-1.14
2020	-4.27	0.16	0.44	0.51	-2.63	-2.94
2021	-11.49	0.10	0.88	1.98	-1.12	-1.31
2012-2015	1.05	0.17	1.39	1.49	-1.01	-1.14
2012-2017	2.02	0.13	1.00	0.94	-1.07	-1.19
2012-2021	-1.09	0.12	0.82	0.94	-1.19	-1.24

Forrás: Bloomberg, saját számítás

Erről tanúskodik a 6. ábra is, amely a CVaR portfólió maximum veszteségét mutatja a vizsgált periódus alatt.

6. ábra: CVaR portfólió maximum napi vesztesége



Forrás: Bloomberg, saját számítás

6. Black – Litterman Model

A Black-Litterman Model Robert Litterman és Fischer Black nevéhez fűződik 1992-ből. A modell megtartja a Markowitz hozammaximalizálás és kockázatminimalizálás elvét, viszont az elvárt hozam definícióját dolgozza át. A klasszikus portfólió optimalizálás ugyanis egyszerűen a múltbéli hozamadatokat átlagát felhasználva számolja ki az elvárt hozamot. Ez a módszer a 2. fejezetben tárgyalt inputok becslési hibáihoz vezethetnek. A múltbéli hozamadatokat használata miatt kialakult becslési hibák Best és Grauer is rámutat 1991-es tanulmányukban. A Black-Litterman modell ehelyett bevezeti az „egyensúlyi portfólió” fogalmát. Ez az egyensúlyi portfólió akkor áll fent, ha a kereslet tökéletesen megegyezik a kínálattal. A Black Litterman modellben ez az egyensúlyi állapot nem mindig áll fent, viszont, ha a várható hozamok eltérnek az egyensúlyi értékektől a piaci egyensúlytalanság előbb utóbb visszatér az egyensúlyi állapotba. A modell lehetővé teszi befektetők számára, hogy saját szubjektív hozamelvárásait tudja hozzáigazítani az egyensúlyi portfólióhoz.

6.1. A modell felállítása

A Black Litterman modell felállítását Walters 2014-es tanulmánya alapján végeztem el. Legyen Π egy n elemű eszközből álló piaci portfólió. A piac által elvárt hozama a következő:

$$\Pi = \begin{pmatrix} r_1^M \\ \vdots \\ r_n^M \end{pmatrix}$$

Legyen r^I a befektető hozamelvárásainak vektorja, amely a portfólióban lévő eszközök többlethozam- elvárásainak vektorjából áll össze:

$$r^I = \begin{pmatrix} r_1^I \\ \vdots \\ r_n^I \end{pmatrix}$$

Legyen $\bar{q}$ a portfóliók elvárt hozama:

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}$$

Ezeket elvárt hozamokat r^I eszközök súlyozásával tudjuk elérni:

$$P = \begin{pmatrix} w_{1,1} & \cdots & w_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m,1} & \cdots & w_{m,n} \end{pmatrix}$$

Π egyensúlyi elvárt hozamok bizonytalanságát Σ kovariancia mátrixal tudjuk definiálni. Ebből adódóan az elvárt hozamok konfidencia szintje az invertált kovariancia mátrix Σ^{-1} lesz.

Legyen befektető elvárt hozamának bizonytalansági komponense .

$$\bar{q} + \varepsilon^I = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

A Black- Litterman modell alapján feltételezzük, hogy ε normális eloszlást követ.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \sim N \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,n} \\ u_{m,1} & u_{m,n} \end{bmatrix} \right]$$

Legyen Ω a bizonytalansági mátrix:

$$\Omega = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,n} \\ u_{m,1} & u_{m,n} \end{bmatrix} = \tau P \Sigma P^T$$

ahol,

$\tau = \text{skalár}$

A Black-Litterman modell tehát súlyozza a befektetői várakozásokat a piaci várakozásokkal. Ebből adódóan a kombinált elvárt hozam a következő:

$$\bar{\mu} = [(\tau \Sigma)^{-1} P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} q]$$

Ahhoz, hogy könnyebben megérthető legyen a Black-Litterman modell, nézzünk egy numerikus példát. A befektető A, B, és C eszközökből szeretne összeállítani magának egy portfóliót. A befektető feltételezései szerint A 1%-kal fogja felülteljesíteni B-t, és C 0.5%-kal fogja felülteljesíteni A-t.

Ezesetben

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{q} = \begin{pmatrix} 1\% \\ 0.5\% \end{pmatrix}$$

Π a historikus átlaghozam, és Σ a kovariancia mátrix lesz. τ gyakran a befektetői várakozások számának rátájaként fejezik ki (Mankert, 2006). Ezesetben $\tau = \frac{n}{m} = \frac{2}{3}$.

6.2. Black – Litterman portfólió empirikus tesztje

A Black- Litterman portfólió tesztjénél a Markowitz és a CVaR tesztekkel megegyező paramétereket használtam. A portfóliót 2012-től indítottam, 3 millió dolláros indulótőkével és korlátként ugyancsak a pozitív súlyokat állítottam be, ami kizárja a short pozíciók felvételének lehetőségét. Ahogy azt az 5. fejezet bekezdő szakaszában írtam a Black – Litterman modell csak az elvárt hozam kiszámításának módszertanában tér el a Markowitz optimalizációtól. Az elvárt hozamokat az 5.1 fejezetben tárgyalt képletek szerint számítottam ki. Az általános praktikák szempontjából a τ skalár értéket 1-nek állítottam be. A befektetői feltételezéseket a 10. táblában láthatók alapján a teszt indulásakor állítottam be, majd a teljes periódus alatt változatlanul hagytam.

10. Tábla: BLM befektetői várakozás mátrix

q Többlethozam	Várakozás	ITOT	EWU	EWJ	ϵ Bizonytalanság
0.05	1	1	0	-1	1.00E-03
0.03	2	1	-1	0	1.00E-03
0.05	3	0	1	0	1.00E-05

Forrás: Bloomberg, saját számítás

A BLM optimalizációt a CVaR-hoz hasonlóan szintén a Matlab pénzügyi moduljában programoztam le. A 11. táblában a BLM portfólió eredményét láthatjuk a benchmarkhoz képest. A BLM portfólió három évet kivéve a figyelt periódus alatt végig pozitív alfát generált és a 2018-as évet kivéve a Treynor rátája is végig pozitív volt. A teljes periódus alatt a BLM portfólió 2.26 alfát generált a benchmark felett.

11. Tábla: BLM portfólió teljesítménye

Év	BLM-Port			Benchmark
	Jensen alfa	Treynor ráta	Sharpe ráta	Sharpe ráta
2012	-0.77	0.16	1.10	1.29
2013	5.77	0.33	2.93	2.73
2014	7.6	0.12	1.19	0.58
2015	2.16	0.02	0.13	-0.01
2016	5.51	0.13	0.91	0.55
2017	-2.63	0.19	2.86	3.70
2018	6.03	-0.06	-0.43	-0.83
2019	-2.15	0.26	2.46	2.73
2020	4.28	0.23	0.78	0.67
2021	0.64	0.24	1.98	2.04
2012-2015	4.12	0.18	1.68	1.49
2012-2017	3.77	0.14	1.14	0.94
2012-2021	2.26	0.15	1.03	0.94

Forrás: Bloomberg, saját számítás

A vizsgált periódus alatt a BLM portfóliója szignifikánsan felülmúlta a benchmarkot. ($p=0,017$) A 12. táblában látható, hogy hozam oldalról a BLM portfólió a tíz év alatt több mint 100%-kal nagyobb hozamot produkált 2%-kal magasabb évesített szórás mellett. Ezen adatok alapján a BLM portfólió enyhén kockázatosabb a benchmarkhoz képest, magasabb hozam termelés mellett.

12. Tábla: BLM portfólió hozama és szórása éves bontásban

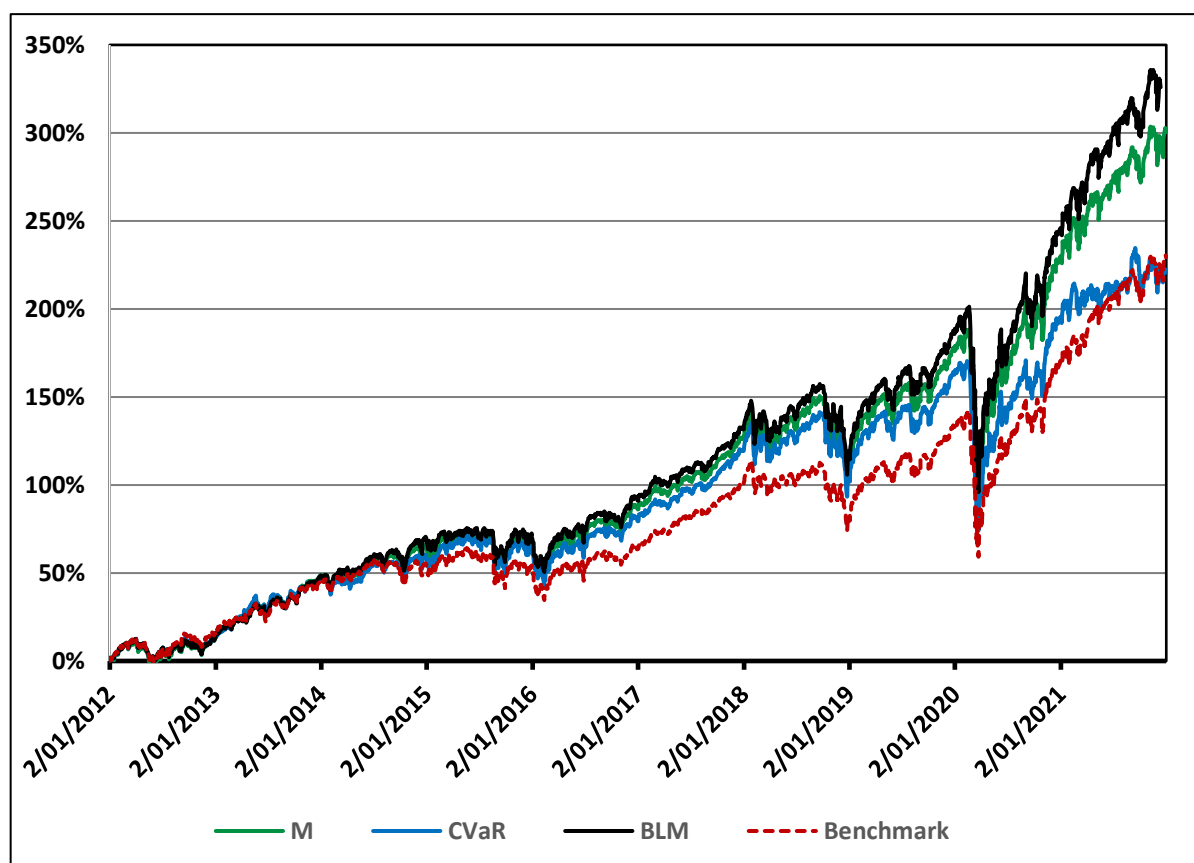
Év	BLM-Port Benchmark		BLM-Port Benchmark		BLM-Port Benchmark		BLM-Port Benchmark	
	Teljes hozam (%)		Max napon belüli hozam (%)		Max napon belüli veszteség (%)		Szórás	
2012	12.88	15.83	2.41	2.98	-2.67	-2.09	12.54	12.78
2013	31.76	26.67	2.34	2.16	-2.48	-3.45	11.07	9.98
2014	12.91	4.94	2.34	2.03	-2.41	-1.94	11.39	9.13
2015	0.96	-0.87	3.69	2.12	-3.81	-3.72	15.23	13.17
2016	11.59	6.64	2.46	2.60	-3.57	-4.90	13.40	12.92
2017	20.88	22.28	1.44	1.61	-1.84	-1.22	7.04	5.80
2018	-6.57	-9.50	4.79	3.10	-3.97	-3.13	16.73	12.81
2019	32.19	29.51	3.41	2.75	-3.07	-2.44	12.65	10.28
2020	19.94	14.94	9.20	8.78	-11.57	-9.90	34.16	29.11
2021	25.85	22.29	2.55	2.15	-2.65	-2.20	13.59	11.27
2012-2015	67.93	53.97	2.41	2.98	-2.67	-3.45	11.68	10.74
2012-2017	90.92	64.09	3.69	2.98	-3.81	-4.90	12.81	11.71
2012-2021	336.28	231.03	9.20	8.78	-11.57	-9.90	16.32	14.03

Forrás: Bloomberg, saját számítás

7. Összefoglalás

Összefoglalásképpen elmondható, hogy a portfólió optimalizációs technikák alkalmazása praktikus eszköz lehet a hosszú időhorizonttal rendelkező kisbefektetők hozam maximalizálására. A dolgozatban vizsgált optimalizációs modellek közül a Markowitz-portfólió 1.36, a Black -Litterman portfólió 2.26-os alfát generált, a CVaR modell pedig 12.54%-os évesített szórással múlta felül az MSCI World index 14.03%-os évesített szórását. Hozam oldalról a Black Litterman portfólió a 10 év alatt 336%-os hozamot, a CVaR portfólió 220%-os hozamot, a Markowitz portfólió pedig 301%-os hozamot generált. A teljes periódus alatt a portfóliók hozam alakulása a 7. ábrán láthatók.

7. ábra: Optimalizációval létrehozott portfóliók vs benchmark hozama 2012-2021



Forrás: Bloomberg, saját számítás

Irodalomjegyzék

Best, M. J., Grauer, R. R., (1991), "On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results", The Review of Financial Studies, Vol. 4, No. 2, pp. 315-342.

Black, F., Litterman, R., (1992), "Global Portfolio Optimization", Financial Analysts Journal, September pp. 28-43.

Chopra V., Ziemba W., (1993), „The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice, Journal of Portfolio Management 19 (2): 6–11.

Damodaran, A., (2021), "Historical implied equity risk premiums", Elérhető: https://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New_Home_Page/datafile/histimpl.html, Letöltés dátuma: 2022.06.01.

DeMiguel, V., Garlappi, L., Uppal, R., (2009), "Optimal Versus Naïve Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy?", Review of Financial Studies, 22(5), 1915-1953.

Fama, E., (1970), „Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", The Journal of Finance, Vol. 25, No. 2 pp. 383-417.

Kritzman, M., (2014), „Six Practical Comments About Asset Allocation." Practical Applications 1 (3), Institutional Investor Journals Umbrella: 6–11.

Mankert, C., (2006), "The Black Litterman Model: mathematical and behavioural finance approaches towards its use in practice", Licentiate Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm.

Markowitz, H., (1952), „Portfolio Selection", The Journal of Finance, Vol 7, (1): 77-91.

Merton, R., (1972), „An Analytic of the Efficient Portfolio Frontier", The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 7, No. 4

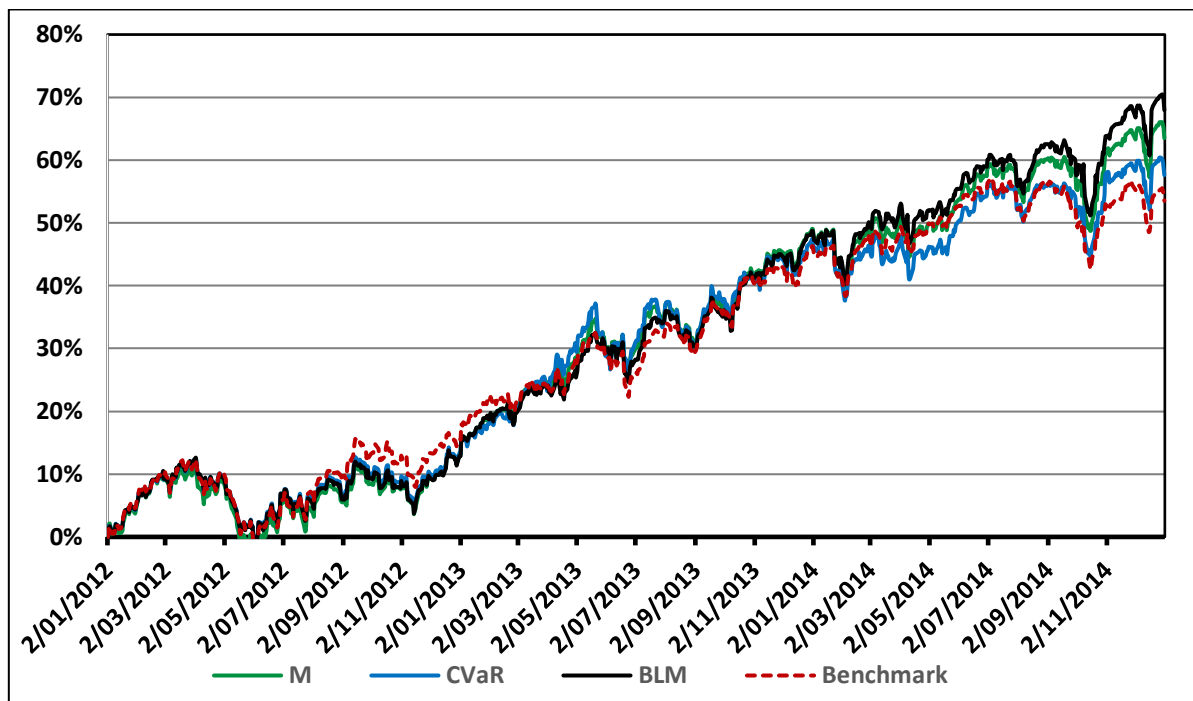
Meucci, Attilio (2010), "Linear vs. Compounded Returns – Common Pitfalls in Portfolio Management", GARP Risk Professional, 49-51, elérhető: SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1586656>

Michaud, R, (1989), „The Markowitz Optimization Enigma: Is Optimization Optimal?", Financial Analysts Journal 45 (1): 31–42.

Walters, J. "The Black-Litterman Model in Detail." 2014. Elérhető SSRN: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1314585.

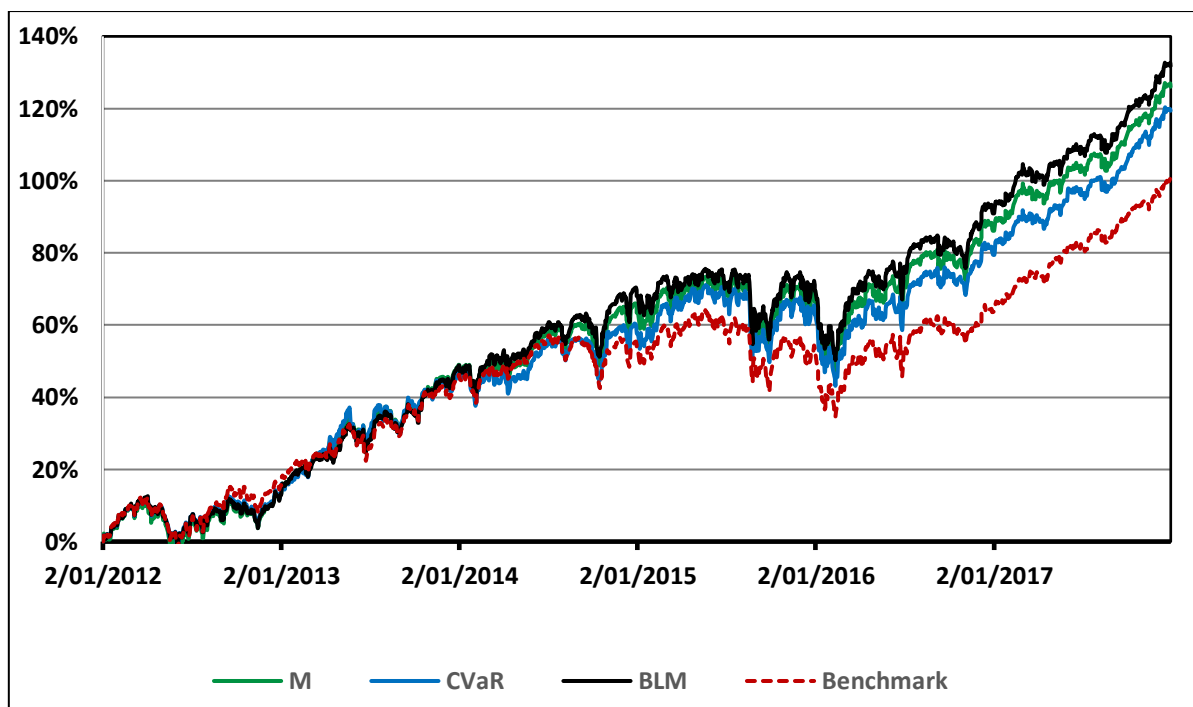
Melléklet(ek)

1. Melléklet : Portfóliók vs benchmark hozama 2012-2015



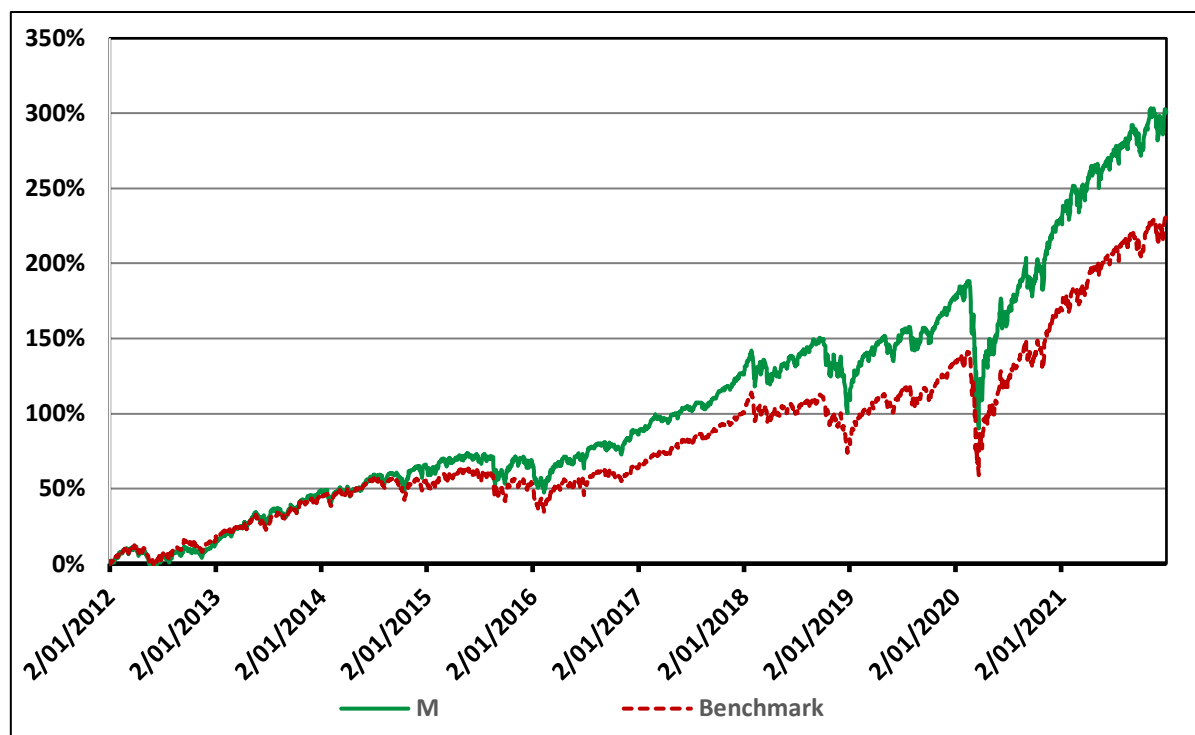
Forrás: Bloomberg, saját számítás

2. Melléklet: Portfóliók vs benchmark hozama 2012-2017



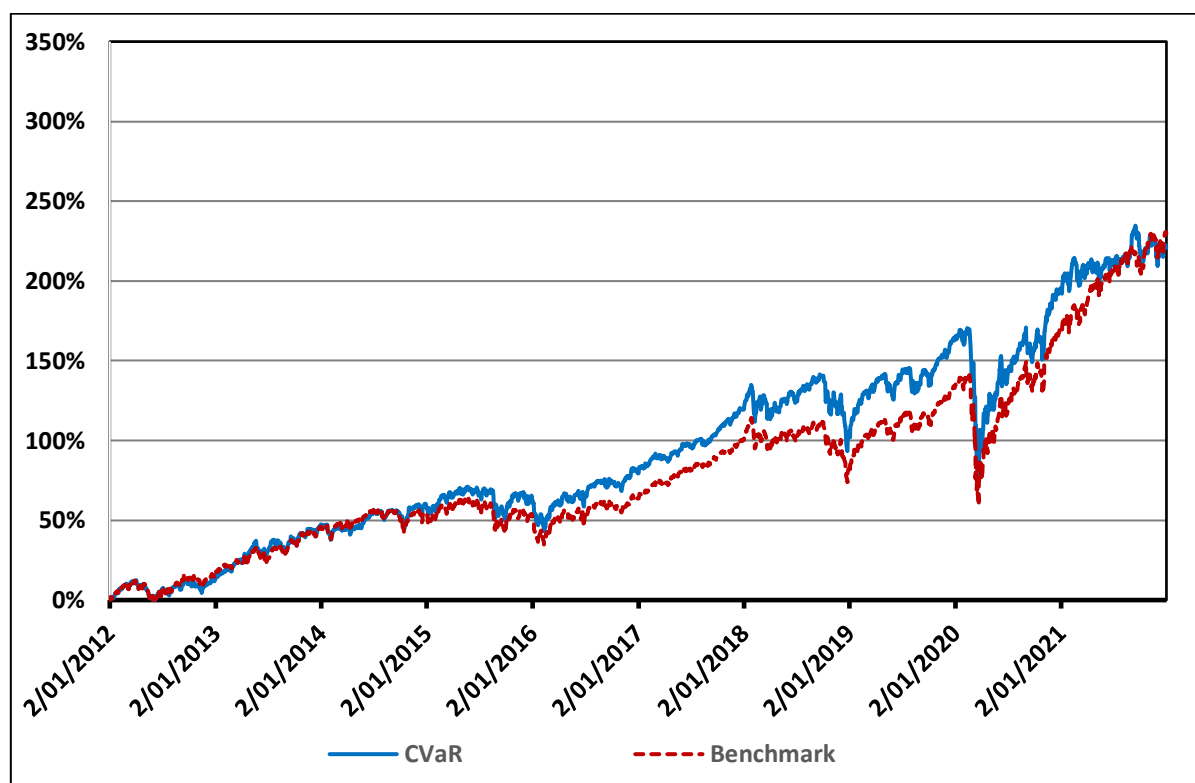
Forrás: Bloomberg, saját számítás

3. Melléklet: M-Port vs benchmark hozama 2012-2021



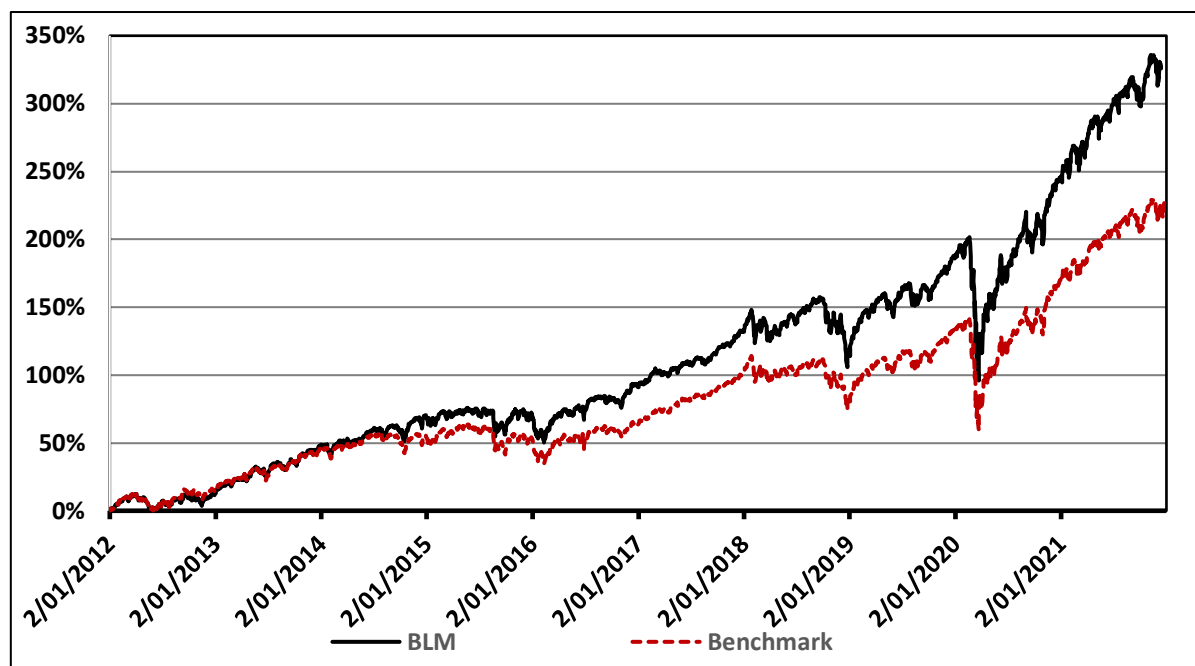
Forrás: Bloomberg, saját számítás

4. Melléklet: CVaR vs benchmark hozama 2012-2021



Forrás: Bloomberg, saját számítás

5. Melléklet: BLM vs benchmark hozama 2012-2021



Forrás: Bloomberg, saját számítás