

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Tanító- és Óvóképző Kar



Geometriai játékok

az alsó tagozatos matematikaórán

Témavezetők:

Dr. Bagota Mónika

egyetemi docens

Ökördi Réka

egyetemi tanársegéd

Szerző:

Kéner Dominika

tanító szak

Budapest

2022

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	3
2. Elméleti áttekintés.....	5
2.1. Piaget elmélete.....	5
2.2. Bruner-féle reprezentációs elmélet	7
2.3. Az ismeretszerzés hatlépéses modellje	7
2.4. A van Hiele-modell	8
2.5. Nemzeti Alaptanterv és Kerettanterv, 2020	9
2.6. A térbeli gondolkodás, mint a matematikatanulás alapja	10
3. Az órák bemutatása	14
1. óra.....	14
2. óra.....	18
3. óra.....	22
4. óra.....	25
5. óra.....	27
6. óra.....	28
4. A tanítási-fejlesztési folyamat eredményességének vizsgálata	31
4.1. A mérőeszköz összeállításának koncepciója és folyamata a tanulói teljesítmények tükrében	31
4.2. Eredmények	32
5. Összegezés	41
Irodalom	42
Melléklet	45
Az előteszt feladatai	45
Az utóteszt feladatai	51

1. Bevezetés

A térbeli fogalmak fejlesztésén és alkalmazásán keresztül a gyermekek megtanulják a világot ábrázolni és értelmezni: „A geometria a tér megragadása (...) az a tér, amelyben a gyermek él, lélegzik és mozog.” (Freudenthal, 1973, p.403). „Az a tér, amelyet a gyermeknek meg kell tanulnia megismerni, felfedezni, meghódítani, hogy jobban élhessen, lélegezhessen és mozoghasson benne.” (Freudenthal, 1973, p.403).

A dolgozatom megszületését igazi elhivatottság inspirálta. A geometria régóta szívügyem, úgy gondolom, hogy a geometria a matematikán belül egy külön csodavilág, ami minden szempontból hatással van a gyerekekre, mégis túl sokszor fordul elő, hogy elhanyagoljuk, vagy csak nem fektetünk rá megfelelő hangsúlyt a mindennapi oktatásban. A gyermekekhez a térgeometriai formák és alakzatok általában közelebb állnak, mint a síkbeliek, hiszen a hétköznapi életben is folyamatosan ilyen tárgyakkal, eszközökkel találkozunk. Tapasztalatok is azt igazolják, hogy a geometria tanítása során a testekre, valóságos tárgyakra vonatkozó játékokból érdemes kiindulni és a perceptív változatosság elvének megfelelően a tanítani kívánt geometriai struktúrát minél több különböző alakban érdemes a gyermekeknek megmutatni. A játékok segítségével a gyerekek megtapasztalhatják az adott rendszeren belüli összefüggéseket és később, a tapasztalatok alapján, ennek a struktúrának a pontosítása is elképzelhetővé válik (Dienes, 1999). A játékok, játékos tevékenységek a geometriai tulajdonságok és geometriai viszonyok, kapcsolatok megtapasztalásához, valamint a geometriai alakzatok megismeréséhez vezetnek.

Ennek alapján arra jutottam, hogy feltétlenül érdemes lenne kipróbálni alsó tagozatos gyermekek esetében azt, hogy a térgeometriát játékokon és játékos tevékenységeken keresztül dolgozzuk fel a tanulókkal, néhány tanórán keresztül.

Kutatási kérdéseim a következők voltak:

- Megvalósítható-e a térgeometria megfelelő alsó tagozatos tananyagának tanítása játékokkal, játékos tevékenységekkel?
- Van-e fejlesztő hatása a térgeometriai játékoknak az alsó tagozatos matematikaórákon?
- Amennyiben a térgeometriai játékoknak van fejlesztő hatása, úgy a fejlődés a síkgeometriai ismeretek bővüléséhez is hozzájárul-e?

A kutatásban részt vevő osztály az ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium 3. osztálya volt. Schwarcz Kopfné Szücs Éva és Szinovszki Györgyi Anna

tanítók hatalmas mosollyal és érdeklődéssel vártak, a gyerekek pedig nagyon izgatottan figyelték, hogy mi fog történni. A tanórák során csakis pozitív élményekkel gazdagodtam mind a pedagógusok, mind pedig a gyerekek részéről. Teljes mértékben elkápráztatott, hogy a tanulók mennyire nyitottak, motiváltak és mennyi ötletük és elképzelésük van az őket körülvevő világról. Hatalmas élmény és tanulság volt számomra ez a hat matematikaóra, amit a gyerekekkel tölthettem és nagyon remélem, hogy sikerült maradandó emlékeket és tudást átadnom nekik az együtt eltöltött idő során.

2. Elméleti áttekintés

2.1. Piaget elmélete

Piaget 1950-es években folytatott kísérletei a gyermekek értelmi fejlődésére irányultak. Piaget arra a megállapításra jutott, hogy a gyermekek értelmi fejlődése olyan szakaszokból áll, melyek időbeli elhelyezkedése és tartama egyénenként változhat, de ennek ellenére mindenkire jellemző és a szakaszok egymáshoz viszonyított sorrendje szigorúan meghatározott, mindenkire ugyanúgy érvényes.

Piaget szerint a gyermekek értelmi fejlődésének négy fő szakasza van. (Piaget & Inhelder, 2004)

1. Szenzomotoros szakasz (általában 0-2 év között)

A gyermek olyan kísérleteket végez, melyek saját testének mozgásával kapcsolatosak, ezek segítségével megismeri a közvetlen környezetét, miközben rájön, hogy a saját érzék- és mozgásszerveit hogyan kell használni. Létrejön az a megkülönböztetési képessége, amely alapján elválasztja saját testét a környezettől és tudatosul benne a tárgyak állandósága (a tárgyak a mi érzékelésünktől függetlenül is léteznek).

2. Műveletek előtti szakasz (általában 2-7 év között).

Az előfogalmi gondolkodás (ami a konkrét kísérletezést jelenti) lépésről lépésre szemléletes gondolkodássá alakul át (reprezentációk létrejötte, ismert egyedi múltbeli történés eredményének leírása, jövőbeli kimenetelének megjóslása).

- Manipulálható tárgyakon végzett műveletek jellemzik.
- Egy tárgy jellemző tulajdonságai közül a gyermek egyszerre csak egyre tud tekintettel lenni, aszerint tud válogatni.
- A gyermek nem tudja fordított irányba elvégezni a cselekvéssort.
- Állandósul az „ugyanannyi”, az intuitív mennyiségi képzet.

3. Konkrét műveleti szakasz (általában 7-11 év között)

1. A gyermek a konkrét tárgytól elvonatkoztatva is tud gondolkodni, képes elképzelt dolgokkal, tevékenységekkel is dolgozni.
2. A gyermek tekintetbe tud venni egyidejűleg több szempontot is, felismer bizonyos összefüggéseket.
3. Ugyanazt a tevékenységet a gyermek végre tudja hajtani fordított irányban is.

4. Formális műveleti szakasz (általában 11. évtől)

- A tanuló meg tudja érteni és el tudja végezni az olyan műveleteket, amelyekben szimbólumok és változók szerepelnek.

- Megjelenik az érvelési képesség, illetve az, hogy a tanuló képes hipotézisekkel dolgozni.
- A tanulók egyidejűleg többféle szempont szerint is tudják a tárgyakat rendszerezni, osztályozni.
- Megjelenik a visszafelé következtetés.

Fontos kiemelni, hogy alsó tagozaton azzal foglalkozunk, hogy a gyermekek számára hogyan lehet előkészíteni a szimbolikus gondolkodást, ezt azonban nem szabad megfelelő tapasztalati alapozás nélkül tenni, hiszen ez olyan törést idézhet elő az absztrakciós folyamatban, ami a tanulók későbbi teljesítményére és matematikához való viszonyára is rossz hatással lehet. (Pintér, 2013) Dolgozatomban szempontjából nagyon fontos megemlíteni, hogy Piaget szerint a térfogat észlelése a gyerekeknél csak 11-12 éves korban alakul ki, ami magyarázhatja a térrel kapcsolatos feladatokban rejlő nehézségeket.

Piaget vette észre a kutatásai közben azt is, hogy egy fogalom kialakulása során számos olyan tevékenységre is szükség van, amely tevékenységek látszólag nincsenek összefüggésben a fogalommal. Ez a szakasz a „játás” szakasza. Ilyen például az, amikor a gyermek építőkockákkal játszik és a játék közben megismeri a térbeli alakzatokat, az alakzatok térbeli viszonyait és így megkezdődik számára a tér fogalmának kialakulása. A második szakaszban a tevékenységek során gyűjtött tapasztalatok fokozatosan egy egészé kapcsolódnak össze. Az építőkockákkal játszó gyermek például elkezd rájönni arra, hogy mikor lesz stabil az az építmény, amit épít és arra is, hogy mikor omlik össze. A harmadik szakaszban pedig már azt érezzük, hogy az adott fogalom összeállt, értjük, létrejött az egészé kapcsolódás. A matematikatanulás folyamatának leginkább az ilyen dinamikus felfogású modell felel meg. A három szakasz mindegyikéhez eltérő típusú tanulás tartozik. A játási szakaszban maga a tevékenység a fontos, még hozzá olyan tevékenység, amelyet a tanulók élveznek és amely tevékenység során biztosítani kell a tanulók számára a kísérletezés szabadságát is. A játás során biztosítani kell továbbá a tanulók számára azokat az alkotóelemeket is, amelyekből majd a fogalom kialakítható. A második szakaszban a korábbi szabad tevékenységet felváltják a kisebb-nagyobb mértékben strukturált tevékenységek és az a legszerencsésebb, ha ezek által a tanulóknak minél többfajta tapasztalatot biztosítunk. A harmadik szakaszban már az előző két szakaszban kialakított fogalmak gyakorlása, alkalmazása történik meg. Az egyes szakaszokhoz tartozó játékok elnevezése az alábbi módon történik:

- a) előkészítő játékok
- b) strukturált játékok

c) gyakorló játékok és/vagy elemző játékok. (Dienes, 1999)

Az általam tartott tanórákon kisebb mértékben az előkészítő, nagyobb mértékben a – minél többfajta tapasztalatot biztosító – strukturált játékok kerültek előtérbe. Ennek oka az volt, hogy a játékos tanórák során szerettem volna minél jobban megalapozni a tanulók térgeometriai ismereteit. Gyakorló vagy elemző játékok bemutatására idő hiányában kevésbé került sor, hiszen csak hat tanórán találkoztam a gyerekekkel.

2.2. Bruner-féle reprezentációs elmélet

A Bruner által megkonstruált elmélet szerint az ismeretszerzés három, egymásra épülő síkon megy végbe.

- d) Matriális sík (enaktív sík): Az ismeretszerzés konkrét tárgyi tevékenységek, cselekvések révén megy végbe (fontos az eszközök használata).
- e) Képi sík (ikonikus sík): Az ismeretszerzés szemléletes képek, elképzelt szituációk segítségével történik (Venn-diagram, szöveges feladatok szakaszos ábrázolása, ágrajzok stb.).
- f) Szimbolikus sík: Ismeretszerzés matematikai szimbólumok, és a nyelv segítségével (a szimbólumoknak már nincs konkrét tárgyi megvalósulásuk, saját jelentéssel rendelkeznek). (Pintér, 2013)

A térbeli tájékozódás esetében Bruner reprezentációs elmélete rávilágít arra, hogy a különböző térbeli problémákat – alsó tagozatos gyermekek esetében különösen – legcélravezetőbb az enaktív síkon, azaz konkrét tárgyi tevékenységekkel, eszközökkel megoldani.

2.3. Az ismeretszerzés hatlépéses modellje

V. Hejny és M. Hejny munkájának segítségével C. Neményi Eszter és R. Szendrei Julianna a tanulási-tanítási folyamatot hat szint segítségével próbálták modellezni (C. Neményi & R. Szendrei, 2001).

1. A ráhangolódás szintje

Ekkor megpróbáljuk a tanulók érdeklődését felébreszteni egy terület vagy téma iránt. Ez történhet a téma érdekességének megmutatásával, például játékkal, trükkökkel, „varázslással”.

2. A konkrét tapasztalatok szintje

A tanítási-tanulási folyamatban különböző konkrét helyzetekben mutatjuk be az adott témakörhöz tartozó új ismereteket, így az egymás után előkerülő egyedi tapasztalatok biztosítják a közös tartalom felfedezését.

3. Az általános tapasztalatok szintje

A konkrét tapasztalatok, modellek számának növekedésével láthatóvá válnak a legalkalmasabb modellek, amelyek a többi modell fő reprezentánsaivá válnak, ezek az univerzális modellek.

4. A megszületés pillanata, „AHA élmény”

A lényeges jegyek összesűrűsödnek, ezáltal absztrakciós ugrás következik be: az ismeret, a fogalom kialakul. Eközben intenzív „aha!”, „már értem!” felfedezői érzés jön létre.

5. Az ismeretek kikristályosodása

Az új ismeret a már meglévő ismeretek széles körével kerül kapcsolatba és beépül ezek rendszerébe. Asszimilációról akkor beszélünk, ha az új ismeret a korábbi rendszer struktúrájának megváltoztatása nélkül be tud épülni. Akkomodációról akkor beszélünk, ha az új ismerethez a régi rendszert át kell értékelni (Skemp, 1975).

Ennél a szintnél a dolgozat szempontjából különösen fontos megemlíteni, hogy a geometriai feladatok megoldása során tapasztalt problémák oka sokszor éppen az, hogy a feladathoz kapcsolódó geometriai fogalmak nincsenek kikristályosodva.

6. Az automatikussá válás szintje

Az ismeretek automatikussá válásával más tevékenységre fordítható pszichikai energia szabadul fel.

Az általam megtartott tanórák során a fenti modell első négy lépése tudott megvalósulni. A bemutatott játékok egyértelműen felkeltették a gyermekek érdeklődését a térgeometria iránt. A játékos tevékenységek segítségével a gyerekek számára számos alkalommal létrejött az intenzív felfedezői érzés, az „AHA” élmény.

2.4. van Hiele-modell

1957-ben Pierre van Hiele és Dina van Hiele-Geldorf egy elméletet alkottak arról, hogy a geometriai tanulás hogyan működik, munkájukban ezt egy öt szintből felépülő folyamatként fogták fel.

0. szint: a globális felismerés szintje

Ebben a szakaszban a gyermekek a geometriai alakzatokat csak egészként ismerik fel, nem látják ezek egyes részeit, tulajdonságait és a köztük levő összefüggéseket sem.

1. szint: az elemzés szintje

A gyermekek kezdik felismerni az alakzatok részeit, így már azok tulajdonságait is képesek észrevenni és leírni. A tanulók számára tulajdonságok azonban mindig a konkrét alakzathoz kapcsolódnak.

2. szint: az informális dedukció szintje

A gyermekek már képesek az alakzatok közötti kapcsolatokat felfedezni és az alakzatokat tulajdonságaik alapján logikailag rendszerezni. A szemlélet alapján képesek következtetéseket megérteni és ok-okozati összefüggéseket keresni.

3. szint: a formális dedukció szintje

A tanulók képesek a geometriai összefüggések deduktív felépítésére. Megjelennek az alapfogalmak, definíciók, axiómák, tételek, illetve az egyszerűbb bizonyítások és a szerkesztési feladatok diszkutálása is.

4. szint: a formális logika szintje

A tanulók megértik a formális logikai műveleteket, az axiómarendszerek közötti összefüggéseket, és összetett bizonyításokat tudnak alkotni. (Kónya, 2003; Pintér, 2013)

Az alsó tagozatos gyerekekre az első két szint a jellemző, az 1.-2. osztálynak a 0. szint, a 3.-4. osztálynak pedig az 1. szint felel meg. A 2. szint a felső tagozatban, a középiskolában, a további szintek pedig részben a középiskolai oktatásban, de inkább a felsőoktatásban fordulnak elő. (Pintér, 2013)

Az általam tartott tanórákon megfigyeltem, hogy a foglalkozásokon részt vevő tanulók az 1. szintnek megfelelően felismerték az alakzatok részeit és képesek voltak ezek tulajdonságait észrevenni és megnevezni. A gyermekek számára ugyanakkor az 1. szintnek megfelelően mindannyiszor nagyon fontos volt az, hogy a játékos feladványok megoldása konkrét tevékenységhez (pl. az adott térbeli alakzat megépítéséhez) kapcsolódjon.

2.5. Nemzeti Alaptanterv és Kerettanterv, 2020

„A matematika tanulásának alapvető módszere a valóságon alapuló, személyes, cselekvő tapasztalatszerzés, amely a különböző érzékszervek bevonásával, mozgással, valamint szemléletükben és matematikai tartalmukban egyaránt változatos eszközök használatával, játékokkal valósul meg. ... A tevékenységek során működő alkotó gondolkodásnak kiemelt szerepe van a megértésben. A tárgyi tevékenységek és a kapcsolódó változatos képi ábrázolások alapozzák meg a későbbi absztrakciót. A konkrétumokhoz való sokszori vissza-visszalépések során alakulnak a matematikai fogalmak, összefüggések és eljárások. ... Alsó tagozaton az új elemeket tartalmazó, problémát jelentő helyzetek nagyrészt örömteli tevékenységekben,

játékos helyzetekben merülnek fel, a tanuló így gyakorolhatja, alkalmazhatja megszerzett ismereteit, fejlesztheti problémamegoldó, rendszerező és döntési képességeit. Elkezdi megtapasztalni, hogy a matematika segítségével hogyan lehet leírni a közvetlen környezete természeti, vizuális, technikai jelenségeit, tevékenységeit.” (NAT, 2020)

„Fontos, hogy egy-egy témakört, problémát, ismeretet több oldalról, sokrétűen és mind szemléletükben, mind matematikai tartalmukban egyaránt változatos eszközök használatával, tevékenységeken keresztül közelítsünk meg. Ez segíti, hogy a gondolkodás rugalmas maradjon, valamint a fogalmak és ezek egymás közti viszonyai, összefüggései igazán megértésre kerüljenek, elmélyüljenek. ... A kapcsolatok, összefüggések, feltételezések és magyarázatok felismerése és értelmezése hozzátartozik a fogalmak építéséhez és egyben a kreatív, problémamegoldó és logikai gondolkodás fejlődéséhez. ... 3.-4. osztályban nagyobb szerepet kapnak a fogalmi gondolkodást előkészítő megfigyelések, az összefüggések felfedeztetése, a képi információk feldolgozása és az általánosítás. ... A tanulási folyamat szerves részeként nagy szerepet kap a vélemények megfogalmazása, meghallgatása, ütköztetése. A tanulók a geometriai feladatok során is egyre önállóbban és pontosabban meg tudják fogalmazni észrevételeiket, jellemezni tudják alkotásaikat.” (Kerettanterv, 2020)

A térgeometriához tartozó vagy azzal kapcsolatos témakörök az alsó tagozaton:

- Alkotás térben és síkon
- Tájékozódás térben és síkon
- Alakzatok geometriai tulajdonságai
- Transzformációk

Látható az idézett mondatokból, hogy mind a Nemzeti Alaptanterv, mind a Kerettanterv szorosan kapcsolódik az eddig bemutatott elméletekhez. A játékos tanórákon nagy szerepet kapott az is, hogy a gyerekek elmondják a tevékenységek során felmerült ötleteiket, gondolataikat. Nagyon jó volt megtapasztalni, hogy a nehezebb feladványoknál közösen gondolkodva, egymást segítve jutottak el több alkalommal is a megoldáshoz.

2.6. A térbeli gondolkodás, mint a matematikatanulás alapja

Nagyjából száz éve kezdték feltételezni a szakemberek, hogy kapcsolat van a numerikus és a vizuális-térbeli képességek között. Arra jutottak, hogy nagy eltérések vannak aközött, ahogy az egyes egyének a számokat gondolatilag megjelenítik, bár az egyes személyek konzisztensek abban, ahogy magukban láttatják a számokat. Hubbard et al. (2009) ebből arra következtettek, hogy a térbeliség szorosan kapcsolódhat a számolási folyamatokhoz. Ugyanezt a gondolatot

Dehaene (2011) úgy fogalmazza meg, hogy "szinte olyan, mintha (a térbeli gondolkodás és a matematika) egy és ugyanaz a képesség volna" (135. o.). Clements és Sarama (2011) kutatásai szerint még az alakzatok vagy számok összehasonlítása is térbeli gondolkodást feltételez, hiszen sok esetben ehhez is szükség van a három dimenzióban végzett manipulatív tevékenységekre. A térbeli gondolkodás során használt reprezentációk azonban sokszor nehezen közvetíthetők, mivel ezeket a tanulók egy sajátos módon ragadják meg, ami más számára nem biztos, hogy hozzáférhető (Whiteley & Mamolo, 2014). A kutatások szerint a térbeli gondolkodás szerepe ugyanakkor akkor sem csökken, amikor már magasabb szinten tanuljuk a matematikát (Mix & Cheng, 2012).

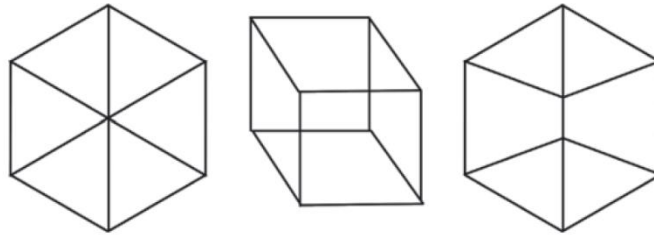
A legújabb kutatások szerint az, ahogy a gyermekek megfogalmazzák a (tér)geometria tevékenységeikkel kapcsolatos gondolataikat, összefügg a szülők nyelvhasználatával, továbbá a gyermekek ilyen irányú nyelvhasználata előrejelzője lehet a későbbi térbeli képességeiknek (Pruden, Levine & Huttenlocher, 2011). Kisgyermekkorban a térgeometria kifejezések fejlesztéséhez ösztönözhetjük a gyermek saját testén való tájékozódását vagy a tárgyak térbeli kapcsolatainak megnevezését a névutók – pl. alatt, mellett, előtt – segítségével. Ugyanígy érdemes a tanórákon a tanulók térgeometria szókincsét is tudatosan bővíteni, továbbá motiválni őket arra, hogy próbálják meg elmagyarázni egymásnak a térgeometria feladatok és tevékenységek közben felmerülő gondolataikat (Hawes, Tepylo & Moss, 2015). „Ha tehát olyan helyzeteket tudunk létrehozni, például a csoportos vagy páros munka szervezésével, amelyekben a gyerek ki akarja fejezni megfigyelését, ezzel segíthetjük a fogalomépítést. Ezek a megnevezések egyáltalán nem szükségszerűen mindjárt a legpontosabbak, legszakszerűbbek. Helyes, ha kezdetben engedjük használni a gyerekeknek a saját élményeikhez, tapasztalataikhoz jobban illeszkedő kifejezéseket. A tudatosítás szerepét ugyanolyan jól szolgálja bármilyen, alkalmi szó, ha az a gyereké.” (C. Neményi, 2007)

A térbeli gondolkodás olyannyira része a matematikai gondolkodásnak, hogy sokszor elfeledkezünk róla, és nem használjuk ki megfelelően (Clements & Sarama, 2004). A kutatók jelenlegi álláspontja az, hogy a matematika tanuláshoz szükséges korai képességek fejlesztésében a térbeli gondolkodás alapvető szerepet játszik. Farmer et al. (2013) kimutatták, hogy a 3 éves gyermekek térbeli gondolkodásban mutatott képességei alapján megjósolható volt, hogy milyen lesz a matematikában mutatott teljesítményük az iskolába lépéskor. Verdine et al. (2014) szintén hasonló eredményekhez jutottak. Érdemes megjegyezni, hogy a kutatások során elegendő volt a gyermekek térbeli gondolkodását egészen egyszerű eszközökkel vizsgálni: a gyermekeknek építőkockákból készült testeket kellett a legnagyobb pontossággal lemásolni. Wolfgang et al. (2001) hosszútávú kutatási projektjükben 16 éven keresztül – az

óvodáskortól a felnőttkorig – kísérték végig a kísérleti alanyokat. Arra a következtetésre jutottak, hogy az ahogy a gyermekek 5 éves korukban játszottak az építőkockákkal (például, hogy mennyire voltak bonyolultak az általuk megépített testek), később a serdülőkorukban ennek közel megfelelő matematikai teljesítményt nyújtottak.

A fentiekben láttuk, hogy a térbeli gondolkodás rendkívül erősen összekapcsolódik a matematikával, ebből következik, hogy a térbeli gondolkodás fejlesztése a matematikatanulás egészében nagy jelentőséggel bír. Ezzel azonban csak nagyon kevés tanulmány foglalkozott eddig és ennek az lehet az oka, hogy a kutatók nincsenek meggyőződve a térbeli gondolkodás változtathatóságáról. A pszichológiában uralkodó általános felfogás ugyanis az, hogy a térbeli gondolkodás adott, azaz „vagy megvan, vagy nincs” (Newcombe, 2010). Verdine és munkatársai (2014) többek között Uttal et al. (2031) kutatásaira támaszkodva azonban úgy vélik, hogy ez a felfogás téves, a térbeli gondolkodás fejleszthető, még hozzá a fejlesztése nemcsak magára a térbeli gondolkodásra, hanem általában a matematikai teljesítményre is jótékony hatással van.

A gyermekek már egészen kicsi koruktól kezdve találkoznak a geometriai alakzatokkal. Az iskolában például különböző geometriai alakzatokat ábrázoló képeket függesztenek ki az osztályterem falára. Ezek a képek a térbeli alakzatokat is síkban ábrázolják, és ezek az ábrázolások egyfajta elvárást tükröznek, azt várják a gyerekektől, hogy ők is úgy képzeljék el a térbeli alakzatok síkbeli ábrázolását, ahogyan ez a felnőttek számára ismert és megszokott. Kutatások azonban azt igazolják, hogy a gyermekek értelmezései a térbeli alakzatok síkbeli ábrázolásáról nem feltétlenül azonosak a felnőttekével. (pl. Steenpaß & Steinbring, 2013). Egy nemrégiben végzett vizsgálat például kimutatta, hogy az első osztályos tanulók nem feltétlenül a szokásos, hagyományos módon értelmezik a térbeli alakzatok síkbeli ábráit (Hallowell et al., 2015), azaz a tanulóknak nehéz volt "meglátniuk" magát a térbeli alakzatot egy síkbeli ábráról. Az eredmények azt mutatták, hogy az első osztályosok nehezen tudtak kapcsolatot találni a testek síkbeli ábrái és a konkrét térbeli testek között. A térbeli tárgyak síkbeli ábrázolásainak két kulcsfontosságú tulajdonsága ugyanis, hogy kétértelműek és tanult konvenciókat tartalmaznak (Hoffman, 2000), például több síkbeli reprezentáció is létrehozza ugyanazt a térbeli objektumot, és több térbeli objektumot is lehet ugyanazzal a síkbeli ábrával reprezentálni (lásd 1. ábra).



1. ábra

Hoffman (2000) példái a kocka síkbeli ábrázolásaira

Az órák bemutatása során látható lesz, hogy a 3. osztályos tanulókkal legtöbbször mi is egyszerű eszközökkel dolgoztunk. Ilyen eszközök voltak a kockák, a színes rudak és a kisebb lego elemek. Ugyanakkor a gyermekek szívesen dolgoztak ezekkel a nagyon egyszerű eszközökkel is és megfigyelhető lesz a tesztek kiértékelése alapján, hogy ezekkel a hagyományos eszközökkel már hat tanóra alkalmával is kimutatható fejlődést lehetett elérni. Kutatások azt valószínűsítik (Clements et al., 1999), hogy a térbeli gondolkodás fejlődéséhez nem elegendő csupán a geometriai alakzatok vizuális jellemzőinek felismerése. Így a foglalkozások során kiemelten figyeltem arra, hogy a gyermekek ne csak egyszerűen megnevezzék a geometriai alakzatokat, hanem közösen megbeszéltük az alakzatok alapvető tulajdonságait is. A fentebb említett kutatásokkal összhangban sikerült megmutatni továbbá azt is, hogy térbeli tevékenységek alkalmazása nemcsak a térbeli gondolkodásra, hanem a gyermekek síkgeometriai teljesítményére is pozitív hatással van.

3. Az órák bemutatása

1. óra

Az első alkalommal három játékot mutattam be a gyerekeknek. Az óra célja az volt, hogy ezekkel az egyszerűbb, de fokozatosan nehezedő játékokkal felkeltsem az érdeklődésüket a foglalkozásaink és a térgeometriai tevékenységek iránt. Ezen az órán 4 fiú és 4 lány vett részt, (a tervezetthez képest egy cserével betegség miatt). A gyerekek az egész óra során nagyon aktívak és lelkesek voltak.

Az óra első 10 percében a Cubingos (gyártó: Piatnik) játékkal játszottak a gyerekek.



2. ábra

A Cubingos játék erősen épít a mintafelismerés mechanizmusára. A játék azzal kezdődik, hogy a cubingo kártyák közül véletlenszerűen kihúzzunk egyet. (2. ábra) Amint a kis figurát mindenki meglátta, megkezdődhet a keresgélés a kis lényecskék testrészeit ábrázoló kockák között, és az nyeri meg a felfordított kártyalapot, aki elsőként kirakja a kockákból a kártyán szereplő lény tökéletes mását. A játékot az nyeri, aki a legtöbb kártyát tudta begyűjteni az egyes körök során.



3. ábra

A gyerekekkel a játék elején megbeszéltük, hogy kockákat fogunk használni és játékszabályt is megismertük. A gyerekek eleinte kicsit lassabban, majd egyre ügyesebben és gyorsabban pakolták a kockákat. Az eredményeket mindig együtt ellenőrizték és ha kellett segítettek egymásnak a javításban is. Bár a játék nem volt nehéz, mégis nagyon jó választás volt az óra elejére, mivel így a gyerekek láthatták, hogy a foglalkozásokon játszani fogunk, ami nagyon motiválón hatott rájuk. A játék fő célja a motiváció felkeltése, a kocka, mint test tulajdonságainak felelevenítése és a gyerekek aktivitásának fokozása volt, és úgy gondolom, hogy ezen célok mindegyikét sikerült megvalósítani.

A második játék az órán a Keretek közt ügyességi játék (gyártó: Bs-Toys) volt.



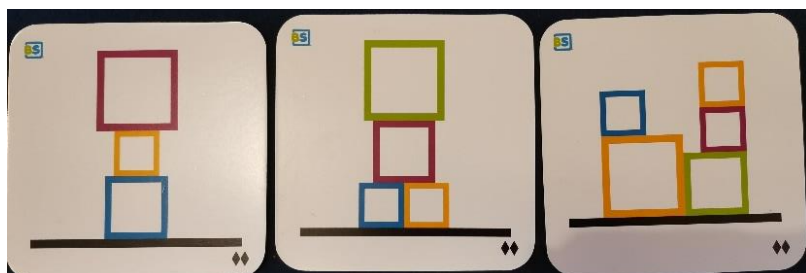
4. ábra

forrás: <https://tinyurl.com/52h7fe8t>

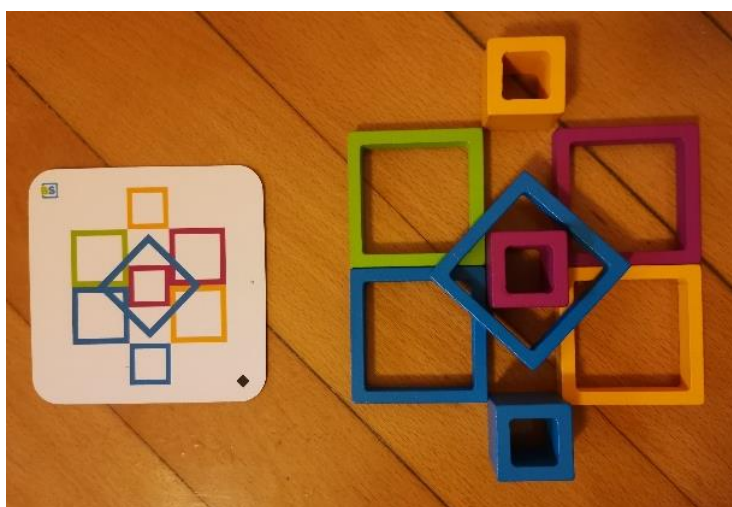
A játék során a kiválasztott kártyán szereplő alakzatot kell pontosan megépíteni úgy, hogy közben az építőelemek (keretek) színét is szem előtt tartjuk. A kiválasztott kártya azt is megmutatja, hogy az asztalra fektetve vagy toronyszerűen kell egymásra rakni a megfelelő nagyságú és színű kereteket. A játék célja többek között a finommotorikus készségek, szem-kéz koordináció, koncentráció és a térlátás fejlesztése.

Kezdetben a fiúk és a lányok külön csoportban játszottak a játékkal, majd két vegyes csoport jött létre, végül párokban rakták ki a gyerekek a kártyákon szereplő feladványokat. A foglalkozáson szereplő kártyák nehézségi sorrendben követték egymást. A könnyebb feladványokat azonnal meg tudták oldani mindegyik csoportban a gyerekek (5. ábra), míg a nehezebb feladványoknál kicsit gondolkozniuk kellett (6. ábra), ugyanakkor tanítói segítségre

egyik kirakásnál sem volt szükség. A gyerekek minden esetben arra a kérdésre is tudtak válaszolni, hogy melyik az a feladvány, amelyiket csak az asztalra fektetve lehet kirakni és melyik az, amelyik állítva, toronyszerűen is kirakható.



5. ábra



6. ábra

Az egyik kártya esetében (7. ábra) lehetőség nyílt arra is, hogy a gyerekek többféle módon – a keretek méretét változtatva – rakják ki a kártyán szereplő feladványt. Bár a többféle kirakás lehetősége kicsit meglepte a gyerekeket, de kis segítséggel mindegyik csoport megtalálta az összes lehetséges megoldást. Ez a feladat alkalmasnak bizonyult arra is, hogy térgeometriai képességek fejlesztése mellett a gyerekek kombinatorikai gondolkodását is fejlesszük.



7. ábra

Az óra utolsó 10 percében a gyerekek a Happy cube (gyártó: Smart Games) nevű játékot kapták kézbe úgy, hogy a különböző színű kockákat előre kiraktuk. A tanórán a gyerekek feladata az volt, hogy ők is rakják ki a színes puzzle elemekből az egyszínű kockákat. A Happy cube habszivacs puzzle elemek fejlesztik a térlátást, a problémamegoldó képességet, a kombinációs készséget.



8. ábra

forrás: <https://tinyurl.com/2p8ypbym>

Mielőtt a gyerekek szétszedték volna a kockákat, ismét megbeszéltük és megnéztük a kocka lapjainak, éleinek, csúcsainak számát, majd felhívtam arra a gyerekek figyelmét is, hogy alaposan figyeljék meg a kész kockákat, mielőtt szétszedik őket. Mivel összesen hat különböző színű kocka állt rendelkezésünkre, két lány és két fiú párban, a többi négy gyermek önállóan dolgozott. A szétszedést követően két párnak is sikerült kiraknia egy-egy kockát, és mindannyian nagyon élvezték a feladatot. (Mindkét pár esetében az egyik gyermek dominánsabb volt a kocka kirakása során.) A megoldás során a legtöbb gyermek próbálgatással dolgozott, de az egyik kisfiú taktikusabban gondolkodott. Ő kiválasztotta melyik lap lehet az „alja” a kockának, majd ehhez a laphoz keresett megfelelő oldalakat, így végül sikeresen ki is

rakta a kockát. Az egyik kislány, akinek nem sikerült kiraknia a kockát azt mondta, hogy feladja, és a képen (8. ábra) is látható más alakzatokat próbált megépíteni a puzzle elemek felhasználásával, ugyanakkor a következő órán szeretne volna ismét megpróbálni a feladványt. Összességében ez a játék komoly kihívást jelentett a gyerekeknek, ez viszont nem szegte kedvüket és kitartóan próbálták kirakni a kockákat.

A gyerekek az egész órán nagyon élvezték az újabb és újabb játékokat és alig a következő alkalmat, amikor újra találkozunk.

2. óra

A második óra nagyobb részében a gyerekek a Structuro (gyártó: Nathan) játékkal játszottak.



9. ábra

forrás:

https://lh3.googleusercontent.com/pEUP_YD3jryd3D8_fCKZXVn71_vIUZJtfL8yfV8VyPmz_gxstcShywsTW7MSfe-GLoglWjDeTr252pdCg_04pqaznioGO-int=l80-w465-h472-nu

Az óra elején ismét megbeszéltük a kocka tulajdonságait úgy, hogy a gyerekek a kezükbe kaptak 1-1 kockát a játékból. A kocka lapjainak megszámlálásánál segítették a gyerekeket a kockák színes lapjai. Az egyik kisfiú el is mondta, úgy számolta ki, hogy a kockának hat lapja van, hogy észrevette a kockáján a három színt és azt, hogy mindegyik színből két lap van, így csak össze kellett a két számot szoroznia. A csúcsok számolásánál a gyerekek az ujjukat hívták segítségül, ugyanígy az éleknél is.

A Structuro egy jól felépített fejlesztő játék, ahol a kártyákon látható ábrák alapján kell térbeli alakzatokat építeni. A játék célja a szem-kéz koordináció, a finommotorikus készségek, koncentráció és a térlátás fejlesztése, illetve a csapat és páros munka során a szociális készségek

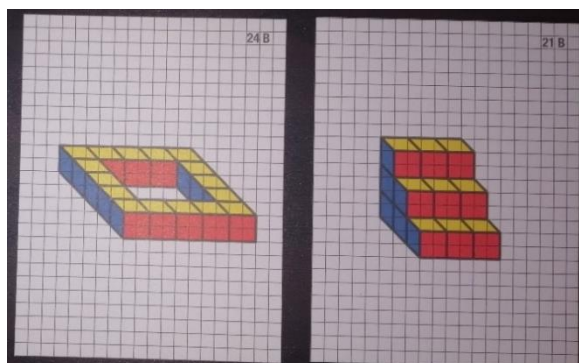
fejlesztése volt. Úgy gondolom ezeket mind sikerült megvalósítanunk és az órán egy motiváló, biztonságos és aktív légkört is ki tudtunk alakítani a munka során.

A játékban az egyszerűbb kártyák esetén csak a kockákból összeállított alakzat számát, a kockák színe nem, ennek megfelelően ezeken a kártyákon nincsenek színek. (10. ábra) Ezt a gyerekek észre is vették és meg tudták indokolni, hogy miért nem lényegesek a színek.



10. ábra

A következő nehézségű kártyák esetében már úgy kellett kirakni a kártyákon szereplő testeket, hogy a színekre is figyelni kellett. (11. ábra) A gyerekek minden nehézség nélkül ki tudták rakni ezeket a nehezebb feladványokat is. Néhányan először a teljes testet kirakták és utána próbálták a színeket egyeztetni a képekkel, de volt olyan gyermek is, aki minden kockát próbált azonnal helyesen a helyére tenni. Volt olyan gyermek, aki a kártyákon nem látható lapokat igyekezett a látható lapok színe alapján megfelelő színűvé tenni, azonban volt olyan is, aki úgy gondolta, hogy a nem látható lapok színe nem lényeges, mivel az a kártyán nem látszik.



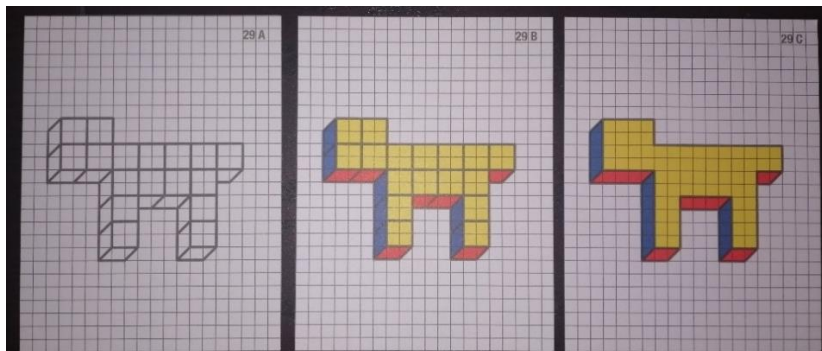
11. ábra



12. ábra

Egy kész alkotás, ahol a gyerekek már az alakzat színeit is figyelembe vették a kirakás során

A harmadik, legnehezebb nehézségi szint az volt, amikor az alakzat, amit a kockákból kell összeállítani, egységet alkot, oldalai egyetlen összefüggő síknak tekintendők. (13. ábra) Ezeknél a kirakásoknál kezdetben több gyermeknek nehézséget okozott annak a meghatározása, hogy az elkészítendő test hány kockából álljon és az összefüggő síklapot hogyan kell kisebb egységekre darabolni. Így az első lépéseknél több gyermeknek is tanítói segítségre volt szüksége, utána azonban már mindenki önállóan tudta folytatni az elkészítendő test kirakását.



13. ábra

Ugyanaz a feladvány a három, egymást követő nehézségi szinten

Több test kirakása után is megkérdeztük a gyerekeket, hogy szerintük hány kis kockából állnak az elkészült testek. A gyerekek a kockák megszámlálására különböző taktikákat alkalmaztak. Volt olyan, aki külön-külön megszámlálta az elkészült test egyes részeit, majd ezeket a számokat adta össze. Volt olyan is, aki soronként számolt és olyan is, aki kiegészítette az elkészült test részeit valamilyen téglatestté és így számolt.

A Structuro játék lezárásaként azt kértük a gyerekektől, hogy építsenek nagyobb kockákat a játék kockáinak felhasználásával. Így megépítették a kétszer, háromszor és négyszer hosszabb élű kockákat is a kis kockák segítségével. Minden kirakott nagyobb kocka esetében megbeszéltük a gyerekekkel, hogy a nagyobb kocka hány kis kockából épül fel és azt is, hogy kinek mi a javaslata a kis kockák számának a legegyszerűbb kiszámítására.

Az óra harmadik részében a pöttyös lapokat használtuk, ahol a lapokon szereplő rácspontok segítségével próbáltuk szemléltetni a gyerekeknek a térbeli alakzatok síkbeli ábrázolását. (14. ábra)



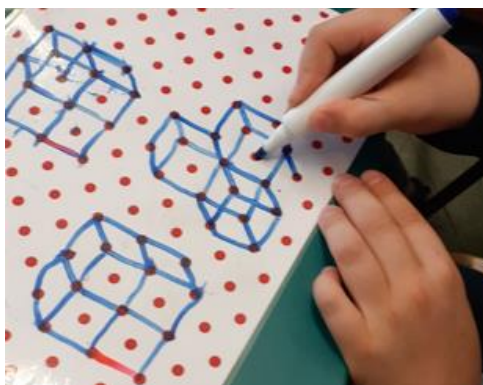
14. ábra

Először a táblán megmutattam a kocka síkbeli ábrázolását a pöttyök segítségével, ezt a gyerekek a saját lapjukon lépésről lépésre követték, így az óra végére minden gyermeknek sikerült kockát rajzolnia. (15. ábra)



15. ábra

A rajzolást azzal is próbáltam segíteni, hogy egyszerűbb alakzatot raktunk ki a kockákból, így a vizuális segítséggel gyorsabban és pontosabban tudták a gyerekek megalkotni a rácspontok felhasználásával az egyes alakzatok ábráit. (16. ábra) A rajzolás során a hibákat úgy próbáltam javíttatni a gyerekekkel, hogy a tanítói kérdések alapján ők jöjjenek rá arra, hogy mi lehet a probléma és nagyon türelmesen próbálkoztak mindaddig, amíg nem sikerült az adott testet helyesen megrajzolniuk. Ezen az órán kevésbé tértünk ki arra, hogy a látható és a nem látható élek ábrázolása hogyan valósul meg, ez ugyanis – érzésem szerint – több gyermek esetében még nehezen követhető lett volna.



16. ábra

A rajzolással kapcsolatos tevékenységek bekapcsolását az órai tevékenységbe az is motiválta, hogy a legújabb kutatások (pl. Tzuriel & Egozi, 2010) arra engednek következtetni, hogy az ilyen jellegű tevékenységek is hatékonyak lehetnek a gyermekek térbeli gondolkodásának fejlesztésére.

3. óra

Ezen az órán három csoportot alkotva a Smart Car (gyártó: Smart Games), a 3D Formák és árnyékok (Gyártó: Voilá) és a Riddle Cube (gyártó: Educational Insights) játékkal játszottak a gyerekek forgószínpadszerűen. A játékok fejlesztik a térlátást, a formafelismerést, az analízáló-szintetizáló képességet, a logikai gondolkodást és a finommotorikát.

A Smart Car játékban a 4 különböző színű, egyforma L alakú elem helyét kell kikövetkeztetni, hogy a feladványnak megfelelő autót kapjuk végeredményül. A kirakás során ügyelni kell arra, hogy a kártyákon az autó felül- és/vagy oldalnézeti képe látható és arra is, hogy a kész autónak mindig két szeme van. (17. ábra) (A gyerekek természetesen fokozatosan nehezedő feladványokon keresztül ismerkedtek meg a játékkal.)



17. ábra

forrás: <https://tinyurl.com/y5krykts>

Azt tapasztaltam, hogy ez a játék a fiúknak kevesebb fejtörést okozott. Hamarabb rájöttek, hogyan oldhatják meg a feladatokat, és hatékonyan, gyorsan dolgoztak a játékkal. (18. ábra) Érdekes volt látni, hogy a gyerekeket nem zavarta meg az, hogy némely esetben az autó „szeme” ferdén vagy aszimmetrikusan áll. Az egyik kislány ki is emelte, hogy az nem volt a szabályban, hogy az autó „normálisan” nézzen ki, csak az, hogy legyen két szeme. Ez a játék az egyik kislánynak komoly nehézséget okozott, így neki azt tanácsoltam, hogy először nézze meg a megoldást és abból rakja ki a feladványt. Néhány ilyen kirakás után már ő is sikeresen meg tudta oldani a további feladványokat.



18. ábra

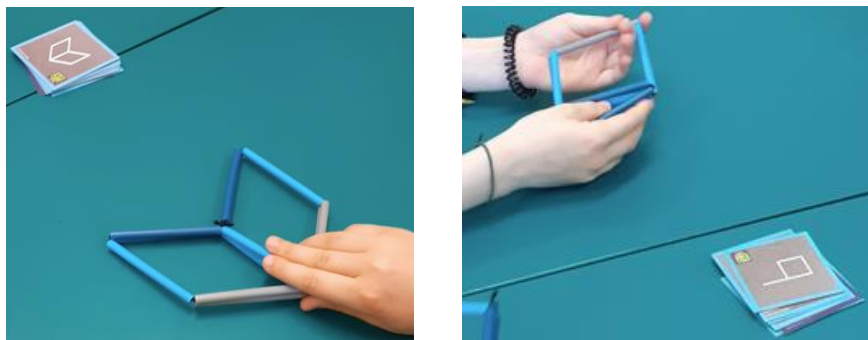
A Riddle Cube játékban egy kocka élvázát kapják meg a gyerekek, ami gumival van összefogva, így minden irányba mozgatható. A játékban a kocka háromdimenziós élvázából a kártyákon szereplő kétdimenziós alakzatokat kell létrehozni. (19. ábra) (A gyerekek természetesen fokozatosan nehezedő feladványokon keresztül ismerkedtek meg a játékkal.)



19. ábra

Ugyanakkor annak ellenére, hogy ez a játék különleges módon adja meg a kocka térbeli modelljének különböző síkbeli reprezentációit, mégis kevésbé kötötte le a legtöbb gyermeket. Nagyon érdekes volt azonban, hogy bár az egyik kisfiúnak eleinte igen nehezen ment a játék,

mégis az óra végi szabad játék során ehhez tért vissza, mert nagyon szeretne volna megoldani a feladványokat. Az óra végén büszkén jelentette, hogy minden feladványt sikerült létrehoznia.



20. ábra

Ennél a játéknál a megoldással kapcsolatos nehézségeket éppen az a – már korábban említett – probléma okozhatta, hogy a gyermekek nem feltétlenül a hagyományos módon értelmezik a térbeli alakzatok síkbeli ábráit. Továbbá a feladványok megoldását nagyban nehezíthette a gyermekek számára az, hogy ugyanannak a térbeli objektumnak – jelen esetben a kocka testhálójának – milyen sokféle síkbeli reprezentációját lehet előállítani.

A 3D Formák és árnyékok játék során a legegyszerűbb változatban háromféle alapra (kör, négyzet, téglalap) kell a gyerekeknek ráhelyezniük az alaprajznak megfelelő testet (testeket). A feladvány nehezíthető úgy, hogy további feltételként megadjuk az elkészítendő test egyik oldalnézetét. Újabb nehezítésként (feltételként) megadhatjuk a test másik oldalnézeti képét is, és ekkor már úgy kell megkeresni a megoldást, hogy ismerjük a megépítendő test felülnézetét és két oldalnézetét is. (21. ábra) Játsható fordítva is a játék úgy, hogy megépítünk egy testet és ennek a testnek keressük meg az alaprajzát és a két oldalnézetének megfelelő kártyákat (amennyiben ezek léteznek).



21. ábra

forrás: <https://tinyurl.com/t4t4287s>

A játékkal először a fiúk kezdtek játszani, és nagyon gyorsan belelendültek. Egymásnak készítettek nehezebbnél nehezebb feladatokat úgy, hogy felhelyeztek az egyik alapra két oldalnézetet mutató kártyát, és a párujuknak kellett megvalósítani az ehhez tartozó testet (amennyiben ez létezett). (22. ábra) A lányoknak ez a játék komolyabb kihívást jelentett. Velük kicsit hosszabban, fokozatosan játszottunk először csak az alaplappal, majd egy, esetleg két oldalnézeti képpel és így próbáltuk megalkotni a megfelelő testet.



22. ábra

4. óra

Ezen az órán a jól ismert sudoku játékot játszottuk a gyerekekkel lego elemeket felhasználva, különböző nehézségi szinteken.

Először megbeszéltük a sudoku játékszabályát, majd mindegyik tanuló kapott négy különböző színben 2x2-es lego elemeket, mindegyik színből négy darabot. A gyerekeknek először egy olyan 4x4-es sudoku feladványt kellett megoldaniuk számok helyett a színes lego elemekkel, amely 4 darab 2x2-es résztáblázatra volt felosztva. A sudoku szabályai szerint ekkor minden résztáblázatot a fehér, lila, zöld és barna lego elemekkel kellett kitölteni úgy, hogy a 4x4-es táblázat minden sorában és minden oszlopában a fehér, lila, zöld és barna elemek mindegyike egyszer forduljon elő. (23. ábra)



23. ábra

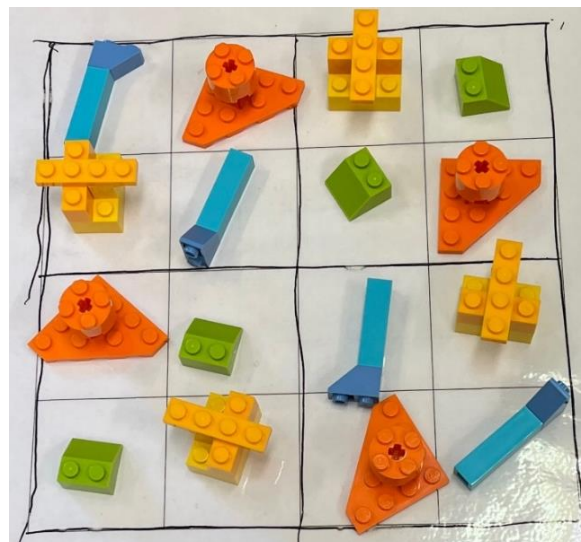
A gyerekek számára semmilyen nehézséget nem okozott az, hogy számok helyett lego elemekkel kell megoldaniuk a sudoku feladványt. Ezt követően olyan feladványt kellett volna megoldaniuk a lego elemek felhasználásával, amelynek nem volt megoldása. A gyerekek ezt nagyon hamar észrevették – maguk mondták viccesen, hogy becsaptam őket, – majd együtt megbeszéltük, hogy miért nem lehet a feladatot megoldani. Ezek után együtt megpróbálkoztunk egy 6x6-os sudokuval is, itt azonban már tanítói segítségre is szükség volt ahhoz, hogy közösen meg tudjuk oldani a feladatot.

Az óra második felében a gyerekeknek saját készletet kellett alkotni a 4x4-es sudokuhoz úgy, hogy legyen olyan elem, amely egy lego elemből, legyen olyan, amely két lego elemből, olyan, amely három lego elemből és olyan is, amely négy lego elemből épül fel. (24. ábra)



24. ábra

A gyerekeknek kezdetben kis tanítói segítség kellett a készlet elemeinek megalkotásához (azt kellett megbeszélnünk, hogy összesen hány elemre van szükség és azt is, hogy lesznek-e egyforma elemek, illetve az egyforma elemekből hány darabra van szükség), de ezek után már meg tudták alkotni a feltételeknek megfelelő készletet.



25. ábra

4x4-es (osztatlan) sudoku saját készlettel megoldva

Ezen az órán a gyerekek először megismerkedtek a kótás (kódolt) alaprajz fogalmával, majd a 26. ábrán látható kótás alaprajzok alapján megépítették lego elemek és lego alaplap segítségével az alaprajzoknak megfelelő testeket. Az építkezéshez mindenki 2x2-es lego elemeket használt fel.

A következő tevékenység során a gyerekek ismét megépítettek egy testet a megadott kótás alaprajz alapján, majd tükröt állítottak a test mellé. (27. ábra) Ezután megépítették azt a testet is, amit a tükör mutatott, majd lerajzolták ennek a testnek a kótás alaprajzát.



A következő feladatban (Török, 2003, p.28) az alaprajzok négyzeteibe kellett számokat írni úgy, hogy az így megépített test tükrös legyen. (28. ábra)

a)

1	5	
3	4	
		2

b)

2	4	
		1
		3

c)

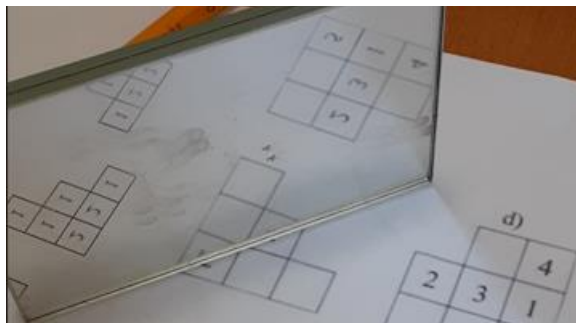
1		
3	1	
2		

d)

		4
2	3	1
		5

Az a) feladványt közösen megépítettük úgy, hogy megadtam a test teljes kótás alaprajzát, majd az elkészült testen kerestük meg a tükör helyét úgy, hogy a valódi és a tükörben látott alakzat együttesen a teljes testet adja meg. A b) feladat esetében a gyerekek már könnyen el tudták helyezni a tükröt a megfelelő helyre és ki is tudták tölteni a kótás alaprajz hiányzó négyzeteit. Ennél a feladványnál ismét többen megépítették az alaprajz alapján a testet, majd ezen is megkeresték a tükör helyét. A c) feladvány ismét kisebb nehézséget okozott, valószínűleg azért,

mert a tükröt nem vízszintesen vagy függőlegesen, hanem átlósan kellett elhelyezni. (29. ábra) Ezt a feladványt is több gyerek megépítette és a kész építményen is megkereste a tükrő helyét. A c) feladvány nagy segítséget nyújtott a d) feladvány megoldásához is, itt mindenki egyedül meg tudta adni a tükrő helyét és ki tudta tölteni a kótás alaprajz hiányzó négyzeteit.



29. ábra

Az óra utolsó feladataként megépítettük a 30. ábra baloldali kótás alaprajzának megfelelő testet. Majd az elkészült testet átbillentettük más lapjaira is, így a gyerekek megtapasztalhatták, hogy ugyanahhoz a testhez több kótás alaprajz is tartozhat. (C. Neményi, 2007, p.36) Így például a 30. ábra két kótás alaprajza ugyanahhoz a testhez tartozik.

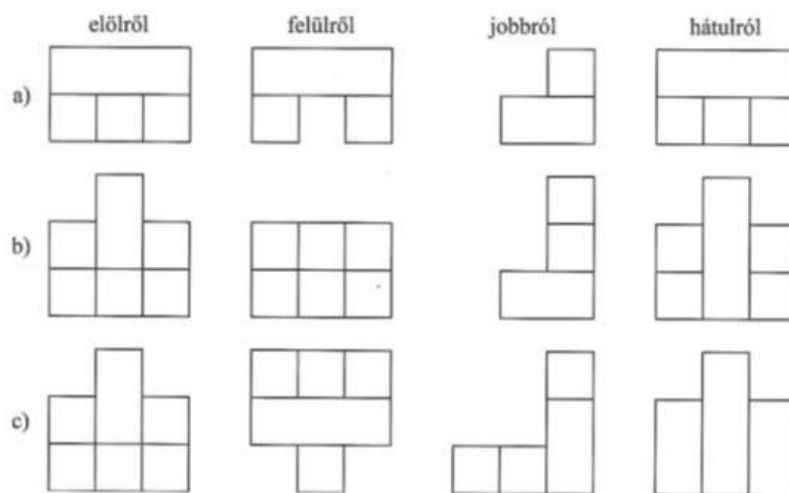
3	2		1	2	2
2	1			1	2

30. ábra

Érdekes volt megfigyelni, hogy bár ezen az órán nem voltak igazi játékok, „csupán” játékos tevékenységek, a gyerekek ezt az órát is ugyanannyira élvezték és hasonlóan aktívak voltak, mint korábban.

6. óra

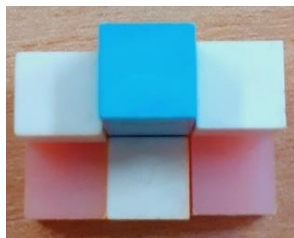
Az óra első felében a gyerekek fehér, rózsaszín és világoskék rudakból építettek testeket úgy, hogy ismerték a testek elöl-, felül-, jobboldal- és hátulnézeti képét. (Török, 2003, p.18)



31. ábra

Az a) feladványt közösen építettük meg és az építés során részletesen megbeszéltük, hogy melyik nézet mit jelent és mire kell figyelni az építkezés során.

A b) és c) feladványt párokban oldották meg a gyerekek. A testek megépítése nem volt könnyű a gyerekek számára. A problémát legtöbb esetben az okozta, hogy nem figyeltek arra, hogy mikor melyik színes rudat kell használniuk az építéshez. A megépített testek ugyanakkor megfeleltek a különböző nézeteknek, csak pl., ahol egy rózsaszín rudat kellett volna használni, ott a gyerekek két fehér kiskockából építettek.



32. ábra

A b) feladvány megoldása

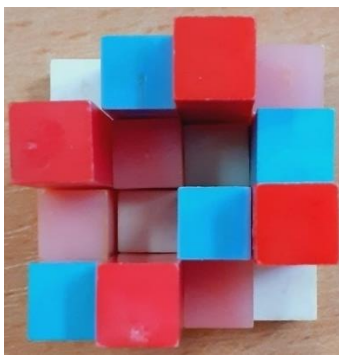
Az óra második felében ismét sudoku játékkal játszottak a gyerekek, záró feladatként azonban egy ún. „térbeli sudoku”-t kellett kirakniuk. A kirakáshoz négy különböző nagyságú színes rudat használtak (fehér, rózsaszín, kék és piros) és mindegyik színből négy darab állt a gyerekek rendelkezésére. A sorok és oszlopok végén látható számok azt adják meg, hogy onnan nézve abban a sorban vagy oszlopban hány különböző színű építőelem látszik. A 16 színes rudat a 33. ábrán látható 4×4-es négyzetrácson kellett elhelyezniük úgy, hogy minden sorba és minden oszlopba egyet-egyvet tettek a különböző magasságú rudakból.

	2	2	1	3	
3					2
1					2
3					1
2					3
	2	1	3	2	

33. ábra

Zrínyi Ilona Matematikaverseny megyei fordulója 2011., 3. oszt. versenye

A feladványt a gyerekek két csoportban, közösen gondolkodva és rakosgatva oldották meg. A gyerekek számára a legnagyobb nehézséget a sorok és oszlopok végén látható számok értelmezése jelentette. Tanítói magyarázattal azonban mindannyian megértették a feladatot és sikerült mindkét csoportnak helyesen kiraknia a sudoku feladványt. (34. ábra)



34. ábra

A tanórák mindegyikén, de ezen az órán különösen – a feladatok nehézsége miatt – nagyon örültem annak, hogy a gyerekek megpróbálták egymásnak elmagyarázni a feladványok és tevékenységek során felmerült gondolataikat. Jól nyomon követhető volt így a térbeli fogalmak épülése és tudatosítása.

4. A tanítási-fejlesztési folyamat eredményességének vizsgálata

4.1. A mérőeszköz összeállításának koncepciója és folyamata a tanulói teljesítmények tükrében

A tanítási-fejlesztési folyamat eredményességének a vizsgálatához elsőként egy tesztet állítottam össze. A teszt platformjának a Szegedi Tudományegyetem Oktatásméleti Kutatócsoportja által kifejlesztett eDia online diagnosztikus értékelő rendszert választottam (Molnár és Csapó, 2019; Molnár és mtsai, 2021). Az eDia rendszer Tanári tesztek modulja regisztrációt követően szabadon hozzáférhető minden pedagógus és pedagógusjelölt számára. A Tanári tesztek modulban többek között matematikából is gazdag feladatbank áll a rendelkezésre ahhoz, hogy 1-6. évfolyamos diákok tudás- és képességszintjét mérő feladatsorokat állítsunk össze. A feladatok összeválogatását követően azokból teszt állítható össze. Az eDia rendszerbe felvihető azon diákok azonosítóinak listája, akikkel a tesztet a tanár ki szeretné tölteni. A diákok ennek alapján bármely eszközön (asztali számítógép, laptop, tablet, okostelefon) be tudnak lépni az adott teszthez tartozó linken a feladatsorba. A tesztek megírása után a pedagógusnak lehetősége van akár a csoport eredményét letölteni, akár egyes diákok tesztdokumentációját is megtekinteni. Az 1-3. évfolyamosoknak szóló feladatok esetén az instrukciók nemcsak olvashatók, hanem meg is hallgathatók. A platform kiválasztásakor ez is szempont volt, mert így számíthattam arra, hogy a diákok olvasási teljesítménye nem befolyásolja a matematikai teljesítményüket.

A feladatok összeválogatása során az első öt feladat arra szolgált, hogy a gyerekek megismerjék az eDia rendszert, és kipróbáljanak egy-egy olyan feladattípust, amilyennel a további feladatokban találkozni fognak. Így ezeket a feladatokat egyrészt első osztályosoknak szóló, kifejezetten egyszerű feladatok közül válogattam össze, másrészt a teszt értékelésekor az ezekre adott válaszokat nem vettem figyelembe. A teszt érdemi részébe 8 feladatot válogattam, melyek összesen 31 itemet tartalmaztak. A feladatokat a Geometria témakör Alakzatok tulajdonságai, konstruálások és Transzformációk altémaköreiből válogattam. 19 síkgeometria item és 12 térgeometria item került a tesztbe.

Ezt a tesztet egy fővárosi iskola 25 harmadikos diákjával kitölttettem annak érdekében, hogy megnézzem, alkalmazható-e a teszt ahhoz, hogy a gyerekek síkgeometriai és térgeometriai képességeit mérjem. A teszt reliabilitása jó volt (Cronbach $\alpha=0,85$), így ezt a tesztet alkalmaztam a fejlesztő programom megvalósításának első lépéseként. Annak az osztálynak a diákjai tehát, ahonnan a gyerekek a programban részt vettek, első lépésként egy előtesztet írtak. Az előtesztnek nemcsak a gyerekek aktuális képesség- és tudásszintjének a felmérése volt a célja, de ezek alapján kerültek kiválasztásra a kontrollcsoport és a kísérleti csoport diákjai is.

Az előteszt alapján tanulópárokat alakítottam ki, azaz az azonos, vagy közel azonos pontszámot elérő diákokat párba állítottam, és egyikük a kísérleti, másikuk a kontroll csoportba került. Esetenként egy gyerek mellé két kisgyereket rendeltem a kontroll csoportba, hogy lemorzsolódás, hiányzás esetén is legyen elég összehasonlítható teljesítmény. A fejlesztés végén minden kisgyerek megírta az utótesztet, de az elemzésbe csak az eredetileg kiválasztott gyerekek adatai kerültek be. Így 7 kisgyereké a kísérleti, és 9 kisgyereké a kontroll csoportból. Az előteszt eredményeit vizsgálva azt tapasztaltam, hogy a teljes osztály és a kiválasztott gyerekek átlaga is sokkal jobb, és az eredmények is kevésbé szórtak, mint abban az osztályban, ahol a tesztet eredetileg kipróbáltuk. Annak, hogy a teszt a kutatásban részt vevő osztálynak inkább könnyű volt, és egészében nem jelentett olyan kihívást, amelyen keresztül a gyerekek tudásában bekövetkező változást a későbbiekben érdemben mérni tudjuk, sok oka lehet. Adódhat az iskolák eltérő profiljából, részben eltérő tanmenetéből, az óraszámokból, illetve egyéb faktorokból is, ám ezek okát vizsgálni e dolgozatnak nem feladata. Annak érdekében viszont, hogy a kutatásban részt vevő gyerekek teljesítményében bekövetkezett változásokat mérni tudjam, az utótesztbe az előteszt két térgeometriai és három síkgeometriai feladatát illesztettem be. Olyanokat, amelyekben könnyebb és nehezebb itemek is voltak. A többi feladatot, melyek eredményük alapján nem voltak alkalmasak a lehetséges fejlesztő hatás kimutatására, nagyobb kihívást jelentő feladatokra cseréltem. Azt, hogy melyik item volt nehezebb, melyik könnyebb az előtesztben, a gyerekek egyes feladatokban mutatott teljesítménye alapján állapítottam meg úgy, hogy minden egyes item esetén átlagoltam az azon elért eredményeket. Így az utóteszt 9 feladatból állt, melyek összesen 32 itemből álltak. 15 item a síkgeometria témaköréből, míg 17 item a térgeometria témaköréből került ki.

4.2. Eredmények

- Megvalósítható-e a térgeometria megfelelő alsó tagozatos tananyagának tanítása játékokkal, játékos tevékenységekkel?

E kérdés megválaszolásához először egy táblázatban mutatom be, hogy az egyes órákon az általános iskola 1-4. évfolyama számára készített kerettanterv egyes geometriával kapcsolatos témakörein belül milyen tanulási eredmény elérését célozták a tevékenységek. (1. táblázat). A táblázat alapján az látható, hogy az alsó tagozatos térgeometria témák feldolgozását el lehet végezni úgy, hogy folyamatosan játékokra, és játékos tevékenységekre építjük a tanórát. Arról, hogy az elsajátítás valóban sikeres is, a további két kutatási kérdéshez kapcsolódó eredmények vizsgálata során kapunk majd pozitív választ.

Tanóra	Tevékenység	Kerettanterv témakör	Kerettanterv tanulási eredmény
1. óra	Cubingos, Keretek közt, Happy cube	Alkotás térben és síkon	Minta alapján létrehoz térbeli, síkbeli alkotásokat Alkotásában követi az adott feltételeket Testeket épít képek alapján Testeket épít lapokból Megfogalmazza az alkotásai közti különbözőséget
		Alakzatok geometriai tulajdonságai	Megszámlálja az egyszerű szögletes test lapjait Megnevezi a téglatest lapjainak alakját, felismeri az egybevágó lapokat, megkülönbözteti az éleket, csúcsokat Térben, síkban az eredetihez hasonló testeket, síkidomokat alkot nagyított vagy kicsinyített elemekből Megfigyeli a kocka mint speciális téglatest tulajdonságait
2. óra	Structuro, rádspontokon térbeli alakzatok síkbeli ábrázolása	Alkotás térben és síkon	Minta alapján létrehoz térbeli, síkbeli alkotásokat Alkotásában követi az adott feltételeket Testeket épít képek alapján
		Alakzatok geometriai tulajdonságai	Megszámlálja az egyszerű szögletes test lapjait Megfigyeli a kocka mint speciális téglatest és a négyzet mint speciális téglalap tulajdonságait
3. óra	Smart Car, +D formák és árnyékok, Riddle Cube	Alkotás térben és síkon	Minta alapján létrehoz térbeli, síkbeli alkotásokat Alkotásában követi az adott feltételeket Testeket épít képek alapján

			Megtalálja az összes, több feltételnek megfelelő építményt, síkbeli kirakást Megfogalmazza az alkotásai közti különbözőséget
		Alakzatok geometriai tulajdonságai	Megszámlálja az egyszerű szögletes test lapjait Megkülönbözteti meghatározott geometriai tulajdonságok szerint a megalkotott testeket, síkidomokat Megnevezi a téglatest lapjainak alakját, felismeri az egybevágó lapokat, megkülönbözteti az éleket, csúcsoakat Térben, síkban az eredetihez hasonló testeket, síkidomokat alkot nagyított vagy kicsinyített elemekből Megfigyeli a kocka mint speciális téglatest tulajdonságait
4. óra	Sudoku	Alkotás térben és síkon	Alkotásában követi az adott feltételeket Megtalálja az összes, több feltételnek megfelelő építményt, síkbeli kirakást Megfogalmazza az alkotásai közti különbözőséget
		Alakzatok geometriai tulajdonságai	Megszámlálja az egyszerű szögletes test lapjait Megkülönbözteti meghatározott geometriai tulajdonságok szerint a megalkotott testeket
		Tájékozódás térben és síkon	Irányokat jelölő szavak használata Irány és állás megfigyelése Tájékozódás négyzethálón
5. óra	Kötés alaprajz	Alkotás térben és síkon	Minta alapján létrehoz térbeli, síkbeli alkotásokat Alkotásában követi az adott feltételeket

			Testeket épít alaprajzok alapján Megtalálja az összes, több feltételnek megfelelő építményt, síkbeli kirakást Megfogalmazza az alkotásai közti különbözőséget Szimmetrikus alakzatokat hoz létre térben Felismeri a szimmetriát valóságos dolgokon, síkbeli alakzatokon
	Alakzatok geometriai tulajdonságai		Megszámolja az egyszerű szögletes test lapjait Megfigyelt tulajdonságaival jellemzi a létrehozott térbeli alkotást
	Transzformációk		Tapasztalattal rendelkezik kirakással a tükörkép előállításáról Szimmetrikus alakzatokat hoz létre térben Felismeri a szimmetriát valóságos dolgokon Megépíti alakzat tükörképét Ellenőrzi a tükrözés helyességét tükör segítségével
6. óra	Testek építése nézet alapján, térbeli sudoku	Alkotás térben és síkon	Minta alapján létrehoz térbeli alkotásokat Alkotásában követi az adott feltételeket Testeket épít képek alapján Megtalálja az összes, több feltételnek megfelelő építményt Megfogalmazza az alkotásai közti különbözőséget Szimmetrikus alakzatokat hoz létre térben

	Felismeri a szimmetriát valóságos dolgokon, síkbeli alakzatokon
Alakzatok geometriai tulajdonságai	Megszámlálja az egyszerű szögletes test lapjait Megfigyelt tulajdonságaival jellemzi a létrehozott térbeli alkotást
Transzformációk	Szimmetrikus alakzatokat hoz létre térben Felismeri a szimmetriát valóságos dolgokon
Tájékozódás térben és síkon	Irányokat jelölő szavak használata Irány és állás megfigyelése Tájékozódás négyzethálón

1. táblázat. A tevékenységek a kerettanterv egyes geometriával kapcsolatos témakörein belül elvárt tanulási eredmények szerint

• Van-e fejlesztő hatása a térgeometriai játékoknak az alsó tagozatos matematikaórákon? A fejlődés vizsgálatának érdekében csak a mindkét tesztben szereplő húsz itemet elemeztem. Az előteszten elért eredményben nem volt mérhető eltérés a két csoport teljesítménye között, tehát elmondható, hogy tudás- és képességszintjük szerint a gyerekek ugyanott tartottak mindkét csoportban. Az utóteszt eredményei azonban azt mutatják, hogy a fejlesztés hatására a kísérleti csoport teljesítménye szignifikánsan jobbnak bizonyult, mint a kontroll csoporté (2. táblázat).

Bár az utótesztben elért teljesítményt megvizsgáltam a teljes teszt vonatkozásában is (2. táblázat), ez az eredmény nem összevethető más eredményekkel, hiszen nemcsak ugyanazok az itemek szerepelnek benne, mint az előtesztben. Ugyanakkor ebben a tesztben szerepeltek már az előtesztthez képest komolyabb kihívást jelentő feladatok is. A két csoport teljes utóteszten mért eredményét összevetve azt láthatjuk, hogy a kísérleti csoport a teljes teszt vonatkozásában is megőrzi szignifikánsan jobb teljesítményét a kontroll csoporttal szemben. Az eredmények alapján elmondható, hogy a kísérleti csoport az általam kidolgozott, és megvalósított program hatására ért el szignifikánsan jobb eredményt, mint a kontroll csoport.

Teszt	Csoport	Létszám (N)	Átlag (százalékpont)	Szórás	Szignifikancia szint (p)
Előteszt	Kísérleti	7	77,00	5,78	0,201

	Kontroll	9	79,40	5,05	
Előteszt utóteszttel közös itemei	Kísérleti	7	70,71	9,32	0,216
	Kontroll	9	74,44	8,82	
Utóteszt előteszttel közös itemei	Kísérleti	7	87,14	9,51	0,008*
	Kontroll	9	73,89	9,61	
Utóteszt	Kísérleti	7	82,49	9,83	0,028*
	Kontroll	9	71,33	11,57	

p<0,05

2. táblázat. A kísérleti és a kontroll csoport teljesítményének összehasonlítása az egyes teszteken

Amennyiben az eredményeket úgy vizsgálom, hogy nem a két csoportot vetem össze, hanem mind a kísérleti, mind a kontroll csoport esetén a saját elő- és utóteszten mért eredményeit hasonlítom össze, akkor azt láthatjuk, hogy a kontroll csoport önmagához mérten nem fejlődött, míg a kísérleti csoport önmagához mérten szignifikánsan jobb teljesítményt mutat az utóteszten, mint az előteszten (3. táblázat).

Csoport	Teszt	Létszám (N)	Átlag (százalékpont)	Szórás	Szignifikancia szint (p)
Kísérleti csoport	Előteszt utóteszttel közös itemei	7	70,71	9,32	<0,001*
	Utóteszt előteszttel közös itemei	7	87,14	9,51	
Kontroll csoport	Előteszt utóteszttel közös itemei	9	74,44	8,82	0,455
	Utóteszt előteszttel közös itemei	9	73,88	9,61	

p<0,05

3. táblázat. Az egyes csoportok önmagához mért teljesítményváltozása a két felmérés között

- Amennyiben a térgeometria játékoknak van fejlesztő hatása, úgy a fejlődés a síkgeometria ismeretek bővüléséhez is hozzájárul-e?

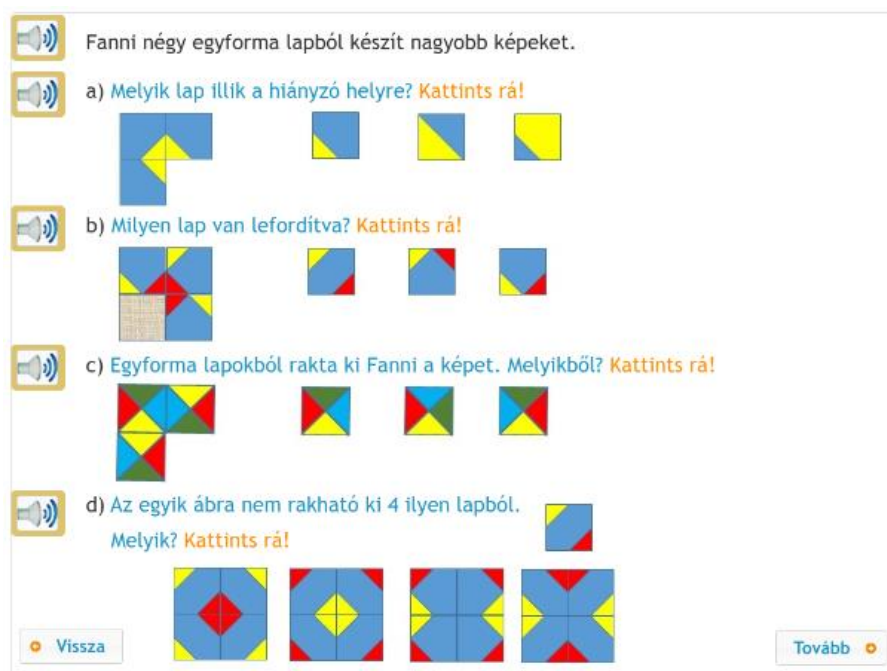
A tesztfeladatok mérték a síkgeometria és a térgeometria területén mutatott teljesítményt is. Éppen ezért e két alteszt eredményeit is összevetettem (4. táblázat). Fontos eredménynek tartom, hogy bár a fejlesztő program során térgeometria tevékenységeket végeztünk, ezek mérhetően fejlesztették a diákok síkgeometria teljesítményét is.

Csoport	Teszt	Létszám (N)	Átlag (százalékpont)	Szórás	Szignifikancia szint (p)
Kísérleti csoport	Síkgeometria előteszt	7	77,38	14,20	0,033*
	Síkgeometria utóteszt	7	86,90	12,59	
	Térgeometria előteszt	7	60,71	16,81	<0,001*
	Térgeometria utóteszt	7	87,50	10,20	
Kontroll csoport	Síkgeometria előteszt	9	75,00	13,82	0,446
	Síkgeometria utóteszt	9	75,93	12,10	
	Térgeometria előteszt	9	73,61	11,59	0,279
	Térgeometria előteszt	9	70,83	8,84	

p<0,05

4. táblázat. Az egyes csoportok önmagához mért teljesítményváltozása az egyes alteszteken

Az eredményeket az itemek szintjén vizsgálva két feladatot szeretnék kiemelni (35. és 36. ábra), mivel úgy gondolom, kifejezetten érdekes eredményeket hoztak. Az első síkgeometria, a második térgeometria feladat.

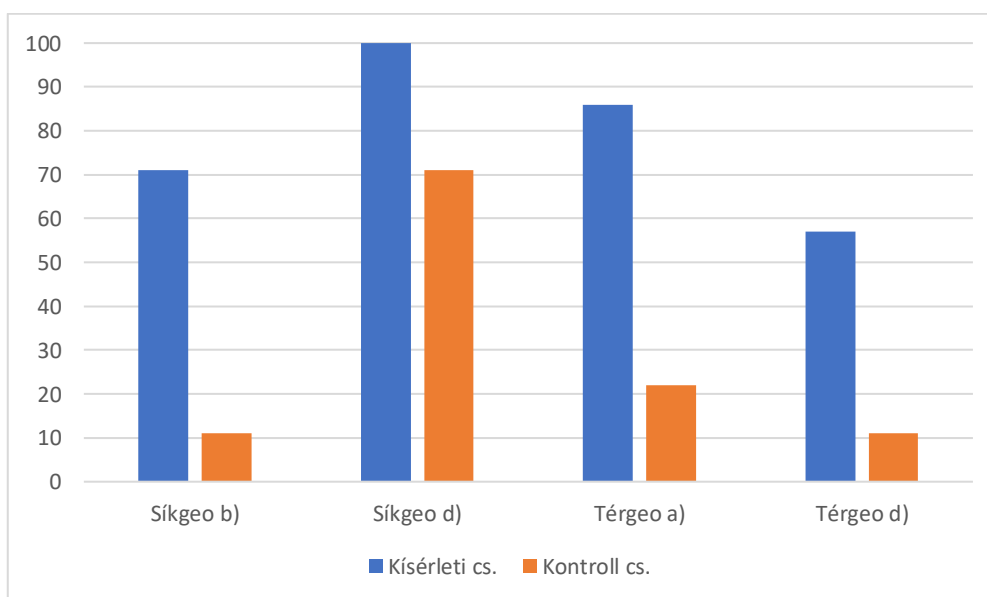


35. ábra. Síkgeometria feladat



36. ábra. Térgeometria feladat

A síkgeometria feladat b) és d) itemének, a térgeometria feladat a) és d) itemének megoldásában a kísérleti csoport szignifikánsan jobb eredményt mutatott az utóteszten a kontroll csoporthoz képest (37. ábra).



37. ábra. Az egyes itemeken az utótesztben elért eredmény százalékban

A síkgeometria feladat b) és d) kérdésében több szempontot kellett egyidejűleg figyelembe venni a helyes megoldáshoz. Míg az a) feladatban csak a sárga sarok méretét kellett megfigyelni a helyes válaszhoz, a c) feladatban pedig a négy szín sorrendjének megállapítása képezte a megoldás alapját, a b) és d) feladatokban egy adott lapon előbb a két sarok egymáshoz való viszonyát kellett megfigyelni, majd ezt a lapot egy másik ábrával történő folyamatos összevetés közben mentálisan elforgatni. A térgeometriai tevékenységek segítenek ilyen összetett mentális síkgeometriai műveletek elvégzésében is. A térgeometria feladat eredményei azt mutatják, hogy a térgeometriai formák sajátosságainak megtapasztalásához és megértéséhez, majd pedig

ezek sikeres alkalmazásához újabb alakzatok létrehozásában elengedhetetlenek a három dimenzióban történő manipulatív tevékenységek.

Az eredmények tehát azt mutatják, hogy a térgeometria képességeket lehetséges a NAT követelményeihez igazítva is játékosan fejleszteni. Az általam megvalósított fejlesztő program hatására a fejlesztésben részt vett diákok szignifikánsan jobban teljesítettek mind a síkgeometria, mind a térgeometria területén, mint a fejlesztésben nem részesült társaik. A fejlesztő hatás nemcsak a teljes teszt, hanem az altesztek, és egyes esetekben a feladatok szintjén is kimutatható volt.

5. Összegezés

„Ha a matematikatanár a rendelkezésre álló időt csak azzal tölti, hogy sablonos példákön gyakorlatoztatja tanítványait, akkor kiöli belölük az érdeklödést, fékezi szellemi fejlődésüket, és visszájára fordítja kedvezö lehetöségeit” (Pölya, 1971, p.11)

„... az a cél, hogy alkotó tanulási helyzetet teremtsünk a matematikatanulás minden fokán. Ha egy gyerek saját tapasztalatai alapján eredményesen alakított ki egy fogalmat, akkor megalkotott valamit, ami előzőleg nem létezett, és ez a valami pszichológiai értelemben is beépül a személyiségébe... Ennek a tudásdarabnak olyan értéke lesz számára, mint egy kedve szerinti kép festésének, egy jó történet megírásának vagy egy izgalmas színdarab kitalálásának, amit társaival játszhat. Önmagában lesz értékes, mert annak az anyagnak lesz egy része, amelyből maga az élet áll.” (Dienes, 1999, p.33)

A játékok, játékos tevékenységek során a gyerekek végig nagyon aktívak, motiváltak voltak, belső késztetés hajtotta őket a minél jobb eredmény elérése érdekében. A játékos tevékenységek segítségével a tanulók nem készen kapták matematikai ismereteiket, hanem kísérletezéssel, tevékenykedéssel szerezték meg azokat. Az általam tartott tanórák során azt tapasztaltam – és tapasztalataimat megerősítették a teszten elért eredmények, – hogy a bemutatott térgeometriai játékok és játékos tevékenységek stabilabbá tették a tanulók geometriai ismereteit. A gyerekek jóval nagyobb mértékben váltak képessé az ismeretek szokatlanabb helyzetekben való felidézésére és alkalmazására, mint a játékos tanórák előtt. A játékok tehát önálló, rendszerezö gondolkodásra is késztették az órákon részt vevö tanulókat. A tesztek kiértékelése alapján kimutatható volt az is, hogy a térgeometriai játékok és játékos tevékenységek fejlesztö hatása megmutatkozott nemcsak a térgeometria, hanem a síkgeometria területén is. Azaz elmondható, hogy a megvalósult programot érdemes lenne a későbbiekben is beépíteni a tanítás-tanulás folyamatába, és a fejlesztés során szerzett tapasztalatok alapján tovább bővíteni azon játékos geometriai tevékenységek körét, melyek az iskolai oktatásba integrálhatók, és képességfejlesztö, illetve tudásbővítö hatásuk is kimutatható.

Irodalom

- C. Neményi, E. (2007). *Geometria tananyag és a geometria tanulása az alsó tagozaton*. ELTE Tanító- és Óvóképző Főiskolai Kar.
- C. Neményi, E., Dr. Radnainé Szendrei, J. (2001). *Matematikai füveskönyv a differenciálásról*. Okker Kiadó.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Mathematics everywhere, every time. *Teaching Children Mathematics*, 10(8), 421–426.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(2), 133–148.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192–212.
- Dehaene, S. (2011). *The number sense: how the mind creates mathematics*. revised edition. Oxford University Press.
- Dienes, Z. (1999). *Építsük fel a matematikát*. SHL Hungary Kft.
- Farmer, G., Verdine, B., Lucca, K., Davies, T., Dempsey, R., Newcombe, N., Hirsh-Pasek, K., & Golinkoff, R. (2013). *Putting the pieces together: spatial skills at age 3 predict to spatial and math performance at age 5*. Paper presented at the Society for Research in Child Development, Seattle, WA.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.
- Hallowell, D.A., Okamoto, Y., Romo, L.F., & La Joy, J. R. (2015). First-graders' spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations. *ZDM Mathematics Education* 47, 363–375.
<https://doi.org/10.1007/s11858-015-0664-9>
- Hawes, Z., Tepylo, D., & Moss, J. (2015). Developing spatial thinking: Implications for early mathematics education. In B. Davis and Spatial Reasoning Study Group (Eds.). *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions and speculations* (pp. 29–44). New York, NY: Routledge.
- Herendiné Kónya, E. (2003). A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei. *Iskolakultúra* 12, 51–61.
- Hoffman, D. (2000). *Visual intelligence: how we create what we see (new edition)*. New York: W.W. Norton.
- Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., & Dehaene, S. (2009). Numerical and spatial intuitions: a role for posterior parietal cortex? In L. Tommasi, L. Nadel, & M. A.

Peterson (Eds.). *Cognitive biology: evolutionary and developmental perspectives on mind, brain and behavior* (pp. 221–246). Cambridge, MA: MIT Press.

- Kerettanterv (2020).
https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_alt_isk_1_4_evf (2022. október 7.)
- Mix, K. S., & Cheng, Y. L. (2012). The relation between space and math: developmental and educational implications. In J. B. Benson (Ed.). *Advances in child development and behavior* (vol. 42, pp. 197–243). San Diego, CA: Academic Press.
- Molnár, G. & Csapó, B. (2019). A diagnosztikus mérési rendszer technológiai keretei: Az eDia online platform. *Iskolakultúra*, 29(4-5), 16-32.
- Molnár, G., Pásztor, A., Kiss, R., & Csapó, B. (2021). Az eDia online diagnosztikus értékelő rendszer: a személyre szóló fejlesztés alapvető eszköze. *Új Pedagógiai Szemle*, 71(09-10), 42-53.
- NAT (2020). *Magyar Közlöny* 17, 328-329.
- Newcombe, N. S. (2010). Picture this: increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American Educator*, 34(2), 29–43.
- Piaget, J., & Inhelder, B (2004). *Gyermeklélektan*. Osiris Kiadó.
- Pintér, K. (2013). *Matematika tantárgy-pedagógia*. Mentor(h)áló 2.0 Program” TÁMOP-4.1.2.B.2-13/1-2013-0008 projekt.
http://www.jgypk.hu/mentorhalo/tananyag/Matematika_tantrgypedaggia/
(2022. október 7.)
- Pólya, Gy. (1971). *A gondolkodás iskolája*. Gondolat Kiadó.
- Pruden, S. M., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2011). Children’s spatial thinking: does talk about the spatial world matter? *Developmental Science*, 14(6), 1417–1430. doi: 10.1111/j.1467-7687.2011.01088.x
- Skemp, R. R. (1975). *A matematikatanulás pszichológiája*. Gondolat Kiadó.
- Steenpaß, A., & Steinbring, H. (2013). Young students’ subjective interpretations of mathematical diagrams: elements of the theoretical construct “frame-based interpreting competence.” *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 46, 3–14.
- Török, T. (2003). *Gondolkodtató geometriafeladatok 3-4. osztályosoknak*, Nemzeti Tankönyvkiadó.
- Tzuriel, D., & Egozi, G. (2010). Gender differences in spatial ability of young children: the effects of training and processing strategies. *Child Development*, 81(5), 1417–1430.

- Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: a meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352–402. doi: 10.1037/a0028446
- Verdine, B. N., Golinkoff, R., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N., Filipowicz, A. T., & Chang, A. (2014). Deconstructing building blocks: preschoolers' spatial assembly performance relates to early mathematics skills. *Child Development*, 85(3), 1062–1076. doi: 10.1111/cdev.12165
- Whiteley, W., & Mamolo, A. (2014). Optimizing through geometric reasoning supported by 3D models: visual representations of change. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *ICMI Study 22 on Task Design* (pp. 129–140). Berlin: Springer.

Melléklet

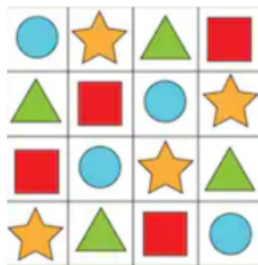
Az előteszt feladatai

A képen egy ember kezének a rajzát látod.

Jobb vagy bal kéz van a képen? Kattints a megfelelő válasz előtti gombra!



- ☐ jobb
- ☐ bal



Figyeld meg jól az ábrát! Húzd a kérdések utáni keretekbe a megfelelő ábra képét!



Melyik ábra van a második sorban lévő csillag alatt?



Mi látható az utolsó sorban a háromszög és a kör között?



Mi van a második oszlopban a kör fölött?



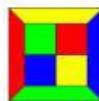
Mi van a harmadik sorban a négyzet mellett?



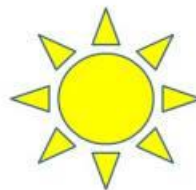
Anna különféle ábrákat rajzolt, majd megmutatta testvérének, aki igaz állításokat mondott az ábrákról. Vizsgáld meg a következő ábrákat!

Írd az üres keretbe, hány darab négyzet, hány darab háromszög és hány darab kör található az egyes rajzokon!

Az ábrán darab négyzet van.



Az ábrán darab háromszög van.



Az ábrán darab kör van.





Hány darab puzzle-t kell még a helyére tenni a teljes kép elkészültéig?

Kattints a helyes válaszra!



10

9

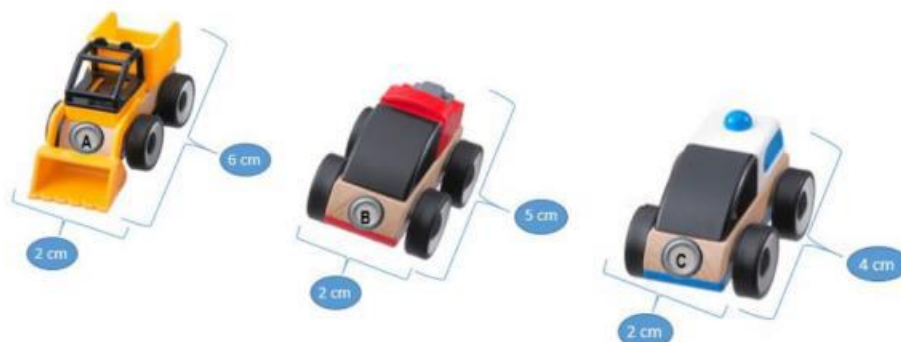
11

5



Miki autóit rendezgette a polcon. Észrevette, hogy nem egyforma hosszúak.

Írd a megfelelő autó betűjelét az állítások utáni kék négyzetekbe!



A legrövidebb autó betűjele:



A leghosszabb autó betűjele:



Használat előtt minden kréta egyforma hosszú volt.

A kép a kréták egy heti használata után készült.



Kattints a helyes választ jelölő betűre!



Ebből a színű krétából használták el a legtöbbet:



Ebből a színű krétából használták el a legkevesebbet:



Kata sokszögeket rajzolt a lapra. Az első egy négyzet volt. Ezután minden lépésben megváltoztatta az adott sokszög egy jellemzőjét. Mindig a legutolsó sokszög tulajdonságain változtatott. Találd ki, hogy milyen sokszögeket rajzolt! Kattints a megfelelő képre!



Növelem a négyzet egyik oldalpárjának a hosszát.



Növeltem 1-gyel a kapott sokszög csúcsainak számát.



Csökkentem 2-vel az előzőleg kapott sokszög oldalainak számát.



Megduplázom a kapott sokszög csúcsainak számát.



 Fanni négy egyforma lapból készít nagyobb képeket.

 a) Melyik lap illik a hiányzó helyre? **Kattints rá!**



 b) Milyen lap van lefordítva? **Kattints rá!**

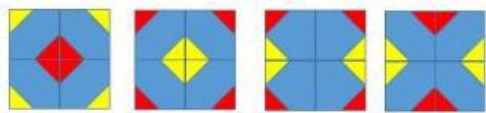


 c) Egyforma lapokból rakta ki Fanni a képet. Melyikből? **Kattints rá!**



 d) Az egyik ábra nem rakható ki 4 ilyen lapból. Melyik? **Kattints rá!**





[Vissza](#) [Tovább](#)

 Peti négyzetekből rakta ki ezt az alakzatot.



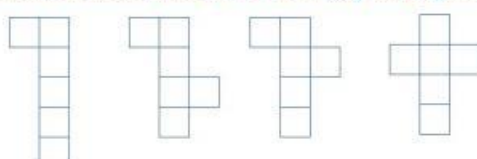
 a) Hány négyzetet használt a kirakáshoz?

 b) Peti 2-2 szomszédos fehér négyzetet lefedett egy piros téglalappal.  Legfeljebb hány piros téglalapra volt szüksége?

 c) Melyik színes téglalapból rakhatott volna ki Peti ugyanilyen alakú képet? **Kattints rá!**



 d) Melyik ábrákat rakhatta volna ki Peti csupa piros téglalapból? **Kattints rájuk!**

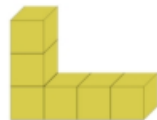


Különböző alakzatokat látsz az ábrán. [Kattints](#) azokra, amelyek négyszögek!



Peti kockákból összeragasztott egy testet. Különböző helyzetben papírra állította ezt a testet és körberajzolta azt. [Melyek lehetnek Peti rajzai?](#)

Döntsd el mindegyik betűvel jelölt körvonalról, hogy meg lehet-e rajzolni vagy nem! Mindegyik feladatban kattints a megadott két lehetőség közül a helyesre!

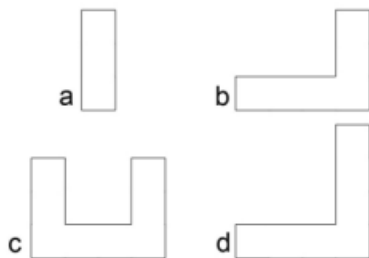


a) ☐ Lehet ☐ Nem lehet

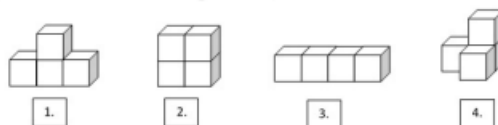
b) ☐ Lehet ☐ Nem lehet

c) ☐ Lehet ☐ Nem lehet

d) ☐ Lehet ☐ Nem lehet



Peti, 4-4 kockát összeragasztva, testeket készített.



a) [Kattints arra, amelyik téglatest!](#)



b) [Legkevesebb hány kockával tudja Peti kiegészíteni az 1. testet téglatestté?](#)

Írd ide:



c) [Legkevesebb hány kockával tudja Peti kiegészíteni a 2. testet kockává?](#)

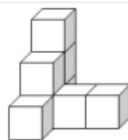
Írd ide:



d) [Legkevesebb hány kockával tudja Peti kiegészíteni a 3. testet kockává?](#)

Írd ide:

Tomí fehér kockákból épített.



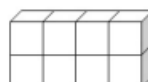
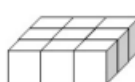
a) Hány kockából készült az építmény?



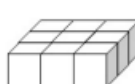
b) Melyik lehet Tomí építményének az alaprajza? Kattints rá!



c) Melyik építmény készülhetne el ugyanennyi kockából? Kattints rájuk!

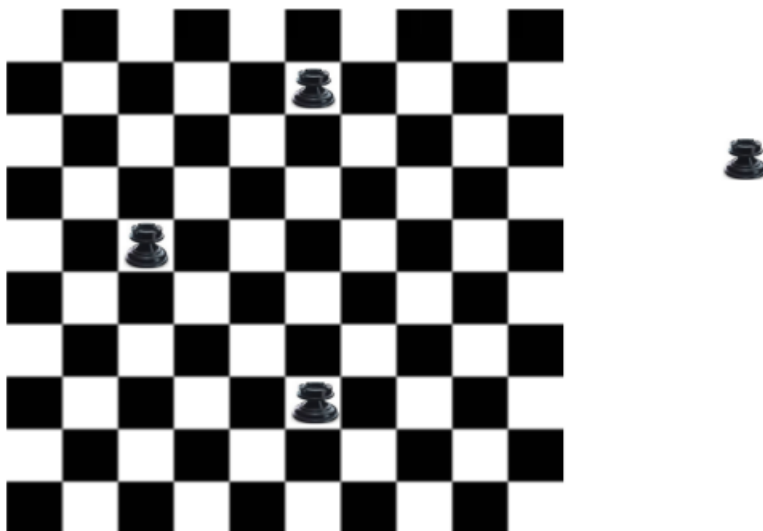


d) Melyik építmény kocka alakú? Kattints rá!



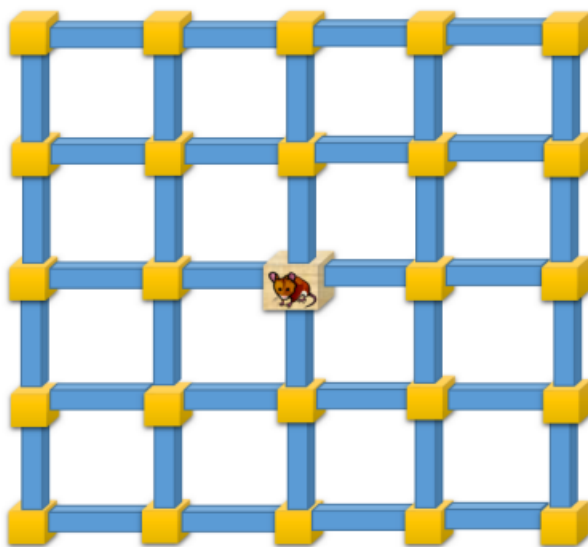
Az utóteszt feladatai

Péter nagyon szeret sakkozni, egyik délután a négy bástyát úgy rakta le a sakktáblán, hogy azok egy-egy négyzet csücsait határozták meg. **Hová rakta le a 4. bástyát?** **Húzd a jobb oldalon levő bástyát a megfelelő mezőre!**



A képen csövekből és dobozokból összeállított egérfuttató labirintust látsz. Hova jut az egérke, ha a nyilakat követi? (Egy nyíl, két szomszédos doboz közötti utat jelöl. Az egérke mindig középről indul.)

Húzd a megfelelő helyre a feladatok sorszámait!



- 1) → → ↓ ↓
- 2) ↑ → ↑ → ↓
- 3) ↓ ← ↓ ← ↑ ↑
- 4) ← ↑ ← ↓ →

 Kata sokszögeket rajzolt a lapra. Az első egy négyzet volt. 
 Ezután minden lépésben megváltoztatta az adott sokszög egy jellemzőjét.
 Mindig a legutolsó sokszög tulajdonságain változtatott.
 Találd ki, hogy milyen sokszögeket rajzolt! **Kattints** a megfelelő képre!

 Növelem a négyzet egyik oldalpárjának a hosszát.   

 Növeltem 1-gyel a kapott sokszög csúcsainak számát.   

 Csökkentem 2-vel az előzőleg kapott sokszög oldalainak számát.   

 Megduplázom a kapott sokszög csúcsainak számát.   

 Fanni négy egyforma lapból készít nagyobb képeket.

 a) Melyik lap illik a hiányzó helyre? **Kattints rá!**

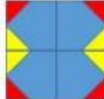
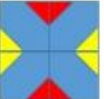
 b) Milyen lap van lefordítva? **Kattints rá!**

 c) Egyforma lapokból rakta ki Fanni a képet. Melyikből? **Kattints rá!**

 d) Az egyik ábra nem rakható ki 4 ilyen lapból.
 Melyik? **Kattints rá!**

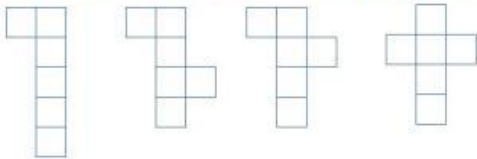
 

 Peti négyzetekből rakta ki ezt az alakzatot. 

 a) Hány négyzetet használt a kirakáshoz?

 b) Peti 2-2 szomszédos fehér négyzetet lefedett egy piros téglalappal. 
Legfeljebb hány piros téglalapra volt szüksége?

 c) Melyik színes téglalapról rakhatott volna ki Peti ugyanilyen alakú képet? **Kattints rá!**


 d) Melyik ábrákat rakhatta volna ki Peti csupa piros téglalapról? **Kattints rájuk!**


[Vissza](#) [Tovább](#)

A képen látható várat Kamilla unokahúgom építette a kockáiból.



- a) Látsz olyan kockát, amelyik zöld? **Kattints rá!** ☐
- b) Hány olyan téglatest van, amelyik nem kocka? **Írd ide!**
- c) Hány henger van a várban? **Írd ide!**

Bence az azonos méretű kis kockákból álló nagy kocka minden lapját különböző színűre festette.



Amikor elkészült, megállapította, hogy vannak olyan kiskockák, amelyeknek 3 lapja látszik és mindegyik más-más színű. Akadnak olyanok is, amelyekből két lap látszik és kifestésükhöz 2 színre volt szükség, míg másokból csak egy lap volt látható.

Hány darab kiskocka van a különböző fajtákból? Írd a helyes válaszokat az üres keretekbe!

Három lapja különböző színű darab kiskockának.

Két lapja különböző színű darab kiskockának.

Csak egy lapja látszik darab kiskockának.



Peti, 4-4 kockát összeragasztva, testeket készített.



1.



2.



3.



4.



a) Kattints arra, amelyik téglatest!



b) Legkevesebb hány kockával tudja Peti kiegészíteni az 1. testet téglatestté?

Írd ide:



c) Legkevesebb hány kockával tudja Peti kiegészíteni a 2. testet kockává?

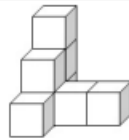
Írd ide:



d) Legkevesebb hány kockával tudja Peti kiegészíteni a 3. testet kockává?

Írd ide:

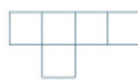
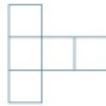
Tomí fehér kockákból épített.



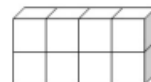
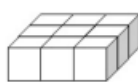
a) Hány kockából készült az építmény?



b) Melyik lehet Tomi építményének az alaprajza? **Kattints rá!**



c) Melyik építmény készülhetne el ugyanennyi kockából? **Kattints rájuk!**



d) Melyik építmény kocka alakú? **Kattints rá!**

