

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

Gömbi körlemezbe írt véletlen gömbi körpoligonok

ORSZÁGOS TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

Készítette:

Nagy Kinga

Matematikus MSc hallgató

Témavezető:

Dr. Vígh Viktor

egyetemi docens

Szeged
2023

TARTALOMJEGYZÉK

Ábrák jegyzéke	2
1. Bevezetés és eredmények	4
2. Használt eszközök	5
3. Az 1. tétel bizonyítása.	8
4. Záró megjegyzések	11
5. Függelék	11
Köszönetnyilvánítás	12
Hivatkozások	12

ÁBRÁK JEGYZÉKE

1. Két gömbi körlemez különbségének területe.	6
2. A keresett ív a metsző kör síkjában.	7
3. A pontpár átparaméterezése.	9

KIVONAT. A dolgozat szférikus körlemezbe írt véletlen körpoligonok aszimptotikus tulajdonságaival foglalkozik. A véletlen modellben egy r sugarú gömbi körlemezről választott egyenletes minta gömbi r -orsókonvex burkát –vagyis az összes őt tartalmazó r sugarú gömbi körlemez metszetét– tekintjük, majd vizsgáljuk a kapott körpoligon tulajdonságait, ha a minta elemszáma tart végtelenbe.

A dolgozat kapcsolatot teremt két ismert eredmény között: az egyik modellben az egyenletes minta a fél gömbfelszínről származik, és azok gömbi konvex burkát tekintjük; a másik modellben a pontok egy síkbeli r sugarú körlemezről származnak, a vizsgált véletlen objektum pedig a pontok r -orsókonvex burka. A véletlen szférikus-, valamint orsókonvex poligon csúcsszáma mindkét modellben egy véges konstanshoz tart, és ezen konstansok megegyeznek. A dolgozatban igazoljuk, hogy a csúcsszám gömbi orsókonvexitás esetén –amely átmenetként értelmezhető a két modell között– is ugyanezen konstanshoz tart.

1. BEVEZETÉS ÉS EREDMÉNYEK

Rényi és Sulanke [10] iskolateremtő munkásságát követve Bárány, Hug, Reitzner és Schneider [3] 2017-es cikkükben a következő valószínűségi modellt vizsgálták: jelölje K a fél S^{d-1} gömbfelületet, és legyen $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ egy K -n vett egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenül választott n -elemű ponthalmaz. Jelölje továbbá K_n az X_n minta gömbi konvex burkát, azaz az összes $\bar{o}$ t tartalmazó fél gömbfelület metszetét. A problémakör fő kérdései a kapott K_n gömbi politóp tulajdonságainak vizsgálata aszimptotikusan, amint $n \rightarrow \infty$. Ilyen tulajdonságok például K_n csúcsszáma, hiperlapjainak száma, vagy a $\text{SArea}(K \setminus K_n)$ kimaradó felszín. A cikkben többek között igazolták, hogy a kapott véletlen gömbi politóp hiperlapjainak száma $n \rightarrow \infty$ mellett egy véges, csak dimenziótól függő konstanshoz tart.

A fent leírt gömbfelületen vizsgált modell egy közeli rokon problémája a következő, euklideszi síkon, orsókonvexitásban definiált probléma. Egy ponthalmaz r -orsókonvex vagy r -konvex burkán az összes $\bar{o}$ t tartalmazó r -sugarú körlemez metszetét értjük. Véges sok pont esetén az orsókonvex burok véges sok körlemez metszeteként áll elő, így az oldalak és csúcsok fogalma értelemszerűen definiálható. Az orsókonvexitás részletes leírását lásd [4]. Fodor, Kevei és Vígh 2014-ben igazolták, hogy ha egy r -sugarú zárt körlemezről egyenletes eloszlás szerint n pontot választunk, majd ezek r -konvex burkát tekintjük, akkor a csúcsszám (ezzel ekvivalensen az élek száma) $n \rightarrow \infty$ mellett egy véges konstanshoz tart [7]. Fodor 2020-ban ezen eredményeket általánosította magasabb dimenzióra, mely szerint a hiperlapok száma szintén egy véges, csak dimenziótól függő konstanshoz tart [6].

A fenti eredmények egy érdekessége, hogy a csúcsszámhoz tartozó aszimptotikus konstans megegyezik az S^2 gömbfelületen és a síkbeli orsókonvexitásban. A dolgozatban ezen eredmények analógiát igazoljuk a gömbi orsókonvexitásban, ezzel a két eredmény közötti kapcsolatot is vizsgálva.

Megjegyezzük, hogy a véletlen politópok kérdésköre sokat kutatott téma. A lineárisan konvex eset átfogó áttekintését lásd [2], az orsókonvexitásbeli eredményeket, valamint azok lineáris konvexitásbeli eredményekhez való kötődésének friss összefoglalóját lásd [8].

A dolgozat egy részében S^2 -t gömbi geometrai szemlélettel vizsgáljuk, és erre a terminológiánk is illeszkedik, egyes esetekben pedig S^2 -t $\mathbb{R}^3$ -be ágyazottként tekintjük, és euklideszi terminológiát használunk.

Két pont távolságán általában a gömbi távolságukat fogjuk érteni, vagyis az őket összekötő főkör közéjük eső ívének hosszát, két kör távolságán pedig középpontjaik (gömbi) távolságát értjük. Ha $0 < r \leq \pi/2$, akkor egy r sugarú gömbi körlemez, vagy euklideszi terminológiában gömbsüveg, azon pontok halmaza S^2 -n, amelyek gömbi távolsága a középponttól legfeljebb r . Speciálisan, $r = \pi/2$ esetén a fél gömbfelületet kapjuk vissza.

Legyen $0 < r \leq \pi/2$, és tegyük fel, hogy az $X \subseteq S^2$ ponthalmaz része valamely r sugarú gömbi körlemeznek. Ekkor jelölje $\text{conv}_r(X)$ az X halmaz r gömbi orsókonvex burkát, azaz az összes X -et tartalmazó r sugarú gömbsüveg metszetét. Ha X véges, akkor $\text{conv}_r(X)$ -t gömbi körpoligonnak nevezzük, ami véges sok gömbsüveg metszeteként áll elő. A továbbiakban az orsókonvexitás r sugarát rögzítettnek tekintjük, és jelöléseinkben nagyrészt elhagyjuk.

A dolgozatban vizsgált valószínűségi modell a következő: legyen K egy r sugarú szférikus körlemez, és tekintsük az $X_n = \{P_1, \dots, P_n\}$ n -elemű, K -ban egyenletesen

választott független mintát, valamint jelölje ezek r -orsókonvex burkát K_n . Jelölje továbbá egy gömbi halmaz szférikus területét (felszínét) $A(\cdot)$, egy gömbi körpoligon csúcsszámát $f_0(\cdot)$.

A fő eredményünk a következő.

1. tétel. *A fenti jelölésekkel élve a csúcsszám, valamint a kimaradó terület várható értékének határértéke*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f_0(K_n)) = \frac{\pi^2}{2}$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(A(K \setminus K_n)) \cdot n = \pi^3(1 - \cos r).$$

Megjegyezzük, hogy a két eredményt a jól ismert Efron-azonosság köti össze (lásd (6), valamint [2, 9]).

Az 1. tételből $r = \pi/2$ esetén visszkapjuk [3] megfelelő eredményét $d = 2$ dimenzióra. Továbbá szemléletesen $r \rightarrow 0$ mellett visszkapjuk a síkbeli eredményt is, azonban ezt formálisan nem sikerült igazolnunk.

2. HASZNÁLT ESZKÖZÖK

Ebben a fejezetben az 1. tétel bizonyításában használt technikai lemmákat mondjuk ki.

2. lemma. *Jelölje $A(t)$ két r sugarú, $t \leq r$ távolságú kör különbségének területét. Ekkor*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t)}{t} = 2 \sin r.$$

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy mindkét kör síkja merőleges az xy síkra, és a vele vett metszeteik az

$$e : x = \cos r \quad \text{és} \quad f : x = \frac{\cos r - x \cos t}{\sin t}$$

egyenesek (a konstrukció xy síkra vett vetületét lásd 1. ábra). Ekkor a körök különbségének xy síkra vett vetülete pontosan az e és f egyenesek, valamint az egységkörív által meghatározott tartomány, melyet az ábrán sötétrel jelöltünk.

A területet egy integrállal számítjuk ki, ahol az integrációs tartomány pontosan a fent leírt vetület. A kérdéses terület ekkor

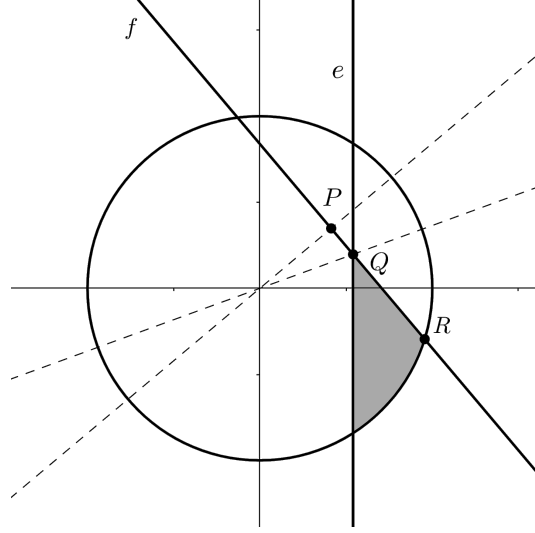
$$A(t) = 2 \int_{\cos r}^{\cos(r-t)} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\frac{\cos(r)-x \cdot \cos(t)}{\sin(t)}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy dx.$$

A belső, y szerinti integrál elemi számítással explicit megadható, így

$$A(t) = 2 \int_{\cos r}^{\cos(r-t)} \arcsin \left(\frac{\cos r - x \cos t}{\sin t \cdot \sqrt{1-x^2}} \right) + \frac{\pi}{2} dx.$$

Az integrandus korlátos, és $t \rightarrow 0$ mellett az intervallum hossza nullához tart, így $A(t) \rightarrow 0$. Emiatt a L'Hopital szabály alkalmazásával adódik, hogy

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t)}{t} = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_{\cos r}^{\cos(r-t)} \arcsin \left(\frac{\cos r - x \cos t}{\sin t \cdot \sqrt{1-x^2}} \right) + \frac{\pi}{2} dx.$$



1. ábra. Két gömbi körlemez különbségének területe.

A Leibniz-féle integrálszabály értelmében a határértékben az

$$\left[\arcsin \left(\frac{\cos r - \cos(r-t) \cos t}{\sin t \sin(r-t)} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \cdot \sin(r-t) + \\ + \int_{\cos r}^{\cos(r-t)} \frac{d}{dt} \left[\arcsin \left(\frac{\cos(r) - x \cos(t)}{\sin(t) \cdot \sqrt{1-x^2}} \right) + \frac{\pi}{2} \right] dx$$

kifejezés szerepel.

Az első tag első tényezője trigonometrikus azonosságok segítségével egyszerűsíthető, így az arkuszszinuszból szereplő kifejezés értéke -1 , vagyis az összeg első tagja 0 . A második tagban a t szerinti deriválás, majd egyszerűsítések után adódik

$$\frac{1}{\sin t} \cdot \int_{\cos r}^{\cos(r-t)} \frac{x - \cos r \cos t}{\sqrt{(\sin t \sin r)^2 - (x - \cos r \cos t)^2}} dx. \quad (1)$$

Az integrandus primitív függvényének meghatározása egyszerű, viszont behelyettesítés után az alsó határból kapott formula határértékének meghatározása bonyolult. Emiatt az alsó határt kiterjesztjük $\cos r$ -ről $\cos r \cos t$ -re, és belátjuk, hogy a hozzáadott tartományon vett integrál $t \rightarrow 0$ mellett nullához tart.

Mivel az integrandus a vizsgált intervallumon pozitív, így a kiterjesztésre

$$\frac{1}{\sin t} \cdot \int_{\cos r \cos t}^{\cos r} \frac{x - \cos r \cos t}{\sqrt{(\sin t \sin r)^2 - (x - \cos r \cos t)^2}} dx \leq \\ \leq \frac{1}{\sin t} \cdot \int_{\cos r \cos t}^{\frac{\cos r}{\cos t}} \frac{x - \cos r \cos t}{\sqrt{(\sin t \sin r)^2 - (x - \cos r \cos t)^2}} dx = \\ = \sin r - \sqrt{\sin^2 r - \frac{\cos^2 r}{\cos^2 t} \sin^2 t},$$

ahol az egyenlőség az integrál explicit meghatározásából adódik. Az így kapott kifejezés $t \rightarrow 0$ mellett nullához tart, így az 1. egyenletbeli integrál határértéke

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sin t} \cdot \int_{\cos r \cos t}^{\cos(r-t)} \frac{x - \cos r \cos t}{\sqrt{(\sin t \sin r)^2 - (x - \cos r \cos t)^2}} \, dx = \sin r,$$

ahol az egyenlőség ismét a primitív függvény meghatározásából és behelyettesítésből elemi módon következik. $\square$

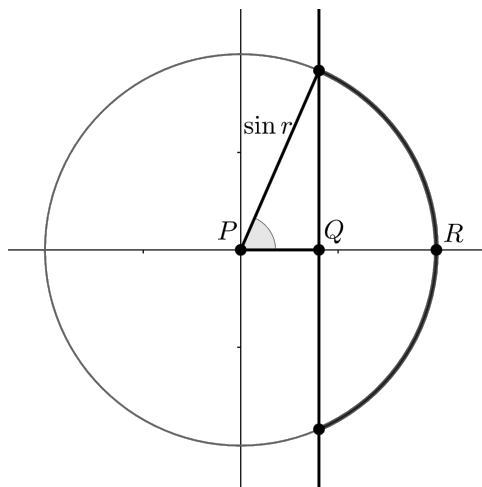
3. lemma. *Jelölje $\theta(t)$ két r sugarú, t távolságú kör metszetének egyik határoló ívéhez tartozó középponti szöget. Ekkor*

$$\theta(t) = 2 \arccos \left(\frac{\sin t}{1 + \cos t} \cdot \cot r \right).$$

Bizonyítás. Tekintsük ismét a 2. lemmában megadott, 1. ábrán látható konstrukciót. Az e és f egyenesek Q metszéspontja az

$$y = x \cdot \tan \frac{t}{2} = x \cdot \frac{\sin t}{1 + \cos t}$$

egyenesen fekszik. Továbbá az f vetületű kör euklideszi középpontja P , amely az $y = x \cdot \tan t$ egyenesen fekszik, és a vizsgált körív a kör azon íve, amely xy síkra vett vetülete a $\overline{QR}$ szakasz. A kör síkját a 2. ábrán látjuk.



2. ábra. A keresett ív a metsző kör síkjában.

A konstrukcióból adódik, hogy

$$P = (\cos r \cos t, \cos r \sin t) \quad \text{és} \quad Q = \left(\cos r, \cos r \cdot \frac{\sin t}{1 + \cos t} \right),$$

így az euklideszi távolságuk

$$d(P, Q) = \frac{\sin t}{1 + \cos t} \cdot \cos r,$$

és az ívhez tartozó középponti szögre

$$\cos\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) = \frac{d(P, Q)}{\sin r} = \frac{\sin t}{1 + \cos t} \cdot \frac{\cos r}{\sin r},$$

amiből következik a lemma állítása. $\square$

3. AZ 1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA.

Legyen $K \subseteq S^2$ az az r sugarú körlemez, amely csúcsa az északi pólus, azaz $\mathbb{R}^3$ -ben a $(0,0,1)$ pont, és vezessük be az $A = A(K)$ jelölést.

Legyen P_1 és P_2 két különböző K -beli pont. Ekkor pontosan két olyan r sugarú kör van, amely határán tartalmazza mindkét pontot. Jelölje $D^-(P_1, P_2)$ és $D^+(P_1, P_2)$ ezen körök külsejének K -val vett metszetét, azaz K azon részét, amelyet a megfelelő kör nem fed le. Továbbá vezessük be az $A^-(P_1, P_2) = A(D^-(P_1, P_2))$ és $A^+(P_1, P_2) = A(D^+(P_1, P_2))$ jelöléseket, ahol feltehető $A^-(P_1, P_2) \leq A^+(P_1, P_2)$.

A következő lemma a [7] cikk 4.3. lemmájának gömbön vett megfelelője, bizonyítása az eredetivel lényegében identikus.

4. lemma. *Létezik olyan $\delta > 0$ konstans, hogy $A^+(P_1, P_2) > \delta \cdot A$ minden P_1, P_2 K -beli pontpárra.*

Rátérünk az 1. tétel bizonyítására. Érvelésünk a Rényi és Sulanke [10] által használt módszeren alapszik. A $P_1, P_2 \in K$ véletlen pontpár pontosan akkor határozza meg a $\text{conv}_r(X_n)$ egy élet, ha a $D^-(P_1, P_2)$ és $D^+(P_1, P_2)$ valamelyikébe nem esik több X_n -beli pont.

Emiatt

$$\mathbb{E}(f_0(K_n)) = \binom{n}{2} \cdot (W_n^- + W_n^+),$$

ahol

$$W_n^- = \frac{1}{A^2} \cdot \int_K \int_K \left(1 - \frac{A^-(P_1, P_2)}{A}\right)^{n-2} dP_1 dP_2 \quad \text{és}$$

$$W_n^+ = \frac{1}{A^2} \cdot \int_K \int_K \left(1 - \frac{A^+(P_1, P_2)}{A}\right)^{n-2} dP_1 dP_2.$$

A 4. lemma szerint $A_+(P_1, P_2) > \delta \cdot A$ minden pontpárra, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{2} \cdot W_n^+ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \int_K \int_K (1 - \delta)^{n-2} dP_1 dP_2 = 0, \quad (2)$$

vagyis a várható érték második tagja határértékben elhanyagolható, és a továbbiakban csak W_n^- -al foglalkozunk.

Legyen $P_1 = (x_1, y_1, \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2})$ és $P_2 = (x_2, y_2, \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2})$. Ekkor az integrál x_1, y_1, x_2, y_2 változókra transzformálása után

$$W_n^- = \frac{1}{A^2} \cdot \iint_{\substack{(x_2, y_2) \in (x_1, y_1) \in \\ B^2, \sin r}} \iint \left(1 - \frac{A_-(x_1, y_1, x_2, y_2)}{A}\right)^{n-2} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2. \quad (3)$$

Legyen most $K_{t, \varphi}$ az az r sugarú körlemez, amely középpontja

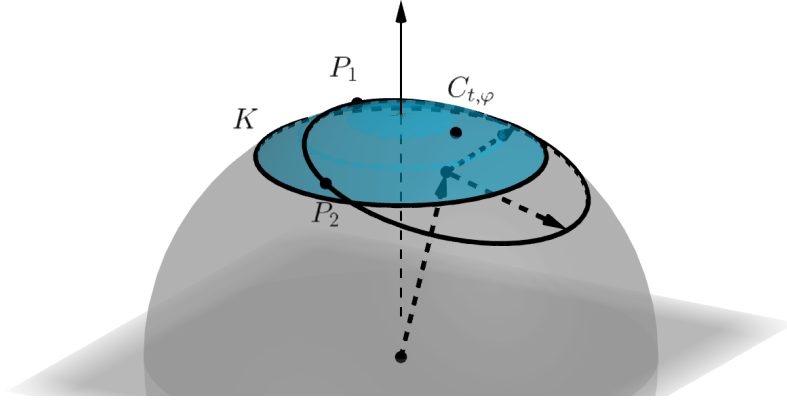
$$C = C(t, \varphi) = (\sin t \cos \varphi, \sin t \sin \varphi, \cos t).$$

Ekkor $K_{t,\varphi}$ és K középpontjainak gömbi távolsága pontosan t . Definiáljuk továbbá a $w_1 = (\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ és $w_2 = (\cos t \cos \varphi, \cos t \sin \varphi, -\sin t)$ vektorokat. Könnyű látni, hogy a (C, w_1, w_2) hármas ortonormált bázis alkot $\mathbb{R}^3$ -ben.

Tekintsük az $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \Phi(\varphi, t, \varphi_1, \varphi_2)$ átparaméterezést, ahol

$$\begin{pmatrix} x_i, y_i, \sqrt{1 - x_i^2 - y_i^2} \end{pmatrix} = \cos r \cdot C + \sin r \cos \varphi_i \cdot w_1 + \sin r \sin \varphi_i \cdot w_2.$$

Ezáltal a pontpárt a következőképpen írjuk le: ha $K_{t,\varphi}$ egy, a pontpárt határán tartalmazó körlemez, akkor a határa pontosan a $\cos r \cdot C_{t,\varphi}$ ponton áthaladó, $C_{t,\varphi}$ normálvektorú sík és a gömbfelszín metszete, amely síkjában w_1 és w_2 ortonormált bázist alkot. A megfelelő pont ezen bázisban vett koordinátáit adja meg φ_1 és φ_2 . Tetszőleges K -beli pontpárhoz pontosan két ilyen $K_{t,\varphi}$ körlemez tartozik, azonban $t > r$ esetén az integrandus exponenciális kicsi, így határértékben elhanyagolható, hasonlóan W_n^+ esetéhez (2)-ben. A $t \leq r$ feltétel mellett legfeljebb egy megfelelő körlemez van.



3. ábra. A pontpár átparaméterezése.

A transzformáció Jacobi-determinánsa

$$|J\Phi| = \left| \sin^2 r \cdot \sin t \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \times \right. \\ \left. \times (\cos r \cos t - \sin r \sin t \sin \varphi_1) \cdot (\cos r \cos t - \sin r \sin t \sin \varphi_2) \right|,$$

amely meghatározása a Függelékben olvasható. A szorzat utolsó két tényezője pontosan a megfelelő P_i pont harmadik koordinátájával, azaz $\sqrt{1 - x_i^2 - y_i^2}$ -el egyezik meg, amelyek a (3)-ben szereplő felületelemek reciprokai, így azok a transzformáció elvégzése után kiesnek. Továbbá az A^- terület az új paraméterezésben csak t -től függ, és ez pontosan a 2. lemmában definiált mennyiség, azaz

$$W_n^- = \frac{\sin^2 r}{A^2} \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(1 - \frac{A(t)}{A}\right)^{n-2} \cdot \sin t \cdot |\sin(\varphi_1 - \varphi_2)| d\varphi_1 d\varphi_2 dt d\varphi,$$

ahol θ_1 és θ_2 azon (t -től és φ -től függő) paraméterértékek, amelyek K és $K_{t,\varphi}$ határának metszéspontjait adják. A φ_1 és φ_2 változók szerinti integrálás után a

$\theta_2 - \theta_1$ különbség jelenik meg, ami megegyezik a 3. lemmában definiált $\theta(t)$ mennyiséggel, ami csak t -től függ, φ -tól már nem.

A φ_1 és φ_2 , valamint φ változók szerint kiintegrálva

$$W_n^- = \frac{4\pi \sin^2 r}{A^2} \int_0^r \left(1 - \frac{A(t)}{A}\right)^{n-2} \cdot \sin t \cdot (\theta(t) - \sin \theta(t)) dt.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor létezik olyan $0 < \gamma_1 \leq r$ konstans, amelyre minden $0 \leq t \leq \gamma_1$ esetén

- (i) $2 \sin r \cdot t \cdot (1 + \varepsilon)^{-1} \leq A(t) \leq 2 \sin r \cdot t \cdot (1 + \varepsilon),$
- (ii) $\pi \cdot (1 + \varepsilon)^{-1} \leq \theta(t) - \sin \theta(t) \leq \pi \cdot (1 + \varepsilon),$ és
- (iii) $t \cdot (1 + \varepsilon)^{-1} \leq \sin t \leq t \cdot (1 + \varepsilon).$

Az első feltétel teljesülése a 2. lemmából, a második a 3. lemmából, az utolsó pedig a $\sin x/x \rightarrow 1$ ($x \rightarrow 0$) határértékből következik.

Mivel $A(t)$ monoton növekvő függvény, így $t \geq \gamma_1$ esetén $A(t) \geq A(\gamma_1) = (1 - \delta) \cdot A$ valamely $\delta > 0$ értékre. Így az integrandus exponenciálisan kicsi, vagyis

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1}^r \left(1 - \frac{A(t)}{A}\right)^{n-2} \cdot \sin t \cdot (\theta(t) - \sin \theta(t)) dt &\leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1}^r (1 - \delta)^{n-2} \cdot \pi dt = 0, \end{aligned}$$

és az integrálban elég a $[0, \gamma_1]$ intervallummal foglalkozni.

A γ_1 konstans megválasztása miatt

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^{-2} \cdot \frac{4\pi^2 \sin^2 r}{A^2} \cdot \int_0^{\gamma_1} \left(1 - \frac{2 \sin r \cdot (1 + \varepsilon)}{A} \cdot t\right)^{n-2} t dt &\leq \\ &\leq \int_0^{\gamma_1} \left(1 - \frac{A(t)}{A}\right)^{n-2} \cdot \sin t \cdot (\theta(t) - \sin \theta(t)) dt \leq \\ &\leq (1 + \varepsilon)^2 \cdot \frac{4\pi^2 \sin^2 r}{A^2} \cdot \int_0^{\gamma_1} \left(1 - \frac{2 \sin r \cdot (1 + \varepsilon)^{-1}}{A} \cdot t\right)^{n-2} t dt. \quad (4) \end{aligned}$$

Az így kapott integrálok becslésére egy, a gamma függvényt használó aszimptotikus azonosságot használunk (lásd E. Artin [1], valamint Böröczky, Fodor, Reitzner és Vígh [5]). Eszerint tetszőleges $\beta \geq 0$, $\omega > 0$ és $\alpha > 0$ esetén

$$\int_0^{g(n)} t^\beta \cdot (1 - \omega t^\alpha)^n dt \sim \frac{1}{\alpha \cdot \omega^{(\beta+1)/\alpha}} \cdot \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right) \cdot n^{-(\beta+1)/\alpha} \quad (5)$$

ha $n \rightarrow \infty$, amennyiben

$$\left(\frac{(\alpha + \beta + 1) \cdot \ln n}{\alpha \omega n}\right)^{1/\alpha} < g(n) < \omega^{-1/\alpha}$$

valahonnanról. A (4) egyenlőtlenségekben $\alpha = \beta = 1$, valamint a felső becslésben $\omega^+ = 2 \sin r \cdot (1 + \varepsilon)^{-1}/A$, az alsóban $\omega^- = 2 \sin r \cdot (1 + \varepsilon)/A$. Legyen továbbá $g^+(n) = \gamma_2^+ = 1/(2\omega^+)$ és $g^-(n) = \gamma_2^- = 1/(2\omega^-)$. Ekkor teljesülnek a (5)-hez szükséges feltételek, és adódik, hogy

$$\int_0^{\gamma_2^+} \left(1 - \frac{2 \sin r \cdot (1 + \varepsilon)^{-1}}{A} \cdot t\right)^{n-2} t dt \sim \frac{A^2 \cdot (1 + \varepsilon)^2}{4 \sin^2 r} \cdot n^{-2}, \text{ és}$$

$$\int_0^{\gamma_2^-} \left(1 - \frac{2 \sin r \cdot (1 + \varepsilon)}{A} \cdot t\right)^{n-2} t \, dt \sim \frac{A^2 \cdot (1 + \varepsilon)^{-2}}{4 \sin^2 r} \cdot n^{-2},$$

ahol $f_1(n) \sim f_2(n)$ alatt azt értjük, hogy $n \rightarrow \infty$ mellett $f_1(n)/f_2(n) \rightarrow 1$. Összességében, ha $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2^+, \gamma_2^-\}$, akkor

$$(1 + \varepsilon)^{-4} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\gamma \left(1 - \frac{A(t)}{A}\right)^{n-2} \cdot \sin t \cdot (\theta(t) - \sin \theta(t)) \, dt}{n^{-2} \cdot \pi^2} \leq (1 + \varepsilon)^4.$$

Mindent összevetve kapjuk, hogy

$$W_n^- + W_n^+ \sim \frac{\pi^2}{n^2},$$

amiből adódik a tétel csúcsszámra vonatkozó állítása.

A területkülönbségre vonatkozó tétel igazolásához az Efron-azonosság gömbi orsókonvex megfelelőjét használjuk, mely szerint

$$\mathbb{E}(f_0(K_n)) = \frac{n \mathbb{E}(A(K \setminus K_n))}{A}. \quad (6)$$

Elemi számítás mutatja, hogy $A = 2\pi(1 - \cos r)$, amiből a tétel második állítása is következik.

4. ZÁRÓ MEGJEGYZÉSEK

A dolgozatbeli probléma egy lehetséges általánosítása a következő: legyen K egy S^2 -beli gömbi orsókonvex halmaz, és tekintsünk egy K -ból egyenletesen választott független minta által meghatározott beírt gömbi körpoligont, majd vizsgáljuk tulajdonságait. Amennyiben K határa C^2 sima, a határ egyes határpontok körüli simulókörrrel való közelítését felhasználva a bizonyítás alapját várhatóan a dolgozatbeli, körre vonatkozó eredmények adhatják majd.

A másik lehetséges kiterjesztés magasabb dimenzióra vonatkozik. Mint azt a bevezetőben említettünk, a hiperlapok száma a magasabb dimenziós gömbi- és a magasabb dimenziós orsókonvex esetben is egy dimenziótól függő véges konstanshoz tart, amelyek tetszőleges $d > 2$ esetben is megegyeznek. A dolgozatbeli eredmények ilyen irányú kiterjesztése rávilágítana a két eredmény közötti kapcsolatra a magasabb dimenziós esetben is.

5. FÜGGELÉK

A (3)-ban leírt transzformáció Jacobi-determinánst külső szorzat segítségével határozzuk meg. Ekkor $i = 1, 2$ esetén

$$\begin{aligned} dx_i &= \cos \varphi \cdot (\cos r \cos t - \sin r \sin t \sin \varphi_i) \, dt + \\ &\quad + [\cos \varphi \cdot (\sin r \cos \varphi_i) - \sin \varphi \cdot (\cos r \sin t + \sin r \cos t \sin \varphi_i)] \, d\varphi + \\ &\quad + (-\sin \varphi \sin \varphi_i + \cos \varphi \cos t \cos \varphi_i) \cdot \sin r \, d\varphi_i, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} dy_i &= \sin \varphi \cdot (\cos r \cos t - \sin r \sin t \sin \varphi_i) \, dt + \\ &\quad + [\sin \varphi \cdot (\sin r \cos \varphi_i) + \cos \varphi \cdot (\cos r \sin t + \sin r \cos t \sin \varphi_i)] \, d\varphi + \\ &\quad + (\cos \varphi \sin \varphi_i + \sin \varphi \cos t \cos \varphi_i) \cdot \sin r \, d\varphi_i. \end{aligned}$$

A $dx_i dy_i$ külső szorzat meghatározásakor a φ -t tartalmazó tényezők szerint csoportosítunk: a $\sin \varphi \cos \varphi$ kifejezést tartalmazó tagok kiesnek, a $\sin^2 \varphi$ és $\cos^2 \varphi$ -t tartalmazó tagok együtthatói pedig megegyeznek. Továbbá legyen $dtd\varphi$ együtthatója $A = A(t, \varphi, \varphi_1, \varphi_2)$ – a pontos kifejezést nem határozzuk meg, ennek indokoltságát később fogjuk látni. Ekkor tehát

$$\begin{aligned} dx_i dy_i &= \sin r \sin \varphi_i \cdot (\cos r \cos t - \sin r \sin t \sin \varphi_i) dt d\varphi_i + \\ &+ [\sin r \cos \varphi_i \sin \varphi_i - \cos t \cos \varphi_i (\cos r \sin t + \sin r \cos t \sin \varphi_i)] d\varphi d\varphi_i + \\ &+ A dt d\varphi, \end{aligned}$$

amely második tagját rendezve kapjuk, hogy

$$dx_i dy_i = (\cos r \cos t - \sin r \sin t \sin \varphi_i) \cdot [\sin r \sin \varphi_i \cdot dt d\varphi_i + \cos \varphi_i \sin t d\varphi d\varphi_i] + A dt d\varphi.$$

Mivel dt vagy $d\varphi$ valamelyike szerepel az összeg minden tagjában, így a $dx_1 dy_1$ szorzatban szereplő $A dt d\varphi$ tagot a $dx_2 dy_2$ szorzat bármelyik tagjával külső szorozva megjelenik valamelyik differenciál önmagával vett szorzata, így az kiesik. A négyes szorzat emiatt

$$\begin{aligned} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 &= \sin r \sin t \cdot (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1) \times \\ &\times (\cos r \cos t - \sin r \sin t \sin \varphi_1) (\cos r \cos t - \sin r \sin t \sin \varphi_2) dt d\varphi_1 d\varphi d\varphi_2, \end{aligned}$$

amiből adódik az állítás.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A dolgozat a Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-2-SZTE-365 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

A kutatást az Innovációs és Technológiai Minisztérium Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott OTKA FK 135392 pályázata is támogatta.

HIVATKOZÁSOK

- [1] E. Artin, *The gamma function*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.
- [2] I. Bárány, *Random points and lattice points in convex bodies*, Bulletin of the American Mathematical Society **45** (2007), no. 3, 339–365.
- [3] I. Bárány, D. Hug, M. Reitzner, and R. Schneider, *Random points in halfspheres*, Random Struct. Alg. **50** (2017), 3–22.
- [4] K. Bezdek, Z. Lángi, M. Naszódi, and P. Papez, *Ball-polyhedra*, Discrete Comput. Geom. **38** (2007), no. 2, 201–230.
- [5] K. J. Böröczky, F. Fodor, M. Reitzner, and V. Vígh, *Mean width of inscribed random polytopes in a reasonably smooth convex body*, J. Multivariate Anal. **100** (2009), 2287–2295.
- [6] F. Fodor, *Random ball-polytopes in smooth convex bodies*, arXiv (2020). <https://arxiv.org/abs/1906.11480v1>.
- [7] F. Fodor, P. Kevei, and V. Vígh, *On random disc polygons in smooth convex discs*, Adv. in Appl. Probab. **46** (2014), no. 4, 899–918.
- [8] F. Fodor, P. Kevei, and V. Vígh, *On random disc polygons in a disc-polygon*, arXiv (2021). <https://arxiv.org/abs/2110.12191>.
- [9] R. Schneider and W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry*, Probability and Its Applications, Springer, 2008.
- [10] A. Rényi and R. Sulanke, *Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **2** (1963), 75–84.