

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Tanító- és Óvóképző Kar



A gömbi geometria tanításának lehetőségei az alsó tagozatos matematikaórán

Témavezetők:

Dr. Bagota Mónika

egyetemi docens

Lénárt István

óraadó

Szerző:

Sinkó Renáta

tanító szak

Budapest

2022

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	3
2. Elméleti áttekintés.....	5
2.1. Piaget elmélete.....	5
2.2. Bruner-féle reprezentációs elmélet	6
2.3. A van Hiele-modell	6
2.4. Nemzeti Alaptanterv és Kerettanterv, 2020	9
2.5. A térbeli gondolkodás és a matematikatanulás kapcsolata	9
3. A gömbi geometriaórák bemutatása	13
1. óra.....	13
2. óra.....	16
3. óra.....	20
4. óra.....	26
5. óra.....	31
6. óra.....	33
7. óra.....	36
4. A gömbi geometria utóteszt eredményeinek bemutatása	40
5. Összegezés	44
Irodalom	46
Melléklet	49
A gömbi geometria utóteszt.....	49
Szülői beleegyező nyilatkozat	53

1. Bevezetés

A gömbi geometriával először Lénárt István tanár úr Labdageometria kurzusán találkoztam, már akkor is magával ragadott a gömbi geometria szépsége és a tanár úr szabad szellemisége. Az órákon sok szempontból megvizsgáltuk a gömbi és síkgeometria közötti hasonlóságokat és különbségeket, és ezek a vizsgálatok megerősítették a síkgeometriával kapcsolatos eddigi tudásomat.

Elgondolkodtam azon, hogy vajon valamilyen módon át lehetne-e adni alsó tagozatos gyerekeknek ennek a tudásanyagnak és szemléletnek legalább egy kis részét. Tovább erősítette feltételezésemet egy oktatási kísérlet (Gambini, 2021), amelyet két olaszországi iskola egy-egy osztályában folytattak, melynek során öt tanéven keresztül az 5. osztálytól kezdődően párhuzamosan oktatták a tanulóknak a gömbi és a síkgeometriát. A kutatás célja az volt, hogy a Lénárt-gömbbel való tevékenységek által a geometriai fogalmak világosabb megértését adják és hogy a gyerekek a megtapasztalt tevékenységekben elégedettséget és önbizalmat szerezzenek. Ez a megközelítés, amely nyitott a tanulók érzelmi és intellektuális elkötelezettségére, elvezette a tanulókat a matematika mélyebb megértéséhez és megbecsüléséhez is. A kutatás során azt tapasztalták ugyanis, hogy a gömbgeometriai tevékenységekkel való kísérletezés a síkgeometria tanulásával párhuzamosan, segít a tanulóknak jobban megérteni a geometriai alakzatokat és növeli a tanulók síkgeometriával kapcsolatos intuícióit olyan mértékben, hogy az pozitív hatást gyakorol a geometriai tanulmányokra és a későbbi iskolai osztályzatokra. Azt is kimutatták, hogy az összehasonlító geometriai tapasztalatok idővel megmaradtak, és lehetővé tették a geometriai fogalmak jobb megszilárdulását a későbbi iskolai évfolyamokon. A kutatás azt is állítja továbbá, hogy az összehasonlító geometria tanítása minden iskolai évfolyam számára előnyös lehet, és általában a matematika más területein is segítheti a tanulókat.

Ennek alapján arra jutottam, hogy feltétlenül érdemes lenne kipróbálni alsó tagozatos gyermekek esetében azt, hogy megismerkednek a gömbbel kapcsolatos egyszerűbb fogalmakkal, tevékenységekkel, játékos feladatokkal, hiszen a gömb egy olyan csodálatos térbeli alakzat, amely a természetben gyakran előfordul és tökéletességével megszépíti az életünket. A kutatásban a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 3.a osztálya vett részt, melynek létszáma 28 fő, amiből 12 lány és 16 fiú. A gömbi geometria alapfogalmaival hét egymást követő matematika órán keresztül ismerkedtek meg a gyerekek. Az egész osztályra jellemző a kíváncsiság, a tudásvágy, a nagymértékű aktivitás és a fegyelmezettség. A legtöbb gyermek az órák alatt végig érződött a matematikához való

pozitív hozzáállás. Ez a tanítójuknak, Farkasházi Csillának is nagy mértékben köszönhető, aki matematika-ének szakos mestertanárként teljes odaadással próbálja megszerettetni a matematikát a gyerekekkel. A tanulók jól motiválhatóak, ami ki is derült az órák során: a gyerekek az érdekesebb feladatokat hazavitték és továbbgondolták. Az osztály eddig geometriával csak kis mértékben foglalkozott, így az órákon előforduló több fogalom is újdonság volt a gyermekek számára.

Kutatási kérdéseim a következők voltak:

- Megvalósítható-e a gömbi geometria alapjainak tanítása az alsó tagozatos matematikaórán?
- Van-e pozitív hatása a nem-euklidészi geometria alsó tagozatos általános iskolai tanulmányozásának?
- Milyen tapasztalatokat lehet elérni a gömbön keresztül, és milyen reflexiókat lehet elősegíteni ezzel kapcsolatban az alsó tagozatos általános iskolások számára?

2. Elméleti áttekintés

2.1. Piaget elmélete

Piaget az 1950-es években kísérleti módszerekkel vizsgálta a gyermekek értelmi fejlődését. Piaget szerint a gyermek értelmi fejlődésében megkülönböztethetők olyan szakaszok, melyek időbeli elhelyezkedése és tartama egyénenként változhat, de ettől eltekintve mindenkre jellemzőek, és egymáshoz viszonyított sorrendjük szigorúan meghatározott, mindenkre egyformán érvényes.

Piaget négy fő szakaszra osztotta a gyermekek értelmi fejlődését. (Piaget & Inhelder, 2004)

1. Szenzomotoros szakasz (általában 0-2 év között)

A gyermek saját testének mozgásával kapcsolatos kísérleteket végez, így ismeri meg a közvetlen környezetét, miközben a saját érzékszerveit és mozgásszerveit is megtanulja használni. Kialakul saját teste és a környezet megkülönböztetésének képessége, és a tárgyállandóság tudatosulása (a tárgyak akkor is léteznek, ha nem érzékeljük őket).

2. Műveletek előtti szakasz (általában 2-7 év között).

Az előfogalmi gondolkodás (konkrét kísérletezés) fokozatosan szemléletes gondolkodássá változik (képzetek kialakulása, ismert konkrét cselekvés múltbeli eredményének elmesélése, jövőbeli eredményének előrejelzése).

- Manipulálható tárgyakon végzett műveletek jellemzik.
- A gyermek egy tárgyat jellemző tulajdonságok közül egyszerre csak egyet tud figyelembe venni, aszerint tud válogatni.
- A gyermek a cselekvéssort nem képes fordított irányba elvégezni.
- Állandósul az „ugyanannyi”, az intuitív mennyiségi képzet.

3. Konkrét műveleti szakasz (általában 7-11 év között)

1. A konkretizmus belsővé vált konkrétsággá fejlődik, a gyermek képekkel, gondolatban elképzelt dolgokkal, tevékenységekkel is képes foglalkozni.
2. A gyermek több szempontra is képes egyidejűleg figyelni, ezáltal összefüggéseket felismerni.
3. A gyermek képes cselekvéseket fordított irányban elvégezni, a tárgyakat átrendezni.

4. Formális műveleti szakasz (általában 11. évtől)

- Jellemző a különböző változók közötti összefüggések, szimbólumok közötti műveletek megértése és elvégzése.
- Tipikus az érvelés, állításokkal, hipotézisekkel kapcsolatos okfejtés képessége.
- A tanulók képessé válnak egyidejűleg többféle szempont szerinti osztályozásra, rendszerezésre, nézőpontváltásra.

- Jellemző a visszafelé következtetés képessége.

Rendkívül fontos, hogy bár a szimbolikus gondolkodás előkészítésével foglalkozunk az alsó tagozaton, a túl korai absztrakció megfelelő tapasztalati alapozás nélkül olyan szakadást idéz elő az absztrakciós folyamatban, amely mindvégig rányomja bélyegét a tanulók matematikai teljesítményére, és matematikához való hozzáállására. (Pintér, 2013) Éppen ezért az általam megtartott tanórák során mindvégig szem előtt tartottam a gömbi geometriával kapcsolatos fogalmak szemléltetéshez és tevékenységhez kapcsolt bemutatását. Fontosnak tartom megemlíteni azt is, hogy mivel Piaget szerint a geometriai formák élethű vizuális megjelenítése 8-9 éves korban kezdődik, a térfogat észlelése pedig csak 11-12 éves korban jön létre, így erre is figyelemmel kellett lennem a tanórák megtervezése közben.

2.2. Bruner-féle reprezentációs elmélet

Bruner reprezentációs elméletében az ismeretek elsajátítása három, egymásra épülő síkon megy végbe. A síkok között folyamatos az interakció és a tanítási folyamat során előre- és visszautalhatunk az eltérő síkokon megtanult ismeretekre.

A síkok a következők:

1. Materiális (enaktív) sík: Konkrét tárgyi tevékenységek, manipulációk segítségével valósul meg az ismeretszerzés (fontos az eszközök használata).
2. Képi sík (ikonikus sík): Az ismeretszerzés szemléletes képek, elképzelt szituációk segítségével történik (Venn-diagram, szöveges feladatok szakaszos ábrázolása, ágrajzok stb.).
3. Szimbolikus sík: Az ismeretszerzés matematikai szimbólumok, és a nyelv segítségével valósul meg. (A szimbólumok elszakadnak a konkrét tárgyi megvalósulásuktól, saját jelentésük van). (Pintér, 2013)

A Bruner-féle reprezentációs elmélet rámutat arra, hogy a térgeometria tanítását – különösen alsó tagozatos tanulók körében – az enaktív síkon, azaz eszközök, manipulációk és tevékenységek segítségével a leghatékonyabb megvalósítani. A gömbi geometria órákon a gyerekekkel narancsot, földgömböt és Lénárt gömböt használtunk a fogalmak elsajátításához és megértéséhez.

2.3. A van Hiele-modell

Pierre van Hiele és Dina van Hiele-Geldorf 1957-ben megalkottak egy olyan elméletet, amely a geometriai gondolkodás folyamatának megismerését igyekszik megmutatni. Munkájukban a geometriai gondolkodás fejlődésének öt szintjét különböztetik meg.

0. szint: a globális felismerés szintje

Ebben a szakaszban a gyerekek a geometriai alakzatokat, mint egészet látják, felismerik és megnevezik azokat. Nem veszik észre ugyanakkor az alakzatok alkotóelemeit, tulajdonságait és az alakzatok közötti összefüggéseket sem.

1. szint: az elemzés szintje

Ebben a szakaszban megkezdődik az alakzatok tulajdonságainak vizsgálata, a tanulók kezdik felismerni az alakzatok alkotórészeit, megfigyelik az eltérő tulajdonságokat. A tulajdonságok azonban a konkrét alakzathoz kapcsolódva jelennek meg és a tanulók a köztük levő kapcsolatokat még nem ismerik fel.

2. szint: az informális dedukció szintje

Ebben a szakaszban megkezdődik az alakzatok logikai rendszerezése tulajdonságaik alapján és a tulajdonságok összefüggéseinek felfedezése. A tanulók képesek szemlélet alapján elfogadott tényeket felhasználó következtetési lánc megértésére. Megjelennek a bizonyítások kezdetei: az észlelés szerepét fokozatosan az ok-okozati összefüggések keresése veszi át.

3. szint: a formális dedukció szintje

Ebben a szakaszban megjelenik az egyes geometriai részek deduktív felépítése: alapfogalmak, axiómák, definíciók, tételek, bizonyítások. A tanulók képesek egyszerűbb bizonyítások konstruálására, ok-okozati összefüggések megfogalmazására, szerkesztési feladatok diszkutálására.

4. szint: a formális logika szintje

Ebben a szakaszban jellemző a formális logikai műveletek, következtetések megértése és elvégzése, a logikai törvények felismerése, a különböző axiómarendszerek közötti összefüggések megértése. (Kónya, 2003; Pintér, 2013)

A tanuló az egyik szintről minden esetben úgy jut el a következő szintre, hogy a következő tanulási fázisokon halad át:

1. fázis (informálódás): a tanár beszélgetéssel felméri, hogy milyen ismeretei vannak a tanulónak az új témáról, a tanuló előtt pedig kirajzolódik a következő terület;
2. fázis (irányított felfedeztetés): a tanár tudatosan végiggondolt tevékenységek (rajzolás, hajtogatás, modellezés) segítségével ismerteti meg a tanulókat az aktuális fogalmakkal;
3. fázis (magyarázat): a tanulók elmagyarázzák egymásnak az észrevételeiket és az ezekhez kapcsolódó elképzeléseiket, ezzel párhuzamosan a tanár megismerteti velük az alapvető fogalmak pontos matematikai megnevezéseit;

4. fázis (nem irányított felfedeztetés): eddigi ismereteiket alkalmazva a tanulók nyílt végű feladatok megoldásával próbálkoznak;
5. fázis (integráció): a tanulók az összegzett új ismeretekkel bővítik a már meglévő fogalmi és relációs struktúrájukat. (Kónya, 2004)

A van Hiele-modell főbb jellemzői:

- A szintek sorrendje meghatározott. Magasabb szintre csak úgy léphetünk, ha megfeleltünk a megelőző szintek feltételeinek.
- Ugyanazt a fogalmat eltérő szinteken eltérő módon jelenítjük meg. Ebből a tényből azonnal következik az, hogy a tanárnak azon a szinten kell tanítania, ahol a tanulók vannak. Ha ugyanis a tanár magasabb szinten tanít, mint ahol a tanulók vannak, akkor a tanulók a tananyag megértése helyett legfeljebb a memorizálásig jutnak el.
- Különböző geometriai fogalmak esetén a tanulók akár különböző szinteken is állhatnak.
- Minden, amit implicit módon felvetünk az egyik szinten, azt a következő szinten részletezzük.
- Egy szint elérése nem feltétlenül a tanuló életkorától, hanem főképpen a tanulás minőségétől függ. (Kónya, 2003)

Az alsó tagozatos gyerekekre az első két szint a jellemző, az 1.-2. osztálynak a 0. szint, a 3.-4. osztálynak pedig az 1. szint felel meg. A 2. szint a felső tagozatban, a középiskolában, a további szintek pedig részben a középiskolai oktatásban, de inkább a felsőoktatásban fordulnak elő. (Pintér, 2013) Azok a 3. osztályos tanulók, akiket a gömbi geometria alapfogalmaival ismerttettem meg hét tanórán keresztül, az euklidészi geometriai ismereteket tekintve az 1. szinten, a gömbi geometriai ismereteket tekintve nyilván a 0. szinten helyezkedtek el. Az általam megtartott tanórákon a gyerekek a gömbi geometria 1. szintjére még nem értek el, ugyanakkor a szint eléréséhez szükséges fázisok közül az általam bemutatott tevékenységek és játékok segítségével az első három fázison: informálódás-irányított felfedeztetés-magyarázat át tudtak haladni. A negyedik fázis, a nem irányított felfedeztetés idő hiányában már nem tudott teljes mértékben megvalósulni. Kiemelten fontosnak tartom, hogy a harmadik fázis, azaz amikor a tanulók elmagyarázzák egymásnak az észrevételeiket és az ezekhez kapcsolódó elképzeléseiket, minden órán maximális mértékben megvalósult és maguk a tanulók is nagyon élvezték, hogy elmondhatták egymásnak az új, gömbi geometriához kapcsolódó tapasztalataikat és gondolataikat.

2.4. Nemzeti Alaptanterv és Kerettanterv, 2020

Néhány szóban idézem a matematika tanításának a Nemzeti Alaptantervben és a Kerettantervben található, a megtartott gömbi geometria órákhoz leginkább kapcsolódó alsó tagozatos megállapításait: „A tevékenységek során működő alkotó gondolkodásnak kiemelt szerepe van a megértésben. ... A konkrétumokhoz való sokszori vissza-visszalépések során alakulnak a matematikai fogalmak, összefüggések és eljárások. ... A tanuló ebben a nevelési-oktatási szakaszban találkozik olyan egyszerű problémákkal, amelyek megoldásában szerepet játszik a megfigyelés, az értelmezés, az összefüggések felfedezése, ezáltal fejlődik gondolkodása, problémamegoldó képessége.” (NAT, 2020)

3.-4. osztályban „nagyobb szerepet kapnak a fogalmi gondolkodást előkészítő megfigyelések, az összefüggések felfedeztetése, a képi információk feldolgozása és az általánosítás. ... A tanulási folyamat szerves részeként nagy szerepet kap a vélemények megfogalmazása, meghallgatása, ütköztetése. ... A tanulók a geometriai feladatok során is egyre önállóbban és pontosabban meg tudják fogalmazni észrevételeiket, jellemezni tudják alkotásaikat.” (Kerettanterv, 2020)

Alsó tagozaton az alábbi témakörök fordulnak elő geometriából:

- Alkotás térben és síkon
- Alakzatok geometriai tulajdonságai
- Geometriai transzformációk
- Tájékozódás térben és síkon
- Geometriai mérések

A gömbi geometria órákon a térbeli (és kisebb mértékben) a síkbeli alkotásokhoz kapcsolódtunk, továbbá megfigyeltük a gömb, mint alakzat tulajdonságait. Megfigyeltünk ugyanakkor további gömbi alakzatokat is pl. gömbi egyenes, gömbkétszög stb., illetve ezzel párhuzamosan az ezekhez kapcsolódó síkbeli alakzatokat is. Tájékozódunk a gömb és a földgömb felületén és – kihasználva az adódó lehetőségeket – mindkét alakzaton különböző méréseket is végeztünk. Megmértük például a narancs főkörének kerületét és néhány város távolságát a földgömbön, kapcsolódva ezzel a hosszúság fogalmának megtapasztalásához. „A hosszúság fogalmának kimunkálása elsősorban a különféle hosszúság-jellegű mennyiségek: a magasság, hosszúság, szélesség, vastagság, mélység, körméretek (köztük a kerület) külön-külön való megtapasztalását, majd összekapcsolását jelenti az iskolai tevékenységekben.” (C. Neményi, 2007)

2.5. A térbeli gondolkodás és a matematikatanulás kapcsolata

A kutatók már több, mint egy évszázaddal ezelőtt kapcsolatot tételeztek fel a numerikus és a vizuális-térbeli képességek között. Úgy gondolták, hogy a számok gondolati megjelenítése egyénen belül viszonylag stabil tulajdonság, ugyanakkor egyének között nagy eltérések lehetnek. Azt sejtették, hogy a számok belsőleg, tárgyként reprezentálódnak és különböző vizuális-térbeli tulajdonságokat kapcsoltak hozzájuk pl. szín, fényerő, tömeg, térben való elhelyezkedés (Galton, 1880). Ezek a gondolatok arra utalhatnak, hogy a térbeli és a számolási folyamatok szorosan kapcsolódnak egymáshoz, és hogy a tér hasznos metafora lehet arra, ahogyan a számokról gondolkodunk (Hubbard et al., 2009). Stanislas Dehaene ehhez a gondolathoz kapcsolódva a következőt írja a Számérzék (2011) című könyvében, "szinte olyan, mintha (a térbeli gondolkodás és a matematika) egy és ugyanaz a képesség volna" (135. o.). Clements és Sarama (2011) azt állítják, hogy a matematikán keresztül olyan gondolatokat közvetítünk, amelyek alapvetően térbeli jellegűek, ugyanis még az olyan egyszerű dolog, mint az alakzatok vagy számok összehasonlítása is térbeli gondolkodássá válik, amikor ezek a számegyenesen, a síkon vagy a térben különbözőképpen helyezkednek el. Érdekes módon a kutatások azt sugallják, hogy a térbeli reprezentációk használata még fontosabbá válik, minél inkább előrehaladunk a matematikatanulásban (Mix & Cheng, 2012).

A térbeli gondolkodás és a matematika közötti szoros kapcsolat felveti annak lehetőségét, hogy a gyermekek térbeli képességeinek fejlesztése kulcselem lehet a matematikatanulás eredményességének növelésében. Eddig azonban nagyon kevés tanulmány vizsgálta ezt a kérdést, ennek az a bizonytalanság lehet az oka, hogy a térbeli képességek mennyire alakíthatók, hiszen annak a lehetősége, hogy a matematikai teljesítmény a térbeli képességek fejlesztésével javuljon, nagymértékben függ attól, hogy a térbeli készségek taníthatók és tanulhatók-e. Pszichológiai kutatások sok esetben a térbeli gondolkodást általában adott intellektuális tulajdonságnak tekintik (Newcombe, 2010), ezt erősíti az is, hogy gyakran előfordul, hogy valaki azt mondja: „nem tud jól tájékozódni” vagy „nincs térlátása”. Úgy tűnik azonban, hogy ez a nézőpont téves elképzeléseken és téves hiedelmeken alapul. Az Uttal és munkatársai (2013) által végzett kutatás arra a következtetésre jutott, hogy a térbeli gondolkodás rendkívül képlékeny és bármilyen életkorú ember esetében a fejlesztő módszerek igen széles skálája (pl. videojátékok, térbeli gondolkodással kapcsolatos továbbképzés) hatékony abban, hogy szignifikáns fejlődést érhetünk el. Verdine és munkatársai (2014) ezt a gondolatot folytatva úgy gondolják, hogy a térbeli gondolkodás fejlesztése "kettő az egyben" hatást fejt ki, ez a pozitív hatás megmutatkozik nemcsak a térbeli gondolkodás, hanem általában a gondolkodás és a matematika terén is.

A kutatások egyre inkább egyetértenek abban, hogy a térbeli gondolkodás alapvető szerepet játszik a matematikához szükséges készségek korai fejlesztésében. Farmer és munkatársai (2013) bizonyítékot találtak arra, hogy a 3 éves gyermekek térbeli készségei erős előrejelzői voltak annak, hogy ugyanezeknek a gyerekeknek milyen volt a matematikai teljesítményük két évvel később, az ottani hivatalos iskolába lépéskor. Egy másik vizsgálatban Verdine és munkatársai (2014) is hasonló következtetésre jutottak. Érdeemes megjegyezni, hogy mindkét fenti vizsgálatban a kutatók viszonylag egyszerű eszközt használtak a gyermekek térbeli képességeinek felmérésére: a gyerekeknek építőkockákból készült alakzatokat, testeket mutattak és arra kérték őket, hogy a lehető legpontosabban másolják le azokat. Wolfgang és munkatársai (2001) longitudinális vizsgálatukban óvodáskorú gyermekeket követtek a felnőttkorig (a kutatás időtartama 16 évet felölelő időszak volt). A kutatók kimutatták, hogy az építőkockákkal történő építkezés komplexitása 5 éves korban szignifikáns előrejelzője volt a későbbi középiskolai matematika teljesítménynek.

Kutatások azzal érvelnek, hogy az általános iskolában a geometriának „a térbeli környezetben lévő tárgyak, mozgások és kapcsolatok tanulmányozását” kellene jelentenie (Battista & Clements, 1988, p.11). Ez azt jelenti, hogy a tanulók első geometriai tapasztalatai a konkrét, megfogható alakzatok és ezen alakzatok tulajdonságainak informális tanulmányozása, a tanórák elsődleges célja a tanulók térbeli környezetével kapcsolatos intuíciójának és ismereteinek fejlesztése kell, hogy legyen. Úgy tűnik azonban, hogy a gyermekek ismeretei elsősorban a geometriai alakzatok vizuális jellemzőire korlátozódnak, ezért a térbeli gondolkodás fejlődéséhez nem elegendő, ha a gyerekeket egyszerűen arra kérjük, hogy nevezzék meg az ismerős geometriai alakzatokat (Clements et al., 1999). A gyermekek figyelmét az alakzatok alapvető tulajdonságaira is fel kell hívni és arra is, hogy milyen geometriai átalakítások változtatják meg és melyek azok, amelyek megtartják az adott alakzat tulajdonságait. A legújabb kutatásokból (pl. Tzurriel & Egozi (2010) első osztályos gyermekek körében végzett vizsgálata) arra következtethetünk, hogy a rajzolással kapcsolatos tevékenységek is hatékonyak lehetnek a kisgyermekek térbeli gondolkodásának fejlesztésére. A térbeli gondolkodás során használt reprezentációk ugyanakkor belső gondolatok, az egyes tanulók sajátjai, így gyakran nehezen megmutathatók, hiszen nehéz külsővé tenni és megosztani őket (Whiteley & Mamolo, 2014). Éppen ezért érdemes a tanórákon a tanulók térgeometriai szókincsét is megfontoltan szélesíteni, továbbá motiválni őket arra, hogy próbálják meg elmagyarázni egymásnak a térgeometriai feladatok és tevékenységek közben felmerülő gondolataikat (Hawes, Tepylo & Moss, 2015). „A tudatosításnak mindig döntően fontos mozzanata a megnevezés, szavakba foglalás. Helyes, ha kezdetben engedjük használni a

gyerekeknek a saját élményeikhez, tapasztalataikhoz jobban illeszkedő kifejezéseket. A tudatosítás szerepét ugyanolyan jól szolgálja bármilyen, alkalmi szó, ha az a gyereké.” (C. Neményi, 2007) Ez utóbbi gondolathoz egy saját tapasztalatot szeretnék hozzákapcsolni a gömbi geometria órákról. Bár a gyerekek teljes mértékben tisztában voltak az átellenes pont fogalmával (ez kiderült az utóteszt eredményeiből is), de egyikőjük sem használta ezt az elnevezést. Az átellenes pontokat Északi- és Déli-sarknak, sarkpontoknak, szemközti pontoknak nevezték a gyerekek a fogalom pontos ismerete ellenére.

3. A gömbi geometriaórák bemutatása¹

1. óra (2022.05.16. 9:00)

Az első óra a gömb, mint alakzat megismeréséről szólt. Először arról kérdeztem meg a gyerekeket, hogy szoktak-e rajzolni, milyen felületre szoktak írni. Itt elmondták, hogy a füzetbe vagy tankönyvekbe szoktak írni és lapra szoktak rajzolni az iskolában. Megkértem őket, hogy mondjanak még olyan sima felületeket, mint a papírlap. Ekkor a gyerekek megemlésték az asztalt, az ajtót. Majd én megjegyeztem, hogy például a gömb felülete is sima és egyenletes. Mondtam a gyerekeknek, hogy soroljanak fel gömb alakú tárgyakat, az osztályteremből vagy az osztálytermen kívülről. Válaszként elhangzott, hogy labda (pl. kosárlabda, focilabda), különböző gyümölcsök pl. narancs, alma, dinnye, bár ebben az esetben megjegyezték, hogy ezek nem teljesen simák, egyenletesek. Szóba került még a Föld, a földgömb, a Nap, a bolygók, az üveggolyó, a hógolyó és pár gyerek megemléstette a szobájában lévő földgömbös lámpáját. A beszélgetés után kiosztottam minden gyereknek egy gömböt szemléltető narancsot, egy-két filcet és egy kupakot. (Azért a narancsot választottuk a gömb szemléltetésére, mert könnyen elfér egy kisgyerek kezében, filctollal jól lehet rá rajzolni és majdnem gömb alakú, ha megfelelően kiválogatjuk a gyümölcsöket a vásárlás során.) A kupakra most azért volt szükség, hogy erre ráhelyezve a narancsot, megkönnyítsük a rajzolást. Először megkérdeztem a gyerekektől, milyennek érzik a narancs felületét. A legtöbben érdesnek, rücskösnek találták. Majd arra kértem meg őket, hogy rajzoljanak a narancsra és lakják be a felületet a rajzaikkal. Nagyon változatos és ötletes rajzok születtek annak ellenére, hogy az egyenetlenség miatt kicsit nehezkesebb volt az alkotás. A gyerekek következő feladata az volt, hogy a rajzaikat úgy kössék össze, hogy a lehető legrövidebb út legyen a rajzok között. Sokan nem értették, hogy mi az, hogy legrövidebb út, így szemléltettem a táblán, hogy mire is gondoltam. Majd vizet spricceltem a táblára, hiszen ekkor nagyon szépen látható, hogy a vízcseppek úgy folynak le a tábla aljára, hogy a lehető legrövidebb utat teszik meg. Így kicsit közelebb kerültek a fogalom megértéséhez. Ennek hatására a gyerekeknek sikerült szinte majdnem egyenes vonalakat húzniuk a gömbön a rajzok között. Ekkor úgy tűnt a számomra, hogy a gyerekek bizonytalanok azzal kapcsolatban, hogy mi is az egyenes. Ezért megkértem őket, hogy a matematika füzetükbe húzzanak egyenes vonalat, amit sikeresen teljesítettek is. Majd feltettem nekik a kérdést, hogy ha a papíron így néz ki egy egyenes, akkor hogyan nézhet ki a narancson (gömbön). Mindenki próbált minél pontosabb egyenest rajzolni a narancsra, ami kicsit nehezkés volt a narancs

¹ A gömbi geometriaórák megtervezésénél és megvalósításánál felhasználtuk Lénárt István tankönyvét (Lénárt, 2009), oktatási segédanyagait (Tanító online modulok) és ötleteit.

felületének egyenetlensége miatt. Az egyik gyerek felfedezte, hogy az ő focilabdáján is találhatóak ilyen egyenesek, és bemutatta az osztálynak. A gyerekek előtt elneveztem ezeket az egyeneseket gömbi egyeneseknek.

Ezen óra (és a későbbiekben bemutatott többi tanóra) tevékenységeinek kapcsán szeretnék visszautalni a szakirodalmi összefoglalásban említett gondolatokra, melyek szerint az általános iskolás gyermekeknek kezdetben konkrét, megfogható geometriai alakzatokat (esetünkben a gömböt szemléltető narancsot) célszerű adni, ezeknek az alakzatoknak a tulajdonságait kell velük megtapasztaltatni, megbeszélni és minél több rajzos tevékenységet érdemes az órába beiktatni.

Az óra menetének bemutatása

1. feladat: Ismerkedés, ráhangolódás beszélgetéssel

T: Hova szoktatok alakzatokat, formákat rajzolni?

Gy: Füzetbe, lapra rajzolunk.

T: Milyen ezeknek a felülete? (pl. füzetlap)

Gy: Sima felületűek.

T: Tudtok még ilyen egyenletes és sima felületet mondani, mint a papír?

Gy: Asztal lapja, ajtó.

T: Nézzétek, a gömb is sima és egyenletes. Milyen gömböket ismertek? Körülnézhettek az osztályteremben is!

Gy: Kosárlabda, focilabda, narancs, alma, dinnye (de ezek nem teljesen egyenletesek), Föld, földgömb, nap, földgömbös lámpa, üveggolyó, bolygók, hógolyó.

2. feladat: Rajzolás a gömbfelületen

Minden gyereknek kiosztottam egy-egy narancsot, filcet és kupakot. (A narancsot a kupakra ráhelyezve könnyebb a rajzolás.)

T: Milyen ennek a narancsnak a felülete?

Gy: Rűcskös.

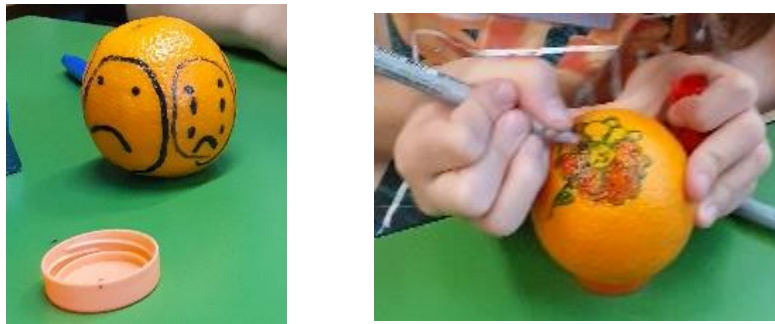
T: Rajzoljatok a narancsra azt, amit szeretnétek! Több dolgot is rajzolhattok.

T: Mit rajzoltatok a gömbre?

Gy: Emoji, virág, fagyó, vonalak, ház, nap, fa, cica, földrészek, óra, szív. (1. ábra, 2. ábra)



1. ábra



2. ábra

T: Milyen érzés volt a narancsra rajzolni? Könnyen vagy nehezen ment? Milyen akadályokba ütköztetek?

Gy: Nehéz volt, mert rücskös a narancs felülete. Nehéz volt egyenes vonalat rajzolni.

T: Hogyan tudtok eljutni az egyik rajztól a másikig a legrövidebb úton? Kössétek össze a rajzokat a gömbfelületen!

A gyerekek nem értik mi az, hogy legrövidebb út. A legrövidebb út bemutatására vizet spricceltem a táblára, ahol a vízcseppek a lehető legrövidebb utat választották, hogy a tábla aljára érjenek. Ezután a gyerekek próbálják összekötni az ábráikat egyenesekkel, megpróbálnak több ábrát is összekötni. (3. ábra)



3. ábra

3. feladat: Egyenesek rajzolása és értelmezése, a gömbi egyenes

T: Nyissátok ki a matematika füzeteteket és rajzoljatok egy egyenest ceruzával!

T: Ha itt a füzetben, a papíron így néz ki egy egyenes, akkor hogyan nézhet ki a gömbön?
Próbáljatok meg egyenest rajzolni a narancson! Ez lesz a gömbi egyenes.

Az egyik gyermek felfedezi, hogy a focilabdáján is vannak gömbi egyenesek és bemutatja az osztály előtt. (4. ábra) (Mindegyik tanórán bíztattam a gyerekeket arra, hogy mondják és magyarázzák el a felmerülő fogalmakkal kapcsolatos gondolataikat. A gyerekek örömmel és szívesen tettek eleget ennek a kérésnek és nagyon élvezték az új fogalmak bemutatását.)



4. ábra

2. óra (2022. 05.17. 11:00)

A második órát a gömbi egyenes másfajta megjelenítésével kezdtük. Továbbra is narancssal dolgoztak a gyerekek, mellé kaptak színes gumikarikákat és ezek segítségével kellett gömbi egyeneseket bemutatniuk a narancson. Kicsit nehéz volt a gumikarikák ráhelyezése a narancsra, de szinte mindenkinek sikerült megoldania a problémát. Sok gyerek 2-3 gumit is rá tudott rakni a narancsra anélkül, hogy azok leestek volna. Majd megkérdeztem őket, hogy hány gumikarikát tudnánk rárakni a narancsra. Mindenki azt felelte, hogy bármennyit rá lehetne rakni.

Majd az volt a gyerekek feladata, hogy tegyenek rá a narancsra egy pontot. Ezt a pontot elneveztem az Északi-sarknak. Elmeséltem a gyerekeknek, hogy létezik egy olyan pingvin, aki ettől az Északi-sarktól a legtávolabb szeretne lenni. Arra kértem őket, hogy helyezzék el a narancson, hogy a pingvin hol helyezkedhet el. Nagyon okosan mondták, hogy az Északi-sarktól ellentétes helyen. Volt olyan gyerek, aki egyik pontnak kiválasztotta a narancs egyik bemélyedését, így a vele ellentétes pont a narancs másik bemélyedése lett. Megkértem őket, hogy nevezzék el ezeket a pontokat. Sok érdekes elnevezést hallottam, ilyen volt például: Északi-sark és Déli-sark, gömbi pontok, egyik város és másik város. Majd megneveztem én is a pontokat: átellenes vagy sarki pontoknak hívtam őket. Meséltem egy újabb szereplőről a gyerekeknek, egy teknősről, aki nagyon utálja a hideget és a lehető legtávolabb szeretne lenni az Északi- és a Déli-sarktól is. Megkértem őket, hogy rajzolják fel a narancsra, hogy ez a teknős hol helyezkedhet el. Szinte mindenkinek sikerült elhelyeznie a teknőst, több olyan megoldást is láttam, ami azt mutatta, hogy többen rájöttek arra, hogy a teknős nem csak egy helyen tartózkodhat.

A következő feladat elején kiosztottam minden gyereknek egy kb. 10 cm-es papírcsíkot, és arra kértem őket, hogy rajzoljanak fel 3-4 emoji-t erre a papírcsíkra egymás után. Majd miután ezzel elkészültek, egy kilyukasztott papírcsíkot is kapott minden gyerek. Azt játszottuk, hogy az a lyukas papírcsík egy vonatablak, és el kellett húzni ezt a vonatablakot emoji-s papírcsík felett. Megkértem az egyik tanulót, hogy sorolja fel az emoji-kat, abban a sorrendben, ahogy ő látja a saját rajzán. Majd megkérdeztem azt is tőle, hogy a 2. és a 4. emoji-ja között milyen emoji található, amire a papírcsíkra nézve tudott is válaszolni. Ezután feltettem egy kérdést az osztálynak, hogy ha csak jobbra mehetünk a vonattal, akkor az ablakban láthatjuk-e újra az első emoji-t. Ekkor a gyerekek kezükbe vették a papírcsíkot és megpróbálták, de nem sikerült újra meglátniuk az ablakban az első emoji-t. Majd arra kértem őket, hogy a papírra rajzolt emoji-kat rajzolják fel a narancsra is ugyanabban a sorrendben, ahogyan a papíron szerepeltek és ugyanazt a játékot játsszák el, mint a papírcsíkkal. Ugyanúgy megkérdeztem egy másik tanulót, hogy milyen sorrendben látja az emoji-kat itt a narancson. Majd megint feltettem a kérdést, hogy most vissza tudunk-e térni az első emoji-hoz, ha ismét csak jobbra haladhatunk a vonattal. Mindenki kipróbálta, és rájöttek, hogy a narancson haladva a vonattal újra meglátjuk az ablakban az első emoji-t, mert körbeérünk a papírcsíkkal.

Az óra utolsó feladatában mérniük kellett a gyerekeknek. Először arra kértem meg őket, hogy vegyék elő a matematika füzetüket és mérjék le papírcenti segítségével a füzet egyik oldalát. Nagyon ügyesen tudtak mérni, látszott, hogy már van benne tapasztalatuk. Voltak olyan gyerekek, akik a füzet mindkét oldalát megmérték. Majd mondtam nekik, hogy vegyék a kezükbe a narancsukat és próbálják körbemérni. (Ennél a feladatnál nagyon érdekes volt megfigyelni, hogy a gyerekek automatikusan a narancs (gömb) egyenesének (azaz a gömbi főkörnek) a hosszát mérték.) A gyerekek különböző eredményeket kaptak a narancsok méretének különbözősége miatt, például lett: 18 cm-es, 20 cm-es és 23 cm-es méretű narancs is. Ezután arra kértem őket, hogy álljanak fel a papírcentivel és keressenek az osztályteremben olyan tárgyakat, amit le tudnak mérni. Nagyon sok dolgot megmértek, például az ajtó, az ablak, az asztalok, a tanári asztal, a tábla és az osztályterem szélességét és hosszát is. Néhányan próbálták megmérni az én magasságomat is, és az egyik tanuló Lénárt tanár úr fejének körbemérésével is megpróbálkozott. Végül visszatértünk a narancsra és azt kérdeztem meg a gyerekektől, hogy tudnak-e a gömbön nagyobb távolságot találni annál, mint amit eddig azon megmértünk. Erre szinte mindenki körbe-körbe kezdte tekerni a papírcentit a gömbön. Ennél a feladatrésznél a gyerekeknek tanítói személtetésre és magyarázatra is szükségük volt ahhoz, hogy megtapasztalják azt, hogy a narancson (gömbön) nem tudnak a gömbi egyenes hosszánál nagyobb távolságot megmérni.

Az óra menetének bemutatása

1. feladat: Gömbi egyenes szemléltetése gumikarikákkal

T: Már beszéltünk az előző órán a gömbi egyenesről. Hogyan tudnátok megjeleníteni a narancson gumikarikával a gömbi egyenest? (Minden gyereknek kiosztottam egy-egy narancsot és több gumikarikát.)



5. ábra

T: Tudtok-e több gumikarikát elhelyezni a narancson úgy, hogy ne essen le? Próbáljátok ki!
Hányat tudnátok rárakni?

Gy: Sokat. (5. ábra)

2. feladat: Az átellenes pontok és az Egyenlítő

T: Tegyetek egy pontot a narancsra! Ez jelölje az Északi-sark helyét. Egy pingvin a lehető legtávolabb szeretne lenni ettől a ponttól. Hol helyezkedjen el a gömbön?

Gy: A narancs másik felén pl. a narancs két bemélyedésénél.

T: Hogyan neveznétek el ezeket a pontokat?

Gy: Északi-sark, Déli-sark, gömbi pontok, két város.

T: Ezeket a pontokat átellenes pontoknak vagy sarki pontoknak hívjuk.

T: A teknős nagyon utálja a hideget. A lehető legtávolabb akar lenni az Északi- és Déli-sarktól is. Hol helyezkedhet el a gömbön? Rajzoljátok rá a narancsra!



6. ábra

Gy: A teknős a két pont között félúton helyezkedhet el. (6. ábra)

T: Hány helyen tartózkodhat a teknős?

Gy: Sok helyen, végtelen sok helyen.

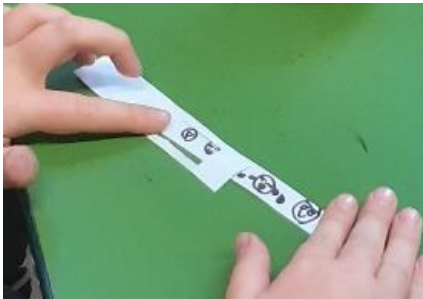
3. feladat: Sorrendiség és irány síkon és gömbön

A gyerekeknek kiosztottam egy-egy papírcsíkot.

T: Rajzoljatok a papírcsíkra 3-4 emoji-t egymás után!

Majd minden gyereknek kiosztottam egy-egy lyukas papírcsíkot.

T: Játsszuk azt, hogy ez a lyukas papírcsík vonatablak! Húzzátok el az ablakot az emoji-s papírcsík fölött! Figyeljétek meg az emoji-k sorrendjét! (7. ábra) Milyen emoji-kat láttok?



7. ábra

Gy: Például: mosolygós, dühös, szerelmes, csodálkozó, szemüveges, komor, síró, szomorú emoji.

T: Melyik emoji van a 3. és a 5. emoji között?

Gy: Például: csodálkozó emoji.

T: Ha csak jobbra mehet a vonatunk az ablakunkkal, akkor vissza tudunk-e térni az első emoji-hoz?

Gy: Nem, nem tudunk visszaérni.

T: Most a narancsra is rajzoljatok fel 3-4 emoji-t! Ezt az ablakot a narancson lévő emoji-k fölött is húzzuk el jobbra haladva! Soroljátok fel, mit láttok az ablakból!

T: Ha csak jobbra mehet a vonatunk az ablakunkkal, akkor vissza tudunk-e térni az első emoji-hoz?

Gy: Igen, mert körbeérünk.

4. feladat: Mérések papírcsikkel

Mindenkinek kiosztottam egy-egy papírcsíkot.

T: Mérijétek le a papírcsík segítségével a füzetetek egyik oldalát! Melyik oldalát mértétek? Milyen hosszú ez az oldal?

Gy: A füzet hosszabbik oldala 40 cm, a rövidebb oldala 28 cm.

T: Próbáljátok meg körbemérni a narancsotokat is! (8. ábra)

A gyerekek különböző eredményeket kaptak a narancsok méretének különbözősége miatt pl.: 18, 20, 23 cm.



8. ábra

T: Mérjétek le az osztályteremben különböző tárgyakat! Próbáljátok olyan tárgyakat találni, ami a füzetetek oldalánál nagyobb!

A gyerekek több tárgyat megmértek az osztályteremben pl. az osztályterem szélességét, hosszát, az asztalok hosszát, az én magasságomat, Lénárt tanár úr fejét. (9. ábra)



9. ábra

T: Próbáljátok a gömbön annál nagyobb távolságot találni, mint amit eddig azon megmértünk!

A gyerekek többször körbetekerték a narancson a papírcentit.

3. óra (2022.05.18. 11:00)

A harmadik órán a gömbi egyenes és az átellenes pontok ismétléseként egy strandlabdán szemléltettem a gyerekeknek ezeket a fogalmakat. Megkértem pár tanulót, hogy mutassanak átellenes pontokat a labdán. Mindenki talált ilyen pontokat és elhangoztak új elnevezések is a gyerekek szájából: forgástengely pontjai, póluspontok, ellentétes pontok. Az átellenes pontok kifejezés valószínűleg nem tetszett a gyerekeknek, hiszen a későbbi órákon se nevezték így ezeket a pontokat. Megkérdeztem tőlük, hogy hányféleképpen tudják összekötni az átellenes pontokat, és a gyerekek azt a helyes választ adták, hogy sokféleképpen. Majd arra kértem őket,

hogyan mutassanak be gömbi egyeneseket a labdán. Ezután megnéztünk egy sárgadinnyét is, amelyen nagyon jól látszódnak a gömbi egyenesek, ezt a gyerekek is azonnal észrevették.

A gömbkétszögek bemutatására almát és narancshéjat használtam fel. Először az alma felvágásával kezdtem, amit egyszer félbevágtam, majd a két felet is még egyszer félbevágtam. Ekkor megkérdeztem a gyerekeket, hogy milyen almadarabokat kaptam. Erre a kérdésre nagyon ügyesen válaszolták, hogy negyedeket kaptam. A válaszadásban segítségükre volt az is, hogy nemrégiben tanulták a törteket. Lénárt tanár úr az óra előtt felvágta egy narancs héját is négy egyenlő részre, amiből egy negyedet mutattam fel a gyerekeknek. A gömbkétszög nagyon szépen látszódott a narancshéjon. Kérdezgettem a gyerekeket ennek az alakzatnak a tulajdonságairól: az alakjáról, a csúcsok és az oldalak számáról. A gyerekek többféle megnevezést mondtak a gömbkétszög alakjára pl. szírom, levél alakú. Helyesen válaszolták, hogy az alakzatnak két csúcsa és két oldala van. Az alakzat megfigyelésénél segített a gyerekeknek a látvány és a tanítói bemutatás abban, hogy a narancshéj mely részére kell figyelniük. Azt is megbeszéltük, hogy a narancshéj két oldala egyenlő hosszúságú. Ezután megfogalmaztuk, hogy mivel ennek az alakzatnak két oldala és két csúcsa van, így tulajdonképpen kétszögnek, vagy gömbkétszögnek is elnevezhetjük. Arra kértem a gyerekeket, hogy próbáljanak meg a papírlapra is olyan alakzatot rajzolni, amelynek két oldala és két csúcsa van. Legtöbb gyerek olyan alakzatot rajzolt, amelyeknek oldalai nem egyenesek. (A gyerekek számára valószínűleg az okozta a nehézséget, hogy a narancshéj két oldala (azaz két gömbi egyenes) síkbeli megfelelőjét, azaz a síkbeli egyenest nem volt könnyű gondolatilag összekötniük, azaz gondot okozott kapcsolatot találni a térbeli objektum és a síkbeli ábrázolás között.) Így a táblán megpróbáltam bemutatni, hogyan lehetne felrajzolni sík felületre a két csúcsú és két oldalú alakzatot. Rajzoltam egy pontot és abból próbáltam két olyan egyenest húzni, amelyek találkoznak egy másik pontban is. (Nem sikerült.) A szemléltetés alapján sok gyerek számára világossá vált, hogy a gömbkétszög csak a gömbön létezik.

A gömbháromszögek bemutatására is egy almát használtam fel. A gyerekek láthatták, hogy három különböző irányból elfeleztem egy késsel az almát, így nyolc egyforma részt kaptam. Majd felmutattam az egyik almadarabot és mondtam a gyerekeknek, hogy figyeljék meg az alma héját: milyen alakú, hány csúcsa és hány oldala van. Azonnal elhangzott a helyes válasz: háromszög alakú, három csúcsa és három oldala van. Ezután minden gyereknek kiosztottam egy-egy papírgolyót és arra kértem őket, hogy grafitceruzával rajzolják fel rá úgy az egyeneseket, ahogyan én felvágtam az almát. Voltak olyan gyerekek, akik nem a bemutatott vágásoknak megfelelően rajzolták fel a gömbi egyeneseket, hanem olyan egyenesekkel osztották fel a papírgolyót, hogy az összes egyenes csak a két áttelletes pontban találkozott.

Mivel ennél a felosztásnál csak gömbkétszögek keletkeznek, így ez a gömbháromszögek megfigyelésére nem alkalmas, ezért újra szemléltettem az alma felvágását, és ezután mindenki a megfelelő módon osztotta fel a papírgolyót. Megkérdeztem a gyerekektől, hogy szerintük egy háromszögnek hány szomszédja van a gömbön. Mivel nem pontosan értették, hogy két háromszög hogyan lehet szomszédos, így megbeszéltük, hogy két háromszöget akkor nevezünk szomszédosnak, ha van megegyező oldaluk. Ezután már sikerült a gyerekeknek helyesen megválaszolniuk, hogy ennél a felosztásnál egy háromszögnek három szomszédja van.

Ezt az órát egy játékkal zártuk. Az előző feladatnál használt, nyolc egyenlő részre osztott papírgolyóra kellett a gyerekeknek szimbólumokat rajzolniuk úgy, hogy a szomszédos részekbe nem kerülhetett ugyanolyan szimbólum. Az első padsornak két szimbólumot: egy szívet és egy kört, a második padsornak hármat: szívet, kört és négyzetet, a harmadik padsornak pedig négyet: szívet, kört, négyzetet és háromszöget kellett elhelyeznie az egyes részekbe. Nagyon tetszett a gyerekeknek ez a feladat, sikerült is mindenkinek megoldania. A játék végén minden padsorból egy tanuló elmondta, hogyan próbálta elhelyezni a feltételeknek megfelelően ezeket a szimbólumokat.

Az óra menetének bemutatása

1. feladat: A gömbi egyenes és az átellenes pontok bemutatása strandlabdán és sárgadinnyén

T: Mutassatok nekem átellenes pontokat a strandlabdán! (10. ábra) Gondolkoztatok-e azon, hogy hogyan nevezhetnénk még ezeket a pontokat?



10. ábra

Gy: Forgástengely pontjai, póluspontok.

T: Hányféleképpen tudjuk összekötni a két, egymással szemben levő pontot?

Gy: Végtelen sokféleképpen.

T: Mutassatok nekem gömbi egyeneseket a strandlabdán! Mennyi lehet belőlük?

Gy: Nagyon sok egyenes lehet.

T: Mutassatok nekem ezen a sárgadinnyén gömbi egyeneseket!



11. ábra

Gy.: Többet is találunk, a sötétzöld bevágások lesznek azok.

2. feladat: Gömbkétszögek alkotása a gömbön (és a síkon)

Egy almát vettem a kezembe, amit egyszer félbevágtam. Majd a két felet is félbevágtam, így negyed almákat kaptam.

T: Hány részre osztottuk az almát?

Gy: Négy rész lett belőle. Negyedekre osztottuk.

Egy narancs héját 4 részre vágtam fel, így bemutatva a gömbkétszöget.

T: Milyen alakú ez a rész? Milyen alakzatra emlékeztet benneteket?

Gy: Szirom alakú, levél alakú. (12. ábra)

T: Hány csúcsa van ennek az alakzatnak?

Gy: Kettő.

T: Hány oldala van az alakzatnak, ha csak a sárga színű részt figyeled?

Gy: Kettő.



12. ábra

T: Mit veszel észre: milyen vonal ez a narancson?

Gy: Egyenes, gömbi egyenes.

T: Ennek a narancshéjnak egyenlő a két oldala?

Gy: Igen.

T: Megbeszéltük, hogy ennek a narancshéjnak 2 oldala és 2 csúcsa van. Ezt nevezhetjük tulajdonképpen gömbkétszögnek. Próbáljatok papírlapra is olyan alakzatot rajzolni, aminek 2 oldala és 2 csúcsa van!

A legtöbb gyerek olyan alakzatokat rajzolt a papírra, amelynek oldalai nem egyenesek. (13. ábra)



13. ábra

A gyerekekkel közösen megbeszélve a táblán próbáltam bemutatni, hogyan lehetne a papíron a 2 oldalú és 2 csúcsú alakzatot felrajzolni. Azaz rajzoltam egy csúcsot, és abból próbáltam két olyan egyenest húzni, amelyek találkoznak egy másik pontban a papíron. (14. ábra) A gyerekekkel együtt megtapasztaltuk, hogy ez nem sikerül.

T: Ezek szerint papírra nem tudunk két szöget rajzolni, ez az alakzat csak a narancson (gömbön) létezik.



14. ábra

3. feladat: Háromszögek alkotása a gömbön

Egy újabb almát vettem a kezembe, amit először megfelezttem, elforgattam, újból elvágtam, majd másik irányból vágtam egyet, így nyolcadokat kaptam. (15. ábra)



15. ábra

(A gyerekek már hamarabb megmondták, hogy hány rész keletkezik a vágások után.)

T: Figyeljétek meg az egyik nyolcad alma héját! Milyen alakú? Milyen alakzatra hasonlít leginkább?

Gy: Háromszögre.

T: Hány csúcsa van ennek az alakzatnak?

Gy: Három.

T: Hány oldala van?

Gy: Három.

Minden gyereknek kiosztottam egy-egy papírgolyót.

T: Most erre a golyóra rajzoljátok fel úgy az egyeneseket, ahogy én felvágtam az almát. Azaz nyolc egyenlő részre osztátok fel a papírgolyót az egyenesekkel!

A gyerekek kétféleképpen osztották fel a papírgolyót. Először voltak olyanok, akik olyan egyenesekkel osztották fel, hogy az összes egyenes csak a két áttelleges pontban találkozott. Ezért újra szemléltettem a felvágást, és ezután mindenki ugyanúgy osztotta fel a papírgolyót.



16. ábra

T: Figyeljétek meg az egyik részt, az egyik háromszöget! Hány szomszédja van ennek a háromszögnek? (Meg kellett beszélni, hogy hogyan lehet két háromszög egymás szomszédja: a két háromszögnek van közös oldala.)

Gy: Egy háromszögnek három szomszédja van. (Azt is megbeszéltük, hogy ha az összes egyenes csak az áttelleges pontban találkozik, akkor háromszögek helyett kétszögek jönnek létre, és mindegyik kétszögnek két szomszédja van.)

4. feladat: Szimbólumok elhelyezése a gömbön

A gyerekek padsoronként egy-egy csoportban dolgoznak. Az egyik csoport két, a másik három, a harmadik pedig négy szimbólummal dolgozik majd. A táblán látható szimbólumok:



17. ábra

T: Rajzoljátok be a táblára rajzolt szimbólumokat úgy a papírgolyón található nyolc részbe, hogy egyik szomszédos részben se legyen ugyanolyan szimbólum! (Ismét megbeszéltük, hogy mikor nevezünk két részt egymás szomszédainak.)

Minden oszlopban sikerült a feltételeknek megfelelően elhelyezni a szimbólumokat. (18. ábra)

T: Mire figyeltetek a szimbólumok elhelyezésénél? Melyik verziót lehetett a legkönnyebben berajzolni?



18. ábra

Gy: Ahol kettő szimbólumot kellett elhelyezni, ott azért volt könnyű, mert felváltva kellett csak rajzolni a szimbólumokat.

4. óra (2022.05.19. 10:00)

A negyedik óra elején az előző órán megismert háromszögekkel kezdtünk el foglalkozni. A gyerekek felidéztek, hogyan alkottuk meg ezeket a háromszögeket a gömbön, és azt is, hogy hány oldaluk és hány csúcsuk van. Megkértem őket, hogy próbáljanak meg papírlapra is ilyen alakzatokat rajzolni. Néhányan az előző órai gömböt képzelték maguk elé és így a papírlapra nem egyenes oldalakkal rajzolták háromszöget. Ekkor a táblához hívtam egy tanulót, aki felrajzolt egy síkbeli háromszöget egyenes oldalakkal, és azt is elmondta, mire figyelt a háromszög megrajzolásakor. (Ez a probléma merült fel az előző órán, a gömbkétszög síkbeli megfelelőjének felrajzolásakor is. Ezen az órán azonban könnyebb volt a gömbön megjelenő alakzat (gömbháromszög) síkbeli megfelelőjét helyesen megrajzolni, hiszen a síkbeli háromszöget a gyerekek jól ismerik.) Ezt követően minden gyereknek kiosztottam egy-egy papírgolyót és arra kértem őket, hogy erre a golyóra is rajzoljanak három oldalú és három csúcsú alakzatot.

A következő feladatnál tanítói bemutatással azt kértem a gyerekektől, hogy két különböző színessel rajzoljanak két olyan gömbi egyenest, amelyek merőlegesek egymásra. Megkérdeztem a gyerekeket, hogy hány részre osztottuk így a gömböt, és a legtöbben felismerték, hogy negyedekre lett osztva a gömb. Majd arra kértem őket, hogy a tartományokba írják be az 1, 2, 3, 4 számokat úgy, hogy az 1 jelenti a tavaszt, a 2 a nyarat, a 3 az őszt és a 4 a

telet. Megkértem a tanulókat, hogy forgassák a gömböt és mutassák meg, hogyan következnek egymás után az évszakok. Majd azt kértem, hogy a papírgolyót forgatva mondják meg, hány évszak telik el ugyanabban az évben tavasz és tél között; hány évszak telik el az idei nyár és a jövő évi tél között; hány évszak van összesen a tavalyi őszt és a jövő évi őszt között. A gyerekek nagyon ügyesen használták a papírgolyót a kérdések megválaszolásához. (Nagyon jó volt megtapasztalni, hogy a papírgolyó (gömb) alkalmas arra is, hogy oszthatósággal kapcsolatos tevékenységet mutassunk be vele a gyerekeknek.)

Ezután tanítói bemutatással egy másik színes ceruzával még egy gömbi egyenest kellett rajzolniuk a gyerekeknek, így nyolc ugyanolyan háromszöget kaptak. Ezután egy gömbi számrejtvényt játszottunk a gyerekekkel. Először az 1, 2, 3 és 4 számokat kellett beírniuk az egyik félgömbön lévő négy tartományba ebben a sorrendben. Majd megbeszéltük, hogy az üresen maradt részekbe úgy kell további számokat elhelyezni, hogy az egy félgömbre kerülő számok összegének mindig 10-nek kell lennie. Első feladatként az 1-es szám alá írtuk az 5-ös számot, és ezután a megmaradt három helyre kellett a gyerekeknek beírniuk a számokat a megadott szabályok szerint. Második feladatként a 2-es alá került az 5-ös szám és a gyerekek így töltötték ki számokkal a három üresen maradt tartományt. Mindkét feladatnál folyamatosan ellenőriztük az elhelyezett számokat, a gyerekek nagyon élvezték a feladatot és minden választ meg is indokoltak.

Az óra utolsó részében a gyerekek két olyan síkbeli színezőt kaptak, ahol a tartományok legtöbb esetben ugyanúgy három másik tartománnyal szomszédosak, mint a papírgolyón (gömbön) levő háromszögek esetében. A gyerekeknek a lehető legkevesebb színt felhasználva úgy kellett kiszínezniük az ábrán levő tartományokat, hogy a szomszédos részek ne legyenek ugyanolyan színűek. Ennél a feladatnál mindenki egyénileg dolgozott, és sokféle megoldást mutattak meg a gyerekek. Érdekes volt megfigyelni, hogy több tanuló számára is kisebb nehézséget okozott a lehető legkevesebb szín megtalálása.

Az óra menetének bemutatása

1. feladat: Háromszögek síkon és gömbön

T: Emlékeztek, hogy az előző órán hogyan alkottunk háromszögeket a papírgolyón?

Gy: Három egyenest rajzoltunk a golyóra.

T: Hogyan nézett ki az a háromszög? Hány oldala, csúcsa volt?

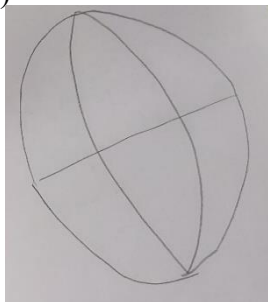
Gy: 3 oldala és 3 csúcsa.

T: Próbáljátok meg a papírlapra is olyan alakzatot rajzolni, amelynek 3 oldala és 3 csúcsa van!



19. ábra

Néhányan az előző órai gömböt képzték maguk elé, és így a lapra nem egyenes oldalakkal rajzolták le a háromszöget. (20. ábra)



20. ábra

Ezért kihívtam a táblához egy tanulót, aki felrajzolt egy síkbeli háromszöget, és azt is elmondta, mire figyelt a megrajzolásakor.

Most is mindenki kapott egy-egy papírgolyót.

T: Rajzoljatok a papírgolyóra is egy olyan alakzatot, aminek 3 oldala és 3 csúcsa van!



21. ábra

2. feladat: Négy évszak

T: Radírozzátok le az eddig felrajzolt alakzatokat a papírgolyóról és vegyetek elő két különböző színes ceruzát! Az első ceruzával rajzoljunk egy egyenest, majd forgassuk el a papírgolyót és a második színnel is rajzoljunk egy egyenest! (tanítói bemutatással)

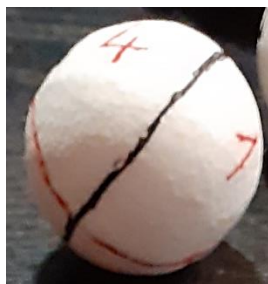
T: Hány részre osztottuk most a gömböt?

Gy: Négy részre.

T: Hogyan neveznétek el ezeket a részeket?

Gy: Gömbi negyedek.

T: Írjátok bele ezekbe a részekbe az évszakok számait! Legyen az 1 a tavasz, 2 a nyár, 3 az ősz és 4 a tél. (22. ábra)



22. ábra

T: Forgassátok a gömböt, mutassátok meg, hogyan következnek egymásra az évszakok! Hány évszak telik el ugyanabban az évben tavasz és tél között?

Gy: Kettő.

T: Hány évszak telik el az idei nyár és a jövő évi tél között?

Gy: Öt.

T: Hány évszak van összesen a tavalyi ősz és a jövő évi ősz között?

Gy: Nyolc.

3. feladat: Számrejtvény a gömbön

T: Radírozzátok le az évszakok számait és vegyetek elő még egy színes ceruzát és rajzoljatok fel a gömbre egy harmadik egyenest is! (tanítói bemutatással, hogy egységes legyen)

T: Hány részre osztottuk fel a gömböt ezzel a három egyenessel?

Gy: Nyolc részre.

T: Válasszuk ki az egyik félgömböt, és írjuk egymás után egy-egy részbe sorban az 1, 2, 3, 4 számokat! A megmaradt négy részbe úgy kell majd számokat írunk, hogy az egy félgömbi részen előforduló számok összegének mindig 10-nek kell lennie.

A rejtvény tanítói bemutatása:

a) Írjuk az 1-es szám alá az 5-ös számot!

T: Meg tudnátok mondani, hogy melyik szám kerül a 2-es alá és miért?

Gy: $1 + 5 + 2 = 8$, így még egy 2-es kell ahhoz, hogy ezen a félgömbön levő négy szám összege 10 legyen! (23. ábra)

T: Melyik szám kerül a 3-as alá?

Gy: $2 + 2 + 3 = 7$, így még egy 3-as kell ahhoz, hogy ezen a félgömbön levő négy szám összege 10 legyen!

T: Melyik szám kerül a 4-es alá?

Gy: $3 + 3 + 4 = 10$, így 0 kell ahhoz, hogy ezen a félgömbön levő négy szám összege 10 legyen!



23. ábra

b) Legyen most a 2-es alatt az 5-ös! Próbáljátok meg egyedül kitölteni az üresen maradt részeket!

T: Melyik szám kerül az 1-es alá?

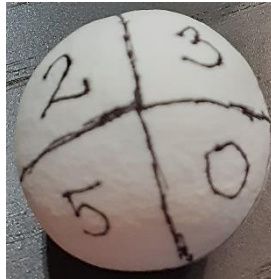
Gy: $1 + 5 + 2 = 8$, így még egy 2-es kell ahhoz, hogy ezen a félgömbön levő négy szám összege 10 legyen!

T: Melyik szám kerül a 3-as alá?

Gy: $2 + 5 + 3 = 10$, így 0 kell ahhoz, hogy ezen a félgömbön levő négy szám összege 10 legyen! (24. ábra)

T: Melyik szám kerül a 4-es alá?

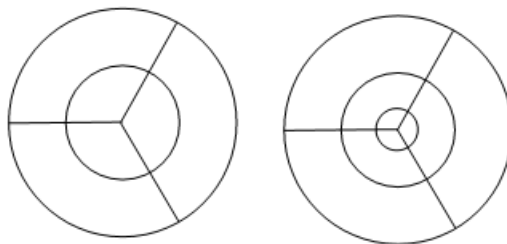
Gy: $3 + 0 + 4 = 7$, így még egy 3-as kell ahhoz, hogy ezen a félgömbön levő négy szám összege 10 legyen!



24. ábra

4. feladat: Síkbeli színezők

T: Mindenki kap egy színezőt, amin két ábrát láthattok. (25. ábra) (Mészáros, 2017) Úgy kell kiszínezni az egyes alakzatok részeit, hogy a szomszédos részek ne legyenek ugyanolyan színűek. Legkevesebb hány színt kell felhasználnunk a színezéshez?



25. ábra

forrás: <https://meszaros-mihaly.hu/szinezosok-meg-egyszer/>

Gy: Mindkettő ábránál legalább három színt kell felhasználni, két szín nem elég. (26. ábra)



26. ábra

5. óra (2022.05.23. 9:00)

Az ötödik órára a kisebb narancs vagy papírgolyó helyett a nagy Lénárt-gömböket vittük be. A gyerekek páronként dolgoztak úgy, hogy minden asztalra jutott egy-egy gömb. Arra kértem őket, hogy rajzoljanak erre a nagy gömbre színes filctollakkal úgy, hogy lakják be az egész felületet. A gyerekek nagyon élvezték a feladatot, szép és változatos rajzok születtek. Érdekes volt megfigyelni, hogy sokan próbálták a földgömböt rekonstruálni anélkül, hogy erre vonatkozó tanítói utasítást kaptak volna. Voltak olyanok is, akik emojiakat, embereket, feliratokat készítettek a gömbre. Megkérdeztem a gyerekektől, hogy könnyebb vagy nehezebb volt-e erre a nagyobb gömbre rajzolni, mint a narancsra vagy a papírgolyóra. A legtöbbüktől azt a választ kaptam, hogy könnyebb volt, hiszen sokkal nagyobb helyük volt alkotni.

A Lénárt-gömbön érdekes volt megtapasztalni az átellenes pontokat. Azt kértem a gyerekektől, hogy rajzoljanak fel két átellenes pontot a gömbre, majd emeljék fel a gömböt és az egyik tanuló tegye a szemét az egyik ponthoz, a másik tanuló a másikhoz és nézzenek át az átlátszó gömbön. Mindenki nagyon érdekesnek találta ezt a feladatot, hiszen ilyenkor pont egymásra tudtak nézni. Újra megkérdeztem tőlük, hogy emlékeznek-e arra, hogyan nevezzük ezeket a pontokat. Általános volt az Északi-sark/Déli-sark megnevezés, ugyanakkor ismét nem hangzott el az átellenes pontok kifejezés.

Minden asztalra kiraktam nagyobb méretű műanyag kupakokat. Arra kértem a gyerekeket, hogy rajzoljanak a gömbre és papírlapra is a kupakok felhasználásával. Kicsit nehézkes volt először a rajzolás, de a gyerekek idővel rájöttek arra, hogyan lehet a kupakok felhasználásával a legkönnyebben rajzolni. Sokféle rajzot láthattam, a legtöbbben emojiakat készítettek. Majd megkérdeztem tőlük, hogy milyen alakzatokat kaptak, amikor a kupak segítségével rajzoltak és mindannyian felismerték, hogy köröket rajzoltak. Végül arra voltam még kíváncsi, hogy szerintük hasonlít-e a papírlapra és a gömbre rajzolt alakzat. A legtöbb gyerek azt válaszolta, hogy szerinte teljes mértékben hasonlít.

Az óra menetének bemutatása

1. feladat: Lénárt-gömbre rajzolás

T: A mai órára nagyobb gömböket hoztam nektek, mindegyik asztalra jut egy-egy.

T: Rajzoljatok a gömbre! Bármit rajzolhattok úgy, hogy lakjátok be a teret!

T: Milyen érzés volt erre a gömbre rajzolni? Könnyebb vagy nehezebb, mint a narancsra vagy a papírgolyóra?

Gy: Könnyebb, mert nagyobb helyünk volt.

T: Mit rajzoltatok?

Gy: Földgömb, emoji,
emberek, feliratok...



27. ábra

2. feladat: Átellenes pontok megfigyelése a Lénárt-gömbön

T: Jelöljétek ki egy pontot a gömbön! Keressétek meg a tőle legmesszebb lévő pontot! Emeljétek fel a gömböt, és egyikőtök az egyik, másikótok a másik ponton kukucskáljon át!

Mit figyeltek meg?

Gy: Pont egymásra nézünk. (28. ábra)

T: Milyen pontok ezek?

Gy: Sarki pontok.



28. ábra

3. feladat: Kör rajzolása kupak segítségével a gömbön és a síkon

T: Mindenkinek osztok ki kupakokat! Rajzoljatok a kupak felhasználásával a nagy gömbre, ahol még van üres hely! (29. ábra) Mit rajzoltatok?

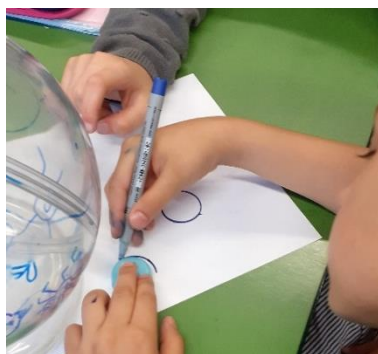
Gy: Kör, emoji, fejhallgató...



29. ábra

T: A papírlapon is rajzoljátok körbe a kupakot! (30. ábra) Milyen alakzatot kaptatok?

Gy: Kört.



30. ábra

T: Hasonlít a papírlapra és a gömbre rajzolt alakzat?

Gy: Igen, eléggé. Mindkettő körnek látszik.

6. óra (2022.05.27. 10:00)

A hatodik órán megismerkedtünk a földgömbbel, így kicsit más oldalról közelítettük meg a gömbi geometriát. A gyerekek páronként dolgoztak úgy, hogy minden asztalra került egy-egy földgömb. Mindenkit arra kértem, hogy fedezze fel a földgömböt, keressen rajta érdekes dolgokat. A gyerekek megtalálták az Északi- és a Déli-sarkot, az óceánokat és felismertek néhány várost is pl. Madridot vagy Londont. Tanítói utasításra a gyerekeknek az Északi- és a Déli-sarkot és az Egyenlítőt kellett megtalálniuk. A gyerekek sarkokat könnyebben megtalálták, az Egyenlítő kicsit nehezebb feladat volt számukra. Miután tanítói segítséggel mindenki megtalálta, közösen felismertük, hogy az Egyenlítő egy gömbi egyenes.

Az óra további részében a földgömbön különböző távolságokat kellett mérniük a gyerekeknek. A méréshez minden tanuló kapott egy-egy papírcentit. Először arra kértem a gyerekeket, hogy keressék meg a földgömbön Budapestet. Ez nehéz feladat volt, hiszen a földgömbön csak nagyon kicsiben található meg a Budapest felirat. Ezután Rómát is megkerestük a földgömbön és megmértük a két város távolságát.

A következő feladatban először Madridot kellett megkeresniük a földgömbön. Ezután felírtam a táblára négy város- és országnevet: New York, Peking, Abidjan és Új-Zéland. Ezeket a helyeket szintén meg kellett keresniük, majd le kellett mérniük a Madridtól való távolságukat. Mivel a földgömbbel most találkoztak először, így ez a feladat meglehetősen nehéznek bizonyult, a gyerekeknek folyamatos segítségre volt szükségük. Mivel a gyerekek a kontinenseket még nem ismerik, így egy nagyobb méretű földgömbön a földrészek alakjainak megnevezésével tudtam segíteni nekik abban, hogy hol találhatják meg ezeket a helyeket. A méréssel is voltak problémák, mert sokan elfelejtették, hogy hol találták meg korábban a városokat vagy az országot. Így az osztálytanító segítségével blu-tack gyurmaragasztót adtunk a gyerekeknek és így megjelölhető lett a városok és az ország elhelyezkedése. Ezután már jóval könnyebben ment a munka. A különböző távolságokat a táblára feljegyeztem, így mindenki könnyedén ellenőrizhette a saját mérésének pontosságát. Néhány gyerek gyorsabban elvégezte a feladatot, így ők még további távolságokat is megmértek és összehasonlítottak. A feladat végén közösen megbeszéltük, hogy szerintük Madridból melyik helyre juthatunk el a legrövidebb, és melyik helyre a leghosszabb idő alatt. Mindenki egyetértett abban, hogy Madridból Abidjanba érhetünk el a legrövidebb és Új-Zélandra a leghosszabb idő alatt.

Az óra menetének bemutatása

1. feladat: A földgömbbel való ismerkedés, a földgömb részeinek megfigyelése, megnevezése

T: Beszéltünk az előző órákon az Északi- és a Déli sarkról. Meg tudjátok mutatni, hogy hol találhatóak ezek a földgömbön?

T: Hogyan helyezkednek el ezek egymáshoz képest, hogyan nevezzük őket?

Gy: Sarki pontok.

T: Keressetek még ilyen áttelletes pontokat a földgömbön! (31. ábra)



31. ábra

T: Keressétek meg a földgömbön az Egyenlítőt! Minek nevezzük ezt az előző órák alapján?

Gy: Gömbi egyenes.

2. feladat: Távolság mérése a földgömbön

T: Keressétek meg Budapestet a földgömbön! Majd Rómát is keressétek meg! Mérjétek le papírcentivel a Budapest-Róma távolságot! Hány centiméter lett a két város távolsága?

Gy: Körülbelül 5 cm Budapest-Róma távolsága a földgömbön.

3. feladat: Távolságok mérése a földgömbön egy ponttól és a távolságok összehasonlítása

T: Keressétek meg Madridot a földgömbön! Jegyezzétek meg, hol találtátok!

T: Felírtam 4 másik várost a táblára (32. ábra), ezeket is keressétek meg és mérjétek le, hogy milyen távol vannak Madridtól!



32. ábra

A gyerekek segítségképpen kaptak blu-tack gyurmaragasztót, amivel meg tudták jelölni a városokat a földgömbön. (33. ábra)



33. ábra

T: Milyen távolságokat kaptatok?

Gy: Madrid-New York 7-9 cm, Madrid-Peking 12-14 cm, Madrid-Abidjan 4-6 cm, Madrid-Új-Zéland 24-27 cm.

T: Mit gondoltok, miért kaptunk különböző számokat a mérések során?

Gy: Nehéz volt a mérőszalagot pontosan a gömbre tenni.

T: Melyik városba juthatunk el Madridból a legrövidebb idő alatt?

Gy: Abidjan.

T: Melyik városhoz kell a legtöbb idő?

Gy: Új-Zéland.

7. óra (2022.05.30. 9:00)

Az utolsó órán visszatértünk a gömbhöz és megvizsgáltuk az egyenest és a kört a síkon és a gömbön. A feladathoz minden gyerek kapott egy-egy papírgolyót és írólapot. Először arra kértem őket, hogy rajzoljanak egy-egy pontot a golyóra és a lapra is, majd megkérdeztem tőlük, hogy van-e a pontok között különbség. Szinte mindannyian azt válaszolták, hogy teljesen ugyanolyanok. Aztán a papírlapra egy újabb pontot kellett rajzolniuk, és arra kértem a gyerekeket, hogy kössék össze a két pontot a lehető legrövidebb vonallal, majd ezt a vonalat hosszabbítsák meg mindkét irányba, ameddig csak tudják. Feltettem a kérdést, hogy tudnánk-e tovább húzni a vonalat, ha lenne rá lehetőségünk. Mindenki azt válaszolta, hogy ez természetesen megoldható. Arra is kértem őket, hogy a papírgolyóra is rajzoljanak még egy pontot és kössék össze ezt a két pontot, majd ezt a vonalat is hosszabbítsák meg, ameddig csak tudják a papírgolyón. Azt tapasztalták, hogy a papírgolyón (gömbön) a vonal összeér a másik oldalon, így ez a vonal nem húzható a végtelenségig, ellentétben azzal, ami a papírlapon tapasztalható.

Ezután megkérdeztem a gyerekektől, hogy amit a lapra rajzoltunk, az szerintük kör vagy sem. Mindenki tudta ránézésre az eddigi ismeretei alapján, hogy ez nyilvánvalóan nem kör lesz. Arra kértem őket, hogy rajzoljanak egy kört a lapra, eközben én egy ovális alakzatot rajzoltam a táblára. Majd megkérdeztem a gyerekektől, hogy a táblára rajzolt alakzat szerintük kör-e és próbálják meg megmagyarázni, hogy miért. Az egyik tanuló nagyon ügyesen megfogalmazta, hogy azért nem kör, ami a táblán van, mert ennek az alakzatnak nem egyenlő távolságra vannak a pontjai a középponttól. Úgy láttam, mindenki tudta, hogy a táblán szereplő alakzat nem lehet kör. Arra kértem a gyerekeket, hogy rajzoljanak a papírlapra egy kört és próbálják meg megrajzolni ennek a körnek a középpontját. A papírlapon mindenki egy középpontot talált. Ezután rátértünk a gömbön lévő egyenesre (gömbi főkör). Ott is megkérdeztem a gyerekektől, hogy ez az egyenes szerintük kör-e. Egy-két tanuló azt válaszolta, hogy a gömbi egyenes bizony lehet kör, hiszen van egy pont, amitől ennek az alakzatnak minden pontja ugyanakkora távolságra van és észre is vették, hogy nem egy, hanem kettő ilyen pont is létezik. Ezután kiosztottam ismét a kupakokat a gyerekeknek, amelyek segítségével a papírlapra és a papírgolyóra is köröket kellett rajzolniuk. Ezután minden körnek meg kellett próbálni berajzolni a középpontját is.

Az óra utolsó részében két egyenessel és azok helyzetével foglalkoztunk. Először arra kértem a gyerekeket, hogy a papírlapra rajzoljanak fel két egyenest és próbálják meg megmondani, hogy hány közös pontjuk lehet és hogyan helyezkedhet el egymáshoz képest ez a két egyenes. Szinte mindenkinek sikerült megtalálnia a megoldásokat: az egyik, amikor a két egyenes párhuzamos és nincs egy közös pontjuk se, a másik, amikor metszi egymást a két egyenes és egy közös pontjuk van. Ezután a gyerekeknek a gömbre is kellett két egyenest elhelyezniük ugyanúgy, ahogyan a papírlapra rajzolták. Az egymást metsző gömbi egyeneseket nagyon sokan megtalálták és észrevették azt is, hogy a papírgolyón (gömbön) ezeknek az egyeneseknek két közös pontjuk van. Emellett sokan mondták azt is, hogy a gömbön egymás mellett is elhelyezkedhetnek az egyenesek és ekkor nincsen közös pontjuk. Az egyik tanuló ezt a két egyenest Egyenlítőnek és Ráktérítőnek nevezte. Ez nagyon érdekes és izgalmas gondolat volt, azonban a Ráktérítő nem gömbi egyenes, csak kör, így az óra befejező részében azt beszéltük meg és strandlabdán szemléltettük közösen a gyerekekkel, hogy a Ráktérítő miért nem gömbi egyenes.

Az óra menetének bemutatása

1. feladat: Egyenes síkon és gömbön

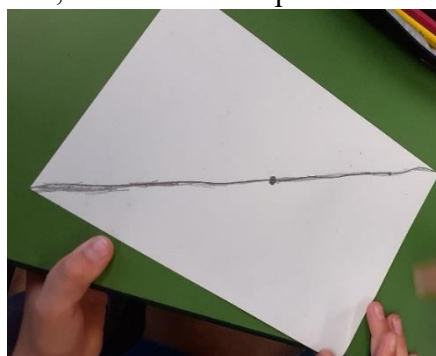
Minden gyereknek kiosztottam egy-egy papírgolyót és lapot.

T: Rajzoljatok egy pontot a papírgolyóra, majd a lapra is! Van-e különbség a gömbre és a lapra rajzolt pont között?

Gy: Nincs, ugyanolyanok.

T: Rajzoljatok még egy pontot a lapra, és kössétek össze a két pontot a legrövidebb vonallal! Hosszabbítsátok meg a vonalat mindkét irányba, ameddig a lapon tudjátok! (34. ábra) Tudnánk-e tovább is húzni?

Gy: Igen, tudnánk tovább is húzni, ha lenne több lapunk.



34. ábra

T: Rajzoljatok a gömbre is még egy pontot, és kössétek össze a pontokat a legrövidebb vonallal! Hosszabbítsátok meg a vonalat mindkét irányba! (35. ábra) Mit tapasztaltok?

Gy: Össze fognak érni.



35. ábra

2. feladat: Kör rajzolása és a kör középpontja

T: Mit gondoltok, a lapra lerajzolt egyenes szerintetek kör?

Gy: Nem, nem az.

T: Akkor szerintetek mitől kör a kör? Rajzoljátok fel egyet!

Felrajzoltam a táblára egy ovális alakzatot. (36. ábra)

T: Ez szerintetek kör?



36. ábra

Gy: Nem, nem kör, mert a körnek minden pontja egy ponttól egyenlő távolságra van.

T: Akkor tehát van középpontja a körnek. Hány lehet belőle? Rajzoljátok meg a körnek a középpontjait!

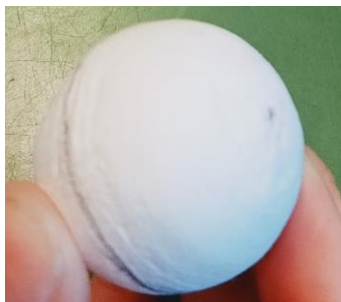
Gy: Csak egy van.

T: A gömbre is rajzoltunk egy egyenest. Ez szerintetek kör? Miért lehet az?

Gy: Igen, mert van egy pont, amitől minden pontja ugyanakkora távolságra van.

T: Hány ilyen pont van? Keressétek meg őket a gömbön!

Gy: Szerintem egy van./Szerintem kettő is van. (37. ábra)

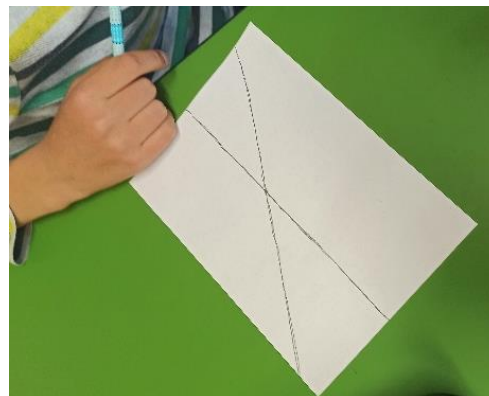


37. ábra

3. feladat: Két egyenes síkon és gömbön

T: Rajzoljunk fel 2 egyenest a lapra! Hány közös pontjuk lehet, hányféleképpen helyezkedhet el az a két egyenes?

Gy: Kétféleképpen is fel lehet rajzolni. Lehet 0 és lehet 1 közös pontjuk. (38. ábra)



38. ábra

T: Rajzoljatok 2 egyenest a gömbre! Hány közös pontjuk lehet, hányféleképpen helyezkedhet el az a két egyenes?

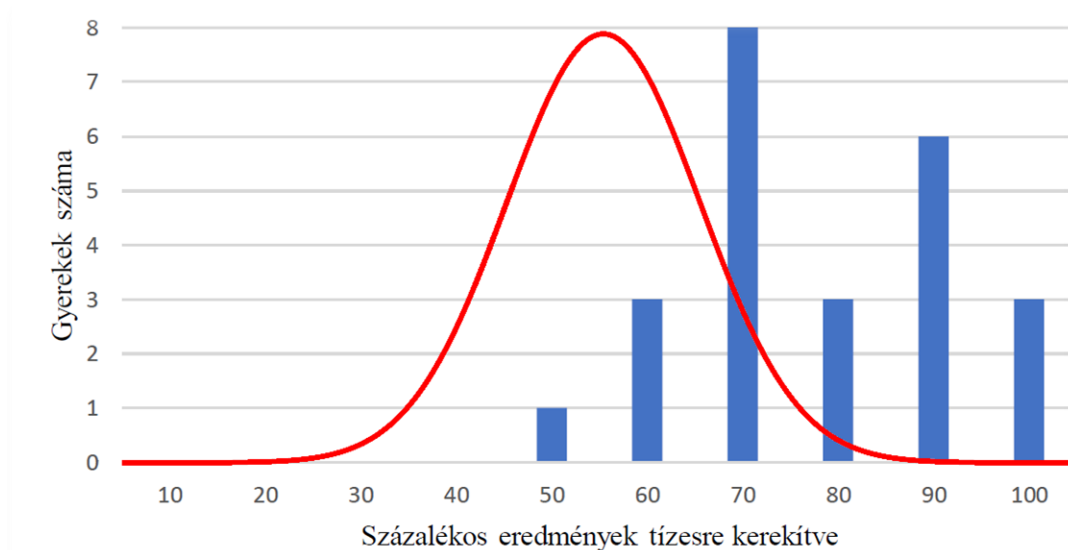
Gy: Ez is kétféleképpen. Lehet 0 és 2 közös pontjuk. Úgy lehet 0 közös pontjuk, hogy az egyik egyenes az Egyenlítő, a másik egyenes a Ráktérítő.

Bemutattam a gyerekeknek strandlabdán ezt a 2 vonalat, és próbáltam ismét elmagyarázni a gömbön a kör és az egyenes közötti különbséget, és hogy miért nem lehet a gömbön a Ráktérítő egyenes. A gömbi egyenesekre és azok metszéspontjaira, illetve ezek lehetséges számára nyilván jó lett volna még visszatérni, sajnos azonban erre már nem volt lehetőség, mert ez volt az utolsó gömbi geometriaóra. Ugyanakkor még így is nagyon izgalmas volt azt megfigyelni, hogy több tanuló is rájött arra, hogy a gömbön egy körnek több (nevezetesen kettő) középpontja is lehet. Annak is nagyon örültem, hogy sok tanuló észrevette és értette is, hogy a gömbön két egyenesnek két közös pontja van. Továbbá nagyon érdekes volt az egyik tanuló részéről annak a gondolatnak a felvetése, hogy az Egyenlítő és a Ráktérítő párhuzamos gömbi egyenesek annak ellenére is, hogy a Ráktérítő nem gömbi egyenes. (A gyerekek számára valószínűleg az okozta a nehézséget, hogy a gömbi egyenes és a gömbi kör fogalmak és a köztük levő különbség még nem mélyült el megfelelőképpen. Gondot okozhatott továbbá még az is, hogy az Egyenlítő és a Ráktérítő valóban párhuzamos síkok síkmetszetként jön létre, így úgy tűnhetett, hogy a gömbön is létezik a papíron rajzolt párhuzamos egyenesek megfelelője.)

4. A gömbi geometria utóteszt eredményeinek bemutatása

Kutatásunk arra irányult, hogy a gömbi geometria tanítható-e alsó tagozaton. A gömbi geometriaórák előtt nem tudtunk előtesztet felvenni, hiszen a gyerekek a gömbi geometriáról semmiféle előzetes tudással nem rendelkeztek. Ez adja egyben az eredmény limitációját, hiszen így a gömbi geometriával foglalkozó tanórák után csupán utótesztet tudtunk felvenni. Az általam összeállított gömbi geometria utóteszt (lásd Melléklet: Gömbi geometria utóteszt) 30 itemből állt, a gömbi tanórákon megbeszélt ismereteket és fogalmakat tartalmazta és a gömbi geometria taníthatóságát mérte az alsó tagozatos tanulók körében. Az utótesztet az osztály 24 tanulója írta meg.

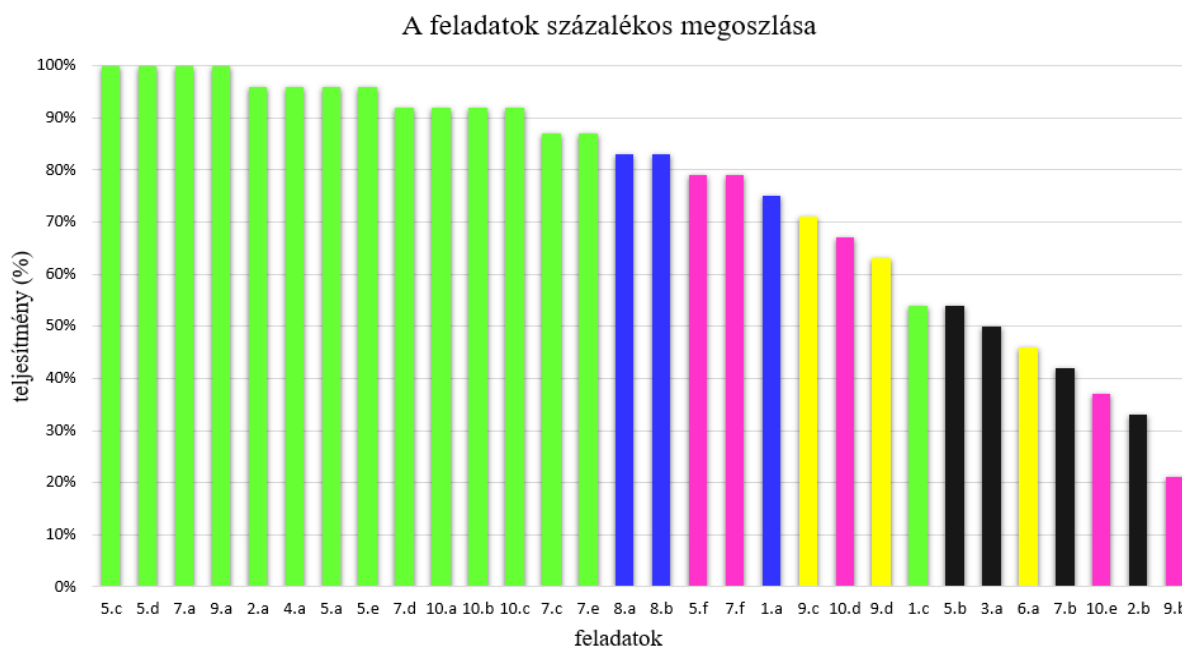
A teljes teszten elért eredmény jónak mondható, mivel az eredmények azt mutatják, hogy a tanulók a fejlesztés után 77%-os eredményt értek el. Az eloszlásgörbét megvizsgálva látható (39. ábra), hogy a normál eloszláshoz képest (az ábrán pirossal jelölve) jobbra tolódást figyelhetünk meg. A jobbra tolódás is azt mutatja, hogy érdemes alsó tagozatos tanulónak a gömbi geometriát tanítani. Az eloszlásgörbéről még az is leolvasható, hogy ezeken a tanórákon a gyengébb képességű tanulók is intenzívebben fejlődtek.



39. ábra

A gömbi geometria utóteszt öt altesztből épült fel. Az első alteszt (1.c, 2.a, 4.a, 5.a, 5.c, 5.d, 5.e, 7.a, 7.c, 7.d, 7.e, 9.a, 10.a, 10.b, 10.c itemek (a 40. ábrán zöld színnel jelölve)) a tanulók gömbön való tájékozódását vizsgálta. Az alteszt itemei az átellenes pontokkal kapcsolatos ismeretekre, a gömbfelület 4, illetve 8 részre történő feldarabolása során keletkezett alakzatok oldalainak és csúcsainak számára, illetve a síkon és a gömbfelületen rajzolt körök felrajzolására kérdeztek rá.

Ezen alteszt esetében azt tapasztaltuk, hogy a tanulók helyesen tájékozódnak a gömbön, a fogalmakat értik, ugyanakkor a gömbi szakkifejezések helyett inkább saját megfogalmazásukat használják. A második alteszt (5.f, 7.f, 9.b, 10.d, 10.e itemek (a 40. ábrán lila színnel jelölve)) a síkon és a gömbön való gondolkodást mérte, azaz azt, hogy a tanuló mennyire használja a síkról való gondolkodást akkor, amikor a gömbről gondolkodik. Az alteszt itemei a gömbkétszöggel és a gömbháromszöggel szomszédos tartományok számára, illetve a síkon és a gömbfelületen rajzolt körök matematikai tulajdonságaira kérdeztek rá. Ezen alteszthez azok az itemek tartoznak, amelyek esetében a síkbeli gondolkodás inkább hátráltatja a gömbön való gondolkodást. A harmadik alteszt (1.a, 8.a, 8.b itemek (a 40. ábrán kék színnel jelölve)) azt nézte, hogy melyek azok az esetek, amikor a síkon és a gömbön valami „ugyanolyan”. Az alteszt itemei az átellenes pont – mint legtávolabbi pont – tulajdonságára, illetve a síkbeli háromszög, mint alakzat felismerésére, felrajzolására kérdeztek rá. Ezen alteszthez azok az itemek tartoznak, amelyek esetében a síkbeli gondolkodás segítheti a gömbön való gondolkodást. A negyedik alteszt (6.a, 9.c, 9.d itemek (a 40. ábrán sárga színnel jelölve)) esetében a tanulóknak önállóan kellett valamilyen produktumot létrehozniuk, ezen alteszt esetében azt vizsgáltuk, hogy a tanuló hogyan tudja saját maga megalkotni a tanult fogalmat. Az alteszt itemei a gömbkétszög síkbeli megfelelőjének felrajzolására, továbbá a síkbeli kör középpontjára és annak berajzolására kérdeztek rá. Az ötödik alteszt (2.b, 3.a, 5.b, 7.b itemek (a 40. ábrán fekete színnel jelölve)) pedig azt vizsgálta, hogy a tanulók mennyire emlékeznek a tanult fogalmakra. Az alteszt itemei az átellenes pontokat összekötő gömbi egyenesek számára, illetve a gömbkétszög és a gömbháromszög alakjára kérdeztek rá.



40. ábra

Az, hogy a tanulók az altesztek szintjén hogyan teljesítenek – azaz az egyes fejlesztési területeken a gyerekek mennyi mindent tudtak elsajátítani – ott van különbség és ez jól látszik az altesztek szintjén. A gyerekek legjobban az első alteszten teljesítettek (a 40. ábrán a zöld színnel jelölt itemek), ez nem meglepő, hiszen a gömbi geometria órákon ezekkel a fogalmakkal találkoztak legtöbbször és ezek a fogalmak bizonyultak a legszemléletesebbnek, legkönnyebben elsajátíthatónak. Ennél szignifikánsan kevésbé jól, de még mindig jól teljesítettek a tanulók a harmadik alteszten (a 40. ábrán a kék színnel jelölt itemek). A jó teljesítmény itt sem meglepő, hiszen ezen alteszt esetében a síkbeli és a gömbi gondolkodás hasonlóan működik, segíti egymást. Ismét szignifikáns a csökkenés a tanulók teljesítményében a negyedik alteszten is (a 40. ábrán a sárga színnel jelölt itemek), ennek az lehet a magyarázata, hogy itt a tanulóknak saját maguknak kellett létrehozniuk, megrajzolniuk valamit. További, de már nem szignifikáns különbség figyelhető meg a második (a 40. ábrán a lila színnel jelölt itemek), majd az ötödik (a 40. ábrán a fekete színnel jelölt itemek) alteszt szintjén. Ennek egyrészt nyilván az lehet az oka, hogy a második alteszt esetében a síkban való gondolkodás inkább hátráltatja a gömbön való gondolkodást, az ötödik alteszt esetében pedig a tanulóknak a tanult fogalmakra kellett emlékezniük.

Ha megnézzük, hogy feladatok szintjén ez a teljesítmény mit jelent, akkor azt látjuk, hogy legjobban (90% körül vagy felette) a tanulók az első alteszt feladatait oldották meg (a 40. ábrán a zöld színnel jelölt itemek). Ezen feladatok esetében azért teljesíthettek nagyon jól a diákok, mert itt viszonylag egyszerű, jól begyakorolt fogalmakat kellett felismerni, megrajzolni. Egyedül az 1.c item esetében látható kiugróan rosszabb teljesítmény. Ez az item éppen az átellenes pontok elnevezésre kérdezett rá. A gyerekek az utótesztben sem használták az átellenes pont megnevezést, helyette továbbra is a fogalomnak megfelelő Északi-sark, Déli-sark elnevezést, illetve az egymástól legtávolabbi pontok elnevezést használták.

Kicsit gyengébben, 50-80% között teljesítettek a diákok azokban a feladatokban, ahol a fogalmakat pontosan meg kellett nevezni vagy ahol a síkbeli és a gömbi gondolkodás nem segítette egymást. Itt külön kiemelném az 5.b és a 3.a itemeket. Ez a két item más módon ugyan, de mindkét esetben a gömbkétszög elnevezésre kérdezett rá. Többen a tanulók közül az órán általuk használt gömbi szírom vagy gömbi hajó elnevezést írták válaszként és jóval kevesebben adták meg a matematikai gömbkétszög elnevezést. Itt szeretném még megemlíteni a 6.a itemet is, mivel ez éppen arra kérdezett rá, hogy lehet-e a papírra olyan alakzatot rajzolni, amelynek két csúcsa és két oldala van. (Azaz van-e a gömbkétszögnek síkbeli megfelelője.) Nem meglepő a gyengébb teljesítmény, hiszen ez a feladat már az órán is nehéznek bizonyult a gyerekek számára, mivel itt a síkbeli és a gömbi gondolkodás nem segíti egymást.

A leggyengébben a 7.b, 10.e, 2.b és 9.b itemek esetében teljesítettek a diákok. A 7.b item esetében ez azért meglepő, mert ez az item a 46. ábrán látható gömbháromszög alakjára kérdez rá és a kérdés megválaszolása esetén a gömbi és a síkbeli gondolkodás segíti, kiegészíti egymást. A gyengébb teljesítmény azért is meglepő, mert a 7.d és 7.e itemek ugyanúgy a gömbháromszög fogalmához kapcsolódtak (hány csúcsa, hány oldala van) és itt a gyerekek sokkal jobb teljesítményt értek el.

A 2.b item esetében kapott gyengébb teljesítmény szintén meglepő, mivel az órákon a tanulók segítség nélkül szóban is és rajzban is megfogalmazták, hogy két átellenes pontot végtelensok úttal lehet összekötni. Ugyanakkor az is elképzelhető, hogy a helyes válasz megadását valamennyire gátolta az, hogy a gyerekeknek a 2.a item esetében a papíron levő gömb ábrájába (42. ábra) kellett berajzolniuk a bejelölt átellenes pontok közötti legrövidebb utat és ez a papíron berajzolt egyenes (ami ugyanakkor gömbi egyenest jelentett) néhány tanuló esetében gátolhatta a gömbön való gondolkodást. Valószínű, hogy ha a tanulók egy valódi gömböt kapnak a kezükbe, akkor már helyesen válaszoltak volna.

A 10.e és 9.b itemek gyengébb teljesítménye egyértelműen magyarázható azzal, hogy itt nehezebb, elvont, kevesebbet gyakorolt fogalmakat kellett volna a gyerekeknek a saját szavaikkal megfogalmazniuk. A 10.e item esetében a gömbi főkör (azaz a gömbi egyenes) és a gömbön elhelyezkedő kör közötti különbséget kellett valamilyen módon megfogalmazni a gyerekeknek. Ez nyilván nehéz kérdés, volt olyan tanuló, aki le is írta, hogy tudja azt, hogy van különbség a két alakzat között, de nem tudja megfogalmazni mi az. (Ez a válasz összhangban van a 10.d itemre adott válaszok magasabb arányával is, azaz több tanuló is tudta, hogy van különbség a két alakzat között, de ennek a különbségnek a szavakba foglalása már jóval nehezebben ment nekik.) Ugyanakkor nagyon biztató az, hogy több gyermek is úgy fogalmazta meg a két alakzat közötti különbséget, hogy „a gömbi főkör hosszabb, mint a gömbi kör”.

A tanulók számára legnehezebbnek a 9.b item kérdésének „Mitől kör a kör?” megválaszolása bizonyult annak ellenére is, hogy ebben az esetben a kérdés a síkbeli körre vonatkozott. Ugyanakkor több tanuló is – és emeljük ki, hogy 3. osztályos tanulókról van szó – azt a matematikailag lényegében tökéletes választ adta, hogy „Mert a középpontjától minden része ugyanolyan messze van.”

5. Összegezés

A dolgozat elején megfogalmazott kutatási kérdéseimre az alábbi válaszokat adom.

- Megvalósítható-e a gömbi geometria alapjainak tanítása az alsó tagozatos matematikaórán?

A válasz egyértelműen igen. A megtartott alsó tagozatos matematikaórák alapján nyugodtan kijelenthetjük, hogy a gömbi geometria matematikai és pedagógiai szempontból is méltó párja a síkgeometriának. Sőt, egy nagyon fontos tulajdonságában felülmúlja a síkgeometriát, nem végtelen, hanem véges felületre épül. Az előforduló fogalmak megértését továbbá jelentősen megkönnyíti az, hogy a tanulók valódi gömbön (itt narancson, papírgolyón és egy alkalommal a Lénárt-gömbön) kísérletezhetnek. A sík és a gömb összehasonlítása ugyanakkor arra is neveli a tanulókat, hogy kérdéseket tegyenek fel egymásnak és a tanáraiknak, önállóan vizsgálódjanak és kísérletezzenek, gondolataikat összehasonlítsák mások gondolataival. A gömbi geometria másik előnye az, hogy számos alapfogalma szerepel egy másik tantárgy, a földrajz anyagában is, ezt megpróbáltuk alsó tagozatos szinten bemutatni a földgömbbel kapcsolatos órán.

- Van-e pozitív hatása a nem-euklidészi geometria alsó tagozatos általános iskolai tanulmányozásának?

A válasz egyértelműen igen. A tanulók utótesztben elért jó eredményei azt igazolják, hogy érdemes alsó tagozatos tanulóknak gömbi geometriát tanítani. Az eredményekből az is láthatóvá vált, hogy a gömbi geometria tanórákon még a gyengébb képességű tanulók is intenzívebben fejlődtek. A tanórák során azt tapasztaltuk, hogy ha a gyerekek egy időben ismerkednek meg a síkgeometriával és a gömbi geometriával, akkor számukra teljesen természetessé válik a síkgeometriai és a gömbi geometriai fogalmak elfogadása és összehasonlítása. Ahogy az egyik tanuló megfogalmazta: „Az volt érdekes ezeken az órákon, hogy miért nem tudunk sík lapra ugyanolyan rajzolni, mint a gömbre.” A földgömb tanulmányozása során egyértelműen látszott az is, hogy a gömbi geometria tanulása hozzájárulhat a földgömbön való könnyebb tájékozódáshoz és a földrajzi alapfogalmak jobb megértéséhez.

- Milyen tapasztalatokat lehet elérni a gömbön keresztül, és milyen reflexiókat lehet elősegíteni ezzel kapcsolatban az alsó tagozatos általános iskolások számára?

A gömbi tanórák tapasztalatairól az órák ismertetésénél, az utóteszt eredményeinek bemutatásánál, valamint az előző kutatási kérdés megválaszolása során is írtam. Néhány gondolatot szeretnék még megfogalmazni a kutatás esetleges folytatási irányával kapcsolatban. Az elméleti összefoglalóban leírtak alapján a szakirodalomra támaszkodva megállapítható, hogy a téri gondolkodás fejlesztése kedvezően hat a matematika egyéb területeire is. A legközelebbi ilyen terület a síkgeometria lehet, hiszen a síkgeometriai és gömbi geometriai fogalmak összehasonlítása nemcsak a gömb tulajdonságainak jobb megértéséhez – és ezáltal a térgeometriai ismeretek bővüléséhez – vezethet, hanem a síkgeometriai ismereteket is megerősítheti. Érdekes lenne megvizsgálni a szakirodalomra támaszkodva azt is, hogy a gömbi geometria tanítása hatással van-e a számokkal végzett műveletekre, a számolási készségre. Így érdemes lenne ezekre a területekre fókuszálva elő- és utótesztet is felvenni és így is elemezni a gömbi geometria fejlesztő hatását. További távlati cél lehet az is, hogy 4. osztályos tanulókkal – beleértve ezt az osztályt is – ki lehetne próbálni a bemutatott kísérleti anyag kibővített változatát és így megfigyelni a gömbi geometria fejlesztő hatását a térgeometria és a matematika egyéb területein, továbbá ezen osztály esetében a hosszútávú fejlesztő hatást is.

Irodalom

- Battista, M. T. & Clements, D. H. (1988). A case for a Logo-based elementary school geometry curriculum. *Arithmetic Teacher*, 36(3), 11–17.
- C. Neményi, E. (2007). *Geometria tananyag és a geometria tanulása az alsó tagozaton*. ELTE Tanító- és Óvóképző Főiskolai Kar.
- C. Neményi, E., Dr. Radnainé Szendrei, J. (2001). *Matematikai füveskönyv a differenciálásról*. Okker Kiadó.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(2), 133–148.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192–212.
- Dehaene, S. (2011). *The number sense: how the mind creates mathematics*. revised edition. Oxford University Press.
- Farmer, G., Verdine, B., Lucca, K., Davies, T., Dempsey, R., Newcombe, N., Hirsh-Pasek, K., & Golinkoff, R. (2013). *Putting the pieces together: spatial skills at age 3 predict to spatial and math performance at age 5*. Paper presented at the Society for Research in Child Development, Seattle, WA.
- Galton, F. (1880). Visualised numerals. *Nature* 21, 252–256.
- Gambini, A. (2021). Five Years of Comparison Between Euclidian Plane Geometry and Spherical Geometry in Primary Schools: An Experimental Study. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 9(4), 230-243.
<https://doi.org/10.30935/scimath/11250>
- Hawes, Z., Tepylo, D., & Moss, J. (2015). Developing spatial thinking: Implications for early mathematics education. In B. Davis and Spatial Reasoning Study Group (Eds.). *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions and speculations* (pp. 29-44). New York, NY: Routledge.
- Herendiné Kónya, E. (2003). A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei. *Iskolakultúra* 12, 51-61.
- Herendiné Kónya, E. (2004). Az alsó tagozatos geometriatanítás helyzetének elemzése. In Lőrincz I. (Ed.). *Apáczai-Napok 2003 – Tanulmánykötet* (pp. 242-247). Győr: NYME AJK.
- Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., & Dehaene, S. (2009). Numerical and spatial intuitions: a role for posterior parietal cortex? In L. Tommasi, L. Nadel, & M. A.

Peterson (Eds.). *Cognitive biology: evolutionary and developmental perspectives on mind, brain and behavior* (pp. 221–246). Cambridge, MA: MIT Press.

- Kerettanterv (2020)
https://www.oktatas.hu/koznevelas/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_alt_isk_1_4_evf (2022. október 7.)
- Lénárt, I. *Ismerkedés a gömbbel*. Matematika „A” 2. évfolyam, 2. évfolyam 25. modul
https://tanitonline.hu/uploads/1199/25-modul_tan%c3%adt%c3%b3_matA2.pdf
(2022. október 7.)
- Lénárt, I. (2009). *Sík és gömb. Összehasonlító geometriai kísérletek síkon és gömbön a Lénárt-gömb készlet segítségével*. Lénárt Oktatási, Kereskedelmi és Szolgáltató Bt.
- Mészáros, M. (2017). *Színezősök még egyszer*. <https://meszaros-mihaly.hu/szinezosok-meg-egyszer/> (2022. október 7.)
- Mix, K. S., & Cheng, Y. L. (2012). The relation between space and math: developmental and educational implications. In J. B. Benson (Ed.). *Advances in child development and behavior* (vol. 42, pp. 197–243). San Diego, CA: Academic Press.
- NAT (2020). *Magyar Közlöny* 17, 328-329.
- Newcombe, N. S. (2010). Picture this: increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American Educator*, 34(2), 29–43.
- Piaget, J., & Inhelder, B (2004). *Gyermeklélektan*. Osiris Kiadó.
- Pintér, K. (2013). *Matematika tantárgy-pedagógia*. Mentor(h)áló 2.0 Program” TÁMOP-4.1.2.B.2-13/1-2013-0008 projekt.
http://www.jgypk.hu/mentorhalo/tananyag/Matematika_tantrgypedaggia/
(2022. október 7.)
- Skemp, R. R. (1975). *A matematikatanulás pszichológiája*. Gondolat Kiadó.
- Szili, J. & Lénárt, I. *Téglatest, kocka, gömb – téglalap, négyzet, kör*. Matematika „A” 3. évfolyam, 3. évfolyam 40. modul
https://tanitonline.hu/uploads/1436/40-modul_tan%c3%adt%c3%b3_matA3.pdf
(2022. október 7.)
- Szili, J. & Lénárt, I. *Tájékozódás síkon és gömbön*. Matematika „A” 3. évfolyam, 3. évfolyam 42. modul
https://tanitonline.hu/uploads/1459/42-modul_tan%c3%adt%c3%b3_matA3.pdf
(2022. október 7.)
- Szili, J. & Lénárt, I. *Haladó és forgó mozgás, tükrözés, nagyítás, kicsinyítés*. Matematika „A” 3. évfolyam, 3. évfolyam 43. modul

https://tanitonline.hu/uploads/1461/43-modul_tan%c3%adt%c3%b3_matA3.pdf

(2022. október 7.)

- Tzuriel, D., & Egozi, G. (2010). Gender differences in spatial ability of young children: the effects of training and processing strategies. *Child Development*, 81(5), 1417–1430.
- Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: a meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352–402. doi: 10.1037/a0028446
- Verdine, B. N., Golinkoff, R., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N., Filipowicz, A. T., & Chang, A. (2014). Deconstructing building blocks: preschoolers' spatial assembly performance relates to early mathematics skills. *Child Development*, 85(3), 1062–1076. doi: 10.1111/cdev.12165
- Whiteley, W., & Mamolo, A. (2014). Optimizing through geometric reasoning supported by 3D models: visual representations of change. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *ICMI Study 22 on Task Design* (pp. 129–140). Berlin: Springer.

Melléklet

Gömbi geometria utóteszt

1. Bejelöltünk a gömbön egy pontot. Keresd meg azt a pontot, ami a lehető a legmesszebb van tőle a gömbön!

a) Rajzolj oda is egy pontot!



41. ábra

b) Hogyan neveznéd el ezt a két pontot?

c) Emlékszel arra, hogy az órán hogyan neveztük el?

2. a) Kösd össze a legrövidebb úttal a gömbön levő két pontot!



42. ábra

b) Hányféleképpen tudod ezt megtenni?

3. a) Milyen alakzatokat látunk a sárgadinnyén? Emlékszel az alakzatok nevére?

.....
.....



43. ábra

4. A teknős nagyon utálja a hideget. A lehető legtávolabb akar lenni az Északi- és Déli-sarktól is. Hol helyezkedhet el a teknős a gömbön?

a) Rajzold be az ábrába!



44. ábra

5. a) Hány részre osztottuk ezt a gömböt?

b) Milyen alakúak a keletkezett részek?

c) Egyformák-e?

.....

d) Egy résznek hány csúcsa van?

.....

e) Egy résznek hány oldala van?

f) Egy-egy rész hány másikkal határos (hány szomszédja van)?



45. ábra

6. a) Tudsz-e olyan alakzatot rajzolni ide a papírra, aminek két csúcsa és két egyenes oldala van?

7. a) Hány részre osztottuk most a gömböt?

.....

b) Milyen alakúak a keletkezett részek?

.....

c) Egyformák-e?

.....

c) Egy résznek hány csúcsa van?

d) Egy résznek hány oldala van?

e) Egy-egy rész hány másikkal határos?

.....



46. ábra

8. a) Tudsz-e olyan alakzatot rajzolni ide a papírra, aminek három csúcsa és három egyenes oldala van?

b) Tudod-e milyen alakzat lesz ez?

9. a) Rajzolj egy kört ide a papírra!

b) Mitől kör a kör? Meg tudnád fogalmazni?

.....
.....

c) Hány középpontja lehet a körnek?

d) Próbáld meg berajzolni a fenti ábrába!

10. a) Mit rajzoltunk a gömbre?

.....

b) Van-e ennek az alakzatnak középpontja?

.....



47. ábra



48. ábra

c) Erre a gömbre mit rajzoltunk?

.....

.....

d) Szerinted van különbség a két gömbi alakzat között?

e) Ha igen, mi lehet az?

.....

.....

Szülői beleegyező nyilatkozat

Alulírott _____ (szülő neve) mint törvényes képviselő hozzájárulok, hogy gyermekem, _____ (születési hely, idő: _____, anyja neve: _____), a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 3.a osztályos tanulója az ELTE TÓK Matematika Tanszékének „A gömbi geometria tanításának lehetőségei az alsó tagozatos matematikaórán” (Sinkó Renáta hallgató TDK dolgozata) kutatásában részt vegyen. A kutatás célját és módszertanát megismertem, az adatok tárolására és felhasználására vonatkozó információt megkaptam.
Budapest, _____

szülő/gondviselő

A dolgozatban több fényképen is beazonosítható a kutatásban részt vevő tanulók arca. A fenti Szülői beleegyező nyilatkozatot az osztály minden tanulójának szülői aláírták, az aláírt nyilatkozatokat archiváltuk és bármikor megtekinthetők. A dolgozathoz ezeket külön nem csatoltuk, a dokumentumok nagy száma miatt.