

**Szegedi Tudományegyetem**  
**Bolyai Intézet**  
**Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszék**

Lanchester-féle harci modell kiterjesztése  
az ukrainai orosz invázióra

*Készítette:*  
**Glavosits Villő**  
BSc II. éves matematika  
szakos hallgató

*Témavezető:*  
**Dr. Röst Gergely**  
tanszékvezető  
egyetemi docens

TDK dolgozat  
Szeged, 2022

# Tartalomjegyzék

|                                                                                                 |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Bevezetés</b>                                                                             | <b>3</b>  |
| <b>2. Matematikai előzmények: Lanchaster differenciálegyenletes modellje</b>                    | <b>4</b>  |
| 2.1. A modell bemutatása . . . . .                                                              | 4         |
| 2.2. A modell történelmi alkalmazásai . . . . .                                                 | 7         |
| <b>3. Zsákmányolással kiterjesztett modell</b>                                                  | <b>9</b>  |
| <b>4. A kiterjesztett modell nem vezethető vissza lineáris transzformációval a klasszikusra</b> | <b>10</b> |
| <b>5. Polinomiális invariáns keresése</b>                                                       | <b>13</b> |
| <b>6. Az új törvény és levezetése</b>                                                           | <b>15</b> |
| 6.1. Az új invariáns . . . . .                                                                  | 15        |
| 6.2. Az invariáns meghatározása integrálással . . . . .                                         | 16        |
| 6.3. Az invariáns meghatározása bázistranszformációval . . . . .                                | 22        |
| <b>7. Zsákmányolási paraméter szerepe a harci dinamikában</b>                                   | <b>23</b> |
| <b>8. Az invariáns alkalmazásai különböző végfeltételek esetén</b>                              | <b>27</b> |
| <b>9. A modell lehetséges kiterjesztései</b>                                                    | <b>29</b> |
| 9.1. Ideiglenes kompartment a zsákmányolt eszközöknek . . . . .                                 | 29        |
| 9.2. Explicit időkéseletetés . . . . .                                                          | 30        |
| 9.3. Kölcsönös zsákmányolás . . . . .                                                           | 33        |
| <b>10. Alkalmazás az ukrajnai orosz invázióra</b>                                               | <b>34</b> |
| <b>11. Összegzés</b>                                                                            | <b>36</b> |
| <b>12. Köszönetnyilvánítás</b>                                                                  | <b>37</b> |
| <b>Függelék</b>                                                                                 | <b>38</b> |
| <b>Irodalomjegyzék</b>                                                                          | <b>39</b> |

## 1. Bevezetés

Az első világháború alatt Frederick W. Lanchester angol mérnök, aki az operációkutatás egyik megalapítója is volt, matematikai modelleket adott a háborúban álló haderők veszteségeinek leírására. Elsősorban az a kérdés foglalkoztatta, hogy mely tényezők befolyásolják a csata kimenetelét, és ezeket hogyan lehetne számszerűsíteni. 1914-ben, az I. világháború kitörése előtt publikálta a légi hadviselésről alkotott elképzeléseit. Ezt könyv formájában először 1916-ban adták ki *Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm* címmel [8], amely olyan differenciálegyenletek leírását tartalmazza, amelyekből levezethetők a ma Lanchester négyzetes törvényeként ismert összefüggések. Ez két hadsereg relatív erősségét és kölcsönhatását modellezi. Lanchester törvényét azóta sokan továbbfejlesztették, és munkája alapot adott más jellegű harci modellek felállítására, mint a hagyományos-gerilla harc vagy a gerilla-gerilla harc [4].

A 2022-es orosz invázió Ukrajna ellen ezen év február 24-én vette kezdetét, amikor Oroszország hadműveletet indított Ukrajna ellen. Többen a második világháború óta Európában zajló legnagyobb katonai konfliktusnak nevezte az orosz ukrán inváziót. Egyedisége ennek a háborúnak, hogy az ukrán haderő nemcsak saját erőforrásait használja a háborúban, hanem az ellenfele által hátrahagyott ép fegyvereket összegyűjti és beveti. Az AFP francia hírügynökség jelentése alapján az ukrán katonák több száz katonai járművet zsákmányolnak, amelyeket a menekülő oroszok hagytak hátra, és ezeket a megszálló hadsereg ellen fordítják. A The Kyiv Independent lehozta, hogy az Oryx elemző oldal összesített napi listái szerint szeptember 1. és 23. között az ukránok több mint 100 harckocsit, közel 200 gyalogsági harcjárművet és páncélozott szállítójárművet, több mint 20 parancsnoki és irányító járművet, valamint több tucat tüzérségi darabot foglaltak el, emellett közel 100 teherautót és terepjárót, valamint néhány speciálisabb járművet is megszereztek. Az Oryx listái az egész országra vonatkozó összesített képi dokumentációval ellátott adatokat tartalmazák. Jakub Janovsky katonai elemző és az Oryx csapat tagja, aki ezeket a listákat állítja össze, azt mondta, hogy ezek 75-80%-át Harkivban fogták el. Az ukrán hadsereg másfélszer annyi orosz tankot zsákmányolt eddig, mint amennyit veszített a háború során. Szakértők szerint a zsákmányolt orosz fegyverek nélkül a harkivi és a limani csata sem végződhetett volna ukrán győzelemmel. A fent említett nyilatkozatok sajtómegjelenéseit a Függelékben található táblázat tartalmazza.

A dolgozat célja, hogy a Lanchester törvényt kiterjesszük a jelenlegi orosz-ukrán háborús szituációra, melyben modellezük a zsákmányolást is, és a kvadratikus törvényt általánosítsuk komplexebb harci helyzetekre.

## 2. Matematikai előzmények: Lanchaster differenciálegyenletes modellje

### 2.1. A modell bemutatása

Mint ahogy a bevezetésben említésre került, Lanchester egy harci modellt írt le. A két szembenálló felet elnevezte kéknek és pirosnak. Legyen  $x(t)$  a pirosak-,  $y(t)$  a kék hadereje  $t$  időpontban. Legyenek  $a$  és  $b$  pozitív paraméterek, amelyek az egyes hadseregek hatékonyságát fejezik ki (azaz, hogy a hadseregek milyen hatékonysággal tudják elpusztítani egymást). A  $\frac{dx}{dt}$  a piros sereg, a  $\frac{dy}{dt}$  pedig a kék sereg haderejének változása. A modell differenciálegyenletrendszere a következő:

$$\frac{dx}{dt} = -ay,$$

$$\frac{dy}{dt} = -bx,$$

ahol  $x(0) > 0$  és  $y(0) > 0$  a haderők kezdeti értékei. A harcnak akkor lesz vége, ha valamelyik csapat katonái elfogynak, azaz amikor valamelyik változó nullává válik. Definiáljuk a következő függvényt az alábbiak szerint:

$$V(t) = x^2(t) - \frac{a}{b} \cdot y^2(t).$$

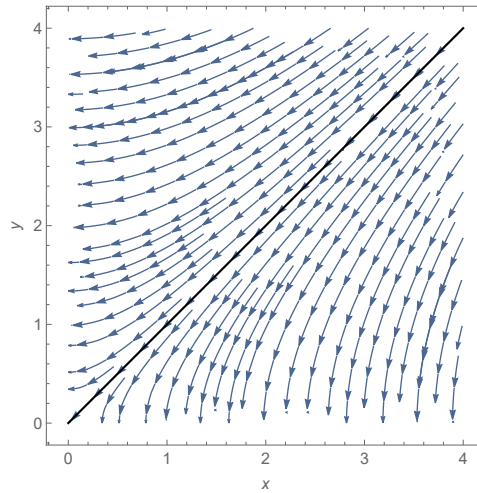
Ez a differenciálegyenlet invariánsa lesz, mivel ha idő szerint deriváljuk a  $V(t)$ -t, akkor konstans nulla függvényt kapunk. Ekkor a csata bármely pillanatában a  $V(0)$  kezdeti értékét veszi fel, azaz:

$$V(t) = V(0),$$

így

$$x^2(t) - \frac{a}{b} \cdot y^2(t) = x^2(0) - \frac{a}{b} \cdot y^2(0).$$

A fenti összefüggést nevezik Lanchester kvadratikus törvénynek. Vizsgáljuk meg, hogy mely esetekben hogyan alakulhat a csata kimenetele. Minden esethez megadtunk egy ábrát, amely az adott feltételeket illusztrálja. A piros függvény jelöli a kezdetiérték probléma megoldását. Az a fél nyer, amely ellenfele a 0 időpillanatban 0-vá válik. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a piros csapat pontosan akkor nyer, ha a kezdetiérték-probléma megoldása az  $x$  tengelyt metszi, a kék csapat pedig akkor, ha az  $y$  tengelyt metszi. Az invariáns megmutatja a megoldást.  $x$  akkor és csakis akkor



1. ábra. Azonos minőségű hadseregek esetén a nagyobb létszámú győz.

nyer, ha  $V(0) > 0$  és  $y$  akkor és csakis akkor nyer, ha  $V(0) < 0$  egyenlőtlenség teljesül.

Emellett azt is megtudjuk, hogy a nyertes csapatnak mennyi a megmaradt katonai létszáma. Például ha a piros csapat nyer valamely  $p^*$  időpontban, akkor  $y(p^*) = 0$ , így  $V(p^*) = V(0)$ . Ekkor a következő teljesül:

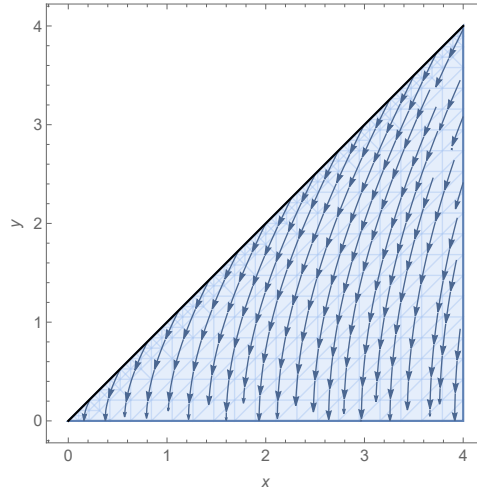
$$x(p^*)^2 = V(0),$$

melyből

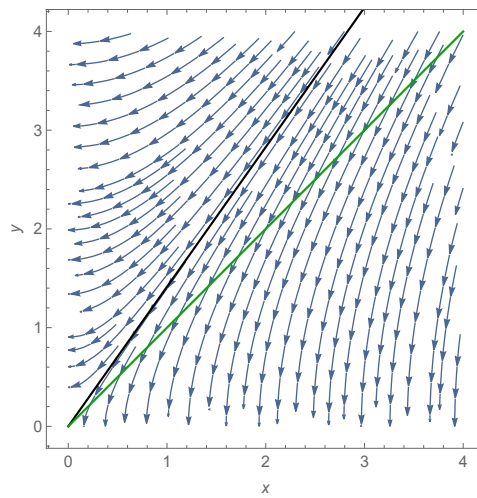
$$x(p^*) = \sqrt{V(0)}$$

kifejezést kapjuk.

- Ha  $a = b$ , azaz a két fél egyenlő minőségű hadsereggel rendelkezik, akkor a csata elején több katonával rendelkező fél fog győzni.
- Ha  $x = y$ , azaz a két félnek azonos számú katonája van, akkor a nagyobb tűzerővel rendelkező fél fog győzni,
- Ha  $x > y$  és  $a > b$ , akkor a piros sereg fog nyerni, míg ha  $x < y$  és  $a < b$ , akkor a kék sereg fog nyerni,
- Ha  $x > y$ , de  $a < b$ , vagy  $x < y$ , de  $a > b$ , akkor a győztes oldal attól függ, hogy a  $b/a$  arány nagyobb vagy kisebb, mint az  $x/y$  arány négyzete. Ha tehát a létszám és a hatékonyság ellentétes irányban egyenlőtlen, akkor a győzelemhez a létszámbeli kisebbség négyzetével egyenlő minőségbeli fölény szükséges.



2. ábra. Azonos létszámú hadseregeknél a jobb minőségű győz.



3. ábra. A fekete vonal dönti el melyik fél győz. Itt  $x$  csapat minősége jobb ( $b = 1, a = 2$ ), a fekete egyenes és a zöld görbe közötti régió az, ahol kisebb kezdeti haderővel is győzni tud.

A következtetések közül az első három nyilvánvaló. Az utolsó a "négyzetes törvény" elnevezés eredete.

## 2.2. A modell történelmi alkalmazásai

Egy nevezetes példa a gettysburgi csata első napjának modellezése a Lanchester modell használatával [1]. A gettysburgi csatát 1863. július 1. és 3. között vívták az Unió és a Konföderáció erői az amerikai polgárháború idején. A csata az egész háború legtöbb áldozatát követelte, és gyakran a háború fordulópontjaként írják le. A differenciálegyenletrendszer a következő:

$$dU/dt = -aC(t),$$

$$dC/dt = -bU(t),$$

ahol  $dU/dt$  jelenti az Unió gyalogosok számának változást adott pillanatnyi idő alatt,  $dC/dt$  jelenti a konföderációs gyalogosok csapatok létszámának változását adott pillanatnyi idő alatt. Adott időben éppen harcban álló Unió és Konföderációs gyalogosok számát rendre  $U(t)$  és  $C(t)$  jelöli. A  $b$  az az arány, mellyel az egyes Unió katonák harcképtelenné teszik a Konföderációs katonákat és  $a$  az az arány, amellyel az egyes Konföderációs katonák harcképtelenné teszik az Unió katonákat.

Először meg kell határoznunk a csapatok hatékonyságát. A Konföderáció 163 ágyút használt, amelyek 175 Unió gyalogos halálát okozták, eközben a 133 Unió ágyú 350 konföderációs áldozatot hozott. Így az  $a/b$  arány a  $(350/133)/(175/163) = 2,4511$  hányadossal becsülhető. A rendszer egy invariánsához a paramétereket a következőképpen választjuk meg:  $b = 1$ ,  $a = 2,4511$ .

A gettysburgi csata első napja, amely sokkal jelentősebb, mint a véres második és harmadik nap, a háború 23. legnagyobb csatája a részt vevő csapatok számát tekintve. Az Unió csapat körülbelül egynegyede, tehát 22000 fő és a Konföderáció egyharmada, azaz 27000 vett részt. Tehát szám-szerűsítve  $U_0 = 22000$  és  $C_0 = 27000$ .

Alkalmazzuk a kvadrátikus törvényt:

$$V(0) = b \cdot U_0^2 - a \cdot C_0^2.$$

Helyettesítéssel

$$V(t) = 27000^2 - 2,4511 \cdot 22000^2 < 0,$$

tehát a modell szerint a Konföderáció nyerte az első napot, amely a történelemben is így volt. Az Unió serege visszavonult a város déli részén lévő magaslatra, és erős védelmi pozíciót alakított ki.

Számos más történelmi csatára is alkalmazták a Lanchester modell valamilyen változatát. Ilyen például az Iwo Dzsimai csata [13], vagy a második világháború során vívott angliai csata [15], illetve az ardenneki offenzíva és a kurszki tankcsata [2]. Hasonló modellezésekkel kimutatták, hogy Napóleon megnyerte volna a waterloo-i csatát, ha a porosz hadtest később ért volna az angolok segítségére [7]

Viselkedéskölögiiai kutatásokban is megfigyelték a Lanchester törvényt, például állatcsoportok közötti konfliktusokra [3]. Ilyenek például a csimpánzokkal [15] és a tűzhangyákkal [12] végzett tesztek. A csimpánz alkalmazás sikeres volt; a tűzhangya viszont nem erősítette meg a négyzetes törvény alkalmazását.

### 3. Zsákmányolással kiterjesztett modell

Az orosz-ukrán háborúban megfigyelhető volt, hogy az ukrán hadsereg nagy mennyiségű fegyvert zsákmányolt az oroszoktól, majd ezekkel saját csapataikat erősítették. Ez a fajta zsákmányolás nem szerepel a klasszikus Lanchester-modellben, ezért azt továbbfejlesztettük a következő rendszeré:

$$x'(t) = -ay(t) + pbx(t), \quad (1)$$

$$y'(t) = -bx(t), \quad (2)$$

ahol  $p \in [0, 1]$  paraméter a zsákmány aránya. A dolgozat fő kérdése az, hogy a zsákmányolás mennyiben befolyásolja a harcok kimenetelét. Ahogyan azt az előző szakaszban is említettük, a harcok kimenetelét nagyban befolyásolja a szemben álló felek száma. Ezen ténymegállapítást nagyban megbonyolíthatja a zsákmányolás mint folyamat, ugyanis ezzel a szemben álló felek száma, és felszereltsége (pl. lövedékek, fegyverek, felszerelés) változik, a zsákmányoló fél számára pozitív, a kifosztott fél számára negatív módon. A Lanchester modell egyszerűségét az is okozta, hogy tudjuk hogy az  $x(t)$  és  $y(t)$  függvények monoton csökkennek. A kiterjesztett modellben ez nem állítható a teljes értelmezési tartományra, hiszen a zsákmányoló fél erőforrásainak száma egyaránt tud növekedni, stagnálni és csökkeni.

#### 4. A kiterjesztett modell nem vezethető vissza lineáris transzformációval a klasszikusra

Mivel a Lanchester modell egy lineáris rendszer, mátrix formában is felírhatjuk, ami hasznos módot ad tulajdonságainak elemzésére. Az  $x$  és  $y$  együtthatóit figyelembe véve a következőképpen alakú:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ez explicit is megoldható, a megoldás során megadjuk a sajátvektorokat és sajátértékeket, majd ezekkel jellemezzük az általános megoldást. A rendszer sajátértékei

$$\lambda_1 = \sqrt{ab}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{ab},$$

és megfelelő sajátvektorai

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{bmatrix}.$$

Ekkor a rendszer általános megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 e^{t\sqrt{ab}} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{bmatrix} + c_2 e^{-t\sqrt{ab}} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{bmatrix}.$$

Behelyettesítve az  $x(0)$  és  $y(0)$  kezdeti feltételeket, amelyek rendre  $x$ , illetve  $y$  seregek kezdeti erejét jelentik, meghatározhatjuk a  $c_1$  és  $c_2$  konstansokat.

Most pedig a kiterjesztett modellre elvégezzük az analóg számolásokat. A rendszer mátrix alakja

$$\frac{d}{dt} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pb & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ezen rendszerben a sajátértékek

$$\lambda_1 = \frac{pb + \sqrt{p^2b^2 + 4ab}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{pb - \sqrt{p^2b^2 + 4ab}}{2},$$

és a megfelelő sajátvektorok pedig

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{b}p - \sqrt{4a + bp^2} \\ 2\sqrt{b} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{b}p + \sqrt{4a + bp^2} \\ 2\sqrt{b} \end{bmatrix}.$$

A rendszer általános megoldása az

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\frac{t}{2}(pb + \sqrt{p^2 b^2 + 4ab})} \begin{bmatrix} -\sqrt{b}p - \sqrt{4ab + bp^2} \\ 2\sqrt{b} \end{bmatrix} \\ + c_2 e^{-\frac{t}{2}(pb - \sqrt{p^2 b^2 + 4ab})} \begin{bmatrix} -\sqrt{b}p + \sqrt{4ab + bp^2} \\ 2\sqrt{b} \end{bmatrix}$$

kifejezés.

Ennek a megoldási módszernek az a hátránya, hogy szemléletesen nem feltétlenül látszik könnyen, hogy különböző paraméterek és kezdeti értékek esetén melyik csapat nyer. Az invariáns haszna már a Lanchester-modellnél világosan látszik, hiszen a  $V(t) = x^2(t) - \frac{a}{b} \cdot y^2(t) = x^2(0) - \frac{a}{b} \cdot y^2(0)$  kifejezésnél az  $x$  csapat pontosan akkor nyer, ha az  $y$  csapat lenullázódik, tehát ha a  $V(0)$  pozitív. Ugyanakkor  $y$  csapat pontosan akkor nyer, ha az  $x$  csapat nullázódik, tehát akkor nyer, ha  $V(0)$  negatív.

A következő kérdést vizsgáljuk : vajon létezik-e olyan lineáris transzformáció, amellyel visszavezethetjük a kiterjesztett modellt a klasszikus Lanchester modellre. Ehhez definiáljuk a következőket:

**4.1. Definíció.** Egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  anti-diagonális mátrix, ha  $a_{ij} = 0$  amikor  $i + j \neq n + 1$ .

**4.2. Definíció.** Egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  erősen anti-diagonális mátrix, ha anti-diagonális mátrix és minden  $i + j = n + 1$  indexpár esetén  $a_{ij} \neq 0$ .

**4.3. Definíció.** Egy  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  erősen anti-felsőtrianguláris mátrix, ha trianguláris és  $a_{ij} \neq 0$   $i \geq j$  esetén.

A következő lemmában belátjuk, hogy egy erősen anti-diagonális mátrix és egy erősen trianguláris mátrixok két dimenzióban nem hasonlítanak.

**4.4. Lemma.** Az  $n = 2$  esetben egy tetszőleges erősen anti-diagonális mátrix és egy tetszőleges erősen anti-felsőtrianguláris mátrix nem hasonló.

*Bizonyítás.* Az erősen anti-diagonális mátrix nyoma 0, viszont az erősen trianguláris mátrix nyoma az  $a_{11}$ , ami nem 0 a definíció szerint, tehát ellentmondásra jutottunk.  $\square$

Ekkor alkalmazzuk a fentieket a modellünkre. A Lanchester modell és a kiterjesztett modell mátrixalakjait ismerjük. Ezek a következők:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} pb & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix},$$

ahol az  $A$  erősen felső trianguláris mátrix és az  $L$  egy erősen antidiagonális mátrix. A lemma garantálja, hogy nincs olyan lineáris transzformáció, amellyel visszavezethetnénk a problémát a klasszikus Lanchester-modellre. Ezek által megfogalmazható az alábbi következmény.

**4.5. Következmény.** *Nincs olyan lineáris transzformáció, amivel visszavezethető a zsákmányolási modell a klasszikus Lanchester modellre.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel indirekten, hogy létezik olyan  $T$  invertálható mátrix, amelyre teljesül az alábbi összefüggés:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ahol  $\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}$  a Lanchester modellnek,  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  pedig a zsákmányolással kiterjesztett modellnek tesznek eleget. Ekkor az alábbiak teljesülnek:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = T \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T \cdot A \cdot T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}$$

Viszont 4.4. Lemma alapján tudjuk, hogy egy erősen antidiagonális mátrix és egy erősen trianguláris mátrix nem hasonló, tehát ellentmondásra jutottunk.  $\square$

## 5. Polinomiális invariáns keresése

Az előző fejezetben láthattuk, hogy nem létezik olyan lineáris transzformáció, amellyel a kiterjeztett modellt vissza tudnánk vezetni a Lanchester törvényre. Így keressünk egy másik lehetséges megoldást az új törvényre: határozzunk meg egy invariánst. Defináljuk az invariáns fogalmát (az irodalomban első integrálnak is nevezik).

**5.1. Definíció.** Egy  $x'(t) = f(x(t), x(t)) \in \mathbb{R}^n$ , differenciálegyenlet - rendszer invariánsa a  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, ha

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x) \cdot f(x) = 0.$$

Ez azért hasznos, mert teljesül a  $V(t) = V(0)$  reláció, melyről könnyen leolvashatjuk a csata kimenetelét.

Érdekes kérdés, hogy érvényben marad-e a Lanchester kvadratikus törvénye, vagy annak valamilyen változata, azaz hogy létezik-e kvadratikus polinomiális invariáns a kiterjesztett modell esetében. Mivel a modell homogén lineáris, világos, hogy egy  $n$ -edfokú tag időbeli deriválás után  $n$ -edfokú tagokat fog generálni, így a polinomiális invariáns keresésénél elegendő azonos fokú tagok összegeit vizsgálni.

**5.2. Állítás.** A kiterjesztett modellnek nincs  $Ax^2 + Bxy + Cy^2$  alakú invariánsa.

*Bizonyítás.* Határozzuk meg a következőket:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x^2) &= 2x \cdot x' = 2x(-ay + bpx) = -2axy + 2pbx^2, \\ \frac{d}{dt}(y^2) &= 2y \cdot y' = -2bxy, \\ \frac{d}{dt}(xy) &= x'y + y'x = (-ay + bpx)y - bx^2 = -ay^2 + bpxy - bx^2.\end{aligned}$$

Amennyiben kvadratikus polinomiális invariánst szeretnénk meghatározni, akkor azt ezen kifejezések lineáris kombinációjával lehet megadni. Viszont figyeljük meg, hogy  $y^2$  tag csak az  $(xy)'$ -ben szerepel, így a kvadratikus invariánsban  $B = 0$  kell hogy legyen. Ekkor az  $(x^2)'$  és  $(y^2)'$  kifejezések maradtak, viszont csak az  $(x^2)'$ -ben szerepel  $x^2$  tag, tehát szintén nem szerepelhet a kvadratikus invariánsban. Ekkor csak az  $(y^2)'$  kifejezés maradt, de mivel ez nem egyenlő nullával, ezért beláttuk, hogy nincs kvadratikus invariáns.  $\square$

Mivel nem találtunk kvadratikus invariánst, ezért próbálunk köbös polinomiális invariánst keresni.

**5.3. Állítás.** Tetszőleges  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $p > 0$  paraméterekre nem létezik köbös invariáns, csak az  $a = 2bp^2$  speciális esetben. Ekkor az invariáns

$$V = -4p^3y^3 + 3px^2y + x^3.$$

*Bizonyítás.* A levezetés analóg a kvadratikus esettel:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x^3) &= 3x^2x' = -3ax^2y + 3bpx^3, \\ \frac{d}{dt}(x^2y) &= 2xx'y + x^2y' = -2axy^2 + 2bpx^2y - bx^3, \\ \frac{d}{dt}(xy^2) &= 2xyy' + x'y^2 = -2bx^2y - ay^3 + bpxy^2, \\ \frac{d}{dt}(y^3) &= 3y^2y' = -3bxy^2.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy  $y^3$  tag csak az  $(xy^2)'$ -ben szerepel, így nem szerepelhet a köbös invariánsban. Emellett azt is használjuk fel, hogy  $-\frac{2a}{3b}(y^3)' + (x^2y)'$  esetén már csak  $xy^2$  és  $x^3$  kifejezések fognak szerepelni.

A  $3p(x^2y)' + (x^3)'$  esetén már csak  $x^2y$  kifejezés fog szerepelni. Ekkor a következőnek kell teljesülnie:

$$6p^2bx^2y - 3ax^2y = 0.$$

Alakítsuk szorzattá:

$$(6p^2b - 3a)x^2y = 0,$$

tehát valamelyik tényezője 0.

De  $x^2y$  nem lehet 0, mivel  $x > 0$  és  $y > 0$ , ezért  $6p^2b = 3a$  melyből  $a = 2bp^2$ . A számolást követve ebben az esetben megkapjuk  $V$ -t.  $\square$

Mivel a köbös invariáns csak a paraméterek egy nagyon speciális konfigurációjára létezik, számunkra nem túl hasznos, tovább kell keresnünk.

**5.4. Állítás.** A kiterjesztett modellnek nincs negyedfokú invariánsa.

A számítás analóg a korábbiakkal, csak hosszadalmasabb, ezért itt nem részletezzük.

## 6. Az új törvény és levezetése

### 6.1. Az új invariáns

A polinomiális invariáns keresése nem járt sikerrel, ezért egy másik megközelítést alkalmazunk. A következő tétel ismerteti a kiterjesztett modell invariánsát.

#### 6.1. Tétel. A

$$V(x, y) = (bx^2 + bpxy - ay^2) \cdot \left| \frac{\sqrt{4a + bp^2}y - \sqrt{b}(2x + py)}{\sqrt{4a + bp^2}y + \sqrt{b}(2x + py)} \right|^{-\frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{4a + bp^2}}}$$

*függvény a zsákmányolással kiterjesztett modell invariánsa.*

*Bizonyítás.* A tétel állítása közvetlenül is ellenőrizhető  $\nabla V(x) \cdot f(x)$  kiszámolásával, ahol  $f$  a modellünk jobboldala. Differenciálni pontosan az egyenesen lévő pontokban nem tudunk, a 7. fejezetben megmutatjuk, hogy ezen pontok az „elfajuló esete” a csatakimenetelnek.

Az egyéb pontokban, parciális deriválás után a következőket kapjuk (vagy az ellentétjét, attól függően hogy a kritikus egyenes alatt vagy felett vagyunk):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) = & (2bx + bpy) \left( \frac{\sqrt{4a + bp^2}y - \sqrt{b}(2x + py)}{\sqrt{4a + bp^2}y + \sqrt{b}(2x + py)} \right)^{\frac{\sqrt{b}p}{\sqrt{4a + bp^2}}} + \\ & \left( \frac{\sqrt{b}p(bx^2 + bpxy - ay^2)}{\sqrt{4a + bp^2}} \right) \left( \frac{\sqrt{4a + bp^2}y - \sqrt{b}(2x + py)}{\sqrt{4a + bp^2}y + \sqrt{b}(2x + py)} \right)^{-1 + \frac{\sqrt{b}p}{\sqrt{4a + bp^2}}} \cdot \\ & \cdot \left( -\frac{2\sqrt{b}(\sqrt{4a + bp^2}y - \sqrt{b}(2x + py))}{(\sqrt{4a + bp^2}y + \sqrt{b}(2x + py))^2} - \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{4a + bp^2}y + \sqrt{b}(2x + py)} \right) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} V(x, y) = & (2bx + bpy) \left( \frac{\sqrt{4a + bp^2}y - \sqrt{b}(2x + py)}{\sqrt{4a + bp^2}y + \sqrt{b}(2x + py)} \right)^{-\frac{\sqrt{bp}}{\sqrt{4a + bp^2}}} - \\ & \left( \frac{\sqrt{b}p(bx^2 + bpxy - ay^2)}{\sqrt{4a + bp^2}} \right) \left( \frac{\sqrt{4a + bp^2}y - \sqrt{b}(2x + py)}{\sqrt{4a + bp^2}y + \sqrt{b}(2x + py)} \right)^{-1 + \frac{\sqrt{bp}}{\sqrt{4a + bp^2}}} \cdot \\ & \left( -\frac{(\sqrt{b}p + \sqrt{4a + bp^2})(\sqrt{4a + bp^2}y - \sqrt{b}(2x + py))}{(\sqrt{4a + bp^2}y + \sqrt{b}(2x + py))^2} + \frac{-\sqrt{b}p + \sqrt{4a + bp^2}y}{\sqrt{4a + bp^2}y + \sqrt{b}(2x + py)} \right) \\ & \frac{\quad}{\sqrt{4a + bp^2}} \end{aligned}$$

Hosszas (itt nem részletezett) rendezés után a következőket kapjuk:

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y) = 2bx \left( \frac{\sqrt{4a + bp^2}y - \sqrt{b}(2x + py)}{\sqrt{4a + bp^2}y + \sqrt{b}(2x + py)} \right)^{-\frac{\sqrt{bp}}{\sqrt{4a + bp^2}}}$$

és

$$\frac{\partial}{\partial y} V(x, y) = 2(bpx - ay) \left( \frac{\sqrt{4a + bp^2}y - \sqrt{b}(2x + py)}{\sqrt{4a + bp^2}y + \sqrt{b}(2x + py)} \right)^{-\frac{\sqrt{bp}}{\sqrt{4a + bp^2}}}$$

Ezeket felhasználva adódik:

$$\nabla V(x) \cdot f(x) = (-ay + bpx) \cdot \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) - bx \cdot \frac{\partial}{\partial y} V(x, y) = 0.$$

□

## 6.2. Az invariáns meghatározása integrálással

Most pedig ismertetjük az invariánshoz vezető utat. Először a differenciálegyenletrendszer egyenleteit elosztjuk egymással (a pozitív síknegyed belsejében, vagyis az  $x > 0, y > 0$  tartományon vizsgálódunk). Az osztás után a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x} - p \quad (3)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Ez egy úgynevezett Chini-féle differenciálegyenlet [6], ami az

$$y'(x) = f(x)y(x)^n - g(x)y(x) + h(x)$$

alakú közönséges, egyismeretlenes, nem-autonóm, elsőrendű differenciálegyenletek osztályába tartozik, ahol ahol  $f(x)$ ,  $g(x)$  és  $h(x)$  tetszőleges sima függvények (itt  $x$  és  $y$  szerepe fel van cserélve (3)-hoz képest, hogy a szokásos jelöléseket használjuk). Ha  $n = 2$ , akkor a Chini-féle differenciálegyenlet Riccati-típusú, ha pedig  $n = 3$ , akkor Abel típusú. Tetszőleges  $n$  esetén, ha  $h(x) \equiv 0$ , akkor az egyenlet Bernoulli típusú. Az általános esetben a Chini-féle differenciálegyenletre nincs explicit megoldás, bizonyos esetekben viszont megoldható. Kamke [6] könyve nyomán (26. oldal (g) eset és 303. oldal I.55, illetve [11]) tekintsük az

$$\alpha = f^{-n-1}(x)h^{-2n+1}(x)(f(x)h'(x) - f'(x)h(x) - ng(x)f(x)h(x))^n n^{-n}$$

kifejezést. Amennyiben ez nem függ  $x$ -től, akkor Chini-féle invariánsnak nevezik, és ekkor megoldható a differenciálegyenlet.

A (3) egyenletet Chini-féle differenciálegyenletként tekintve, az alábbiakat tudjuk:

$$n = -1, \quad f(y) = \frac{ay}{b}, \quad g(y) = 0, \quad h(y) = -p.$$

Ez alapján a (3) egyenletre  $\alpha = \frac{a}{b} \cdot p^4$ , ez tehát nem függ  $x$ -től így Chini-féle invariáns, ezért a differenciálegyenlet is megoldható. Alkalmazzuk a következő helyettesítést:

$$x(y) = yv(y),$$

tehát

$$v(y) = \frac{x(y)}{y},$$

így

$$x'(y) = yv'(y) + v(y).$$

Helyettesítés után az

$$y \cdot \frac{dv}{dy} + v = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{v} - p.$$

alakot kapjuk. Rendezzük

$$y \cdot \frac{dv}{dy} = \frac{a - bpv - bv^2}{bv}$$

egyenletté, majd vegyük a reciprokát:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dv} = \frac{bv}{a - bpv - bv^2}.$$

Integráljuk mindkét oldalt:

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{bv}{bpv - bv^2 - a} dv.$$

Innentől kezdve a differenciálegyenlet megoldása során az egyes integrálok primitív függvényeit keressük. A jobb oldali integrál legyen  $I_1$ , ennek levezetése a következő: először emeljük ki a  $b$ -t. Ekkor az

$$I_1 = -b \int \frac{v}{a - bpv - bv^2} dv.$$

kifejezést kapjuk. Alkalmazva a  $v = \frac{1}{2b}(2bv + bp) - \frac{p}{2}$  összefüggést,

$$I_1 = -b \left( \frac{1}{2} \int \left( \frac{2v + p}{bv^2 + bpv - a} - \frac{p}{bv^2 + bpv - a} \right) dv \right) =$$

egyenletre. Alkalmazzuk az

$$u = bv^2 + bpv - a$$

helyettesítést, így

$$\frac{du}{dv} = 2bv + bp,$$

amiből ( $\neq 0$  esetén)

$$dv = \frac{1}{2bv + pb} du$$

adódik. Alkalmazzuk a helyettesítést az első integrálra, majd a második integrál nevezőjében lévő kifejezést alakítsunk teljes négyzetté. Így

$$I_1 = -b \left( \frac{1}{2b} \int \frac{1}{u} du - \frac{p}{2} \int \frac{1}{\left( \sqrt{bv} + \frac{\sqrt{bp}}{2} \right)^2 - \frac{bp^2}{4} - a} dv \right).$$

A jobb oldali integrálra most alkalmazzuk a következő helyettesítést:

$$m = \frac{\sqrt{b}(2v + p)}{2\sqrt{-\frac{bp^2}{4} - a}},$$

melyből

$$\frac{dm}{dv} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{-\frac{bp^2}{4} - a}},$$

átrendezve

$$dv = \frac{\sqrt{-\frac{bp^2}{4} - a}}{\sqrt{b}} dm.$$

Helyettesítés után

$$I_1 = -b \left( \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du - \frac{pb}{2} \int \frac{\sqrt{-\frac{bp^2}{4} - a}}{\sqrt{b} \left( \frac{(-bp^2 - ba)m^2 - bp^2}{4} - a \right)} dm \right).$$

Ekkor a

$$\frac{(-bp^2 - ba)m^2 - bp^2}{4} - a$$

kifejezést alakítsuk

$$\frac{(-bp^2 - 4a)}{4} \cdot (m^2 + 1)$$

alakra. Így az

$$I_1 = -b \left( \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du - \frac{p}{2} \int \frac{\sqrt{bp^2 - a}}{\sqrt{b} \cdot \frac{-bp^2 - 4a}{4} \cdot (m^2 + 1)} dm \right)$$

formulát kapjuk. A második integrálnál egyszerűsítsünk a konstansokkal, majd emeljük ki őket. Ekkor az

$$I_1 = -b \left( \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du - \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{b} \sqrt{-\frac{bp^2}{4} - a}} \cdot \int \frac{1}{m^2 + 1} dm \right)$$

alakot kapjuk. Végezzük el az integrálásokat, majd bonstuk fel a zárójelet:

$$I_1 = \frac{-b}{2} \ln|u| + \frac{p\sqrt{b}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\frac{bp^2}{4} - a}} \cdot \arctan(m) + C'$$

ahol  $C' \in \mathbb{R}$  paraméter az integrációs konstans. Térjünk vissza az egyenlethez és helyettesítsük be a kapott eredményeket. Így

$$\ln|y| = -\frac{1}{2} \ln|bv^2 + bpv - a| + \frac{p\sqrt{b}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\frac{bp^2}{4} - a}} \cdot \arctan \left( \frac{\sqrt{b}(2v + p)}{2\sqrt{-\frac{bp^2}{4} - a}} \right) + C'.$$

Szorozzuk meg az egyenletet 2-vel, majd a logaritmus azonossága szerint

$$\ln|y^2| = -\ln|bv^2 + bpv - a| + \frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{-\frac{bp^2}{4} - a}} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{b}(2v + p)}{2\sqrt{-\frac{bp^2}{4} - a}}\right) + C$$

alakot kapjuk, ahol  $C = -2C'$ . Rendezéssel adódik, hogy

$$C = -\ln|b \cdot x^2 + bpxy - ay^2| + \frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{-\frac{bp^2}{4} - a}} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{b}\left(\frac{2x}{y} + p\right)}{\sqrt{-4a - bp^2}}\right).$$

A jobboldalon egy komplex függvényt kaptunk, viszont a megadott paraméterek tulajdonságai által valós függvényt fogunk kapni a következő átalakításokkal. A modellben  $a, b, p, y, c$  értékei pozitívak. Használjuk fel az

$$\arctan(ix) = \frac{i}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

formulát. Így a

$$C = -\ln|bx^2 + bpxy - ay^2| + \frac{p\sqrt{b} \left( \ln \left| 1 - \frac{\sqrt{b}\left(\frac{2x}{y} + p\right)}{\sqrt{4a+bp^2}} \right| - \ln \left| 1 + \frac{\sqrt{b}\left(\frac{2x}{y} + p\right)}{\sqrt{4a+bp^2}} \right| \right)}{\sqrt{4a+bp^2}}$$

valós kifejezést kapjuk. Rendezzük a

$$-C = \ln|bx^2 + bpxy - ay^2| - \frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{4a+bp^2}} \cdot \ln \left| \frac{1 - \frac{\sqrt{b}\left(\frac{2x}{y} + p\right)}{\sqrt{4a+bp^2}}}{1 + \frac{\sqrt{b}\left(\frac{2x}{y} + p\right)}{\sqrt{4a+bp^2}}} \right|$$

egyenletet. Alkalmazzuk a logaritmus megfelelő tulajdonságait, így

$$-C = \ln \left| bx^2 + bpxy - ay^2 \right| \cdot \left| \frac{1 - \frac{\sqrt{b}\left(\frac{2x}{y} + p\right)}{\sqrt{4a+bp^2}}}{1 + \frac{\sqrt{b}\left(\frac{2x}{y} + p\right)}{\sqrt{4a+bp^2}}} \right|^{-\frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{4a+bp^2}}},$$

majd vegyük mindkét oldal exponenciálisát. Ekkor kapjuk, hogy

$$K = \left| bx^2 + bpxy - ay^2 \right| \cdot \left| \frac{\sqrt{4a + bp^2}y - \sqrt{b} \left( \frac{2x}{y} + p \right) y}{\sqrt{4a + bp^2}y + \sqrt{b} \left( \frac{2x}{y} + p \right) y} \right|^{-\frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{4a + bp^2}}},$$

ahol  $K = e^{-C}$  konstans. Az egyenlet jobboldalán álló kifejezés tehát konstans, vagyis megkaptuk az eredeti modellünk egy invariánsát. Az alábbiakban ezen invariáns segítségével megadjuk a csata kimenetelét, a Lanchester-törvényt általánosítva a zsákmányolósos esetre. Jegyezzük meg, hogy  $p = 0$  esetben az invariáns a  $V(x, y) = |bx^2 - ay^2|$  alakra redukálódik, és visszakapjuk Lanchester négyzetes törvényét. Mivel  $V$  invariáns és folytonos, az abszolút értéknek nincs jelentősége.

### 6.3. Az invariáns meghatározása bázistranszformációval

Az invariánst egy másik módszerrel is le lehet vezetni, mégpedig bázistranszformációval. Az eljárás a következő: diagonalizáljuk a kiterjesztett modell mátrixát, ahol a kapott  $D$  mátrix főátlójában a sajátértékek szerepelnek. A transzformáció során alkalmazott  $Q$  invertálható mátrix oszlopai a sajátvektorokból állnak. A  $D$  mátrix által meghatározott lineáris differenciálegyenlet-rendszer egy invariánsát az alábbiak szerint egyszerűen meg tudjuk határozni. Tekintsük a

$$\frac{d}{dt} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert. Könnyen ellenőrizhető, hogy ennek

$$\bar{V}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}^{\lambda_2}}{\bar{y}^{\lambda_1}}$$

invariánsa, hiszen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\bar{x}^{\lambda_2}}{\bar{y}^{\lambda_1}} \right) &= \frac{\lambda_2 \bar{x}^{\lambda_2-1} \bar{x}'(t) \bar{y}^{\lambda_1} - \bar{x}^{\lambda_2} \lambda_1 \bar{y}^{\lambda_1-1} \bar{y}'(t)}{\bar{y}^{2\lambda_1}} \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \bar{x}^{\lambda_2} \bar{y}^{\lambda_1} - \lambda_1 \lambda_2 \bar{x}^{\lambda_2} \bar{y}^{\lambda_1}}{\bar{y}^{2\lambda_1}} = 0. \end{aligned}$$

A fentieket alkalmazhatjuk az  $A$  mátrixra a korábban már kiszámolt sajátértékekkel és sajátvektorokkal. Ezután a kapott  $\bar{V}$  invariánsból a változókat visszatranszformálva a  $Q$  mátrix inverzével, kapunk egy invariánst az eredeti változóiban kifejezve. Itt nem részletezett számolásokkal megmutatható, hogy amit így kapunk, az nem független a korábban levezetett invariánstól, és a szintvonalai egybeesnek. Általánosan, egy  $n$ -változós rendszernek  $n - 1$  független első integrálja lehet. Lineáris esetben létezik egy általános eljárás ezek megtalálására, amely a Jordan-féle normálalak-ra transzformáláson alapul. Ez az eredmény a [17] cikkben található. Az eljárás azonban nagyon bonyolult, és konkrét esetekben csak hosszas számolás után kapható meg explicit formában az invariáns.

## 7. Zsákmányolási paraméter szerepe a harci dinamikában

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a paraméterek jelentőségét. A Lanchester modellhez hasonlóan az invariáns megmutatta, hogy az ismert paramétereket behelyettesítve mi lesz a csata kimenetele. Az  $x$  csapat pontosan akkor nyer, ha az  $y$  csapat megsemmisül, azaz  $y = 0$  valamely  $t$  időpillanatban. Emellett az  $y$  csapat pontosan akkor nyer, ha az  $x$  csapat megsemmisül, azaz  $x = 0$  valamely  $t$  időpillanatban. Ez két részre vágja az állapotteret.

Az alábbi tételben pontosan szétválasztjuk a két esetet.

**7.1. Tétel.** *A csata kimenetelét eldöntő kritikus görbe egy lineáris függvény, amelynek egyenlete adott  $a$ ,  $b$  és  $p$  esetén*

$$y_0 = x_0 \cdot \left( \frac{bp}{2a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4ab + b^2p^2}{a^2}} \right)$$

*Bizonyítás.* Legyenek  $x_0, y_0$  olyanok, hogy  $V(x_0, y_0) = 0$  valamely  $a, b$  és  $p$  paraméter esetén.

Ekkor

$$bx_0^2 + bpx_0y_0 - ay_0^2 = 0 \quad (4)$$

vagy

$$0 = \left( \frac{y_0 \cdot \sqrt{4a + bp^2} - \sqrt{b} (2x_0 + py_0)}{y_0 \cdot \sqrt{4a + bp^2} + \sqrt{b} (2x_0 + py_0)} \right)^{\frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{4a + bp^2}}} \quad (5)$$

teljesül.

Először vizsgáljuk meg a (4)-et. Osszuk el a kifejezés mindkét oldalát  $a$ -val, majd rendezzük

$$\frac{b}{a} \cdot x_0^2 = -\frac{bp}{a} \cdot x_0y_0 + y_0^2.$$

alakra.

Adjunk mindkét oldalhoz  $\frac{b^2p^2x_0^2}{4a^2}$ -t, ekkor kis számolással az

$$\left( y_0 - \frac{bpx_0}{2a} \right)^2 = \frac{b}{a} \cdot x_0^2 + \frac{b^2p^2x_0^2}{4a^2}.$$

egyenletet kapjuk. Mivel  $a > 0$ ,  $b > 0$  és  $p > 0$ , ezért gyökvonás és rendezés után

$$y_0 = \frac{bp x_0}{2a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{bx_0^2(4a + bp)}}{a^2}$$

egyenletet kapjuk, ami a tétel állításában is szerepelt. Most pedig vizsgáljuk meg a (5)-öt. A nevezőben minden pozitív, így a számlálót vizsgáljuk meg. Ekkor

$$0 = y_0 \cdot \sqrt{4a + bp^2} - \sqrt{b}(2x_0 + py_0).$$

Rendezéssel

$$0 = y_0 \cdot \left( \sqrt{4a + bp^2} - \sqrt{bp} \right) - 2\sqrt{b}x_0$$

adódik. Mindkét oldalból vonjunk ki  $2\sqrt{b}x_0$ -t. Így

$$2\sqrt{b}x_0 = y_0 \cdot \left( \sqrt{4a + bp^2} - \sqrt{bp} \right)$$

Osszuk el mindkét oldalt  $\sqrt{4a + bp^2} - \sqrt{bp}$ -vel. Ekkor

$$y_0 = \frac{2\sqrt{b}x_0}{\sqrt{4a + bp^2} - \sqrt{bp}}$$

Gyöktelenítéssel és rendezéssel

$$y_0 = x_0 \cdot \left( \frac{bp}{2a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4ab + b^2p^2}{a^2}} \right)$$

adódik.

Azt kaptuk tehát, hogy  $V$  pontosan akkor nulla, ha a tételben szereplő egyenlőség teljesül. Vegyük észre, hogy  $p = 0$ -ra visszkapjuk a Lanchester modell döntetlen esetét.

A 7.1. tételben található egyenes által meg tudjuk határozni azon csaták kimenetelét, amelyeket a kiterjesztett modellel számszerűsítünk. A fent említett egyenes a síknegyedet két részre osztja, hiszen olyan eset nem lehetséges, hogy egy megoldásgörbe metszi a szóban forgó egyenest, mivel  $V$  invariáns és csakis itt nulla. Ekkor az egyenes feletti megoldások esetén az  $y$  csapat győz, az egyenes alatti megoldások esetén az  $x$  csapat győz és ez egyenesen döntetlen.  $\square$

**7.2. Megjegyzés.** Az invariáns egyenes megkapható az explicit megoldás során meghatározott sajátvektorokból is.

Ez a következőt jelenti: adott  $x_0, y_0, a, b$  és  $p$  esetén

- ha  $y_0 < x_0 \cdot \left( \frac{bp}{2a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4ab + b^2 p^2}{a^2}} \right)$ , akkor az  $x$  csapat nyer;
- ha  $y_0 > x_0 \cdot \left( \frac{bp}{2a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4ab + b^2 p^2}{a^2}} \right)$ , akkor az  $y$  csapat nyer.

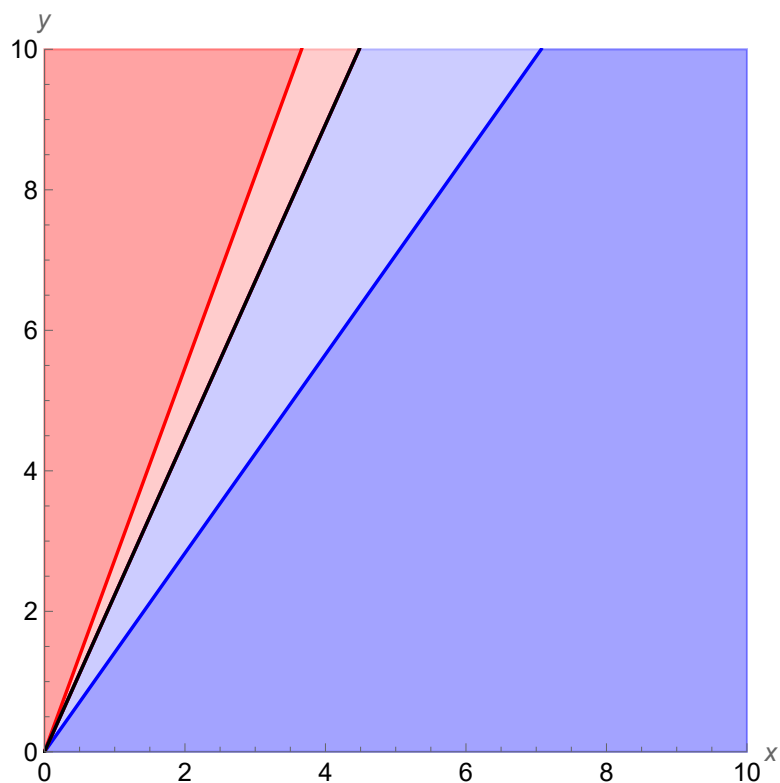
Az egyenes egyenletében megfigyelhető, hogy a csata kimenetele függ a zsákmányolási paramétertől. Határozzuk meg azt a csatakimenetet, ahol a zsákmányolás meg tudja fordítani a kimenetet az  $x$  csapat számára. A lehető legkedvezőbb eset a  $p = 1$ . Ezért ez pontosan akkor lehetséges, ha  $x_0, y_0, a$  és  $b$  esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$x_0 \cdot \left( \frac{b + \sqrt{4ab + b^2}}{2a} \right) > y_0 > x_0 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Mindezekből megállapítható, hogy ahol semmilyen zsákmányolás nem tud segíteni az  $x$  csapat számára, az a következő egyenlőtlenség teljesülése esetén áll fent: alkalmas  $x_0, y_0, a$  és  $b$  esetén

$$y_0 > x_0 \cdot \left( \frac{b}{2a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4ab + b^2}{a^2}} \right).$$

Mivel a kritikus egyenes meredeksége  $p$ -ben monoton nő, az is világos, hogy valamilyen  $p$  esetén az  $x$  csapat győz, akkor minden  $p' > p$  esetén is az  $x$  csapat győz.



4. ábra. A csata kimenetele  $a = 1, b = 2$  paraméterek mellett. A piros tartomány azt jelöli, hogy a csata kimenetele az  $y$  csapat győzelmével zárul, a kék tartomány az  $x$  csapat győzelmével ér véget. A halvány színek jelölik azokat a lehetséges kimeneteleket, amelyek még a zsákmányolási paraméterrel módosíthatóak. A vastag kék egyenes tartozik  $p = 0$ -hoz, a vastag piros pedig  $p = 1$ -hez, a fekete pedig egy köztes zsákmányolási paraméterhez.

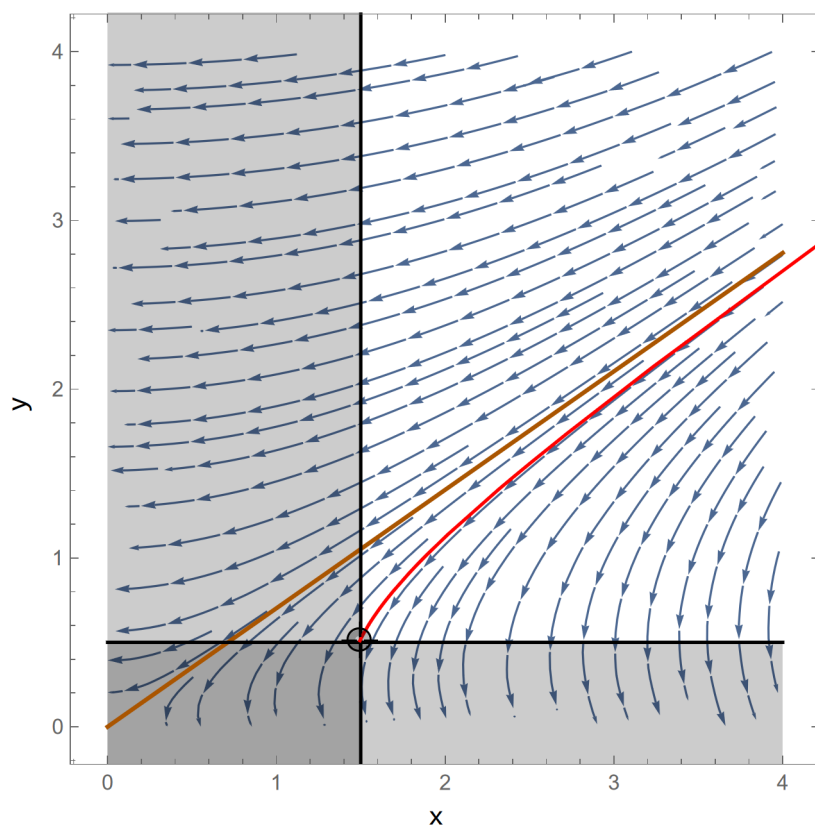
## 8. Az invariáns alkalmazásai különböző végfeltételek esetén

Ahogy már 4. fejezetben is említettük, a kiterjesztett modell megoldását egzaktan is meg lehet adni, hiszen egy konstans együtthatós homogén lineáris rendszer. Ez azt jelenti, hogy a győztes fél a sajátvektor ismeretében is megadható az invariáns nélkül. Ha csak azt szereténk megtudni, hogy a két csapat közül melyik nyer, akkor az explicit megoldás is könnyedén alkalmazható. Abban az esetben viszont, amikor már azt is meg akarjuk határozni, hogy a mennyi végső fél állapota, az explicit megoldás alkalmazása már hátrányosabb lehet, mert több műveletigényű, hosszadalmas számolást igényel.

Azonban van olyan eset is, amikor az explicit megoldást nem tudjuk használni, viszont az invariánst igen. Ha a csata végét az definiálja, hogy  $x(t) = x_*$  és  $y(t) = y_*$  közül melyik következik be hamarabb, ahol  $x_* > 0$  és  $y_* > 0$  a kritikus haderőméretek, akkor az explicit megoldásból nem lehet kiszámolni a győztes fél végállapotát, az invariáns viszont  $V(\bar{x}, y_*) = V(x(0), y(0))$  alapján megadja (itt  $x$  győz, a másik eset analóg). Az így definiált csatakimenetel a való életben stratégia formájában is megvalósulhat, azaz ha a csapatok létszáma egy-egy előre meghatározott kritikus létszámhatár alá esik, akkor az a csapat feladja a csatát és visszavonul.

A csata kimenetelét itt nem a sajátvektor egyenese dönti el, hanem a  $V(x_*, y_*)$  szintvonala. Ekkor egy nemlineáris határoló görbe választja el hogy ki nyer, ami éppen az  $(x_*, y_*)$  ponton áthaladó trajektória, és azon múlik a dolog hogy  $V(x_0, y_0)$  kisebb vagy nagyobb mint  $V(x_*, y_*)$ . Ezt szemlélteti az 5. ábra.

A végfeltételeket tovább lehet bonyolítani: lehetséges, hogy nem egy kritikus haderő esetén adja fel az egyik fél a csatát, hanem a két haderő méretének egy nemlineáris függvényének egy kritikus értékénél, ami egy görbét definiálhat a pozitív síknegyedben. Ezt most itt nem formalizáljuk. Ekkor szintén az a helyzet, hogy az explicit megoldás nem sokat segít, az invariáns segítségével viszont a kezdeti értékből meghatározható, hogy a kritikus görbe melyik pontján érhet véget a csata (a kritikus görbe és  $V$  adott szintvonalának metszete).



5. ábra. Az új csatakimenetel a következőképpen definiált: akkor ér véget a harc, amikor  $x_* = 1,5$  és  $y_* = 0,5$  közül valamelyik először bekövetkezik. A kritikus értéket elérő fél feladja a csatát. A szürke tartomány határoló egyenesein átfutó trajektóriák alapján dönthető el a kimenetel. A narancssárga egyenes jelöli a sajátvektor egyenesét, a piros görbe pedig az új kritikus görbe az  $x_* = 1,5$  és  $y_* = 0,5$  végfeltételek mellett. Amennyiben a kezdeti érték ezen görbe alatt van, akkor  $x$  nyer, ha fölötté, akkor pedig  $y$ .

## 9. A modell lehetséges kiterjesztései

A modellt többféleképpen is tovább lehet fejleszteni. Az első lehetséges kiterjesztés a következő: az a fél, aki tud zsákmányolni a megszerzett eszközöket csak késleltetve, bizonyos idő után elteltével tudja csak felhasználni. Gyakorlatban a késleltetés oka a szállítás, a rendszerbe állítás, vagy a fegyverek rendbehozása lehet. Ez megváltoztatja a kiterjesztett modellt, hiszen a zsákmányolás során a vadászó fél számára akár túl későn kerülhetne bevetésre a megszerzett fegyverállomány, és addigra esetleg már elveszítette a csatát vagy már számára nincsen esély a győzelemre.

### 9.1. Ideiglenes kompartment a zsákmányolt eszközöknek

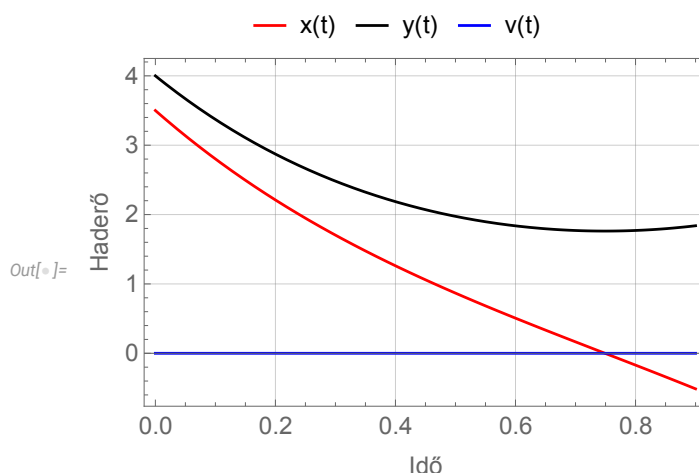
A modell felállításához a frissen szerzett és még nem használt zsákmányra egy  $v(t)$  változót, valamint a bevetés gyorsaságát kifejező  $c$  rátát vezetünk be. A modell a következő:

$$x'(t) = -ay(t) + cv(t), \quad (6)$$

$$y'(t) = -bx(t), \quad (7)$$

$$v'(t) = pbx(t) - cv(t). \quad (8)$$

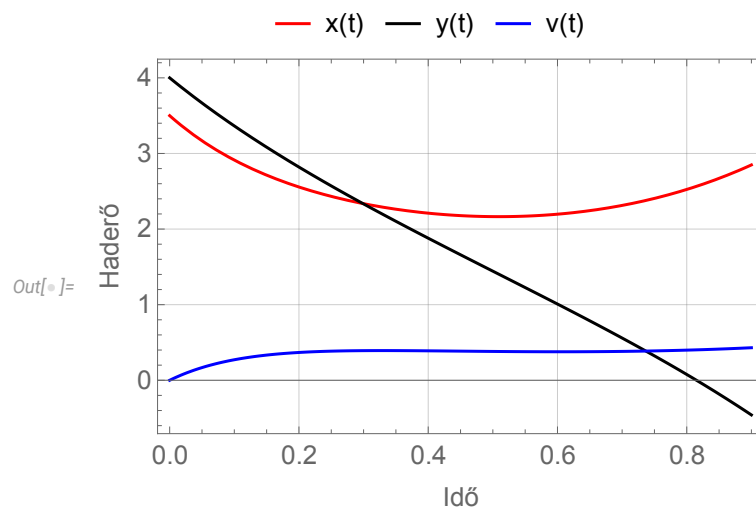
A következő ábrák szemléltetik egy ilyen típusú csata kimenetelét. A kék függvény mutatja az  $x$  csapat haderejét  $t$  idő szerint, a sárga függvény az  $y$  csapat haderejét  $t$  idő szerint és a zöld függvény jelöli a késésben levő és még nem bevetett zsákmányok mennyiségét,  $v(t)$ -t.



6. ábra. A csata zsákmányolás nélkül.

A paraméterek a következők:

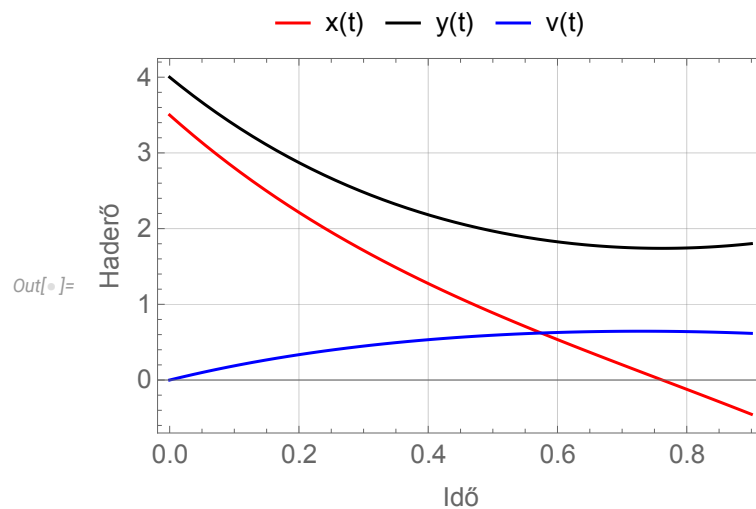
$$a = 1,9, b = 2, p = 0, c = 7.$$



7. ábra. Az  $x$  csapat zsákmányol és nyer.

A paraméterek a következők:

$$a = 1,9, b = 2, p = 0,6, c = 7$$



8. ábra. Az  $x$  csapat zsákmányol, de így is veszít.

A paraméterek a következők:

$$a = 1,9, b = 2, p = 0,3, c = 0.1$$

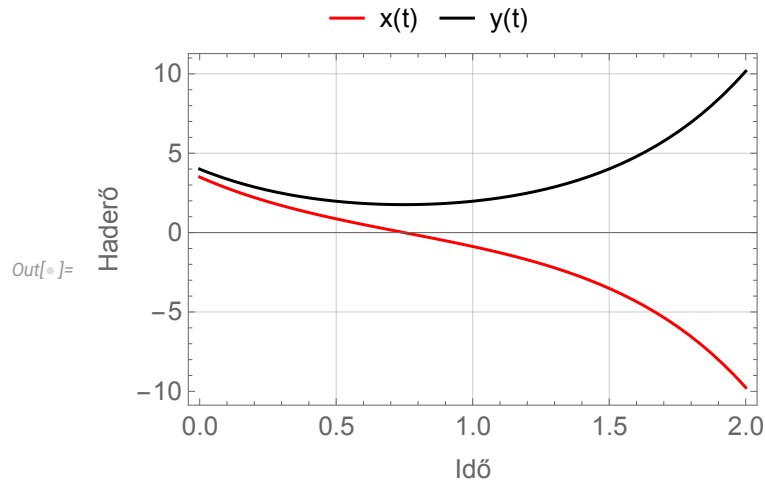
## 9.2. Explicit időképletelés

Még tovább gondolható a kiterjesztés: tegyük fel, hogy a zsákmányoló fél csak egy bizonyos, rögzített idő elteltével képes bevetni az ellenség-

től megszerzett állományt. Ennek okai hasonló a fenti modelléhoz, tehát szállítás, reparálás állhat a háttérben. A rögzített késleltetési időt jelöljük  $\tau$ -val. Ekkor a modell a következő:

$$\begin{aligned}x'(t) &= -ay(t) + pbx(t - \tau), \\y'(t) &= -bx(t).\end{aligned}$$

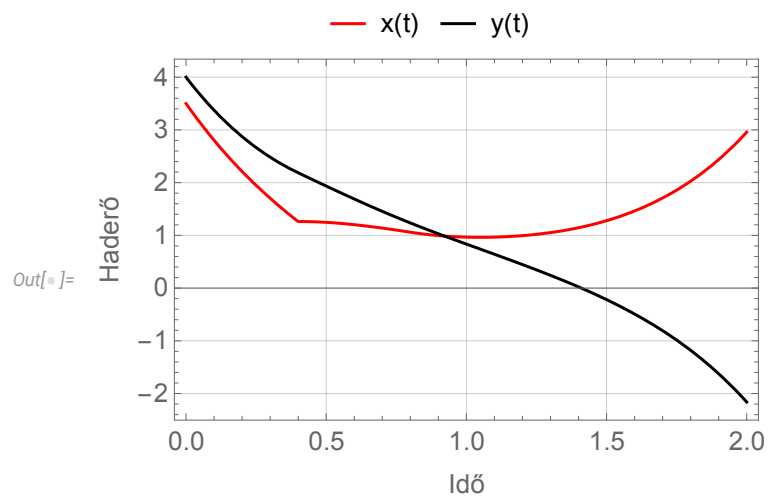
Ez egy időkésleltetési differenciálegyenlet-rendszer, de az alkalmazás szempontjából a kezdeti-érték problémát úgy oldjuk meg, hogy a adott  $x_0, y_0$  kezdeti értékekkel a  $[0, \tau]$  intervallumon egy Lanchester modellt oldunk meg (zsákmányolás nélkül), hiszen zsákmány a legkorábban a  $\tau$  időben lesz bevezethető. Ezután a  $[\tau, 2\tau]$  intervallumon már integrálható az egyenlet, hiszen az  $x(t - \tau)$  tag egy ismert függvényértékhez nyúlik vissza, majd így tovább,  $\tau$  hosszú intervallumokon lépésről lépésre megoldható az egyenlet. A kiterjesztés szintén megváltoztatja a modellt hasonló okból, tehát ha a zsákmányoló fél számára későn, már reménytelen időben érkezhetnek meg a zsákmányolt harciesszkozök, akkor a zsákmányolás, mint tevékenység nem nyújt segítséget a győzelemhez. Az alábbi ábrák ezen folyamatokat illusztrálják. A kék függvény jelöli az  $x$  csapat haderejét  $t$  idő szerint, a sárga függvény pedig az  $y$  csapatét.



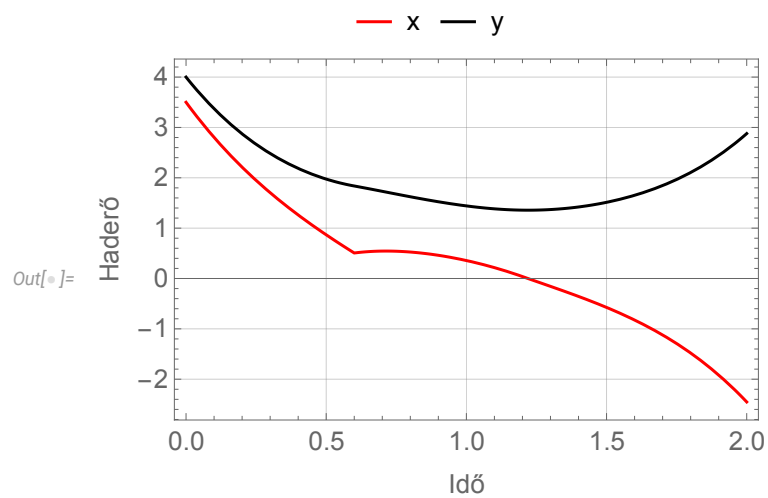
9. ábra. Zsákmányolás nélkül  $x$  veszít.

A paraméterek a következők:

$$a = 1,9, b = 2, p = 0, \tau = 0.$$



10. ábra. Az  $x$  zsákmányol és nyer.  
A paraméterek a következők:  
 $a = 1,9, b = 2, p = 0,6, \tau = 0,4$ .



11. ábra. Az  $x$  zsákmányol, de túl nagy a késleltetés, így veszít.  
A paraméterek a következők:  
 $a = 1,9, b = 2, p = 0,6, \tau = 0,6$ .

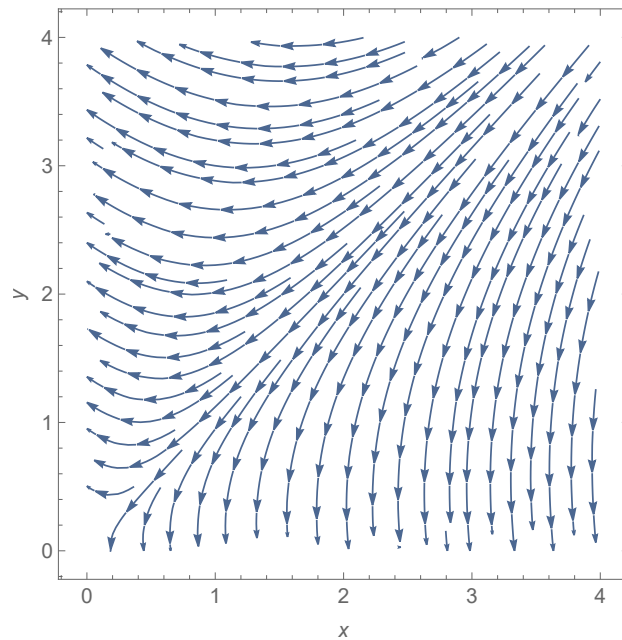
### 9.3. Kölcsönös zsákmányolás

Másfajta megközelítéssel is lehet általánosítani a modellt. Tegyük fel, hogy mindkét fél tud zsákmányolni a másiktól. Ekkor egy új paraméter jelenik meg a modellben, a  $q \in [0, 1]$ , amely az  $y$  csapat zsákmányolási aránya. Ekkor a modell így alakul:

$$x'(t) = -ay(t) + pbx(t),$$

$$y'(t) = -bx(t) + qay(t).$$

Ez a modell megint érdekessé teheti a csata kimenetelét, hiszen váratlanul bármelyik fél szert tehet ráadásul akár más mennyiségű zsákmányolt felszerelésre. Az alábbi ábra szemlélteti egy ilyen csata kimenetelét.



12. ábra. Egy példa kölcsönös zsákmányolásra: a gyengébb tűzerejű fél ügyesebben zsákmányol, ezzel kiegyenlíti a hátrányát. A trajektóriák azonban nem szimmetrikusak a  $y = x$  egyenesre.

## 10. Alkalmazás az ukrajnai orosz invázióra

Oroszország 2022. február 24-én teljes körű inváziót indított Ukrajna ellen. A két ország teljes hadi erejét az 1. táblázat mutatja. A háborúban azonban, és különösen az egyes csatákban viszont nyilván nem a teljes haderők vesznek részt. Az  $a/b$  arányt a háború kezdetén 1.5-re becsülték [10], ami egybevág a kezdeti orosz előrenyomulással.

Az orosz ukrán konfliktus a modern harcok egyik legújabb és ezáltal az egyik legkiszámíthatatlanabb háború mintapéldája. Korábban is voltak példák rá, hogy egész csatákat modelleztek le (pl. Gettysburgi csata), viszont abban a csatában nem volt jelen a zsákmányolás mint módszer. Ez a tevékenység motiválta a Lanchester modell kiterjesztését.

A háború másik érdekessége, hogy a veszteségek és a zsákmányolt eszközök jelentős részben online is dokumentálva vannak. A <https://www.oryxspioenkop.com/2022/02/attack-on-europe-documenting-equipment.html> weboldalon dokumentálva vannak azok az orosz harckocsik és egyéb harci eszközök, melyekről képi megerősítés támasztja alá, hogy megsemmisültek, megsérültek, elhagyták, vagy az ukránok lefoglalták. Nyilván ez nem fedi le a teljes veszteséget az orosz részről, viszont a képi dokumentáció igazolja ezen veszteségeit az oroszoknak, valamint a jelentős mértékű ukrán zsákmányszerzést. Az oldal statisztikáiból megállapítható, hogy a különféle orosz harckocsik veszteségeinek mintegy 35%-át az ukrán zsákmányolás teszi ki. Ez az arány viszonylag stabil minden harci eszköz tekintetében, ezért  $p = 0.35$  egy reális paraméterválasztás (lásd 2. táblázat). A zsákmányolás mint tényező viszont rendkívüli, eddig még nem látott mértékben befolyásolta a csaták kimenetelét, ugyanis az ukrán haderő által zsákmányolt felszerelést később dokumentálhatóan felhasználták. A 7.1 Tétel szerint amíg  $a/b = 1.5$ , addig az ukrán egységeknek 23%-kal nagyobb létszámúnak kell lennie a győzelemhez zsákmányolás nélkül. A  $p = 0.35$  érték ezt 7%-ra csökkenti. A nyugati fegyverekkel és kiképzésekkel azóta az ukrán hadsereg jelentősen erősödött, és az  $a/b$  arány minden bizonnyal jelentősen csökkent. Kiszámolható, hogy ha az  $a/b$  arány 1.3-ra vagy kisebbre csökkent, akkor a zsákmányolás segítségével azonos létszámú csapatok szembenállása esetén már az ukránok győznek. A harkovi felszabadítás során egyes vélemények szerint  $p$  megközelítette a 0.8-at. Ez egybevág azon szakértői nyilatkozatokkal, amelyek szerint a zsákmányolt eszközöknek nagy szerepük volt a limani csata megnyerésében.

1. táblázat: Lőszermennyiségek, csapatlétszám

|                      | Oroszország | Ukrajna   |
|----------------------|-------------|-----------|
| Teljes csapat        | 2 900 000   | 1 000 000 |
| Aktív személyzet     | 900 000     | 200 000   |
| Tartalék személyzet  | 2 000 000   | 900 000   |
| Támadó repülőgépek   | 1 511       | 98        |
| Támadó helikopterek  | 544         | 34        |
| Tankok               | 12 240      | 2 596     |
| Páncélozott járművek | 30 122      | 12 303    |
| Vontatott tüzérség   | 7 571       | 2 040     |

2. táblázat: Zsákmányolt harci eszközök aránya az Oryx elemzése alapján  
(november 6.)

| Harci eszköz                | Orosz veszteség | Ebből ukrán zsákmány | <i>p</i> |
|-----------------------------|-----------------|----------------------|----------|
| Tank                        | 1420            | 492                  | 0.35     |
| Páncélozott jármű           | 684             | 228                  | 0.33     |
| Légvédelmi jármű            | 1626            | 511                  | 0.31     |
| Páncélozott személyszállító | 252             | 90                   | 0.36     |
| Összes katonai eszköz       | 7581            | 2465                 | 0.33     |

## 11. Összegzés

A dolgozatban először ismertettük a klasszikus Lanchester harci modellt, melynek való életbeli alkalmazásait is bemutattuk. Utána, az orosz-ukrán háború körülményeihez adaptálva konstruáltunk egy kibővített modellt, ami a hadieszközök zsákmányolását is figyelembe veszi. Beláttuk, hogy nem létezik lineáris transzformáció, mellyel a kibővített modellt vissza tudnánk vezetni a Lanchester modellre. A kiterjesztett modellre nem létezik kvadratikus törvény, mint amilyen a Lanchester modell esetén létezik. Általános köbös polinomiális invariánst se találtunk a kiterjesztett modellben, csak egy nagyon speciális esetben. Végül egy Chini-féle nem-autonóm differenciálegyenlet explicit megoldásán keresztül találtunk egy megfelelő invariánst. Ezután megvizsgáltuk a paraméterek, elsősorban a zsákmányolási paraméter szerepét a csata kimenetele szempontjából, végül alkalmaztuk a modellt az orosz-ukrán invázióra.

A dolgozat fő kérdése az volt, hogy Lanchester négyzetes törvényét ki tudjuk-e terjeszteni egy zsákmányolási paraméterrel rendelkező általánosabb modellre, és ez a módosítás mennyiben változtatja meg a csata kimenetelét. Sikerült általánosítani a kvadratikus törvényt, és a zsákmányolós modell esetére találtunk egy bonyolultabb törvényt. Ennek segítségével egzaktul karakterizáltuk, melyik esetben ki nyeri a csatát. Megvizsgáltuk továbbá a modell továbbfejlesztésének lehetséges irányait, és alkalmaztuk a modellt az orosz-ukrán háborúra.

## 12. Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Röst Gergelynek a témaválasztásban és a dolgozat megírásában nyújtott segítségért.

Szinten köszönöm Dr. Garab Ábelnek, hogy ráirányította a figyelmemet a kiterjesztett modell invariansának megadására Jordan-normálformával.

## Függelék

|                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Oryx                          | Attack On Europe: Documenting Russian Equipment Losses During The 2022 Russian Invasion Of Ukraine,<br><i><a href="https://www.oryxspioenkop.com/2022/02/attack-on-europe-documenting-equipment.html">https://www.oryxspioenkop.com/2022/02/attack-on-europe-documenting-equipment.html</a></i>                                                     |
| M. Tsvetkova ,<br>A. Vasovic, | Putin puts nuclear 'deterrence' forces on alert,<br><i><a href="https://www.reuters.com/world/europe/western-allies-expel-key-russian-banks-global-system-ukraine-fights-2022-02-27/">https://www.reuters.com/world/europe/western-allies-expel-key-russian-banks-global-system-ukraine-fights-2022-02-27/</a></i>                                  |
| B. Szalai ,                   | A zsákmányolt orosz tankokkal együtt az ukránoknak több tankjuk lehet már, mint a háború kezdetén,<br><i><a href="http://www.szabadeuropa.hu/a/tank-ukrajna-orosz/31770162.html">www.szabadeuropa.hu/a/tank-ukrajna-orosz/31770162.html</a></i>                                                                                                     |
| I. Kossov ,                   | Hundreds of Russian vehicles, weapon systems seized during Kharkiv counterattack,<br><i><a href="https://kyivindependent.com/national/hundreds-of-russian-vehicles-weapon-systems-seized-during-kharkiv-counterattack">https://kyivindependent.com/national/hundreds-of-russian-vehicles-weapon-systems-seized-during-kharkiv-counterattack</a></i> |
| D. Litván,                    | Kiadta a legtöbb nehézfegyvert Ukrajnának? A válasz meglepő,<br><i><a href="https://privatbankar.hu/cikkek/makro/kiadta-a-legtobb-nehezfegyvert-ukrajnának-a-valasz-meglepo.html">https://privatbankar.hu/cikkek/makro/kiadta-a-legtobb-nehezfegyvert-ukrajnának-a-valasz-meglepo.html</a></i>                                                      |

## Hivatkozások

- [1] M. J. **Armstrong**, S. E. **Sodergren** Refighting Pickett's Charge: mathematical modeling of the Civil War battlefield, *Social Science Quarterly* (2015)
- [2] J. **Bracken**, Lanchester models of the Ardennes campaign, *Historical Analysis* **42/4** (1995) 559–577.
- [3] E. **Clifton**, A Brief Review on the Application of Lanchester's Models of Combat in Nonhuman Animals, *Ecological Psychology* **32** (2020) 181–191.
- [4] Á. **Fekete**, Harci modellek vizsgálata differenciálegyenletekkel, *ht tp : //re al .m ta k. hu /1 04 14 1/1/mk k\_ 20 19 \_1 \_1 9. p d f*
- [5] R. L. **Johnson**, Lanchester's Square Law in Theory and Practice, *School of Advanced Military Studies* (1990) 15–16.
- [6] E. **Kamke**, Differentialgleichungen Lösungsmethoden Und Lösungen Band I. Gewöhnliche Differentialgleichungen, *Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig 4. Auflage, Leipzig* (1959)
- [7] Sz. **Kovács**, Waterloo (egy kicsit más szemszögből) *Polygon* **VIII**(1), 1998, 27–38.
- [8] F. W. **Lanchester**, Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm, *Constable limited* (2019) 1–222.
- [9] N. **MacKay**, C. **Price** Safety in Numbers: Ideas of Concentration in Royal Air Force Fighter Defence from Lanchester to the Battle of Britain, *History* **96/3 (323)** (2011) 304–325.
- [10] R. **Manikandan**, B. **Varadharajan**, M. **Viji**, C. Sri. **Anukeshavi**, The mathematical model based on the battle of Ukraine and Russia, *International Jurnal for Research Trends and Innovation* **7/6** (2022) 162–165.
- [11] Maplesoft, Solving ODEs of the Form Chini, <https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=odeadvisor%2FChini>
- [12] N. J. R. **Plowes**, E. S. **Adams** Refighting Pickett's Charge: mathematical modeling of the Civil War battlefield, *Social Science Quarterly, Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* **272** (2005) 1809–1814.

- [13] H. C. **Schramm** Lanchester Models With Discontinuities: An Application to Networked Forces, *military operations Research* **17/4** (2012) 59–68.
- [14] J. G. **Taylor**, Lanchester Models of Warfare, *Operations Research Society of America* Vol I. & II. (1983)
- [15] M. L. **Wilson**, N. F. **Britton**, N. R. **Franks**, Chimpanzees and the mathematics of battle. Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences, *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* **269** (2002) 1107–1112.
- [16] **Wikipedia**, Battle History, *Wikipedia* [https://en.wikipedia.org/wiki/Battle\\_of\\_Gettysburg](https://en.wikipedia.org/wiki/Battle_of_Gettysburg) (letöltés: 2022.11.10.)
- [17] M. **Falconi**, J. **Llibre**, , n-1 Independent First Integrals for Linear Differential Systems in  $\mathbb{R}^n$  and  $\mathbb{C}^n$ , *Qual. Theory Dyn. Syst.* 4 (2003), no. 2., <https://doi.org/10.1007/BF02970860>