



Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

TDK dolgozat

Nemlineáris kompartmentális forgalmi kinetikus áramlási modell szimulációja és analízise

Somogyi Dávid
Mérnök informatikus BSc

2022

Témavezető:
Dr. Szederkényi Gábor

Kivonat

A kutatásom célja, hogy megismerjem a nemlineáris kompartmentális forgalmi kinetikus áramlási modellt és megvizsgáljam az alapvető rendszerelméleti tulajdonságait. A kompartmentális modellek két jellegzetessége, hogy a megoldások csak nemnegatívak lehetnek és leírt mennyiségek minden egysége bármely időpillanatban pontosan egy kompartmentben lehet jelen. A nemlineáris kompartmentális forgalmi kinetikus áramlási modell alkalmazható különböző hálózati topológiával rendelkező úthálózatok matematikai modelljeinek a felírására. Ezeket a matematikai modelleket egy differenciálegyenlet rendszerrel lehet felírni, ahol a különböző egyenletek a modell kompartmentjeiben lévő állapotoknak az időbeli változását írják le.

A modell állapotait az úthálózat egységnyi hosszára jutó járművek és a rendelkezésre álló helyek folytonos száma határozza meg. Ezek közül az állapotok közül nem mindegyik mérhető. A nem mérhető állapotokat különböző algoritmusokkal és módszerekkel meg lehet becsülni. A nemlineáris modell linearizálását követően a lineáris állapotbecslést felhasználva, valamint a modell diszkretizálását követően a kiterjesztett Kálmán-szűrő algoritmusát alkalmazva meg lehet becsülni a nemlineáris modell állapotait.

Ha a modell állapotai lassan konvergálnak az állandósult állapotbeli értékekhez, akkor a rendszer állapotainak a szabályozásával a konvergencia felgyorsítható így, ha például forgalmi dugó alakul ki az úthálózat bizonyos szakaszain, akkor ezt fel lehet oldani az állapotok szabályozással. A lineáris pólusáthelyezéssel és a lineáris kvadratikus szabályozást felhasználva lehet szabályozni a nemlineáris modell állapotait. A szabályozás hatékonyságát a teljesítmény értékek összehasonlításával lehet kiértékelni.

A kiválasztott nemlineáris modellek és ezen modellek különböző állapotbecslési és szabályozási módszereinek és algoritmusainak a szimulálásához rendszerelméleti szempontból a Matlab és a Simulink megfelelő környezetet biztosítanak. Ezekben a környezetekben a megfelelő paraméterek és kezdeti állapotok megválasztásával a különböző modellek és feladatok egyszerűen szimulálhatóak és az elérni kívánt eredmény szempontjából jól vizsgálhatóak.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. Rendszerelméleti háttér	6
2.1. Kompartmentális modellek	6
2.2. Nemlineáris dinamikus modellek linearizálása	8
2.3. Dinamikus modellek időbeli diszkretizálása	10
2.3.1. Euler-módszer	10
2.4. Állapottér reprezentáció	11
2.5. Állapotbecslés	12
2.5.1. Lineáris rendszer állapotainak becslése	12
2.5.2. Nemlineáris rendszer állapotainak a becslése	14
2.6. Szabályozás	17
2.6.1. Pólusáthelyezéssel szabályozás	17
2.6.2. Lineáris kvadratikus szabályozás	18
3. Forgalmi Kinetikus Áramlási Modell	19
3.1. Általános leírás	19
3.1.1. Kinetikus rendszerek	19
3.1.2. Kompartmentális ábrázolás	20
3.2. Szimulációk	22
3.2.1. Nemlineáris cső modell	22
3.2.2. Nemlineáris gyűrű modell	40
4. Összefoglalás	56

1. Bevezetés

A kutatásom célja, hogy megismerjem a nemlineáris kompartmentális forgalmi kinetikus áramlási modellt és megvizsgáljam az alapvető rendszerelméleti tulajdonságait.

Kompartmentális dinamikus modelleket számos tudományterületen alkalmaznak. E modellek két fő jellegzetessége rendszerelméleti szempontból, hogy egyrészt a megoldások csak nemnegatívak lehetnek, másrészt a leírt egyedek, anyagok, részecskék, járművek stb. minden egysége bármely időpillanatban pontosan egy kompartmentben lehet jelen. A kutatásom célja egy olyan modellosztály megismerése és vizsgálata, ahol az egyes kompartmentek korlátos kapacitással rendelkeznek.

A nemlineáris kompartmentális forgalmi kinetikus áramlási modell alkalmazható különböző hálózati topológiával rendelkező úthálózatok matematikai modelljeinek a felírására. Egy úthálózatot felosztva több egyenlő hosszúságú szakaszra adódnak a kompartmentális rendszer egyes kompartmentjei. A matematikai modelleket a kompartmentek számától függően egy differenciálegyenlet rendszerrel lehet felírni, ahol az egyenletek a járművek és a járművek számára rendelkezésre álló szabad helyek értékeinek a változását írják le. Egy kompartmentben egy adott időpillanatban összeadva a járművek és a járművek számára rendelkezésre álló szabad helyek számát éppen a maximális járműsűrűséget kapjuk. A maximális járműsűrűség értékének a megmaradása garantálja, hogy differenciálegyenlet rendszer egyenleteinek a megoldásai korlátosak.

A kompartmentális forgalmi kinetikus áramlási modelleket többféle hálózati topológiára is lehet alkalmazni. Egy egyszerű alkalmazása a hálózati topológiának, ha egy hosszú egyenes utat osztunk fel több egyenlő hosszúságú útszakaszra úgy, hogy az első útszakasz tartalmaz egy forgalmi felhajtót, az utolsó útszakasz pedig egy forgalmi lehajtót. A felhajtót és a lehajtót a modell bemeneteinek tekintjük. Az ilyen hálózati topológiával rendelkező modellt cső modellnek hívják.

Egy másik egyszerű alkalmazása a hálózati topológiának, ha feltételezzük, hogy az útszakasz első és utolsó kompartmentjét összekapcsoljuk. Ezt a kört kell felosztani egyenlő hosszúságú útszakaszokra, amelyhez egy forgalmi felhajtót és egy forgalmi lehajtót helyezünk el a modellben úgy, hogy ezek minél távolabbi útszakaszokon helyezkedjenek el. Az ilyen hálózati topológiával rendelkező modellt gyűrű modellnek hívják.

A forgalmi kinetikus áramlási modell állapotait a kompartmentekben lévő járművek és a rendelkezésre álló szabad helyek folytonos száma határozza meg. Ezek közül az állapotok közül nem mindegyik mérhető. Több módszer adott arra, hogy ezeknek a nem mérhető állapotoknak az értékeit meg lehessen becsülni. Az egyik ilyen módszer, ha a nemlineáris rendszert egy lineáris rendszerrel közelítjük. Ekkor a nemlineáris rendszeren egy úgynevezett Jacobi-linearizációt kell végrehajtani egy adott munkapont körül, amely által megkapjuk az egyensúlyi pontokat. Ezt követően lehet alkalmazni a nemlineáris rendszerre az egyensúlyi pontokkal eltolt lineárisan becsült állapotokat. A másik módszer a nemlineáris rendszer állapotainak a becslésére a kiterjesztett Kálmán-szűrővel történő állapotbecslés. Ekkor a Taylor-sorhoz hasonló módon linearizálhatjuk a becslést az aktuális becslés körül a folyamat és a mérési függvények parciális deriváltjainak felhasználásával. A kiterjesztett Kálmán-szűrővel történő állapotbecsléshez időben diszkrétizálni kell a folytonos modellt. A diszkrétizáláshoz használható az Euler-módszer a megfelelő lépésköz megválasztása után. A különböző becslési módszereket össze lehet hasonlítani olyan szempontból, hogy hogyan és milyen módon konvergálnak a megfelelő értékekhez és mennyire hatékonyan becsülik meg a megfelelő állapotokat.

Ha a modell állapotai lassan konvergálnak az állandósult állapotbeli értékekhez, akkor a rendszer állapotainak a szabályozásával a konvergencia felgyorsítható így, ha például forgalmi dugó alakul ki az úthálózat bizonyos útszakaszain, akkor ezt fel lehet oldani az állapotok szabályozással. A lineáris pólusáthelyezéssel és a lineáris kvadratikus szabályozást felhasználva lehet szabályozni a nemlineáris modell állapotait. Lehetőség van a kiterjesztett Kálmán-szűrővel becsült állapotok értékeinek a szabályozásban való felhasználására is.

A modell állapotait centralizálva és állapotonként összegezve kiszámítható a modell teljesítmény értéke. A szabályozás hatékonyságát a nem szabályozott és a szabályozott modellek teljesítmény értékeinek az összehasonlításával lehet kiértékelni.

A kiválasztott nemlineáris modellek és ezen modellek különböző állapotbecslési és szabályozási módszereinek és algoritmusainak a szimulálásához rendszerelméleti szempontból a Matlab és a Simulink megfelelő környezetet biztosítanak. Ezekben a környezetekben a megfelelő modell paraméterek és a modellek állapotainak kezdeti értékeinek a megválasztásával a különböző feladatokhoz tartozó állapotoknak és bemeneteknek az időbeli változása egyszerűen szimulálható és az elérni kívánt eredmény szempontjából jól vizsgálhatóak. Simulink környezetben az adott blokkokból elkészített modellek scope által megjelenített ábrái megfelelő ellenőrzési lehetőséget adnak a Matlab környezetében elkészített modell helyességéről.

2. Rendszerelméleti háttér

2.1. Kompartmentális modellek

A kompartmentális modellek leírása a [1] és a [2] cikkek alapján íródott.

A kompartmentális differenciálegyenleteket először az élettanban definiálták olyan rendszerek leírására, amelyekben az anyagáramlás a kompartmenteknek nevezett egységek között zajlik. A nemnegatív dinamikus rendszerek egy alosztályát alkotják a kompartmentális rendszerek. Az ilyen rendszerekben uralkodó megmaradási törvény a tömegmegmaradási törvény. A kompartmentális modelleket más területeken (pl. ökológia, járványmodellezés, közlekedés) is alkalmazzák. A kompartmentális modelleket közvetlenül az ilyen valós rendszerekre vonatkozó fizikai mechanizmusokból és korlátozásokból határozzuk meg. Minden egyes kompartmentről feltételezzük, hogy tökéletesen kevert (kinetikailag homogén), azaz a kompartmentbe belépő bármely anyag azonnal keveredik a kompartment anyagával [1],[2].

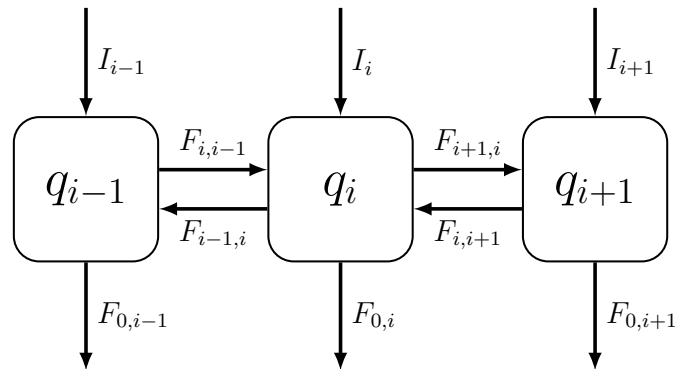
A nemnegatív és kompartmentális dinamikus rendszermodelleket olyan tömeg- és energiaegyensúlyi megfontolásokból vezetik le, amelyek olyan dinamikus állapotokat tartalmaznak, amelyek értékei nemnegatívak. Ezek a modellek széles körben elterjedtek a biológiában, a kémiában, az ökológiában, a közgazdaságtanban, a genetikában, az orvostudományban, a szociológiában és a mérnöki tudományokban, és kulcsszerepet játszanak e tudományágak megértésében. Konkrétan, mivel az ilyen tudományágak olyan rendszerekkel foglalkoznak, amelyek számos bemeneti, állapot- és kimeneti tulajdonsággal rendelkeznek, amelyek a tömeg és energia megőrzésével, disszipációjával és szállításával kapcsolatosak, a nemnegatív és kompartmentális modellek fogalmilag egyszerűek, mégis figyelemre méltóan hatékonyak e dinamikus rendszerek alapvető fenomenológiai jellemzőinek leírásában. Továbbá, mivel az ilyen rendszereket (pl. tömeg, energia, folyadék stb.) megőrzési törvények szabályozzák, és homogén rekeszekből állnak, amelyek változó, nem negatív anyagmennyiségeket cserélnek ki a rekeszek közötti áramlási törvények révén, ezek a rendszerek teljesen analógok a hálózati termodinamikai (advekciós-diffúziós) rendszerekkel, ahol a rekeszek tömegei vagy energiái a hő és a hőmérséklet szerepét töltik be [2].

A kompartmentális modelleket széles körben használják a biológiában, a farmakológiában és az élettanban egy anyag (pl. biomassa, gyógyszer, radioaktív nyomjelző stb.) eloszlásának leírására egy szervezet különböző szövetei között. Ebben az esetben egy kompartment egy adott szövetben lévő anyag mennyiségét jelöli, a kompartmentek közötti áramlások pedig a diffúziós folyamatoknak köszönhetőek. A mérnöki és a fizikai tudományokban a rekeszek jellemzően a rendszer különböző részeinek energia-, tömeg- vagy információtartalmát képviselik, és a különböző rekeszek hő-, munkaenergia- és anyagcsere révén kölcsönhatásba lépnek egymással. Az ökológiában és a közgazdaságtanban a rekeszek jelenthetik a talajt és a törmeléket vagy a készárut és a nyersanyagokat különböző régiókban, az áramlások pedig az energia- és tápanyagcseréből (pl. nitrátok, foszfátok, szén stb.), vagy a pénzből és az értékpapírokból adódnak. A kompartmentális rendszerek kémiai reakciórendszerek modellezésére is használhatók. Ebben az esetben a kompartmentek a kompartmentben található különböző kémiai anyagok mennyiségét képviselik, a kompartmentális áramlások pedig a reaktánsok termékekké történő átalakulását jellemzik [2].

A 1. ábra egy n kompartmentből álló rendszer i -edik kompartmentjét és annak szomszédjait jelöli. Az i -edik kompartmentben lévő anyag mennyiségét q_i jelöli. Az 1. ábra nyilai a rekeszbe be- és onnan kiáramlást jelölik. A kompartmentbe a rendszeren kívülről érkező áramlások, a beáramlásokat $I_i \geq 0$, a környezetbe és így a rendszerből történő kiáramlásokat $F_{0,i}$, az i -edik kompartmentből a $i+1$ -edik kompartmentbe történő átáramlásokat $F_{i+1,i}$ és az $i+1$ -edik kompartmentből az i -edik kompartmentbe történő átáramlásokat $F_{i,i+1}$ jelöli. Minden F kompartment közötti áramlásnak az értéke nem-negatív [1].

Egy ilyen rendszer általános egyenleteit az egyes rekeszek pillanatnyi tömegmérleg egyenleteinek felírásával kapjuk meg:

$$\dot{q}_i = \sum_{\substack{i \neq i+1 \\ i \neq i-1}} (-F_{i,i+1} + F_{i+1,i} - F_{i-1,i} + F_{i,i-1}) + I_i - F_{0,i} \quad (1)$$



1. ábra. A kompartmentális rendszer egy kompartmentjének környezete a lehetséges áramlásokkal [1].

2.2. Nemlineáris dinamikus modellek linearizálása

Valós rendszerek modellezése során azt látjuk, hogy a modellek általában nemlineárisak, azaz a rendszer változóinak alakulását szabályozó differenciálegyenletek nemlineárisak. A gyakorlatban jól használható technikák nagy részét azonban a lineáris rendszerekre dolgozták ki. Egy adott modellezési problémára számos olyan kérdést tehetünk fel, amelyre a kapcsolódó differenciálegyenlet rendszer explicit megoldásának megtalálása nélkül is választ kaphatunk. Az egyik leghasznosabb módszer, ha egy nemlineáris rendszeren Jacobi-linearizációt hajtunk végre egy adott munkapont, az úgynevezett egyensúlyi pont körül, azaz a nemlineáris rendszert egy lineáris rendszerrel közelítjük [3].

Egyensúlyi pont

Az egyensúlyi pont definiálásához tekintsünk egy nemlineáris differenciálegyenletet

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad (2)$$

ahol $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképező függvény. Az $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ pontot egyensúlyi pontnak nevezzük, ha van olyan $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ érték (az úgynevezett egyensúlyi bemenet), hogy

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0.$$

Tegyük fel, hogy $\bar{x}$ egy egyensúlyi pont ($\bar{u}$ egyensúlyi bemenettel). Tekintsük a (2) egyenletet $x(t_0) = \bar{x}$ kezdeti állapotból kiindulva, és alkalmazzuk az $u(t) \equiv \bar{u}$ bemenetet minden $t \geq t_0$ értékre. Az így kapott $x(t)$ megoldás minden $t \geq t_0$ esetén kielégíti az

$$x(t) = \bar{x}$$

értéket, ezért nevezik egyensúlyi pontnak [3].

Centrált változók

Tegyük fel, hogy az $(\bar{x}, \bar{u})$ egy egyensúlyi pont és bemenet. Tudjuk, hogy ha a rendszert $x(t_0) = \bar{x}$ pontból indítjuk, és $u(t) \equiv \bar{u}$ konstans bemenetet alkalmazunk, akkor a rendszer állapota minden t időpontban $x(t) = \bar{x}$ marad. A rendszer egyensúlyi pont körüli működésének vizsgálatához definiálni kell az centrált változókat

$$\delta_x(t) := x(t) - \bar{x},$$

$$\delta_u(t) := u(t) - \bar{u},$$

amelyek a névleges egyensúlyi állapothoz képest bekövetkezett változást írják le.

Ily módon az új koordinátarendszerben az egyensúlyi pont kerül az origóba. Az egyensúlyi értékeket és eltérési változókat behelyettesítve a (2) differenciálegyenletbe a következő egyenletet kapjuk:

$$\dot{\delta}_x(t) = f(\bar{x} + \delta_x(t), \bar{u} + \delta_u(t)).$$

Ha az egyenlet jobb oldalát Taylor-sorba fejtjük és elhanyagolunk minden egynél magasabb rendű tagot, akkor

$$\dot{\delta}_x(t) \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \delta_x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \delta_u(t).$$

Ha alkalmazzuk az $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ egyenletet, akkor

$$\dot{\delta}_x(t) \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \delta_x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \delta_u(t).$$

Ez a differenciálegyenlet megközelítőleg leírja $\delta_x(t)$ és $\delta_u(t)$ eltérési változókat, amíg azok megfelelően közel vannak az egyensúlyi ponthoz. Az így kapott egyenlet egy lineáris, időinvariáns differenciálegyenlet, mivel a $\delta_x(t)$ deriváltjai a $\delta_x(t)$ eltérési változók és a $\delta_u(t)$ eltérési bemenetek lineáris kombinációi. A lineáris differenciálegyenlet állapot egyenletének mátrixai:

$$A := \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B := \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (3)$$

konstans mátrixok. Az A és B mátrixok (3) szerinti definícióval a lineáris rendszert

$$\dot{\delta}_x(t) = A\delta_x(t) + B\delta_u(t)$$

az eredeti nemlineáris rendszer (2) Jacobi-féle linearizálásának nevezzük az $(\bar{x}, \bar{u})$ egyensúlyi pont körül. A δ_x és δ_u kis értékei esetén a lineáris egyenlet megközelítőleg leírja a δ_x és δ_u eltérésváltozók közötti pontos kapcsolatot [3].

2.3. Dinamikus modellek időbeli diszkretizálása

A közönséges differenciálegyenletek gyakran előfordulnak a matematikai modellekben, amelyek a tudomány, a mérnöki tudományok és a közgazdaságtan számos ágában felmerülnek. Sajnos ritkán fordul elő, hogy ezeknek az egyenleteknek zárt formában kifejezhető megoldása van, ezért gyakran numerikus módszerekkel keresnek közelítő megoldásokat. Manapság ez általában nagyon olcsón, nagy pontossággal és az analitikus megoldás és annak numerikus közelítése közötti hiba megbízható korlátozása mellett valósítható meg. Adott egy elsőrendű differenciálegyenlet

$$y' = f(x, y) \quad (4)$$

ahol $y' \equiv \frac{\partial y}{\partial x}$ és f két valós változó adott valós értékű függvénye. Ahhoz, hogy a (4) általános megoldását alkotó végtelen megoldási görbecsaládból kiválasszathassunk egy adott integrált, a differenciálegyenletet egy kezdeti feltétellel együtt fogjuk vizsgálni: adott két valós szám x_0 és y_0 , a (4) olyan megoldását keressük $x > x_0$ esetén, hogy

$$y(x_0) = y_0. \quad (5)$$

A (4) differenciálegyenletet a (5) kezdeti feltétellel együtt kezdeti érték problémának nevezzük [4].

2.3.1. Euler-módszer

Az egylépéses módszer az y_{n+1} értéket az előző y_n értékre vonatkoztatva fejezi ki. A (4), (5) kezdeti értékprobléma numerikus megoldására szolgáló egylépéses módszer legegyszerűbb példája az Euler-módszer.

Adott az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétel. Tegyük fel, hogy y_n -t már kiszámítottuk, bizonyos n -ig ahol $0 \leq n \leq N - 1, N \geq 1$, definiáljuk

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

Így egymás után $n = 0, 1, \dots, N - 1$ lépésként haladva könnyen megkaphatók az y_n közelítő értékek az x_n hálópontokban. Ezt a numerikus módszert Euler-módszerként ismerjük [4].

2.4. Állapottér reprezentáció

Az állapottér-megközelítés, amelyet modern vagy időtartománybeli megközelítésnek is neveznek, lineáris és nemlineáris rendszerek széles körének modellezésére, elemzésére és tervezésére szolgáló módszer. Az állapottérmodellek állapotváltozókat használnak a rendszer leírására elsőrendű differenciálegyenlet rendszerekkel. [5]

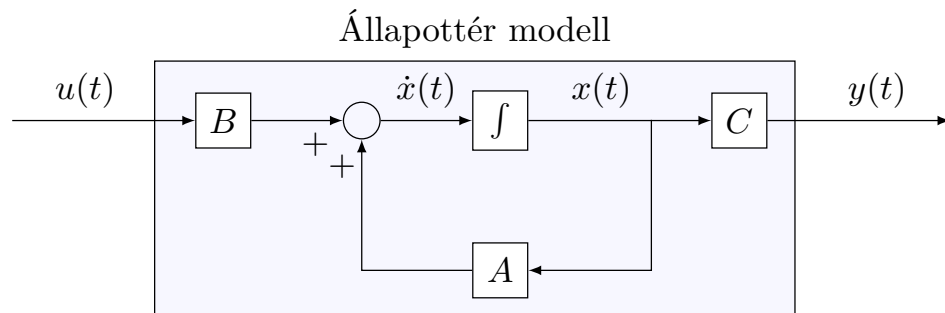
Egy lineáris rendszert az állapottérben a következő egyenletekkel tudunk felírni:

$$\text{Állapot egyenlet: } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (6)$$

$$\text{Kimenet egyenlet: } y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (7)$$

ahol:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ az állapotváltozók vektora
- $u(t) \in \mathbb{R}^r$ a bemenetek vektora
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a kimenetek vektora
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a rendszer mátrix
- $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ a bemeneti mátrix
- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a kimeneti mátrix
- $D \in \mathbb{R}^{p \times r}$ a keresztcsatolási mátrix



2. ábra. Az állapottér modell blokkdiagramja.

2.5. Állapotbecslés

Az irányításméletben az állapotbecslő az egy olyan rendszer, amely egy valós rendszer modelljét használja annak érdekében, hogy a valós rendszer bemeneti és kimeneti mérései alapján becslést adjon annak belső állapotáról. A gyakorlatban nem minden állapotváltozó mérhető közvetlenül. Ekkor számos probléma (pl. szabályozás, diagnosztika) megoldásához becslést kell adni. A nem mérhető állapotváltozók becslését megfigyelésnek nevezik. Az állapotmegfigyelő a kimeneti mérések és a bementi változók alapján becsüli az állapotváltozókat. Ha az állapotmegfigyelő egyértelműen meg tudja határozni a rendszer összes állapotváltozóját, függetlenül attól, hogy egyes állapotváltozók elérhetőek-e közvetlen mérésre, azt teljes rendű állapotmegfigyelőnek nevezzük [6].

2.5.1. Lineáris rendszer állapotainak becslése

Tegyük fel, hogy adott egy lineáris, időinvariáns rendszer, amelyet a (6) és (7) egyenletekkel tudunk felírni. Egy ilyen rendszernél az $u(t)$ bemenetet ismertnek tekintjük, ahol $t \leq 0$ esetén $u(t) = 0$. Ezen kívül általában azt is feltételezzük, hogy a kimenet $y(t)$ és az állapotvektorok $x(t)$ ismertek és minden $t \geq 0$ esetén mérhetők. Ez lehetővé teszi az állapot-visszacsatolás alkalmazását a rendszer jellemzőinek megváltoztatása érdekében. Ez azonban nem mindig van így, mivel a gyakorlatban előfordulhat, hogy nem minden állapot áll rendelkezésre a visszacsatoláshoz. Ha ez a helyzet áll elő, akkor meg kell találni a módját az ismeretlen állapotok becslésének [5].

Ebben az esetben egy megfigyelőt konstruálunk, amelynek célja a rendszer összes állapotának becslése. A megfigyelő tervezéséhez az eredeti rendszermodell (6) és (7) egyenleteiből indulunk ki

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t).\end{aligned}$$

Annak érdekében, hogy a becslés tetszőleges kezdeti értékből konvergáljon, a modell állapot egyenletéhez hozzá kell adni a kimenetek közötti hibajelek különbségét egy L erősítési mátrix-szal megszorozva:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)).$$

Az így kapott rendszer a következő lesz:

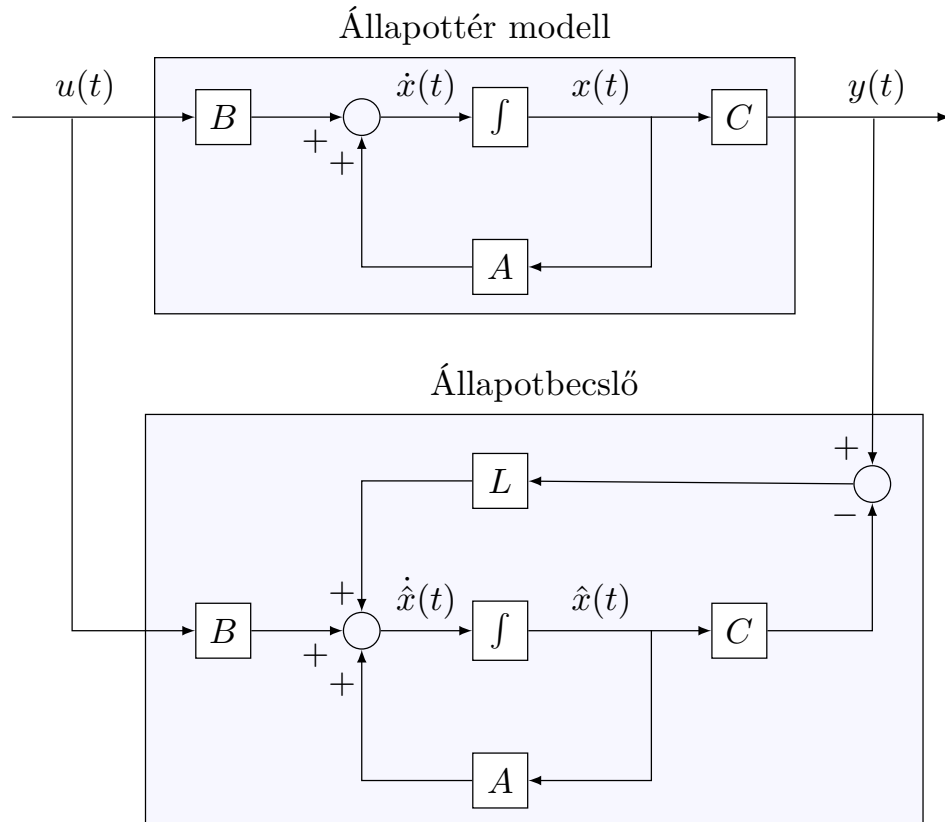
$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t).\end{aligned}$$

A kimeneti visszacsatolás használata a közelítési hiba figyelembevételével érthető meg. Jelölje $e(t)$ a közelítés hibáját, azaz $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Behelyettesítve a állapot és a

becsült állapot értékeit, a következő eredményt kapjuk

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

Az L visszacsatolási mátrixot úgy kell megválasztani, hogy rendszer mátrixa $(A - LC)$ stabil legyen, mert akkor a hiba $e(t) \rightarrow 0$ és a konvergencia garantált. Az L mátrix értéktől függően kaphatunk gyorsabban, illetve lassabban konvergáló becslést [5].



3. ábra. A lineáris állapotbecslő blokkdiagramja.

2.5.2. Nemlineáris rendszer állapotainak a becslése

Nemlineáris rendszerek esetén a linearizált állapotter modellen alapuló állapotbecslő sokszor nem ad megfelelő minőségű becslést, vagy egyáltalán nem is konvergál. Ilyen problémák megoldására hozták létre az aktuális átlag és kovariancia körül linearizáló Kálmán-szűrőt, amelyet kiterjesztett Kálmán-szűrőnek vagy *EKF*-nek neveznek [7],[8].

A Taylor-sorhoz hasonló módon linearizálhatjuk a becslést az aktuális becslés körül a folyamat és a mérési függvények parciális deriváltjainak felhasználásával, hogy a becsléseket még a nemlineáris összefüggések esetén is kiszámíthassuk. Tegyük fel, hogy folyamatunknak van egy $x \in \mathbb{R}^n$ állapotvektora, amely folyamatot egy nemlineáris sztochasztikus differenciálegyenlet irányít

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \quad (8)$$

egy olyan $z \in \mathbb{R}^m$ méréssel, amely

$$z_k = h(x_k, v_k) \quad (9)$$

ahol a w_k és v_k véletlen változók a folyamat- és mérési zajt jelentik, amelyek függetlenek, fehérek és normális valószínűségi eloszlásúak. Ebben az esetben a (8) differenciálegyenletben szereplő f nemlineáris függvény az előző k állapota a $k - 1$ időpillanatbeli állapottól és bemenetektől függ. Ez paraméterként magában foglal bármely u_{k-1} szabályozó bemenetet és a nulla átlagú w_k folyamatzajt. A (9) mérési egyenletben szereplő h nemlineáris függvény az x_k állapotot a z_k méréssel hozza összefüggésbe [7].

A gyakorlatban nem ismerjük a w_k és v_k zaj egyedi értékeit minden egyes időlépésnél. Az állapot- és mérési vektort azonban ezek nélkül is közelíthetjük a következők szerint

$$\tilde{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0), \quad (10)$$

$$\tilde{z}_k = h(\tilde{x}_k, 0), \quad (11)$$

ahol $\hat{x}_k$ az állapot valamilyen a posteriori becslése (egy korábbi k időlépésből).

A nemlineáris differencia- és mérési kapcsolatokkal rendelkező folyamat becsléséhez új egyenletekre van szükség, amelyek linearizálják a (10) és (11) becslést,

$$x_k \approx \bar{x}_k + A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + Ww_{k-1}, \quad (12)$$

$$z_k \approx \bar{z}_k + H(x_k - \tilde{x}_k) + Vv_k. \quad (13)$$

ahol

- x_k és z_k a tényleges állapot- és mérési vektorok,
- $\tilde{x}_k$ és $\tilde{z}_k$ a (10) és (11) pontokból származó közelítő állapot- és mérési vektorok,

- $\hat{x}_k$ a k lépéskori állapot a posteriori becslése,
- a w_k és v_k véletlen változók a folyamat- és mérési zajt jelentik.
- A az f x szerinti parciális deriváltjainak Jacobi-mátrixa, azaz

$$A_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[j]}} f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0),$$

- W az f parciális deriváltjainak Jacobi-mátrixa w szerint,

$$W_{[i,j]} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0),$$

- H a h x szerinti parciális deriváltjainak Jacobi-mátrixa,

$$H_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\tilde{x}_k, 0),$$

- V a h parciális deriváltjainak Jacobi-mátrixa v szerint,

$$V_{[i,j]} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial v_{[j]}}(\tilde{x}_k, 0).$$

Az becslési hiba,

$$\tilde{e}_{x_k} \equiv x_k - \tilde{x}_k, \quad (14)$$

és a kimeneti hiba,

$$\tilde{e}_{z_k} \equiv z_k - \tilde{z}_k. \quad (15)$$

A gyakorlatban nem férünk hozzá a (14)-ben szereplő x_k -hoz, ez a tényleges állapotvektor, azaz az a mennyiség, amelyet meg akarunk becsülni. Másrészt viszont a (15)-ben a z_k -hoz hozzáférhetünk, ez az a tényleges mérés, amelyet az x_k becsléséhez használunk. A (14) és (15) pontok segítségével a hibafolyamat irányadó egyenleteit a következőképpen írhatjuk fel

$$\tilde{e}_{x_k} \approx A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \varepsilon_k, \quad (16)$$

$$\tilde{e}_{z_k} \approx H\tilde{e}_{x_k} + \eta_k, \quad (17)$$

ahol ε_k és η_k új független véletlen változókat jelentenek, amelyek nulla átlaggal és W Q W^T és V R V^T kovarianciamátrixokkal rendelkeznek és ahol a Q a folyamatzaj-kovariancia és az R a mérési zaj-kovariancia mátrix [7].

Vegyük észre, hogy a (16) és (17) egyenletek lineárisak, és hogy nagyon hasonlítanak a differencia- és mérési egyenletekre a diszkrét Kálmán-szűrőből. Ez arra ösztönöz bennünket, hogy a (15)-ben szereplő tényleges mérési maradék $\tilde{e}_{z_k}$ -t és egy második Kálmán-szűrőt használjunk a (16) által adott $\tilde{e}_{x_k}$ előrejelzési hiba becslésére. Ezt a becslést, nevezzük $\hat{e}_k$ -nak, a (14)-al együtt felhasználhatjuk az eredeti nemlineáris folyamat a posteriori állapotbecsléseinek kiszámításához a következőképpen

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + \hat{e}_k. \quad (18)$$

Az $\hat{e}_k$ becslésére használt Kálmán-szűrő egyenlet a következő

$$\hat{e}_k = K_k \tilde{e}_{z_k} \quad (19)$$

Ha a (19)-t visszahelyezzük a (18)-be és felhasználjuk a (15)-et, láthatjuk, hogy valójában nincs szükségünk a második Kálmán-szűrőre:

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k \tilde{e}_{z_k} = \tilde{x}_k + K_k (z_k - \tilde{z}_k) \quad (20)$$

A (20) egyenlet most már használható a kiterjesztett Kálmán-szűrő mérési frissítésére, ahol x_k és z_k a (8) és (9) egyenletekből származik, a K_k pedig a Kálmán-erősítés, a mérési hiba kovarianciájának megfelelő helyettesítésével [7].

Az EKF algoritmusa

EKF időfrissítési egyenletei

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \quad (21)$$

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T \quad (22)$$

Az időfrissítési egyenletek az előző $k-1$ időlépésből származó állapot- és kovarianciabecsléseket vetítik az aktuális k időlépésre. A (21)-ben szereplő f ismét a (8)-ból származik, A_k és W_k a folyamat Jacobi mátrixai a k lépésnél, Q_k pedig a folyamat zaj kovarianciája a k lépésnél [7].

EKF mérési frissítési egyenletei

$$K_k = P_k^- H^T (H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1} \quad (23)$$

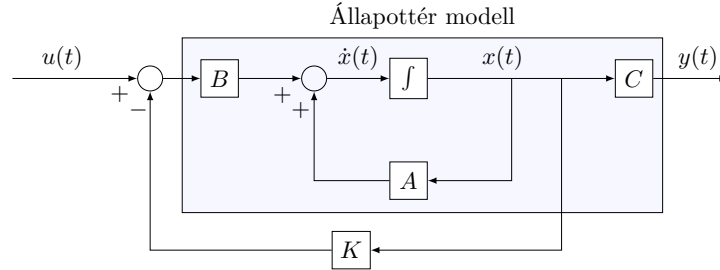
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-, 0)) \quad (24)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (25)$$

A mérésfrissítési egyenletek a z_k méréssel korrigálják az állapot- és kovarianciabecsléseket. A (24)-ben szereplő h ismét a (9)-ből származik, H_k és V a mérés Jacobi mátrixai a k lépésnél, R_k pedig a mérési zaj kovarianciája a k lépésnél [7].

2.6. Szabályozás

Feltételezzük, hogy minden állapotváltozó mérhető és visszacsatolható. Ha a vizsgált rendszer teljesen irányítható, akkor a zárt hurkú rendszer pólusai tetszőleges helyekre helyezhetők el az állapot-visszacsatolás segítségével egy megfelelő állapot-visszacsatolási erősítési mátrixon keresztül [6].



4. ábra. Szabályozási rendszer blokkdiagramja.

2.6.1. Pólusát helyezéses szabályozás

Tegyük fel, hogy adott egy lineáris, időinvariáns rendszer, amelyet a (6) és (7) egyenletekkel tudunk felírni. Meghatározunk egy új $u(t)$ bemenetet $u(t) = -Kx(t)$ alakban, ahol

$$K = \begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{r,1} & k_{r,2} & \dots & k_{r,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times n}$$

a visszacsatolás erősítési mátrix. Így a szabályozó bemenet

$$u(t) = - \begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{r,1} & k_{r,2} & \dots & k_{r,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Mint látható, az $u(t)$ bemenetre az $x_1, \dots, x_n$ állapotokat a K mátrix elemeivel megszorozva visszatápláljuk, amelyeket erősítésnek nevezünk. Az $u(t)$ -t behelyettesítve az állapot egyenletbe az állapottér-rendszer:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

A rendszer stabilitása az $A - BK$ mátrix sajátértékeinek elhelyezkedésétől függ. Célunk a megfelelő erősítések, vagyis a K mátrix megtalálása, hogy a sajátértékek a kívánt helyre kerüljenek [5].

2.6.2. Lineáris kvadratikus szabályozás

A kvadratikus optimális szabályozási módszer előnye a pólusáthelyezési módszerrel szemben az, hogy az előbbi módszer optimalizáción alapuló módot biztosít az állapot-visszacsatolásos szabályozási erősítési mátrix kiszámítására [6].

Tegyük fel, hogy adott egy lineáris, időinvariáns rendszer, amelyet a (6) és (7) egyenletekkel tudunk felírni. Most azt az optimális szabályozó problémát fogjuk megvizsgálni, amely az

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

rendszer egyenletet tekintve meghatározza az

$$u(t) = -Kx(t) \quad (26)$$

optimális szabályozási vektor K mátrixát úgy, hogy minimalizálja a

$$J = \int_0^\infty (x(t)'Qx(t) + u(t)'Ru(t))dt \quad (27)$$

teljesítményindexet, ahol Q és R is pozitív-definit mátrixok. A Q és R mátrixok meghatározzák a hiba relatív fontosságát és a szabályozásra fordított energiát.

Ha a K mátrix ismeretlen elemeit úgy határozzuk meg, hogy minimalizáljuk a teljesítményindexet, akkor $u(t) = -Kx(t)$ optimális bármely $x(0)$ kezdeti állapotra.

A (26) egyenletet behelyettesítve a (6) egyenletbe

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t) = (A - BK)x(t).$$

ahol a rendszer stabilitása az $A - BK$ mátrix sajátértékeinek elhelyezkedésétől függ [6].

3. Forgalmi Kinetikus Áramlási Modell

3.1. Általános leírás

A forgalmi kinetikus áramlási modell kinetikus és kompartmentális kontextusban is értelmezhető [9].

3.1.1. Kinetikus rendszerek

A kémiai reakcióhálózatok modellek alapvető építőkövei a $C \rightarrow C'$ alakú, úgynevezett elemi reakciólépések, amelyek a C komplexet C' komplexszé alakító kémiai komplexet jelölik.

Az $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$ hármasát kémiai reakcióhálózatnak nevezzük, ahol a komponenseket a következőképpen határozzuk meg

- Anyagok halmaza: $\mathcal{S} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$
- Komplexek halmaza: $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$
A komplexek az anyagok formális lineáris kombinációi nemnegatív egész számú $\alpha_{ji} \in \mathbb{N}_+^n$ együtthatókkal, amelyeket sztöchiometriai együtthatóknak neveziünk, azaz $C_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} X_i$.
- Reakciók halmaza: $\mathcal{R} \subseteq \{(C_i, C_j) \mid C_i, C_j \in \mathcal{C}\}$
A (C_i, C_j) rendezett pár a $C_i \rightarrow C_j$ reakciónak felel meg, ahol C_i a forráskomplex, C_j pedig a termékkomplex.

Az $Y \in R^{n \times m}$ komplexösszetételi mátrix tartalmazza a sztöchiometriai együtthatókat az alábbiak szerint: $Y_{ij} = \alpha_{ji}$ ahol $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$.

Egy kémiai reakcióhálózat dinamikája a következő közönséges differenciálegyenletekkel írható le:

$$\dot{x} = \sum_{C_i, C_j \in \mathcal{R}} (Y_{.,j} - Y_{.,i}) \cdot R_{ij}(x), \quad (28)$$

ahol $x_i(t) \in \mathbb{R}_+$ jelöli az X_i anyag koncentrációját a t időpontban és $R_{ij} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ a reakciósebesség függvénye a $C_i \rightarrow C_j$ reakciónak felel meg.

A (28) integrálásával megkapjuk

$$x(t) = x(0) + \sum_{(C_i, C_j) \in \mathcal{R}} (Y_{.,j} - Y_{.,i}) \int_0^t R_{ij}(x(\tau)) d\tau.$$

Ezért az állapotok mindig az úgynevezett pozitív sztöchiometriai kompatibilitási osztályban maradnak, amely megfelel a kezdeti feltételeknek, és amelyet a következő definíció határoz meg:

$$x(t) \in \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \mid x - x(0) \in \mathcal{D} \right\},$$

ahol $\mathcal{D}$ az úgynevezett sztöchiometrikus altér, amely a következő alakú:

$$\mathcal{D} = \text{span} \{ Y_{\cdot,j} - Y_{\cdot,i} \mid (C_i, C_j) \in \mathcal{R} \}.$$

A kémiai reakcióhálózatok elméletének eredményei többségében a kémiai reakcióhálózatokat tömeghatás-kinetikával vizsgálják, amikor a reakciósebességeket a következőképpen határozzák meg:

$$R_{ij}(x) = k_{ij} \prod_{l=1}^n x_l^{Y_{li}} \quad \text{a } (C_i, C_j) \in \mathcal{R} \text{ esetében}$$

ahol $k_{ij} \in R_+$ a $C_i \rightarrow C_j$ reakció reakciósebességi együtthatója. Ebben az esetben a reakciógráfot súlyozott irányított gráfként definiáljuk, ahol a csúcsok a komplexek, az irányított élek a reakciók, az élek pozitív súlyai pedig a reakciósebességi együtthatók.

Az $\dot{x} = f(x)$ alakú, f polinomfüggvényt tartalmazó autonóm közönséges differenciálegyenletek egy halmazát kinetikusnak nevezzük, ha a (28) alakban írható fel [9].

3.1.2. Kompartmentális ábrázolás

Jelölje N_i és S_i az i . szegmensben lévő járművek számát, illetve a rendelkezésre álló helyeket. Ekkor az egymást követő $i - 1$, i és $i + 1$ útszakaszok közötti járműátmenet a következőképpen ábrázolható reakciókkal



A (29) azt mutatja, hogy a járműnek az $i - 1$ -edik szegmensből az i -edik szegmensbe történő átmenete során a járművek száma eggyel csökken az $i - 1$ -edik szegmensben, és eggyel nő az i -edik szegmensben. Ezzel párhuzamosan az i -edik szegmensben egy egységgel csökken, az $i - 1$ -edik szegmensben pedig eggyel nő a rendelkezésre álló férőhelyek száma. Természetesen az átmenetnek két feltétele van: legalább egy járműnek kell lennie az $i - 1$ -edik szegmensben, és legalább egy járműnek kell helyet biztosítani az i -edik szegmensben. A (30) a járműveknek ugyanezt az átmenetét fejezi ki az i -edik szegmensből az $i + 1$ -edik szegmensbe.

Jelölje n_i és s_i az útpálya egységnyi hosszára jutó járművek és szabad helyek folyamatos számát. Ezek a mennyiségek analógok a kémiai moláris koncentrációval, amely arányos az egységnyi térfogatra jutó molekulák számával.

A (29)-(30)-nek megfelelő kémiai reakcióhálózat a következőképpen írható fel

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{N_{i-1}, N_i, N_{i+1}, S_{i-1}, S_i, S_{i+1}\}, \\ \mathcal{C} &= \{N_{i-1} + S_i, N_i + S_{i-1}, N_i + S_{i+1}, N_{i+1} + S_i\}, \\ \mathcal{R} &= \{(C_1, C_2), (C_3, C_4)\}\end{aligned}$$

A tömeghatás típusú kinetikus differenciálegyenletek (28) amelyek n_i és s_i változását írják le, a következők

$$\dot{n}_i = k_{i-1,i}n_{i-1}s_i - k_{i,i+1}n_i s_{i+1}, \quad (31)$$

$$\dot{s}_i = -k_{i-1,i}n_{i-1}s_i + k_{i,i+1}n_i s_{i+1}, \quad (32)$$

ahol $n_i(0) \geq 0$ és $s_i(0) \geq 0$. Könnyű belátni, hogy $\dot{n}_i + \dot{s}_i = 0$. Ezért $c_i = n_i + s_i$ a dinamika első integrálja, ami a maximális járműsűrűséget jelenti az i -edik szegmensben. A c_i megmaradása garantálja a (31) és (32) megoldásainak korlátosságát. A $s_i = c_i - n_i$ egyenletet a (31)-be behelyettesítve a következőket kapjuk

$$\dot{n}_i = k_{i-1,i}n_{i-1}s_i - k_{i,i+1}n_i s_{i+1} - k_{i-1,i}n_{i-1}s_i + k_{i,i+1}n_i s_{i+1} \quad (33)$$

ahol $n_i = \rho_i$, $c_i = \rho_{max}$, és $k_{i-1,i} = k_{i,i+1} = \frac{\omega}{\Delta x}$. Ez teljesen megfelel a modell fizikai hátterének, mivel a reakciósebességi együtthatók, amelyek meghatározzák a rekeszek közötti átmenet sebességét, egyenesen arányosak a v_{max} értékkel, és fordítottan arányosak a ρ_{max} és Δx értékekkel.

A fel- és lehajtók modellezéséhez a (29) és (30) modellek egyszerűen kibővíthetők a következő reakciókkal



ahol $k_{on,i}$ és $k_{off,i}$ a megfelelő nemnegatív sebességi együtthatók. A (34)-ban szereplő transzformáció azt jelenti, hogy a felhajtás egy elemi lépése során egy rendelkezésre álló hely elfogy (kitöltődik), miközben a járművek száma növekszik az i -edik szegmensben. A (35) a lehajtás esetében az ellenkező folyamatot írja le. A (29)-(30) és (34)-(35)-nek megfelelő kinetikai differenciálegyenletek a következőképpen írhatók fel

$$\dot{n}_i = k_{i-1,i}n_{i-1}s_i - k_{i,i+1}n_i s_{i+1} + k_{on,i}s_i - k_{off,i}n_i, \quad (36)$$

$$\dot{s}_i = -k_{i-1,i}n_{i-1}s_i + k_{i,i+1}n_i s_{i+1} - k_{on,i}s_i + k_{off,i}n_i \quad (37)$$

ahol $n_i(0) \geq 0$ és $s_i(0) \geq 0$. A (34) és (35)-ből látható, hogy $s_i = c_i - n_i$, ahol c_i ebben a konfigurációban is állandó. Ezt a (34)-be behelyettesítve a következőt kapjuk

$$\dot{n}_i = k_{i-1,i}c_i n_{i-1} - k_{i,i+1}c_{i+1}n_i + k_{i,i+1}n_i n_{i+1} - k_{i-1,i}n_{i-1}n_i + k_{on,i}(c_i - n_i) - k_{off,i}n_i$$

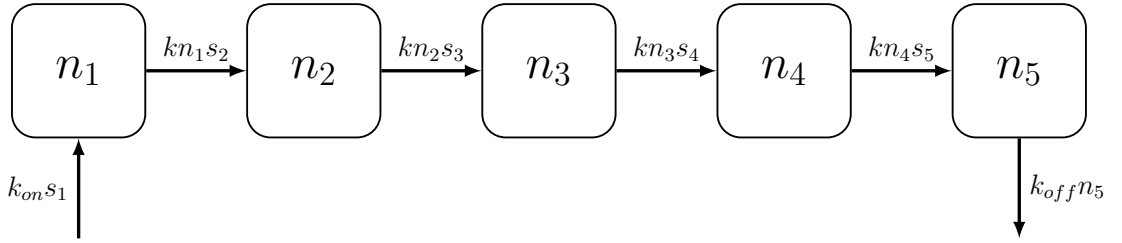
amely megfelel $n_i = \rho_i$, $c_i = \rho_{max}$, $k_{i-1,i} = k_{i,i+1} = \frac{\omega}{\Delta x}$, $k_{on,i} = 1_{on,i}u_{on}$, és $k_{off,i} = 1_{off,i}u_{off}$ [9].

3.2. Szimulációk

A Forgalmi Kinetikus Áramlási Modell és ehhez a modellhez kapcsolódó feladatok szimulációját Matlab, illetve Simulink környezetben készítettem el. Minden szimulációnál feltételeztem, hogy a modell öt cellából áll. A szimulációkat két modellre is elvégeztem.

3.2.1. Nemlineáris cső modell

Az első modell, amelyre elvégeztem a szimulációkat, az úgynevezett cső modell, amely az 5. ábrán látható. Az első cellában található egy beáramlás, amely az útszakaszra történő felhajtást és az utolsó cellában található egy kiáramlás, amely az útszakaszból történő lehajtást reprezentálja. Az egyes útszakaszok közötti áramlásoknak az iránya mindig balról jobbra halad. Minden k cella közötti sebességi állandónak megegyezik az értéke.



5. ábra. A cső modell kompartmentjei és a köztük lévő áramlások.

A (36) és (37) alapján öt cella esetén a cső modellt leíró differenciálegyenlet rendszer:

$$\begin{aligned}
 \dot{n}_1 &= -k \cdot n_1 \cdot s_2 + k_{on} \cdot s_1 & \dot{s}_1 &= k \cdot n_1 \cdot s_2 - k_{on} \cdot s_1 \\
 \dot{n}_2 &= k \cdot n_1 \cdot s_2 - k \cdot n_2 \cdot s_3 & \dot{s}_2 &= -k \cdot n_1 \cdot s_2 + k \cdot n_2 \cdot s_3 \\
 \dot{n}_3 &= k \cdot n_2 \cdot s_3 - k \cdot n_3 \cdot s_4 & \dot{s}_3 &= -k \cdot n_2 \cdot s_3 + k \cdot n_3 \cdot s_4 \\
 \dot{n}_4 &= k \cdot n_3 \cdot s_4 - k \cdot n_4 \cdot s_5 & \dot{s}_4 &= -k \cdot n_3 \cdot s_4 + k \cdot n_4 \cdot s_5 \\
 \dot{n}_5 &= k \cdot n_4 \cdot s_5 - k_{off} \cdot n_5 & \dot{s}_5 &= -k \cdot n_4 \cdot s_5 + k_{off} \cdot s_5
 \end{aligned}$$

Minden cellának a maximális jármű sűrűsége ρ_{max} . Egy cellában a járművek és a járművek számára rendelkezésre álló helyek számának az összege megegyezik a maximális jármű sűrűséggel, ezt átrendezve kapjuk meg, hogy $s_i = \rho_{max} - n_i$. Elvégezve a helyettesítést:

$$\dot{n}_1 = -k \cdot n_1 \cdot (\rho_{max} - n_2) + k_{on} \cdot (\rho_{max} - n_1) \quad (38a)$$

$$\dot{n}_2 = k \cdot n_1 \cdot (\rho_{max} - n_2) - k \cdot n_2 \cdot (\rho_{max} - n_3) \quad (38b)$$

$$\dot{n}_3 = k \cdot n_2 \cdot (\rho_{max} - n_3) - k \cdot n_3 \cdot (\rho_{max} - n_4) \quad (38c)$$

$$\dot{n}_4 = k \cdot n_3 \cdot (\rho_{max} - n_4) - k \cdot n_4 \cdot (\rho_{max} - n_5) \quad (38d)$$

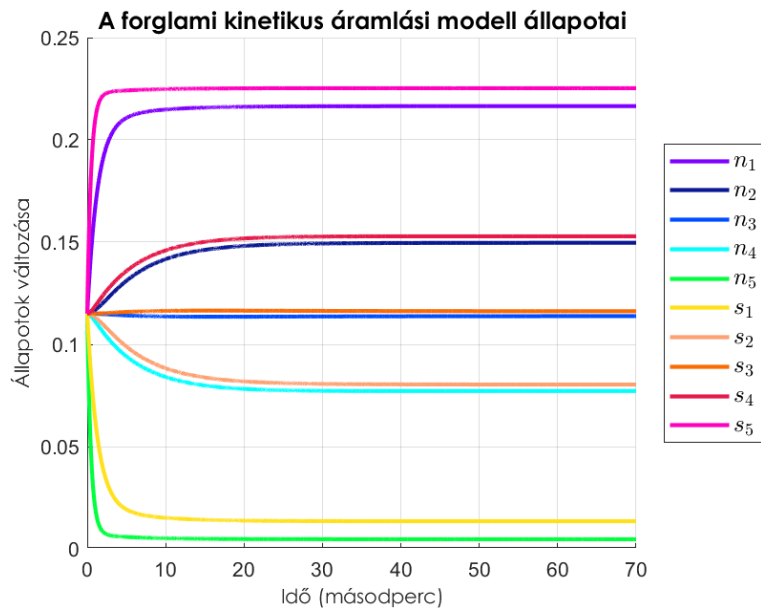
$$\dot{n}_5 = k \cdot n_4 \cdot (\rho_{max} - n_5) - k_{off} \cdot n_5 \quad (38e)$$

A nemlineáris cső modell esetén a paraméterek:

Paraméterek	Értelmezés	Érték
V_{max}	Maximális sebesség $\left[\frac{m}{s}\right]$ -ban megadva	25
ρ_{max}	Maximális jármű sűrűsége egy cellának $\left[\frac{1m}{\text{átlagos jármű hossz}}\right]$ -ban megadva	0.23
$\omega = \frac{V_{max}}{\rho_{max}}$	Cellák közötti áthaladási sebesség	108.696
Δx	Cella hossza $[m]$ -ben megadva	200
$k = \frac{\omega}{\Delta x}$	Cellák közötti átmenet	0.5435
k_{on}	Felhajtó áteresztőképességi együtthatója	0.7
k_{off}	Lehajtó áteresztőképességi együtthatója	2

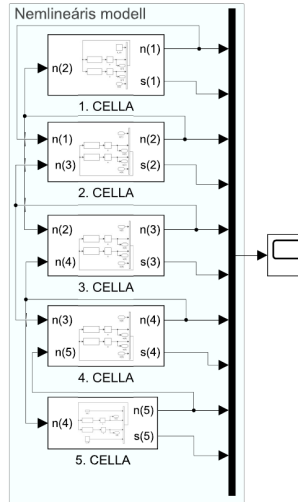
1. táblázat. A Forgalmi Kinetikus Áramlási modell paraméterei.

A nemlineáris modell szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam. Minden állapot esetén a kezdeti értéket a maximális jármű sűrűség felének választottam meg. A modell állapotainak a trajektóriái a 6. ábrán láthatóak. Látható, hogy az állapotok 30 másodperc alatt konvergálnak az állandósult állapotbeli értékekhez. Az is megfigyelhető, hogy ha egy adott időpillanatban összeadjuk az egy cellában lévő járművek és járművek számára rendelkezésre álló helyek számát az éppen a maximális jármű sűrűséggel egyezik meg.



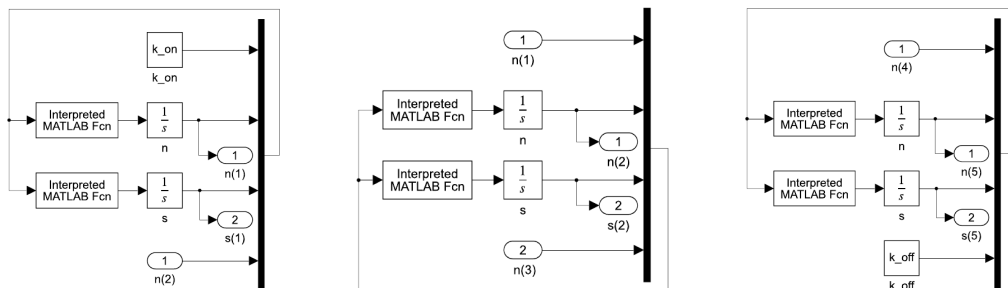
6. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt állapottrajektóriák.

A szimulációt elkészítettem Simulinkben is, amely az 7. ábrán látható. Az átláthatóság érdekében az egyes cellákhoz tartozó komponenseket alrendszerben helyeztem el. Egy tíz bemenetű multiplexer segítségével egyesítettem az állapotok értékeit egy vektorba minden időpillanatban és egy scope-on jelenítettem meg az állapottrajektóriákat.



7. ábra. A Forgalmi Kinetikus Áramlási modell Simulink modellje.

Az első cella alrendszer a 8a. ábrán látható. Az alrendszer két integrátor blokkot tartalmaz, egyet az első cellában lévő járművek változását leíró differenciálegyenlet és egyet pedig a szabad helyek változását leíró differenciálegyenlet integrálásához. Az alrendszernek két bemenete van, a felhajtó áteresztőképességi együtthatójának a konstans értéke és a következő cella jármű száma. A megfelelő paraméterek egy négy bemenetű multiplexer segítségével vannak visszavezetve az egyenleteket tartalmazó blokkokba. Az alrendszernek két kimenete van n_1 és s_1 . A középső cellák alrendszere a 8b. ábrán látható, amelyek megegyeznek az első cellával, annyi különbséggel, hogy a két bemenet az előző és a következő cella jármű száma. Az utolsó cella alrendszere a 8c. ábrán látható, amely szintén megegyezik az első cellával, annyi különbséggel, hogy a két bemenet az előző cella jármű száma és a lehajtó áteresztőképességi együtthatójának a konstans értéke.



(a) Első cella alrendszere. (b) Középső cellák alrendszere. (c) Utolsó cella alrendszere.

8. ábra. A nemlineáris Simulink modell celláinak az alrendszerei.

A cső modellhez tartozó további szimulációkat a járművek számára rendelkezésre álló szabad helyek állapotai nélkül végeztem el.

Nemlineáris rendszer linearizálása

A nemlineáris rendszer állapotainak a lineáris állapotbecslővel való becsléséhez, először linearizálni kell a nemlineáris rendszert. A linearizálást a 2.2. szakasz alapján végeztem el. Először meghatároztam az egyensúlyi bemeneteket:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} k_{on} \\ k_{off} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

amely értékek lassabb beáramlási és gyorsabb kiáramlási sebességi együtthatókat jelentenek. Az egyensúlyi bemenetek megtalálásához felírtam a (38) egyenletrendszer egyenleit egyenlővé téve nullával:

$$f_1(\bar{n}, \bar{u}) = -k \cdot \bar{n}_1 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_2) + \bar{u}_1 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_1) = 0, \quad (39a)$$

$$f_2(\bar{n}, \bar{u}) = k \cdot \bar{n}_1 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_2) - k \cdot \bar{n}_2 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_3) = 0, \quad (39b)$$

$$f_3(\bar{n}, \bar{u}) = k \cdot \bar{n}_2 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_3) - k \cdot \bar{n}_3 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_4) = 0, \quad (39c)$$

$$f_4(\bar{n}, \bar{u}) = k \cdot \bar{n}_3 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_4) - k \cdot \bar{n}_4 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_5) = 0, \quad (39d)$$

$$f_5(\bar{n}, \bar{u}) = k \cdot \bar{n}_4 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_5) - \bar{u}_2 \cdot \bar{n}_5 = 0. \quad (39e)$$

Az egyensúlyi pontok a (39) egyenletrendszer megoldását követően:

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} \bar{n}_1 \\ \bar{n}_2 \\ \bar{n}_3 \\ \bar{n}_4 \\ \bar{n}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2165 \\ 0.1497 \\ 0.1138 \\ 0.0772 \\ 0.0047 \end{bmatrix} \quad (40)$$

A (39) egyenletek bal oldalát linearizáltam az $\bar{n}$ állapotok szerint, így megkaptam a lineáris állapottér modell rendszer mátrixát:

$$A = \begin{bmatrix} -k \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_2) - \bar{u}_1 & k \cdot \bar{n}_1 & 0 & 0 & 0 \\ k \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_2) & -k \cdot (\bar{n}_1 + \rho_{max} - \bar{n}_3) & k \cdot \bar{n}_2 & 0 & 0 \\ 0 & k \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_3) & -k \cdot (\bar{n}_2 + \rho_{max} - \bar{n}_4) & k \cdot \bar{n}_3 & 0 \\ 0 & 0 & k \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_4) & -k \cdot (\bar{n}_3 + \rho_{max} - \bar{n}_5) & k \cdot \bar{n}_4 \\ 0 & 0 & 0 & k \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_5) & -k \cdot \bar{n}_4 - \bar{u}_2 \end{bmatrix}$$

A (39) egyenletek bal oldalát linearizáltam az u állapotok szerint, így megkaptam a lineáris állapottér modell bemeneti mátrixát:

$$B = \begin{bmatrix} \rho_{max} - \bar{n}_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\bar{n}_5 \end{bmatrix}$$

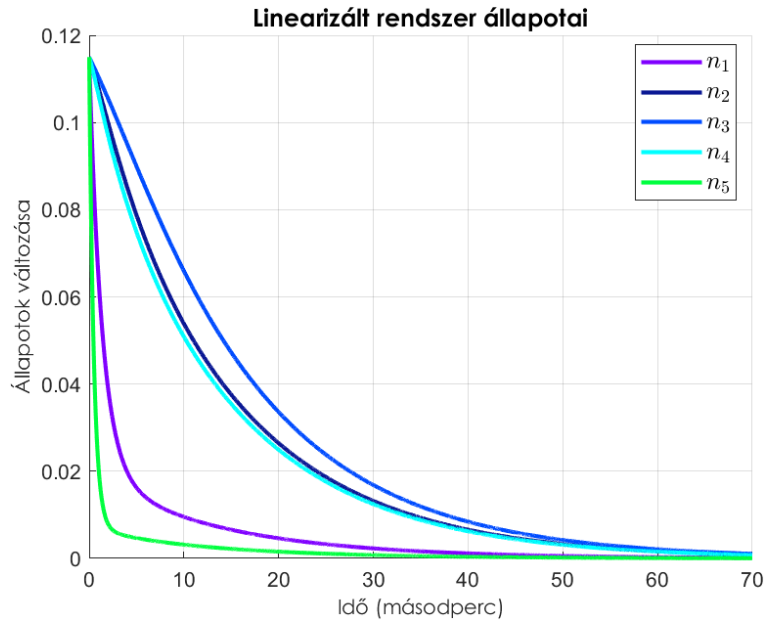
Lineárizált rendszer

A lineáris állapottér modellt a 2.4. szakasz alapján írtam fel. Az állapot egyenletet a nemlineáris rendszer linearizálásánál kapott A és B mátrixokkal írtam fel, ahol a kapott mátrix állapotai helyére az egyensúlyi pontok értékeit helyettesítettem be. A kimeneti egyenlethez definiáltam egy C illetve egy D mátrixot.

$$\dot{n}(t) = An(t) + Bu(t) = \begin{bmatrix} -0.7437 & 0.1177 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0437 & -0.1808 & 0.0813 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0631 & -0.1644 & 0.0619 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0830 & -0.1843 & 0.0420 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1224 & -2.0420 \end{bmatrix} n(t) + \begin{bmatrix} 0.0135 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.0047 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = Cn(t) + Du(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} n(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

A lineáris modell állapotainak a trajektóriái a 9. ábrán láthatóak. A lineáris modell szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam. A lineáris modell állapotainak a kezdeti értékeit, a maximális jármű sűrűség felének választottam meg.



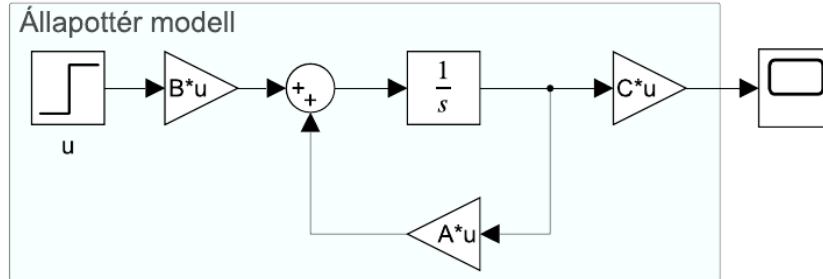
9. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt lineáris állapottrajektóriák.

A stabilitás megvizsgálásához kiírtam az A rendszer mátrix sajátértékeit, amelyek:

$$\lambda_1 = -0.7528, \lambda_2 = -0.0693, \lambda_3 = -0.1766, \lambda_4 = -0.2717, \lambda_5 = -2.0447.$$

Mivel az A rendszer mátrix minden sajátértékének a valós része negatív, így a lineáris rendszer aszimptotikusan stabil.

A lineáris modell szimulációját elkészítettem Simulinkben, amely a 10. ábrán látható. A modell bemenetét egy lépés függvény biztosítja. A modell különböző mátrixait erősítő blokkokban helyeztem el. Az integráláshoz egy integrátor blokkot alkalmaztam. A rendszer állapottrajektóriáit egy scope-on jelenítettem meg.



10. ábra. A linearizált Forgalmi Kinetikus Áramlási modell Simulink modellje.

Lineáris rendszer állapotainak becslése

A lineáris rendszer állapotainak a becslését a 2.5.1. szakasz alapján készítettem el. A lineáris állapottér modell állapotbecslésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a megfigyelhetőségi mátrix rangja teljes legyen. A Matlab *obsv* parancsával megkaptam a megfigyelhetőségi mátrixot:

$$\mathcal{O}_5 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1224 & -2.0419 \\ 0 & 0 & 0.0102 & -0.2726 & 4.1747 \\ 0 & 0.0006 & -0.0243 & 0.5620 & -8.5360 \\ 0.00002 & -0.0017 & 0.0507 & -1.1501 & 17.4537 \end{bmatrix}$$

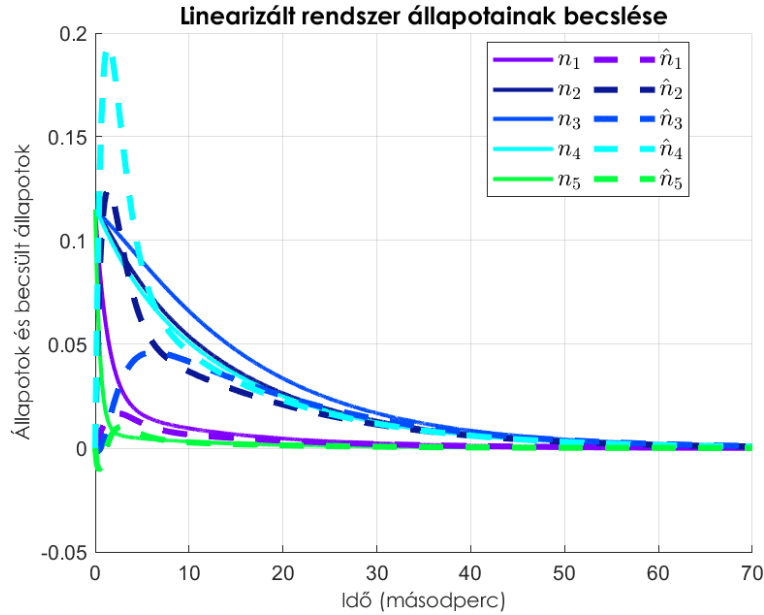
Ezután a Matlab *rank* parancsával megkaptam, hogy a megfigyelhetőségi mátrix rangja teljes, azaz egyenlő az állapotok számával, így a lineáris rendszer megfigyelhető. Megválasztottam az L erősítő mátrix pólusait:

$$\lambda_1 = -0.75, \lambda_2 = -0.2, \lambda_3 = -0.83, \lambda_4 = -0.88, \lambda_5 = -0.11.$$

A pólusok megválasztása után a Matlab *place* parancsával megkaptam az L erősítési mátrix értékeit:

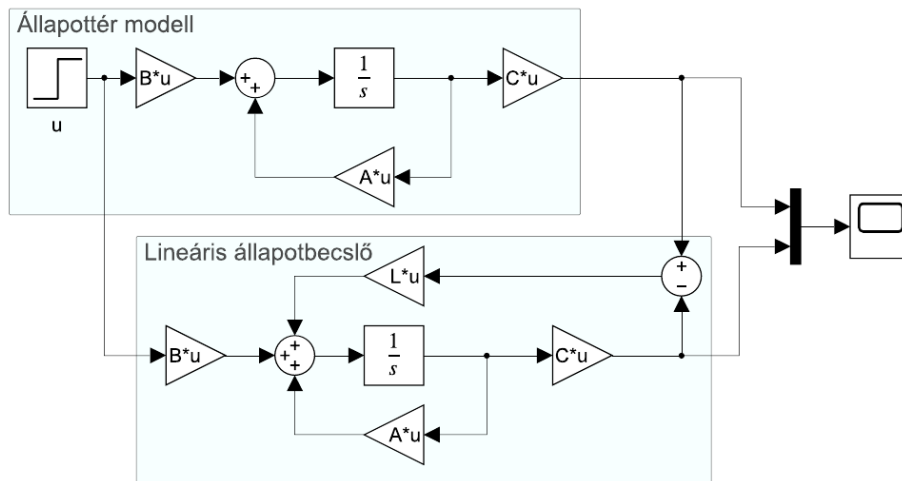
$$L = \begin{bmatrix} 0.1290 \\ 2.2047 \\ -0.1121 \\ 3.4733 \\ -0.5451 \end{bmatrix}$$

A lineáris modell és a lineáris állapotbecslő szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam. A lineáris modell állapotainak a kezdeti értékeit, mindenhol a maximális jármű sűrűség felének, a becslt állapotok kezdeti értékeit minden állapotnál nullának választottam meg. A lineáris állapotbecslés a 11. ábrán látható.



11. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt lineáris és becslt állapottrajektóriák.

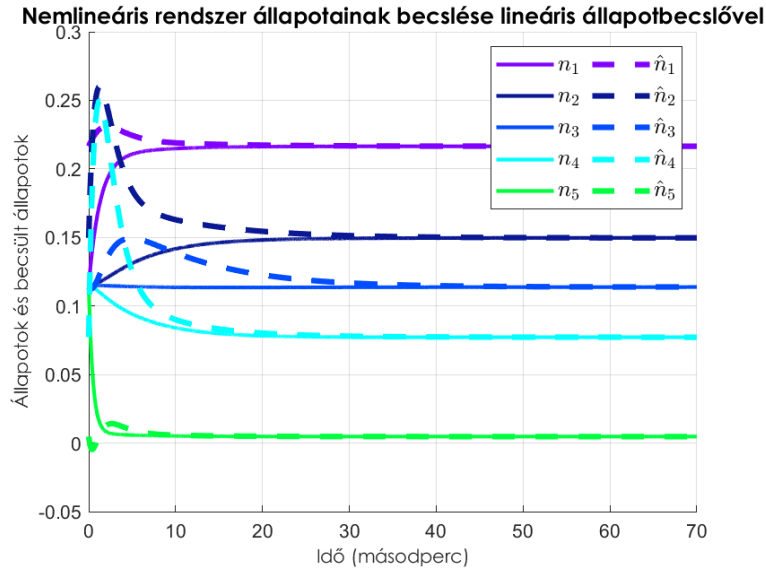
A lineáris állapotbecslő Simulink modellje a 12. ábrán látható. Ehhez felhasználtam lineárisított rendszer 10. ábrán lévő modelljét és ezt egészítettem ki a lineáris állapotbecslőhöz használt blokkokkal. Az L erősítő mátrixot egy erősítő blokkban helyeztem el. A lineáris állapottér modell állapottrajektóriáit és a lineárisan becslt állapottrajektóriákat egy scope-on jelenítettem meg.



12. ábra. A linearizált Forgalmi Kinetikus Áramlási modell állapotbecslésének a Simulink modellje.

Nemlineáris rendszer állapotainak becslése lineáris állapotbecslővel

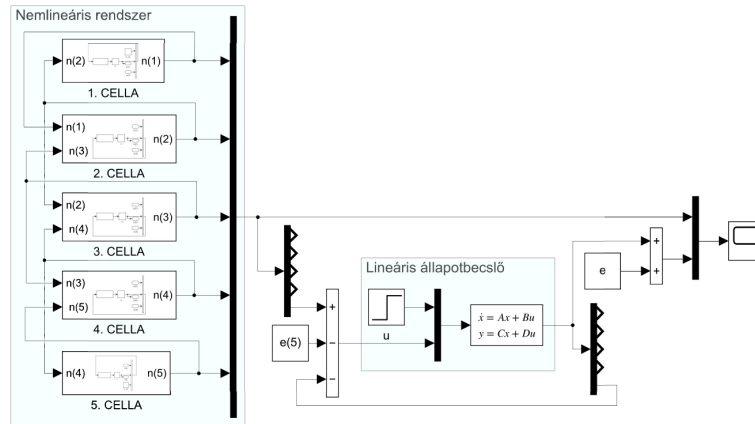
A nemlineáris rendszer lineáris állapotbecslővel történő becsléséhez először a lineáris állapotbecslő állapot egyenletében lévő hibajelek különbségéből kivontam a (40) egyensúlyi pontok utolsó értékét, mivel a C kimeneti mátrixot úgy választottam meg, hogy az utolsó állapotot mérem. Ezután a lineáris becslt értékekhez hozzáadtam a (40) egyensúlyi pontokat. A nemlineáris modell és a nemlineáris modell lineáris állapotbecslővel történő szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam. A nemlineáris modell állapotainak a kezdeti értékeit, mindenhol a maximális jármű sűrűség felének, a becslt állapotok kezdeti értékeit pedig minden állapotnál nullának választottam meg. A nemlineáris rendszer állapotainak lineáris becslése a 13. ábrán látható.



13. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt nemlineáris és lineárisan becslt állapottrajektóriák.

A 13. ábrán látható, hogy a lineáris becslővel becslt értékek a megfelelő értékekhez konvergálnak, de bizonyos állapotoknál nem kívánatos túllendülések fordulnak elő. A cellák számának a növelésével a lineárisan becslt állapotoknál tapasztalt túllendülések is egyre nagyobbak lesznek.

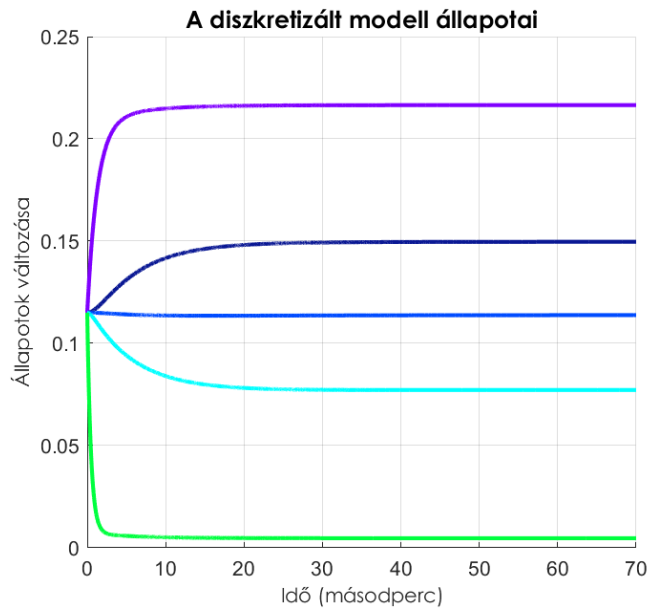
A nemlineáris modell lineáris állapotbecslésének a Simulink modellje a 14. ábrán látható. Ehhez a 7. ábrán lévő modellt alakítottam át úgy, hogy az alrendszerekben csak a járművek állapotait számolom ki. A lineáris becslt állapotokhoz a Simulink állapotterrendszer blokkját használtam, amelynek a bemenete egy lépés függvény és a nemlineáris rendszer utolsó állapotának az értéke, amelyből ki van vonva az egyensúlyi pont utolsó értéke és a becslt érték visszacsatolt értéke. A becslt értékekhez egy konstans blokkban hozzá vannak adva az egyensúlyi pontok, így megkapjuk a becslt értékeket.



14. ábra. A nemlineáris Forgalmi Kinetikus Áramlási modell lineáris állapotbecslésének a Simulink modellje.

Nemlineáris rendszer állapotainak becslése kiterjesztett Kálmán-szűrővel

A Forgalmi Kinetikus Áramlási modell állapotainak a becsléséhez először diszkrétizáltam a folytonos rendszert, amely a 15. ábrán látható. A diszkrétizáláshoz a 2.3.1. szakaszban lévő explicit Euler-módszert használtam. A lépésközt $h = 0.01$ választottam meg.



15. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt diszkrét állapottrajektóriák.

Miután elvégeztem a modell diszkretizálását megválasztottam a becsült állapotok kezdeti értékeit:

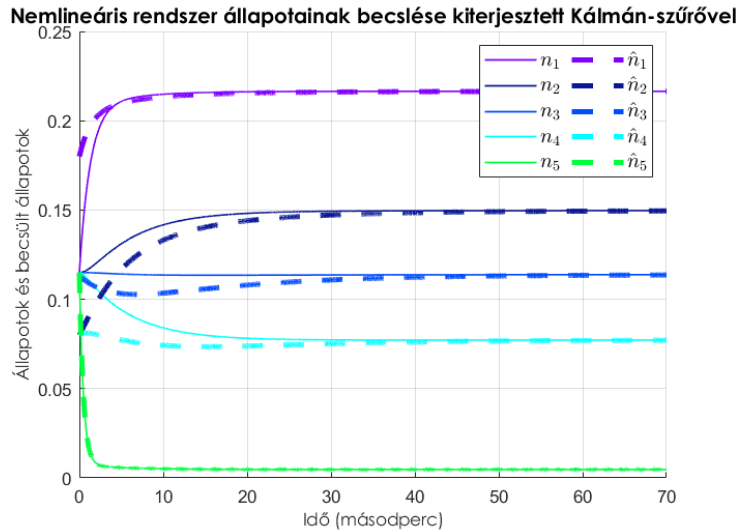
$$\hat{n}(0) = \begin{bmatrix} \hat{n}_1(0) \\ \hat{n}_2(0) \\ \hat{n}_3(0) \\ \hat{n}_4(0) \\ \hat{n}_5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.08 \\ 0.113 \\ 0.08 \\ 0.1150 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Mivel az utolsó állapotot mérem, így annak a kezdeti értéke megegyezik a nemlineáris modell kezdeti állapotának utolsó értékével. Az egyenletrendszer Taylor-sorba fejtésével elkészítettem az A Jacobi-mátrixot, amelybe be lehet helyettesíteni minden iterációban a megfelelő becsült állapot értékeit. Mivel az utolsó állapotot mértem és a többi állapotot becsültem, így a mérési függvény $h = [n_5]$. Mivel a h mérési függvény az utolsó állapotot tartalmazza, így a h x -hez viszonyított H Jacobi-mátrixa $H = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$. A becsült hibakovariancia mátrixot $P = 0.1 \cdot I_5$ választottam meg. A jobb teljesítményű szűrés érdekében a hangolási paramétereket következőképpen választottam meg:

- A folyamat és mérési zaj: $w = 10^{-3}$, $v = 10^{-4}$
- A folyamat és mérési zaj kovariancia mátrixa: $Q = w \cdot I_5$, $R = v$

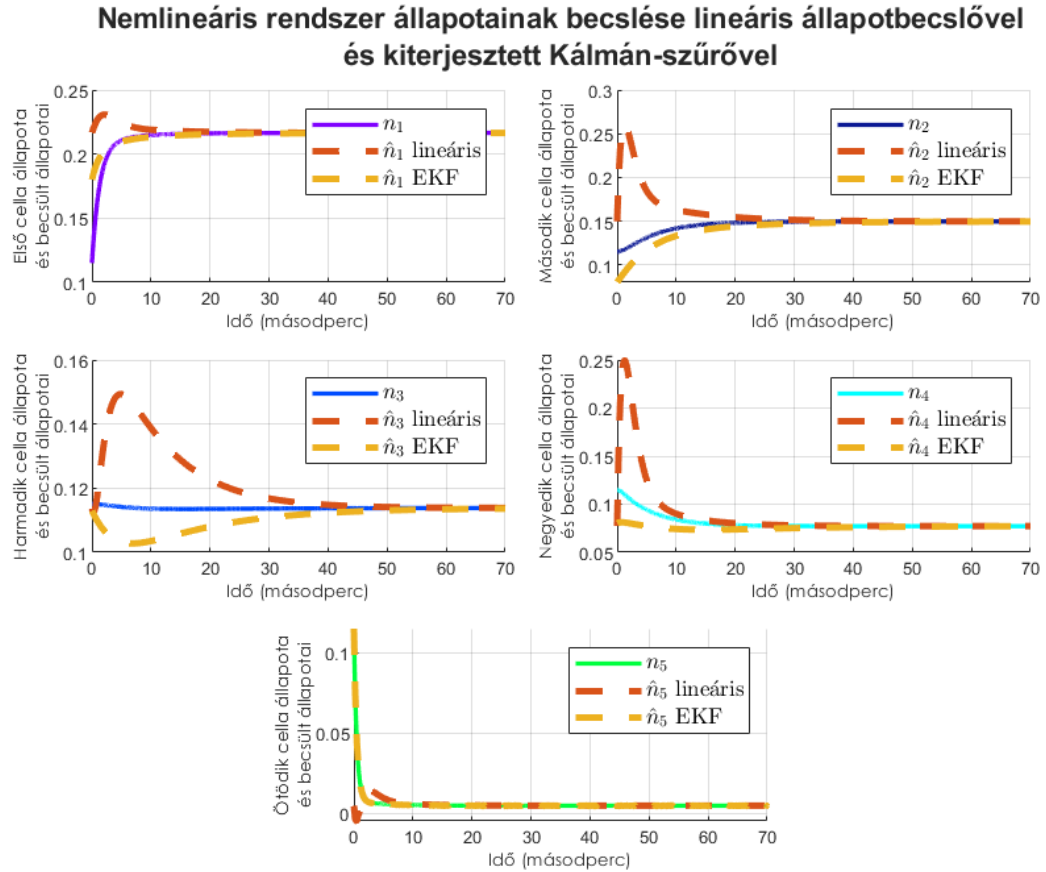
A kiterjesztett Kálmán-szűrő algoritmusában először behelyettesítettem az A Jacobi-mátrixba az állapotbecslési értékeket, majd elvégeztem a predikciós lépéseket, ahol az állapotbecslés kiszámításánál alkalmaztam a Euler-módszert. Elvégeztem a frissítési lépéseket, ahol kiszámoltam a Kálmán-erősítési mátrixot. Minden k időpillanatban becsült állapotoknak az értékei a 16. ábrán láthatóak.

Az állapotbecslések összehasonlítása



16. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt nemlineáris és becsült állapottrajektóriák.

Összehasonlítottam állapotonként, hogy a nemlineáris rendszer lineáris és kiterjesztett Kálmán-szűrővel történő állapotbecslés, hogyan teljesít egymáshoz képest, amely állapotonkénti összehasonlításnak szimulációja a 17. ábrán látható. Látható, hogy a kiterjesztett Kálmán-szűrővel becsült értékek hamarabb konvergál a megfelelő értékekhez, míg a lineáris becsült állapotoknál nem kívánt túllendülések lépnek fel, ami miatt minden állapotnál lassabb a konvergencia gyorsasága. A kiterjesztett Kálmán-szűrő azért teljesít ilyen jól, mivel a rendszer nemlineáris függvényekkel rendelkezik.



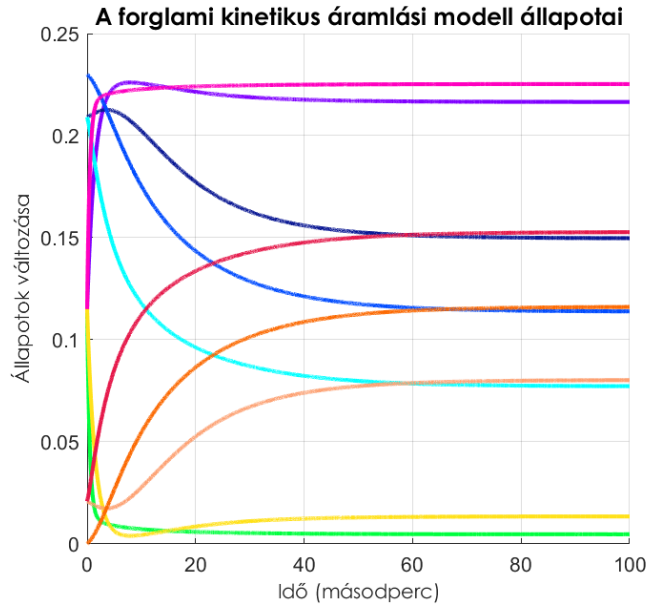
17. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt nemlineáris és becsült állapottrajektóriák.

Forgalmi dugó feloldása szabályozással

A forgalmi dugó szimulálásához a (38) egyenletrendszert használtam fel és paraméter értékeknek a 1. táblázatban definiált értékeket választottam. Az állapotok kezdeti értékeit a következőképpen választottam meg:

$$n(0) = \begin{bmatrix} n_1(0) \\ n_2(0) \\ n_3(0) \\ n_4(0) \\ n_5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_{max}}{2} \\ \frac{\rho_{max}}{1.1} \\ \rho_{max} \\ \frac{\rho_{max}}{1.1} \\ \frac{\rho_{max}}{2} \end{bmatrix}$$

A nemlineáris modell szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam, amely a 18. ábrán látható. Az ábrán látható, hogy bizonyos állapotok lassabban konvergálnak az állandósult állapotbeli értékekhez, mint a 6. ábrán lévő állapotok, mivel itt a kezdeti értékek úgy lettek megválasztva, hogy feltételezzük, hogy a középső cellának a járműsűrűsége a maximum legyen. A nemlineáris modell szabályozásával a célunk, hogy az egyes állapotok előbb konvergáljanak az állandósult állapotbeli értékekhez, azaz előbb feloldódjon a kialakult forgalmi dugó.



18. ábra. A Matlab plot paranccsával kirajzolt állapottrajektóriák.

A nemlineáris rendszer lineáris szabályozásához szükség van az egyensúlyi pontokra, a rendszer mátrixra és a bemeneti mátrixra. Az egyensúlyi pontok megegyeznek a (40) egyensúlyi pontokkal és az A és B mátrixok megegyeznek a 3.2.1. szakasz állapot egyenletében definiált mátrixok értékeivel.

A forgalmi dugó modellhez tartozó további szimulációkat a járművek számára rendelkezésre álló szabad helyek állapotai nélkül végeztem el.

Pólusát helyezés szabályozás

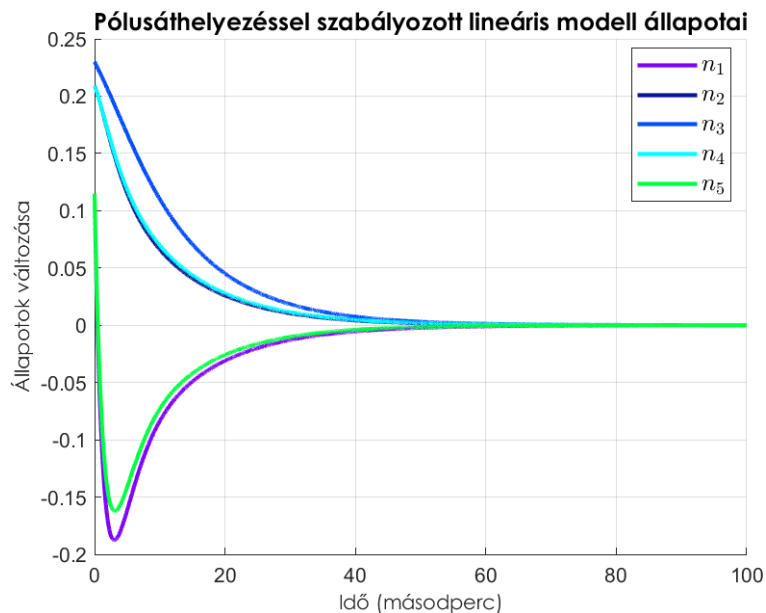
A lineáris pólusát helyezést a 2.6.1. szakasz alapján végeztem el. Először megválasztottam a K erősítési mátrix pólusait:

$$\lambda_1 = -0.0745, \lambda_2 = -0.49, \lambda_3 = -0.51, \lambda_4 = -0.52, \lambda_5 = -0.09.$$

A pólusok megválasztása után a Matlab *place* parancsával megkaptam az K erősítési mátrix értékeit:

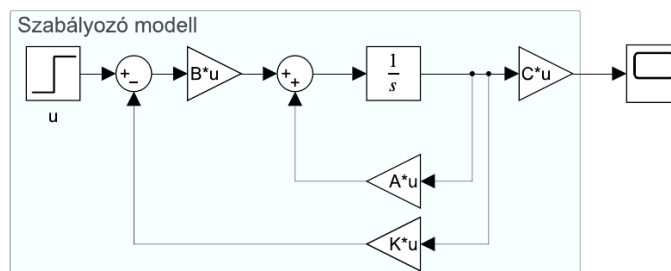
$$K = \begin{bmatrix} -10.7944 & 43.2724 & -40.2324 & 86.7674 & 13.0058 \\ -36.7420 & -244.5197 & 87.0126 & -71.4992 & 314.2078 \end{bmatrix}.$$

A lineáris szabályozási modell szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam, amely a 19. ábrán látható.



19. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt lineárisan szabályozott állapottrajektóriák.

A lineáris szabályozó Simulink modellje a 20. ábrán látható. Ehhez a 10. ábrát egészítettem ki a K visszacsatoló erősítési mátrixszal.



20. ábra. A lineárisan szabályozott forgalmi dugó modell Simulink modellje.

A nemlineáris modell lineáris szabályozásához a (38) differenciálegyenlet rendszert alakítottam át:

$$\dot{n}_1 = -k \cdot n_1 \cdot (\rho_{max} - n_2) + (k_{on} + u_1) \cdot (\rho_{max} - n_1), \quad (42a)$$

$$\dot{n}_2 = k \cdot n_1 \cdot (\rho_{max} - n_2) - k \cdot n_2 \cdot (\rho_{max} - n_3), \quad (42b)$$

$$\dot{n}_3 = k \cdot n_2 \cdot (\rho_{max} - n_3) - k \cdot n_3 \cdot (\rho_{max} - n_4), \quad (42c)$$

$$\dot{n}_4 = k \cdot n_3 \cdot (\rho_{max} - n_4) - k \cdot n_4 \cdot (\rho_{max} - n_5), \quad (42d)$$

$$\dot{n}_5 = k \cdot n_4 \cdot (\rho_{max} - n_5) - (k_{off} + u_2) \cdot n_5 \quad (42e)$$

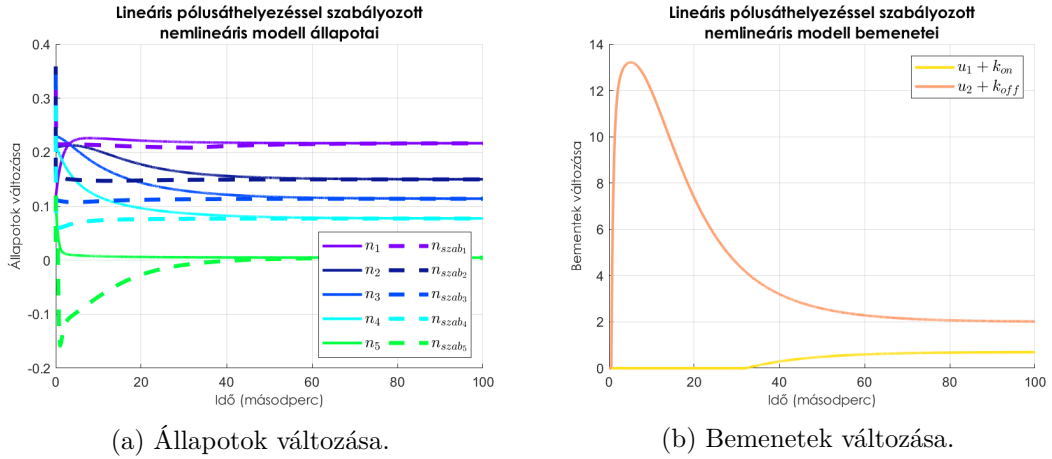
ahol

$$u_1 = -K_1 \cdot (n - \bar{n}),$$

$$u_2 = -K_2 \cdot (n - \bar{n}).$$

A $k_{on} + u_1$ és a $k_{off} + u_2$ értékét 0-nak választottam meg, ha negatív értéket vett fel.

A lineáris szabályozott nemlineáris modell állapotainak változása a 21a. és a bemeneteinek a változása a 21b. ábrán láthatóak.

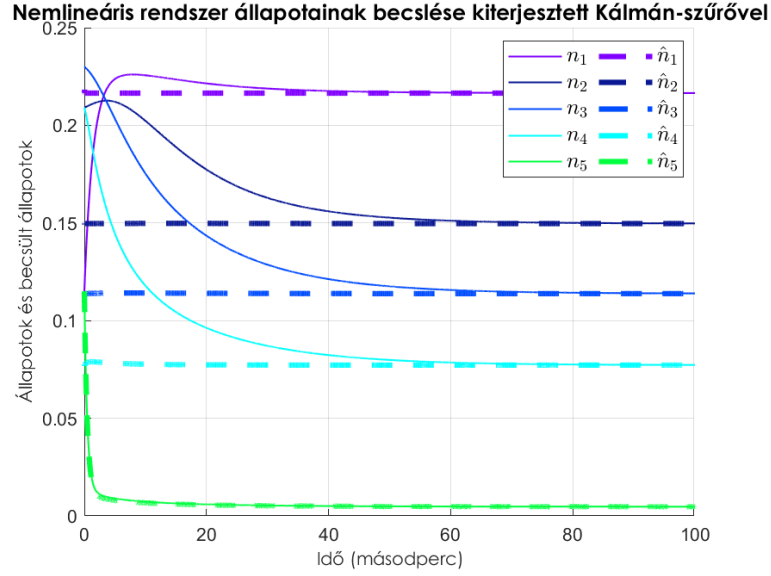


21. ábra. A lineárisan szabályozott nemlineáris modell bemeneteinek változása és állapottrajektóriái.

Ahhoz, hogy a becsült állapotokat szabályozhassam, először diszkrétizáltam a folytonos nemlineáris modellt. Miután elvégeztem a modell diszkrétizálását megválasztottam a becsült állapotok kezdeti értékeit, amelynek az első négy értéke megegyezik a (40) egyensúlyi pont első négy értékével és az utolsó értéke pedig az eredeti kezdeti értékek utolsó értékével. A becsült hibakovariancia mátrixot $P = 10^{-4} \cdot I_5$ választottam meg. A jobb teljesítményű szűrés érdekében a hangolási paramétereket következőképpen választottam meg:

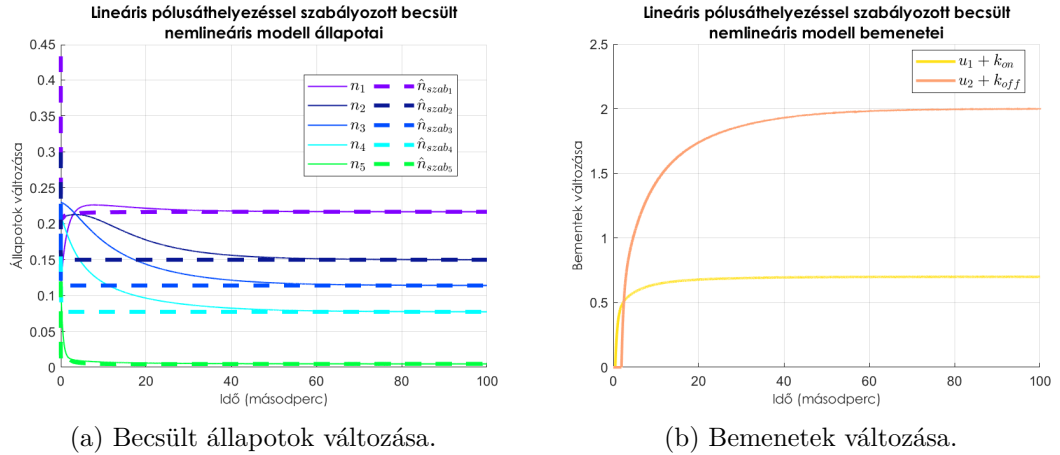
- A folyamat és mérési zaj: $w = 0$, $v = 10^{-5}$
- A folyamat és mérési zaj kovariancia mátrixa: $Q = w \cdot I_5$, $R = v$

A kiterjesztett Kálmán-szűrő algoritmusának szimulálása a (22). ábrán látható.



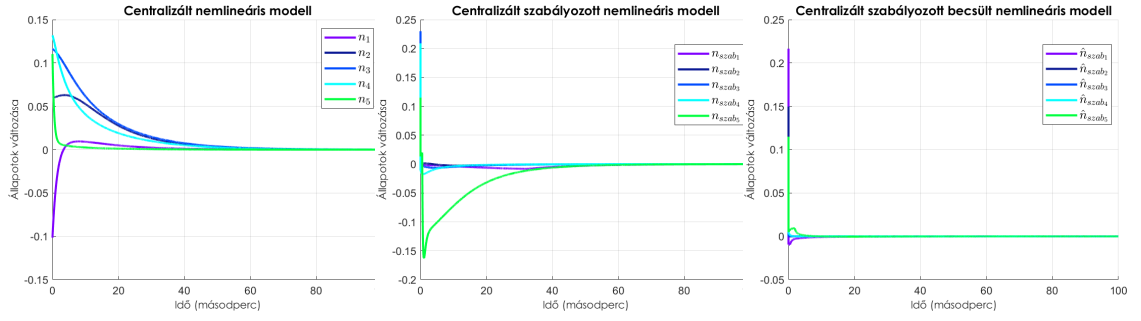
22. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt nemlineáris és becült állapottrajektóriák.

A kiterjesztett Kálmán-szűrővel becült állapotok lineáris szabályozásához a (42) egyenletrendszerbe helyettesítettem be a becült állapotok értékeit. A lineárisan szabályozott nemlineáris modell becült állapotainak változása a 23a. és a bemeneteinek a változása a 23b. ábrán láthatóak.



23. ábra. A lineárisan szabályozott becült nemlineáris modell bemeneteinek változása és állapottrajektóriái.

Miután elvégeztem a szabályozásokat megvizsgáltam, hogy a szabályozás esetén valóban jobb lett-e a teljesítmény, azaz az állapotok hamarabb konvergálnak az állandósult állapotbeli értékekhez. Ehhez centralizáltam a nemlineáris, a szabályozott és a szabályozott becült modell állapotait, majd kiszámoltam a Matlab *trapz* függvényével az állapotok alatt lévő területet. Az centralizált állapotok a 24. ábrán láthatóak.



24. ábra. Nemlineáris, szabályozott és a szabályozott becsült modell centralizált állapotai.

A különböző centralizált modellek állapotainak összesített teljesítménye:

- Centralizált nemlineáris modell: 4.8676
- Centralizált szabályozott nemlineáris modell: 2.4716
- Centralizált szabályozott becsült nemlineáris modell: 0.0769

Látható, hogy a szabályozott modellek esetében valóban javul a teljesítmény az eredeti nemlineáris modellhez képest.

Lineáris kvadratikus szabályozás

A lineáris kvadratikus szabályozást a 2.6.2. szakasz alapján végeztem el. Először megválasztottam a Q és R pozitív-definit mátrixokat:

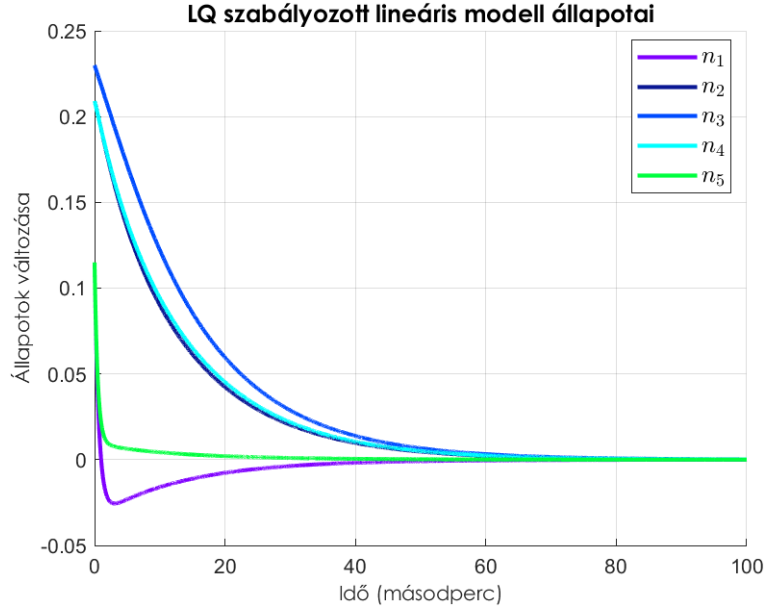
$$Q = 1000 \cdot I_5,$$

$$R = 0.1 \cdot I_2.$$

A pólusok megválasztása után a Matlab *lqr* parancsával megkaptam a K erősítési mátrix értékei:

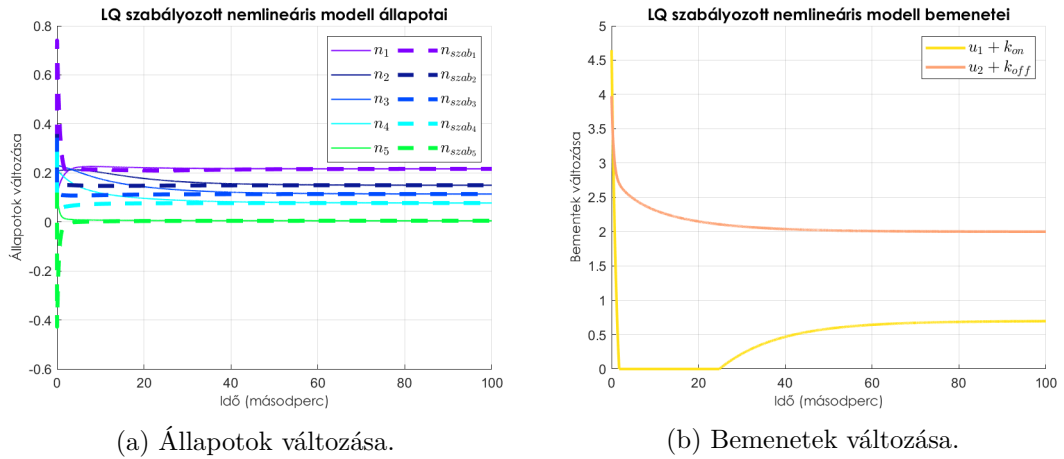
$$K = \begin{bmatrix} 59.5375 & 15.9392 & 7.1501 & 2.3727 & 0.0475 \\ -0.0166 & -0.5885 & -1.7417 & -3.5911 & -11.4924 \end{bmatrix}.$$

A lineáris kvadratikus modell szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam, amely a 25. ábrán látható.



25. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt lineáris kvadratikus szabályozóval szabályozott állapottrajektóriák.

A lineáris kvadratikus szabályozó Simulink modellje, megegyezik a 20. ábrán látható lineáris szabályozó modellel. A nemlineáris modell lineáris kvadratikus szabályozásához a differenciálegyenlet rendszer megegyezik a (42) differenciálegyenlet rendszerrel. A lineáris kvadratikus szabályozott nemlineáris modell állapotainak változása a 26a. és a bemeneteinek a változása a 26b. ábrán láthatóak.

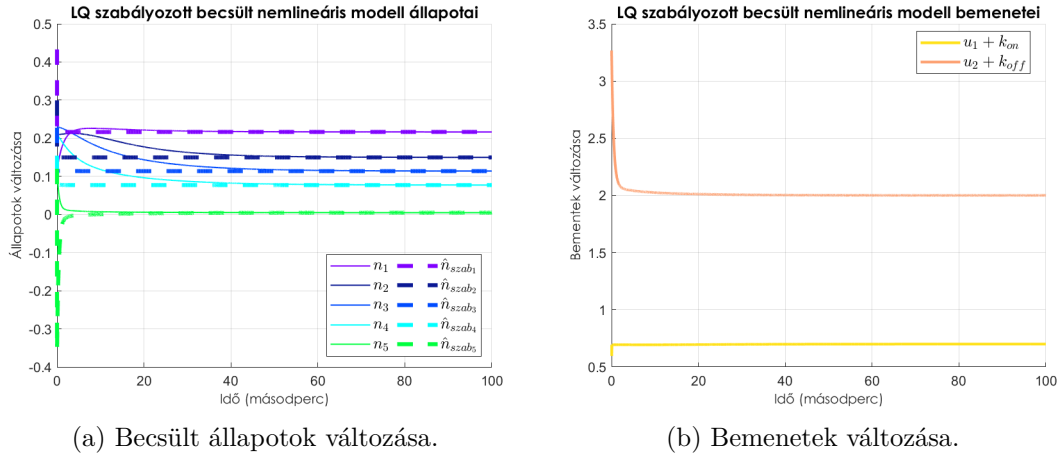


(a) Állapotok változása.

(b) Bemenetek változása.

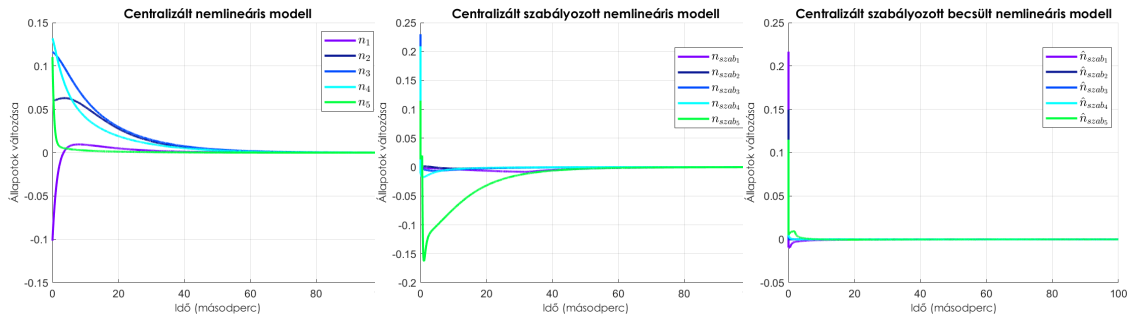
26. ábra. A lineárisan szabályozott nemlineáris modell bemeneteinek változása és állapottrajektóriái.

A modell diszkrétizálása és kiterjesztett Kálmán-szűrővel történő becslése megegyezik a pólusát helyezésnél lévő becslés eredményeivel. A kiterjesztett Kálmán-szűrővel becsült állapotok lineáris kvadratikus szabályozásához a (42) egyenletrendszerbe helyettesíttem be a becsült állapot értékeket. A lineáris kvadratikus szabályozott nemlineáris modell becsült állapotainak változása a 27a. és a bemeneteinek a változása a 27b. ábrán láthatóak.



27. ábra. A lineáris kvadratikus szabályozott becült nemlineáris modell bemeneteinek változása és állapottrajektóriái.

Miután elvégeztem a szabályozásokat megvizsgáltam, hogy a szabályozás esetén valóban jobb lett-e a teljesítmény, azaz az állapotok hamarabb konvergálnak az állandósult állapotbeli értékekhez. Ehhez centralizáltam a nemlineáris, a szabályozott és a szabályozott becült modell állapotait, majd kiszámoltam a Matlab *trapz* függvényével az állapotok alatt lévő területet. Az centralizált állapotok a 24. ábrán láthatóak.



28. ábra. Nemlineáris, szabályozott és a szabályozott becült modell centralizált állapotai.

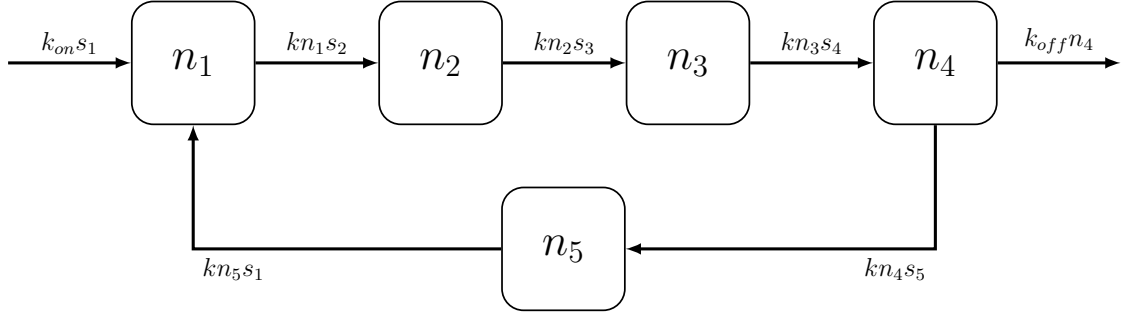
A különböző centralizált modellek állapotainak összesített teljesítménye:

- Centralizált nemlineáris modell: 4.8676
- Centralizált szabályozott nemlineáris modell: 1.0595
- Centralizált szabályozott becült nemlineáris modell: 0.2780

Látható, hogy a szabályozott modellek esetében valóban javul a teljesítmény az eredeti nemlineáris modellhez képest.

3.2.2. Nemlineáris gyűrű modell

A második modell, amelyre elvégeztem a szimulációkat, az úgynevezett gyűrű modell, amely a 29. ábrán látható. A gyűrű modellben a különbség a cső modellhez képest, hogy az első és az utolsó útszakasz között is van áramlás, ezzel egy gyűrűt alkotva. A gyűrű modell első cellájában található egy beáramlás, a negyedik cellájában pedig egy kiáramlás. Az útszakaszok közötti áramlásoknak az iránya mindig balról jobbra halad. Minden k cella közötti átmenetnek megegyezik az értéke.



29. ábra. A gyűrű modell kompartmentjei és a köztük lévő áramlások.

A (36) és (37) alapján öt cella esetén a gyűrű modellt leíró differenciálegyenlet rendszer:

$$\begin{aligned}
 \dot{n}_1 &= k \cdot n_5 \cdot s_1 - k \cdot n_1 \cdot s_2 + k_{on} \cdot s_1 & \dot{s}_1 &= -k \cdot n_5 \cdot s_1 + k \cdot n_1 \cdot s_2 - k_{on} \cdot s_1 \\
 \dot{n}_2 &= k \cdot n_1 \cdot s_2 - k \cdot n_2 \cdot s_3 & \dot{s}_2 &= -k \cdot n_1 \cdot s_2 + k \cdot n_2 \cdot s_3 \\
 \dot{n}_3 &= k \cdot n_2 \cdot s_3 - k \cdot n_3 \cdot s_4 & \dot{s}_3 &= -k \cdot n_2 \cdot s_3 + k \cdot n_3 \cdot s_4 \\
 \dot{n}_4 &= k \cdot n_3 \cdot s_4 - k \cdot n_4 \cdot s_5 - k_{off} \cdot n_4 & \dot{s}_4 &= -k \cdot n_3 \cdot s_4 + k \cdot n_4 \cdot s_5 + k_{off} \cdot s_4 \\
 \dot{n}_5 &= k \cdot n_4 \cdot s_5 - k \cdot n_5 \cdot s_1 & \dot{s}_5 &= -k \cdot n_4 \cdot s_5 + k \cdot n_5 \cdot s_1
 \end{aligned}$$

Minden cellának a maximális jármű sűrűsége ρ_{max} . Egy cellában a járművek és a járművek számára rendelkezésre álló helyek számának az összege megegyezik a maximális jármű sűrűséggel, ezt átrendezve kapjuk meg, hogy $s_i = \rho_{max} - n_i$. Elvégezve a helyettesítést:

$$\dot{n}_1 = k \cdot n_5 \cdot (\rho_{max} - n_1) - k \cdot n_1 \cdot (\rho_{max} - n_2) + k_{on} \cdot (\rho_{max} - n_1), \quad (43a)$$

$$\dot{n}_2 = k \cdot n_1 \cdot (\rho_{max} - n_2) - k \cdot n_2 \cdot (\rho_{max} - n_3), \quad (43b)$$

$$\dot{n}_3 = k \cdot n_2 \cdot (\rho_{max} - n_3) - k \cdot n_3 \cdot (\rho_{max} - n_4), \quad (43c)$$

$$\dot{n}_4 = k \cdot n_3 \cdot (\rho_{max} - n_4) - k \cdot n_4 \cdot (\rho_{max} - n_5) - k_{off} \cdot n_4, \quad (43d)$$

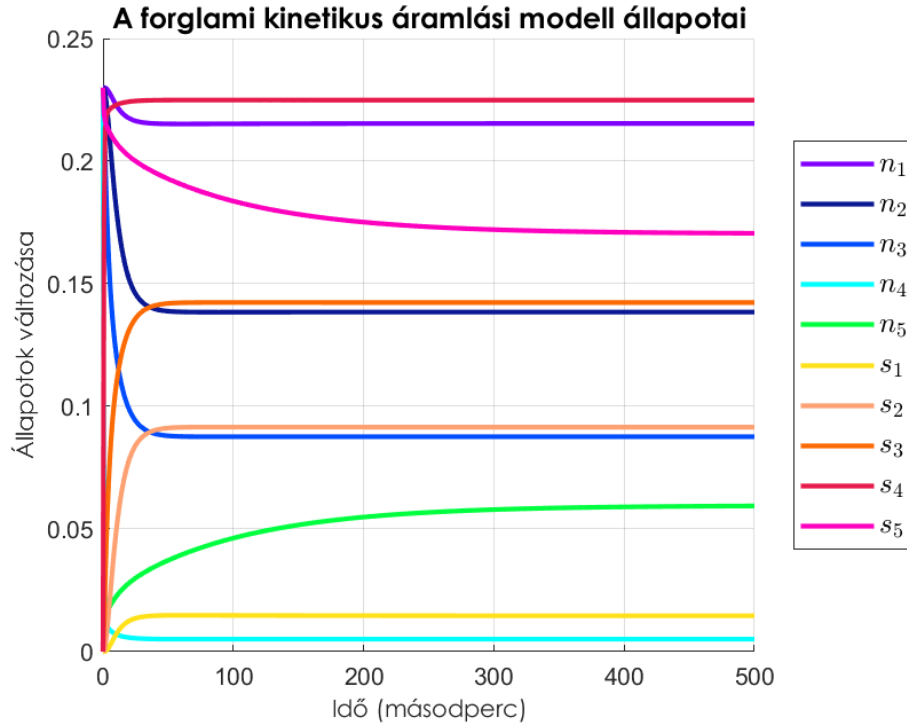
$$\dot{n}_5 = k \cdot n_4 \cdot (\rho_{max} - n_5) - k \cdot n_5 \cdot (\rho_{max} - n_1). \quad (43e)$$

A nemlineáris gyűrű modell paramétereit a 1. táblázat alapján választottam meg. A nemlineáris gyűrű modell szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam. A kezdeti értékeket

$$n(0) = \begin{bmatrix} n_1(0) \\ n_2(0) \\ n_3(0) \\ n_4(0) \\ n_5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{max} \\ \rho_{max} \\ \rho_{max} \\ \rho_{max} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

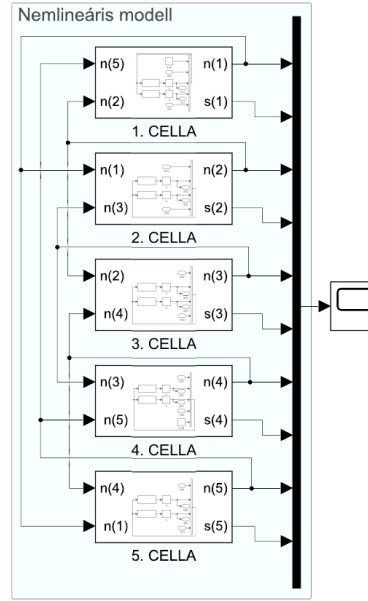
választottam meg.

A nemlineáris modell szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam. A modell állapotainak a trajektóriái a 30. ábrán láthatóak. Látható, hogy az állapotok 450 másodperc eltelte után konvergálnak az állandósult állapotbeli értékekhez. Az is megfigyelhető, hogy ha egy adott időpillanatban összeadjuk az egy cellában lévő járművek és járművek számára rendelkezésre álló helyek számát az éppen a maximális jármű sűrűséggel egyezik meg.



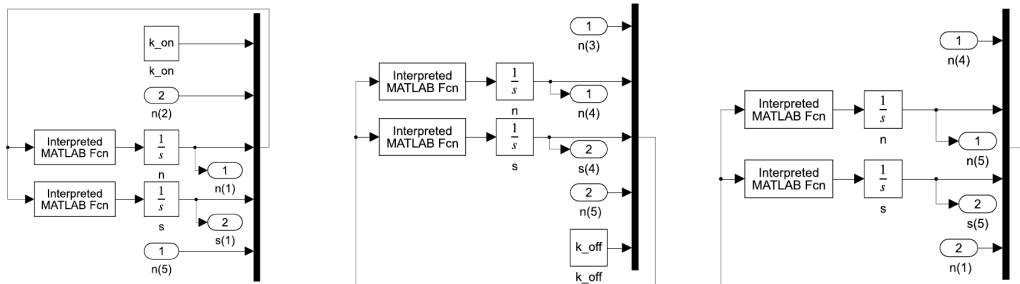
30. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt állapottrajektóriák.

A szimulációt elkészítettem Simulinkben is, amely az 31. ábrán látható. Az átláthatóság érdekében az egyes cellákhoz tartozó komponenseket alrendszerekben helyeztem el. Egy tíz bemenetű multiplexer segítségével egyesítettem az állapotok értékeit egy vektorba minden időpillanatban és egy scope-on jelenítettem meg az állapottrajektóriákat.



31. ábra. A Forgalmi Kinetikus Áramlási modell Simulink modellje.

Az első cella alrendszer a 32a. ábrán látható. Az alrendszer két integrátor blokkot tartalmaz, egyet az első cellában lévő járművek változását leíró differenciálegyenlet és egyet pedig a szabad helyek változását leíró differenciálegyenlet integrálásához. Az alrendszernek három bemenete van, a felhajtó áteresztőképességi együtthatójának a konstans értéke és az utolsó és a következő cella jármű száma. A megfelelő paraméterek egy öt bementű multiplexer segítségével vannak visszavezetve az egyenleteket tartalmazó blokkokba. Az alrendszernek két kimenete van n_1 és s_1 . A negyedik cella alrendszere a 32b. ábrán látható, amelyek megegyeznek az első cellával, annyi különbséggel, hogy a három bemenet a felhajtó áteresztőképességi együtthatójának a konstans értéke, az előző és a következő cella jármű száma. Az utolsó cella alrendszere a 32c. ábrán látható, amely szintén megegyezik az első cellával, annyi különbséggel, hogy a két bemenet az előző és az első cella jármű száma. A második és a harmadik cella alrendszere megegyezik a 7. ábrán látható cső modell második és harmadik cellájával.



(a) Első cella alrendszere. (b) Negyedik cella alrendszere. (c) Utolsó cella alrendszere.

32. ábra. A nemlineáris Simulink modell celláinak az alrendszerei.

A gyűrű modellhez tartozó további szimulációkat a járművek számára rendelkezésre álló szabad helyek állapotai nélkül végeztem el.

Nemlineáris rendszer linearizálása

A nemlineáris rendszer állapotainak a lineáris állapotbecslővel való becsléséhez, először linearizálni kell a nemlineáris rendszert. A linearizálást a 2.2. szakasz alapján végeztem el. Először meghatároztam az egyensúlyi bemeneteket:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} k_{on} \\ k_{off} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

amely értékek lassabb beáramlási és gyorsabb kiáramlási sebességi együtthatókat jelentenek. Az egyensúlyi bemenetek megtalálásához felírtam a (43) egyenletrendszer egyenleit egyenlővé téve nullával:

$$f_1(\bar{n}, \bar{u}) = k \cdot \bar{n}_5 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_1) - k \cdot \bar{n}_1 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_2) + \bar{u}_1 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_1) = 0, \quad (45a)$$

$$f_2(\bar{n}, \bar{u}) = k \cdot \bar{n}_1 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_2) - k \cdot \bar{n}_2 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_3) = 0, \quad (45b)$$

$$f_3(\bar{n}, \bar{u}) = k \cdot \bar{n}_2 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_3) - k \cdot \bar{n}_3 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_4) = 0, \quad (45c)$$

$$f_4(\bar{n}, \bar{u}) = k \cdot \bar{n}_3 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_4) - k \cdot \bar{n}_4 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_5) - \bar{u}_2 \cdot \bar{n}_4 = 0, \quad (45d)$$

$$f_5(\bar{n}, \bar{u}) = k \cdot \bar{n}_4 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_5) - k \cdot \bar{n}_5 \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_1) = 0. \quad (45e)$$

Az egyensúlyi pontok a (45) egyenletrendszer megoldását követően:

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} \bar{n}_1 \\ \bar{n}_2 \\ \bar{n}_3 \\ \bar{n}_4 \\ \bar{n}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2165 \\ 0.1497 \\ 0.1138 \\ 0.0772 \\ 0.0047 \end{bmatrix} \quad (46)$$

A (45) egyenletek bal oldalát linearizáltam az n állapotok szerint, így megkaptam a lineáris állapottér modell rendszer mátrixát:

$$A = \begin{bmatrix} -k \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_2) - \bar{u}_1 & k \cdot \bar{n}_1 & 0 & 0 & k \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_1) \\ k \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_2) & -k \cdot (\bar{n}_1 + \rho_{max} - \bar{n}_3) & k \cdot \bar{n}_2 & 0 & 0 \\ 0 & k \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_3) & -k \cdot (\bar{n}_2 + \rho_{max} - \bar{n}_4) & k \cdot \bar{n}_3 & 0 \\ 0 & 0 & k \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_4) & -k \cdot (\bar{n}_3 + \rho_{max} - \bar{n}_5) - \bar{u}_2 & k \cdot \bar{n}_4 \\ k \cdot \bar{n}_5 & 0 & 0 & k \cdot (\rho_{max} - \bar{n}_5) & -k \cdot (\bar{n}_4 + \rho_{max} - \bar{n}_1) \end{bmatrix}$$

A (45) egyenletek bal oldalát linearizáltam az u állapotok szerint, így megkaptam a lineáris állapottér modell bemeneti mátrixát:

$$B = \begin{bmatrix} \rho_{max} - \bar{n}_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\bar{n}_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

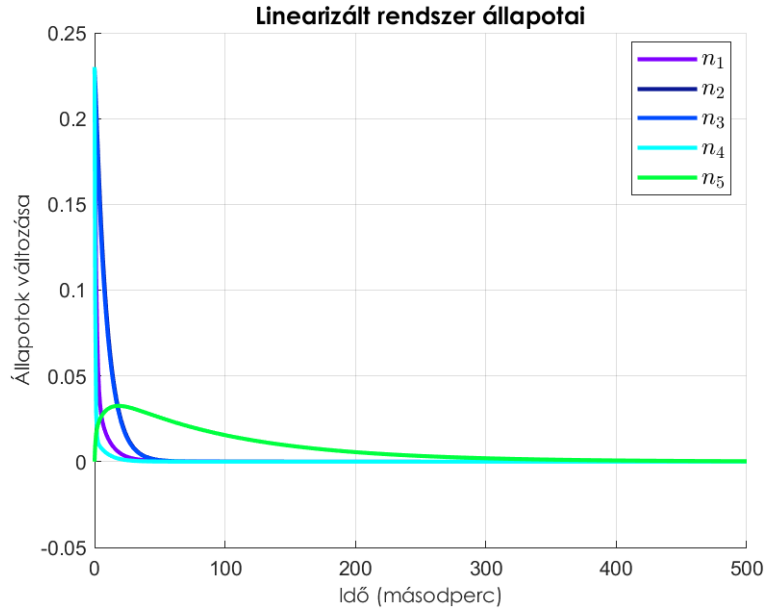
Linearizált rendszer

A lineáris állapottér modellt a 2.4. szakasz alapján írtam fel. Az állapot egyenletet a nemlineáris rendszer linearizálásánál kapott A és B mátrixokkal írtam fel, ahol a kapott mátrix állapotai helyére az egyensúlyi pontok értékeit helyettesítettem be. A kimeneti egyenlethez definiáltam egy C illetve egy D mátrixot.

$$\dot{n}(t) = An(t) + Bu(t) = \begin{bmatrix} -0.7821 & 0.1170 & 0 & 0 & 0.0079 \\ 0.0497 & -0.1944 & 0.0753 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0774 & -0.1975 & 0.0476 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1222 & -2.1402 & 0.0028 \\ 0.0324 & 0 & 0 & 0.0926 & -0.0107 \end{bmatrix} n(t) + \begin{bmatrix} 0.0146 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.0051 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = Cn(t) + Du(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} n(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

A lineáris modell állapotainak a trajektóriái a 33. ábrán láthatóak. A lineáris modell szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam. A lineáris modell állapotainak a kezdeti értékeit a (44) kezdeti értékeknek választottam meg.



33. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt lineáris állapottrajektóriák.

A stabilitás megvizsgálásához kiírtam az A rendszer mátrix sajátértékeit, amelyek:

$$\lambda_1 = -2.1433, \lambda_2 = -0.7924, \lambda_3 = -0.2653, \lambda_4 = -0.1138, \lambda_5 = -0.0102.$$

Mivel az A rendszer mátrix minden sajátértékének a valós része negatív, így a lineáris rendszer aszimptotikusan stabil.

A lineáris modell szimulációját elkészítettem Simulinkben, amely megegyezik a 10. ábrán látható modellel.

Lineáris rendszer állapotainak becslése

A lineáris rendszer állapotainak a becslését a 2.5.1. szakasz alapján készítettem el. A lineáris állapottér modell állapotbecslésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a megfigyelhetőségi mátrix rangja teljes legyen. A Matlab *obsv* parancsával megkaptam a megfigyelhetőségi mátrixot:

$$\mathcal{O}_5 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1222 & -2.1402 & 0.0028 \\ 0.0001 & 0.0095 & -0.2857 & 4.5867 & -0.0060 \\ 0.0002 & 0.0239 & 0.6177 & -9.8307 & 0.0128 \\ -0.0009 & 0.0525 & -1.3253 & 21.0706 & -0.0275 \end{bmatrix}$$

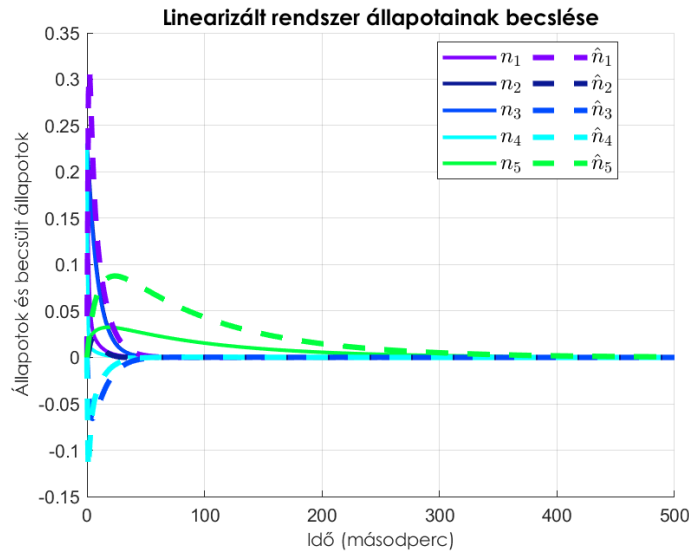
Ezután a Matlab *rang* parancsával megkaptam, hogy a megfigyelhetőségi mátrix rangja teljes, azaz egyenlő az állapotok számával, így a lineáris rendszer megfigyelhető. Megválasztottam az L erősítő mátrix pólusait:

$$\lambda_1 = -0.62, \lambda_2 = -0.78, \lambda_3 = -0.2, \lambda_4 = -0.1, \lambda_5 = -0.011.$$

A pólusok megválasztása után a Matlab *place* parancsával megkaptam az L erősítési mátrix értékeit:

$$L = \begin{bmatrix} 2.0362 \\ -0.0192 \\ -0.1712 \\ -1.6140 \\ 0.0858 \end{bmatrix}$$

A lineáris modell és a lineáris állapotbecslő szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam. A lineáris modell állapotainak a kezdeti értékeit a (44) kezdeti értékeknek, a becslt állapotok kezdeti értékeit minden állapotnál nullának választottam meg. A lineáris állapotbecslés a 34. ábrán látható.

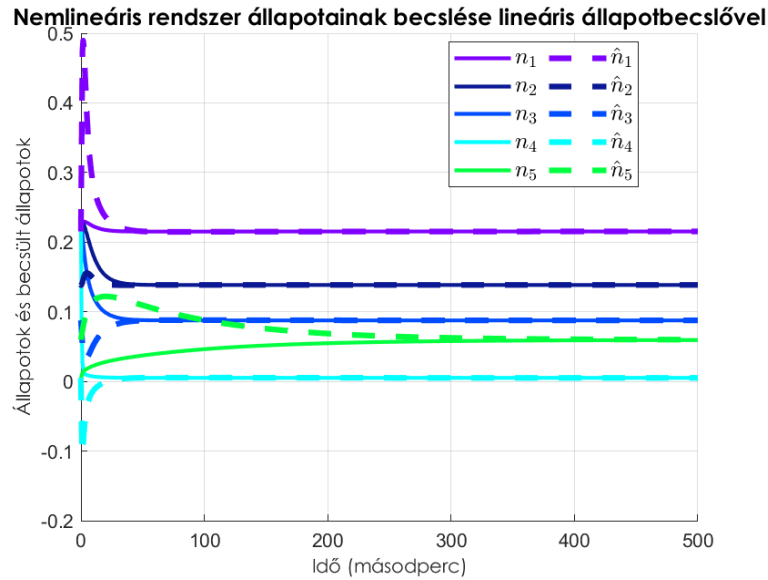


34. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt lineáris és becslt állapottrajektóriák.

A lineáris állapotbecslő szimulációját elkészítettem Simulinkben is, amely megegyezik a 12. ábrán látható modellel.

Nemlineáris rendszer állapotainak becslése lineáris állapotbecslővel

A nemlineáris rendszer lineáris állapotbecslővel történő becsléséhez először a lineáris állapotbecslő állapot egyenletében lévő hibajelek különbségéből kivontam a (46) egyensúlyi pontok negyedik elemének értékét, mivel a C kimeneti mátrixot úgy választottam meg, hogy a negyedik állapotot mérem. Ezután a lineáris becslt értékekhez hozzáadtam a (40) egyensúlyi pontokat. A nemlineáris modell és a nemlineáris modell lineáris állapotbecslővel történő szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam. A nemlineáris modell állapotainak a kezdeti értékeit (44) kezdeti értékeinek, a becslt állapotok kezdeti értékeit pedig minden állapotnál nullának választottam meg. A nemlineáris rendszer állapotainak lineáris becslése a 35. ábrán látható.

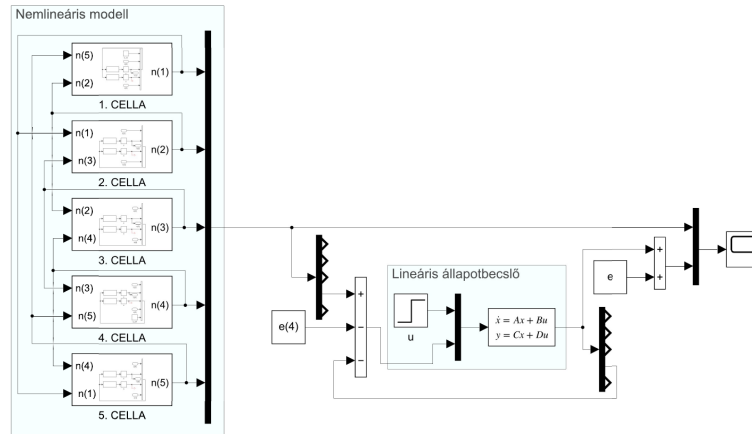


35. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt nemlineáris és lineárisan becslt állapottrajektóriák.

A 35. ábrán látható, hogy a lineáris becslővel becslt értékek a megfelelő értékekhez konvergálnak, de bizonyos állapotoknál nem kívánatos túllendülések fordulnak elő. A cellák számának a növelésével a lineárisan becslt állapotoknál tapasztalt túllendülések is egyre nagyobbak lesznek.

A nemlineáris modell lineáris állapotbecslésének a Simulink modellje a 36. ábrán látható. Ehhez a 31. ábrán lévő modellt alakítottam át úgy, hogy az alrendszerekben csak a járművek állapotait számolom ki. A lineáris becslt állapotokhoz a Simulink állapotterrendszer blokkját használtam, amelynek a bemenete egy lépés függvény és a nemlineáris rendszer utolsó állapotának az értéke, amelyből ki van vonva az egyensúlyi pont negyedik elemének az értéke és a becslt érték visszacsatolt értéke. A becslt értékekhez egy

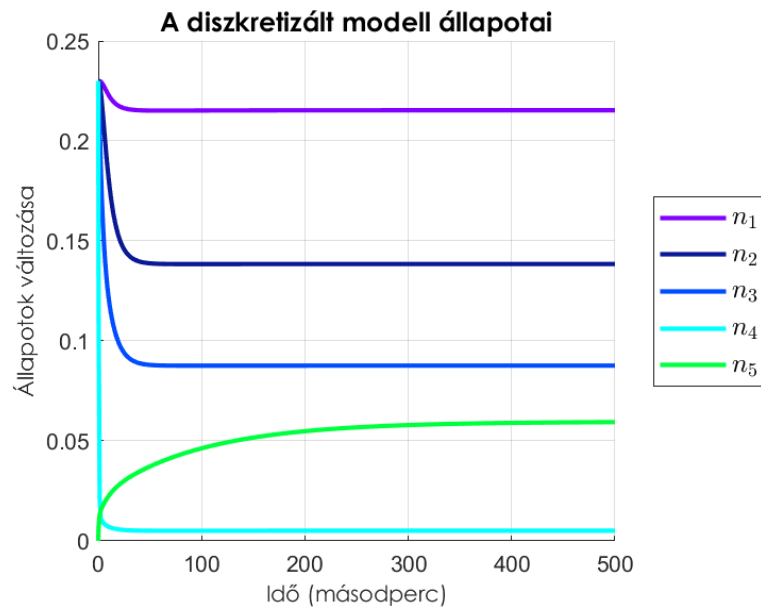
konstans blokkban hozzá vannak adva az egyensúlyi pontok, így megkapjuk a becsült értékeket.



36. ábra. A nemlineáris Forgalmi Kinetikus Áramlási modell lineáris állapotbecslésének a Simulink modellje.

Nemlineáris rendszer állapotainak becslése kiterjesztett Kálmán-szűrővel

A Forgalmi Kinetikus Áramlási modell állapotainak a becsléséhez először diszkrétizáltam a folytonos rendszert, amely a 37. ábrán látható. A diszkrétizáláshoz a 2.3.1. szakaszban lévő explicit Euler-módszert használtam. A lépésközt $h = 0.01$ választottam meg.



37. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt diszkrét állapottrajektóriák.

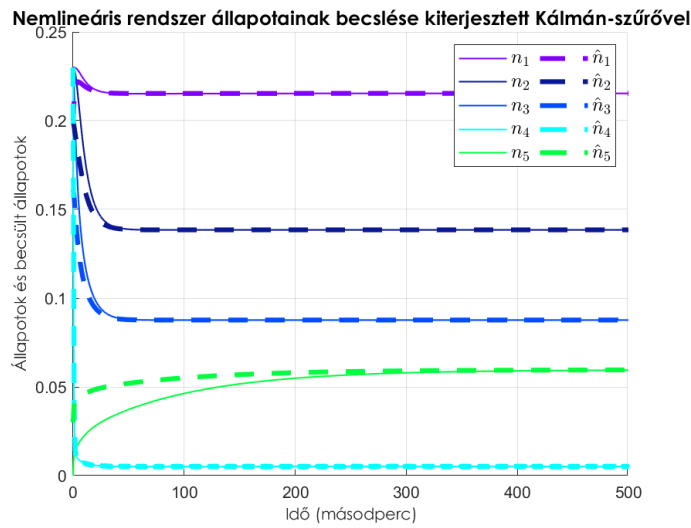
Miután elvégeztem a modell diszkretizálását megválasztottam a becsült állapotok kezdeti értékeit:

$$\hat{n}(0) = \begin{bmatrix} \hat{n}_1(0) \\ \hat{n}_2(0) \\ \hat{n}_3(0) \\ \hat{n}_4(0) \\ \hat{n}_5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.16 \\ 0.23 \\ 0.03 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Mivel a 3.2.1. szakaszban már kiszámoltam az (46) egyensúlyi pontokat, így ezeket fel tudtam használni a becslések kezdeti értékeinél. Mivel a negyedik állapotot mérem, így annak a kezdeti értéke megegyezik a nemlineáris modell kezdeti értékével. Az egyenletrendszer Taylor-sorba fejtésével elkészítettem az A Jacobi-mátrixot, amelybe be lehet helyettesíteni minden iterációban a megfelelő becsült állapot értékeit. Mivel a negyedik állapotot mértem és a többi állapotot becsültem, így a mérési függvény $h = [n_4]$. Mivel a h mérési függvény a negyedik állapotot tartalmazza, így a h x -hez viszonyított H Jacobi-mátrixa $H = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$. A becsült hibakovariancia mátrixot $P = 0.001 \cdot I_5$ választottam meg. A jobb teljesítményű szűrés érdekében a hangolási paramétereket következőképpen választottam meg:

- A folyamat és mérési zaj: $w = 0.1$, $v = 10^{-4}$
- A folyamat és mérési zaj kovariancia mátrixa: $Q = w \cdot I_5$, $R = v$

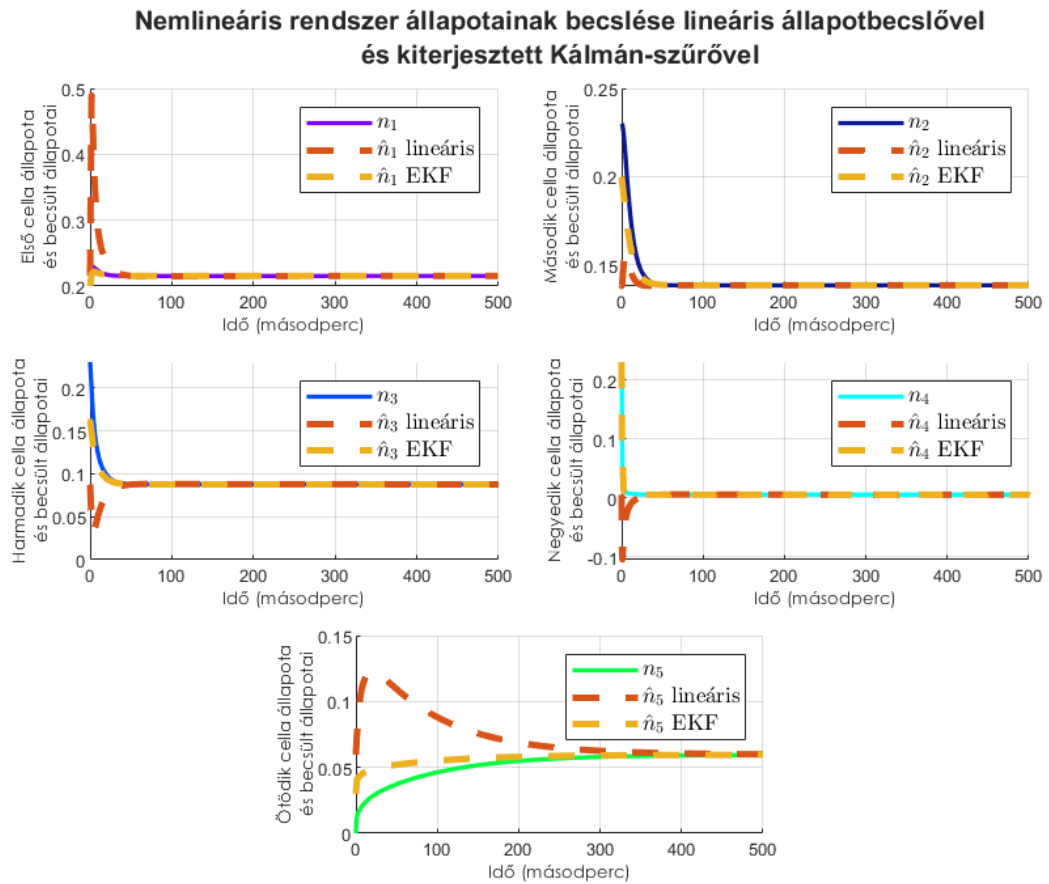
A kiterjesztett Kálmán-szűrő algoritmusában először behelyettesítettem az A Jacobi-mátrixba az állapotbecslési értékeket, majd elvégeztem a predikciós lépéseket, ahol az állapotbecslés kiszámításánál alkalmaztam az Euler-módszert. Elvégeztem a frissítési lépéseket, ahol kiszámoltam a Kálmán-erősítési mátrixot. Minden k időpillanatban becsült állapotoknak az értékei a 38. ábrán láthatóak.



38. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt nemlineáris és becsült állapottrajektóriák.

Az állapotbecslések összehasonlítása

Összehasonlítottam állapotonként, hogy a nemlineáris rendszer lineáris és kiterjesztett Kálmán-szűrővel történő állapotbecslés, hogyan teljesít egymáshoz képest, amely állapotonkénti összehasonlításnak szimulációja a 39. ábrán látható. Látható, hogy a kiterjesztett Kálmán-szűrővel becsült értékek hamarabb konvergál a megfelelő értékekhez, míg a lineáris becsült állapotoknál nem kívánt túllendülések lépnek fel, ami miatt minden állapotnál lassabb a konvergencia gyorsasága. A kiterjesztett Kálmán-szűrő azért teljesít ilyen jól, mivel a rendszer nemlineáris függvényekkel rendelkezik.



39. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt nemlineáris és becsült állapottrajektóriák.

Gyűrű modell állapotainak szabályozása

A 30. ábrán látható, hogy az egyes állapotok lassan konvergálnak a megfelelő értékekhez. A gyűrű modell állapotainak a szabályozásával azt szeretnénk elérni, hogy az állapotok gyorsabban konvergáljanak a megfelelő értékekhez. A gyűrű modell szabályozásának a vizsgálatához és szimulálásához a (43) egyenletrendszert, a 1. táblázatban definiált értékeket és a (44) kezdeti értékeket használtam fel.

A nemlineáris rendszer lineáris szabályozásához szükség van az egyensúlyi pontokra, a rendszer mátrixra és a bemeneti mátrixra. Az egyensúlyi pontok megegyeznek a (46) egyensúlyi pontokkal és az A és B mátrixok megegyeznek a 3.2.1. szakasz állapot egyenletében definiált mátrixok értékeivel.

A forgalmi dugó modellhez tartozó további szimulációkat a járművek számára rendelkezésre álló szabad helyek állapotai nélkül végeztem el.

Pólusáthelyezéssel szabályozás

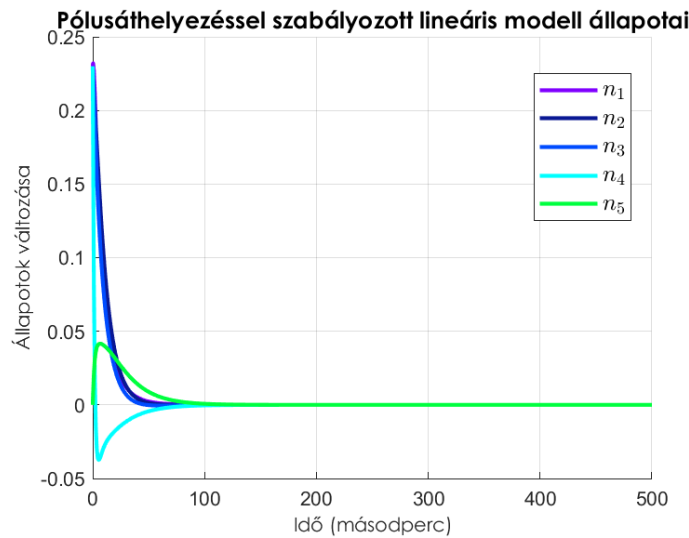
A lineáris pólusáthelyezést a 2.6.1. szakasz alapján végeztem el. Először megválasztottam a K erősítési mátrix pólusait:

$$\lambda_1 = -0.1, \lambda_2 = -0.49, \lambda_3 = -0.51, \lambda_4 = -0.52, \lambda_5 = -0.0511.$$

A pólusok megválasztása után a Matlab *place* parancsával megkaptam az K erősítési mátrix értékeit:

$$K = \begin{bmatrix} -15.7983 & 20.2651 & -43.0678 & -10.4528 & -15.5437 \\ 14.6523 & 86.2363 & -157.3771 & 277.9264 & -83.7924 \end{bmatrix}.$$

A lineáris szabályozási modell szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam, amely a 40. ábrán látható.



40. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt lineárisan szabályozott állapottrajektóriák.

A lineáris szabályozó Simulink modellje a megegyezik a 20. ábrán látható modellel.

A nemlineáris modell lineáris szabályozásához a (43) differenciálegyenlet rendszert alakítottam át:

$$\dot{n}_1 = k \cdot n_5 \cdot (\rho_{max} - n_1) - k \cdot n_1 \cdot (\rho_{max} - n_2) + (k_{on} + u_1) \cdot (\rho_{max} - n_1), \quad (48a)$$

$$\dot{n}_2 = k \cdot n_1 \cdot (\rho_{max} - n_2) - k \cdot n_2 \cdot (\rho_{max} - n_3), \quad (48b)$$

$$\dot{n}_3 = k \cdot n_2 \cdot (\rho_{max} - n_3) - k \cdot n_3 \cdot (\rho_{max} - n_4), \quad (48c)$$

$$\dot{n}_4 = k \cdot n_3 \cdot (\rho_{max} - n_4) - k \cdot n_4 \cdot (\rho_{max} - n_5) - (k_{off} + u_2) \cdot n_4, \quad (48d)$$

$$\dot{n}_5 = k \cdot n_4 \cdot (\rho_{max} - n_5) - k \cdot n_5 \cdot (\rho_{max} - n_1). \quad (48e)$$

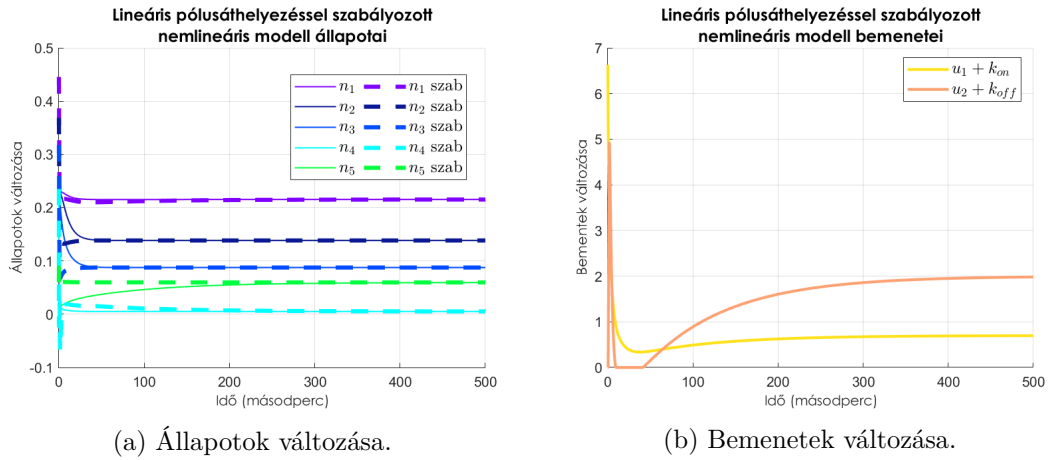
ahol

$$u_1 = -K_1 \cdot (n - \bar{n}),$$

$$u_2 = -K_2 \cdot (n - \bar{n}).$$

A $k_{on} + u_1$ és a $k_{off} + u_2$ értékét 0-nak választottam meg, ha negatív értéket vett fel.

A lineáris szabályozott nemlineáris modell állapotainak változása a 41a. és a bemeneteinek a változása a 41b. ábrán láthatóak.



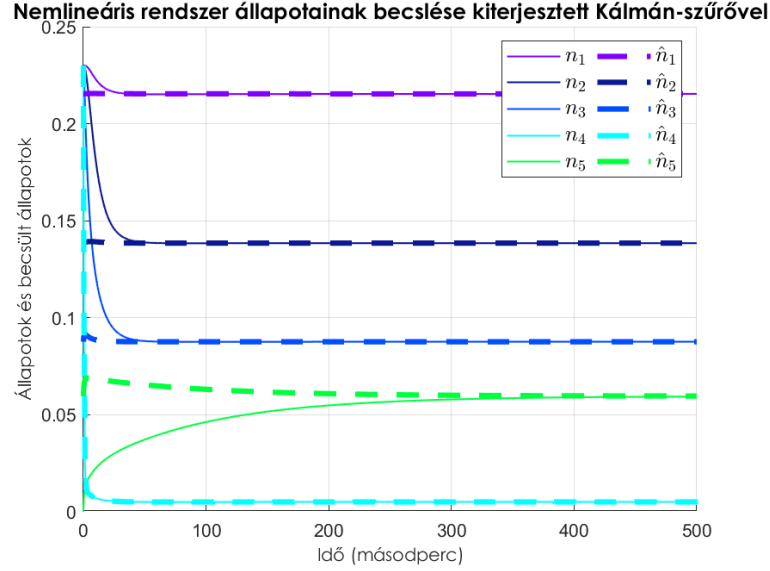
41. ábra. A lineárisan szabályozott nemlineáris modell bemeneteinek változása és állapottrajektóriái.

Ahhoz, hogy a becsült állapotokat szabályozhassam, először diszkrétizáltam a folytonos nemlineáris modellt. Miután elvégeztem a modell diszkrétizálását megválasztottam a becsült állapotok kezdeti értékeit, amelynek a negyedik értéken kívüli értékei megegyeznek a (46) egyensúlyi pont értékeivel és a negyedik értéke pedig az eredeti kezdeti értékek negyedik értékével. A becsült hibakovariancia mátrixot $P = 10^{-3} \cdot I_5$ választottam meg.

A jobb teljesítményű szűrés érdekében a hangolási paramétereket következőképpen választottam meg:

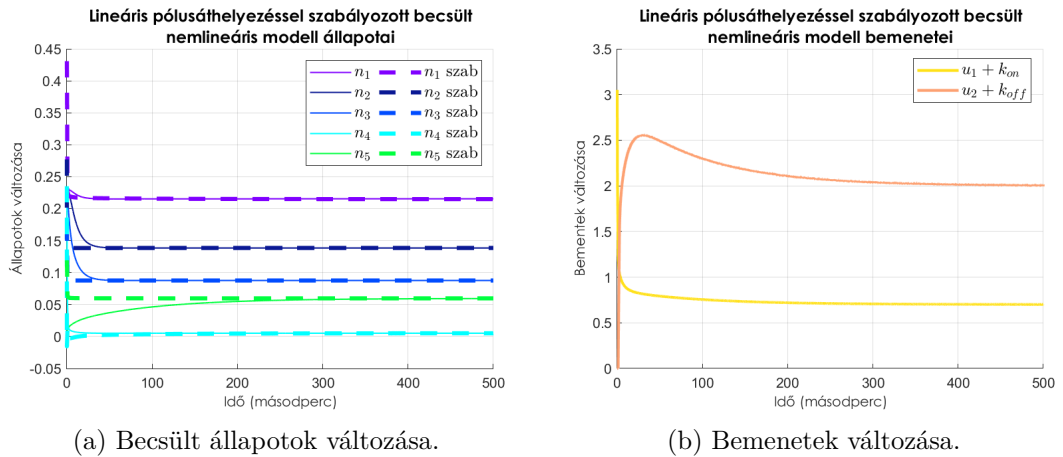
- A folyamat és mérési zaj: $w = 0$, $v = 10^{-5}$
- A folyamat és mérési zaj kovariancia mátrixa: $Q = w \cdot I_5$, $R = v$

A kiterjesztett Kálmán-szűrő algoritmusának szimulálása a 42. ábrán látható.



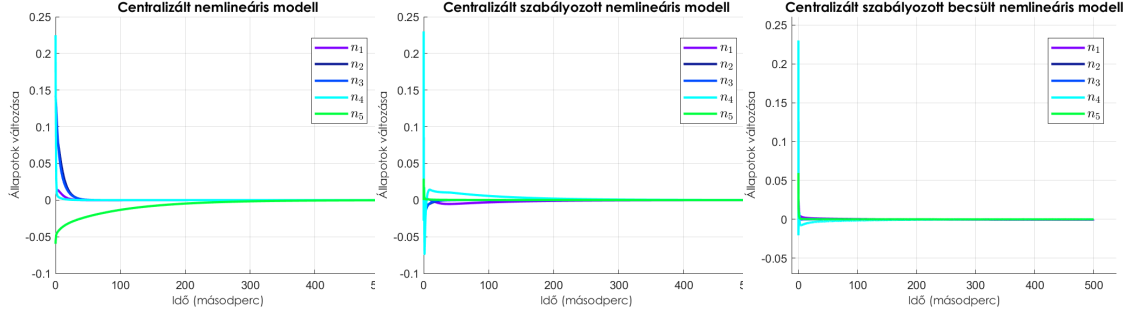
42. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt nemlineáris és becült állapottrajektóriák.

A kiterjesztett Kálmán-szűrővel becült állapotok lineáris szabályozásához a (48) egyenletrendszerbe helyettesítettem be a becült állapotok értékeit. A lineárisan szabályozott nemlineáris modell becült állapotainak változása a 43a. és a bemeneteinek a változása a 43b. ábrán láthatóak.



43. ábra. A lineárisan szabályozott becült nemlineáris modell bemeneteinek változása és állapottrajektóriái.

Miután elvégeztem a szabályozásokat megvizsgáltam, hogy a szabályozás esetén valóban jobb lett-e a teljesítmény, azaz az állapotok hamarabb konvergálnak az állandósult állapotbeli értékekhez. Ehhez centralizáltam a nemlineáris, a szabályozott és a szabályozott becsült modell állapotait, majd kiszámoltam a Matlab *trapz* függvényével az állapotok alatt lévő területet. Az centralizált állapotok a 44. ábrán láthatóak. A különböző



44. ábra. Nemlineáris, szabályozott és a szabályozott becsült modell centralizált állapotai.

centralizált modellek állapotainak összesített teljesítménye:

- Centralizált nemlineáris modell: 6.2013
- Centralizált szabályozott nemlineáris modell: 2.4917
- Centralizált szabályozott becsült nemlineáris modell: 0.7550

Látható, hogy a szabályozott modellek esetében valóban javul a teljesítmény az eredeti nemlineáris modellhez képest.

Lineáris kvadratikus szabályozás

A lineáris kvadratikus szabályozást a 2.6.2. szakasz alapján végeztem el. Először megválasztottam a Q és R pozitív-definit mátrixokat:

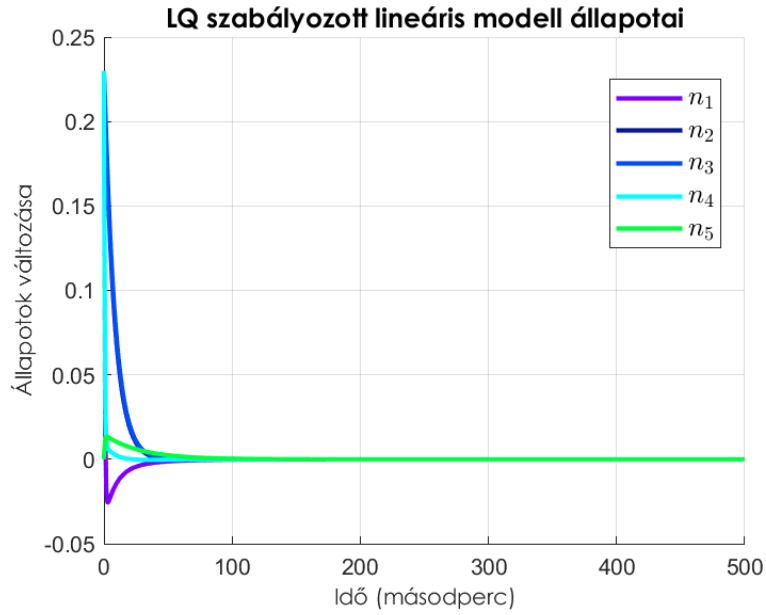
$$Q = 1000 \cdot I_5,$$

$$R = 0.1 \cdot I_2.$$

A pólusok megválasztása után a Matlab *lqr* parancsával megkaptam a K erősítési mátrix értékei:

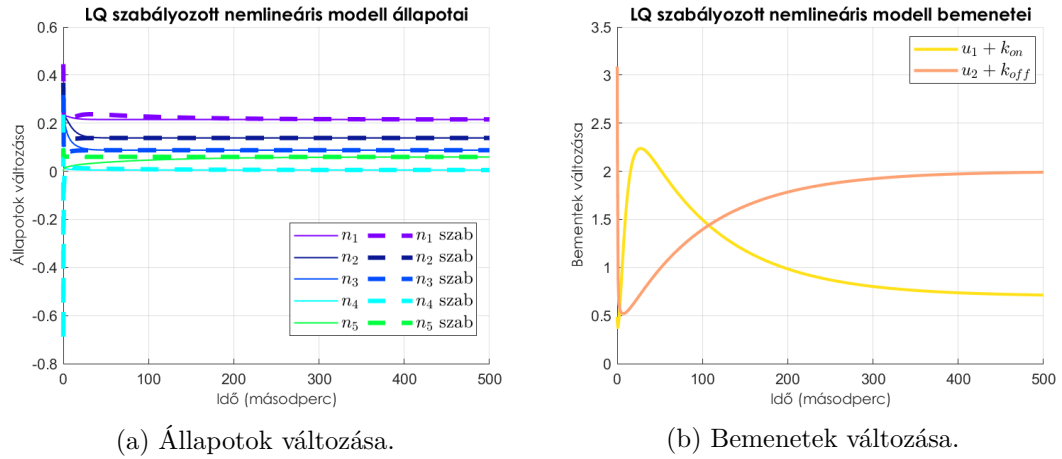
$$K = \begin{bmatrix} 61.5274 & 15.4754 & 5.8341 & 2.5895 & 58.9748 \\ -0.9063 & -0.9823 & -4.1696 & -13.7812 & -45.3873 \end{bmatrix}.$$

A lineáris kvadratikus modell szimulálásához az ode45 differenciálegyenlet megoldó függvényt használtam, amely a 45. ábrán látható.



45. ábra. A Matlab plot parancsával kirajzolt lineáris kvadratikus szabályozóval szabályozott állapottrajektóriák.

A lineáris kvadratikus szabályozó Simulink modellje, megegyezik a 20. ábrán látható lineáris szabályozó modellel. A nemlineáris modell lineáris kvadratikus szabályozásához a differenciálegyenlet rendszer megegyezik a (48) differenciálegyenlet rendszerrel. A lineáris kvadratikus szabályozott nemlineáris modell állapotainak változása a 46a. és a bemeneteinek a változása a 46b. ábrán láthatóak.

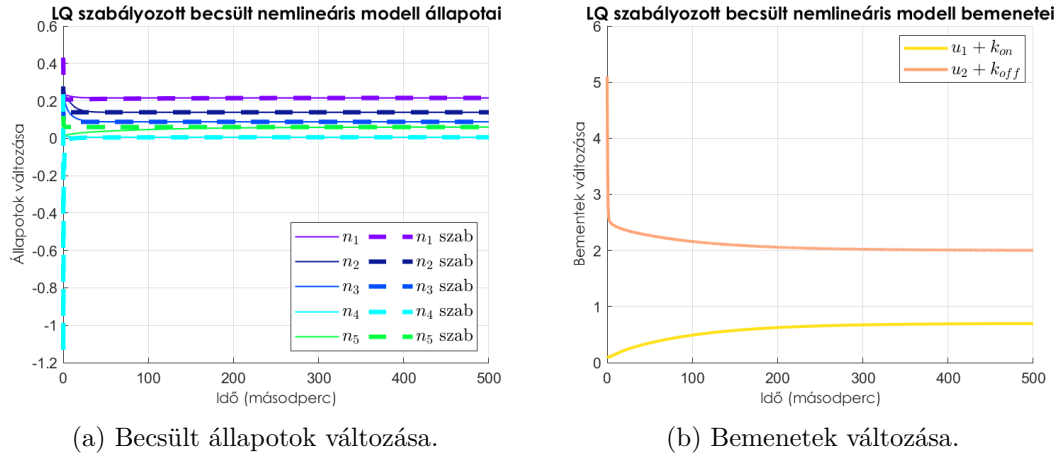


(a) Állapotok változása.

(b) Bemenetek változása.

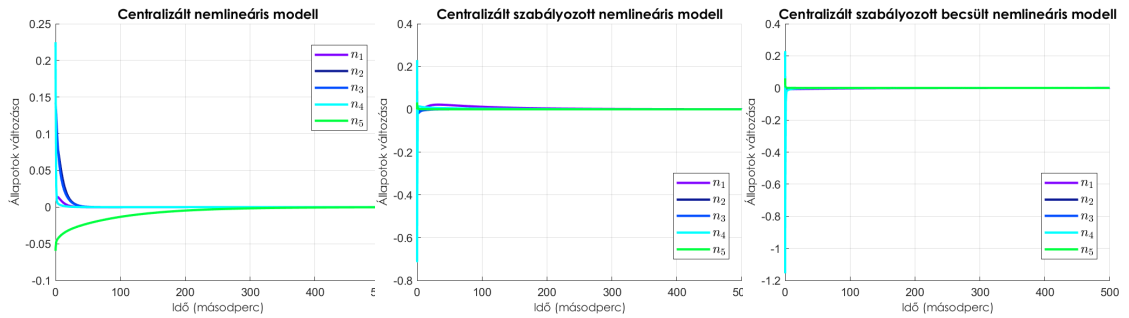
46. ábra. A lineárisan szabályozott nemlineáris modell bemeneteinek változása és állapottrajektóriái.

A modell diszkretizálása és kiterjesztett Kálmán-szűrővel történő becslése megegyezik a pólusát helyezésnél lévő becslés eredményeivel. A kiterjesztett Kálmán-szűrővel becsült állapotok lineáris kvadratikus szabályozásához a (48) egyenletrendszerbe helyettesítettem be a becsült állapot értékeket. A lineáris kvadratikus szabályozott nemlineáris modell becsült állapotainak változása a 47a. és a bemeneteinek a változása a 47b. ábrán láthatóak.



47. ábra. A lineáris kvadratikus szabályozott becült nemlineáris modell bemeneteinek változása és állapottrajektóriái.

Miután elvégeztem a szabályozásokat megvizsgáltam, hogy a szabályozás esetén valóban jobb lett-e a teljesítmény, azaz az állapotok hamarabb konvergálnak az állandósult állapotbeli értékekhez. Ehhez centralizáltam a nemlineáris, a szabályozott és a szabályozott becült modell állapotait, majd kiszámoltam a Matlab *trapz* függvényével az állapotok alatt lévő területet. Az centralizált állapotok a 48. ábrán láthatóak.



48. ábra. Nemlineáris, szabályozott és a szabályozott becült modell centralizált állapotai.

A különböző centralizált modellek állapotainak összesített teljesítménye:

- Centralizált nemlineáris modell: 6.2013
- Centralizált szabályozott nemlineáris modell: 4.0121
- Centralizált szabályozott becült nemlineáris modell: 1.6164

Látható, hogy a szabályozott modellek esetében valóban javul a teljesítmény az eredeti nemlineáris modellhez képest.

4. Összefoglalás

A kutatásom során sikerült megismernem a nemlineáris kompartmentális forgalmi kinetikus áramlási modellt és megvizsgálni az alapvető rendszer elméleti tulajdonságait.

Ehhez először megismerkedtem a kompartmentális rendszerekkel, áttekintve az alapvető fogalmait és tulajdonságait. Felírtam mindkét hálózati topológiára a nemlineáris differenciálegyenlet rendszert. A megfelelő paraméterek és kezdeti értékek megválasztását követően szimuláltam a modellt Matlab és Simulink környezetben is.

A nemlineáris modellen Jacobi-linearizációt végrehajtva, megkaptam a rendszer egyensúlyi pontjait és a lineáris rendszert leíró mátrixokat. A linearizálással kapott rendszer állapotait megbecsülve és ezeket a becslési értékeket felhasználva és eltolva az egyensúlyi pontokkal megbecsültem a nemlineáris rendszer állapotait. A nemlineáris rendszer lineáris állapotbecslésénél bizonyos állapotoknál nem kívánt túllendülések léptek fel, amely állapotok lassabban konvergáltak a megfelelő értékekhez. Az állapotok becslésnél azt tapasztaltam, hogy a megválasztott paraméterek mellett, a rendszert kilenc cellára tudom szimulálni úgy, hogy a becslt értékek még konvergálnak a megfelelő értékekhez, de ekkor a becslt állapotoknál a túllendülés mértéke többszörösére nőtt. Tíz cellára már numerikus okok miatt nem működött a becslés, mivel a megfigyelhetőségi mátrix már rosszul kondicionált lett. A nemlineáris rendszer állapotait megbecsültem kiterjesztett Kálmán-szűrővel is. Azt tapasztaltam, hogyha a becslt állapotokat kezdeti értékeit a linearizálásnál kiszámolt egyensúlyi pontokból indítom, akkor a becslt értékek nagyon gyorsan konvergálnak a megfelelő értékekhez. A két becslési módszert összehasonlítva a rendszer nemlineáris függvényei miatt a kiterjesztett Kálmán-szűrővel történő becslés jobban teljesít.

A lineáris pólusáthelyezéssel és a lineáris kvadratikus szabályozást sikerült alkalmazni a nemlineáris modell és a becslt modell állapotaira is. A nem szabályozott és a szabályozott modellek állapotait centralizálva és összeadva az állapotok alatt lévő területet, megkaptam a modellek teljesítményét. A cső és a gyűrű modell esetében is a szabályozott modell jobban teljesített a szabályozatlan modellekhez képest. Ha a becslt modell állapotait szabályoztam és erre értékeltem ki a teljesítményt, akkor látható, hogy a szabályozott becslt modell teljesítménye még a szabályozott modellnél is jobb.

Ez a rendszerosztály újnak számít a szakirodalomban, így becslési és szabályozási eredmények ehhez a rendszerosztályhoz még nincsenek. A működő kiterjesztett Kálmán-szűrővel történő becslés eredménye is újnak számít.

A kutatásomat az állapotbecslés elméleti tulajdonságainak a vizsgálatával szeretném folytatni. Látható, hogy a kísérletek során kijöttek a megfelelő eredmények, de szeretném megvizsgálni, hogy ez miért van így. Ezen kívül még komplexebb szabályozási feladatok vizsgálatával és szimulálásával szeretném folytatni a kutatásomat, például trajektória követéssel.

Hivatkozások

- [1] J. A. Jacquez és C. P. Simon, „Qualitative theory of compartmental systems”, *Siam Review*, 35. évf., 1. sz., 43–79. old., 1993.
- [2] W. M. Haddad, V. Chellaboina és Q. Hui, „Nonnegative and compartmental dynamical systems”, *Nonnegative and Compartmental Dynamical Systems*, Princeton University Press, 2010.
- [3] A. Packard, K. Poola és R. Horowitz, „Jacobian Linearizations, equilibrium points”, *Dynamic Systems and Feedback*, 170. évf., 2002.
- [4] E. Süli és D. F. Mayers, *An introduction to numerical analysis*. Cambridge university press, 2003.
- [5] L. Moysis, M. Tsiaousis, N. Charalampidis, M. Eliadou és I. Kafetzis, „An introduction to control theory applications with MATLAB”, 2015. DOI: 10.13140/RG, 2. évf., 2015.
- [6] K. Ogata és tsai., *Modern control engineering*. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2010, 5. köt.
- [7] G. Welch, G. Bishop és tsai., „An introduction to the Kalman filter”, 1995.
- [8] D. Simon, *Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons, 2006.
- [9] G. Lipták, M. Pereira, B. Kulcsár, M. Kovács és G. Szederkényi, „Traffic reaction model”, *arXiv preprint arXiv:2101.10190*, 2021.