

ELTE SEK

Szombathely

IK Savaria Műszaki Intézet



36. OTDK dolgozat

HALMAZÁBRÁIM SZEMLÉLTETÉSEI

30 ÉV AZ EULER-VEHN PIRAMIS

ÁRNYÉKÁBAN

1992 - 2022

Készítette:

Péchy Zoltán Péter

MSc. Technika 2. évfolyam, levelező tagozat

Fizikatanár

Külső konzulens:

Dr. Kallós Gábor

Egyetemi docens

Széchenyi Egyetem, Győr

Matematika és Számítástudományi Tanszék

Belső konzulens:

Pergelné Dr. Remete Eszter

Egyetemi adjunktus

ELTE PPK

Szombathelyi Pedagógiai és

Pszichológiai Intézet

Szekszárd, 2023. április 25-27.

Köszönetnyilvánítás

Dr. Kallós Gábornak, külső konzulensemnek megköszönöm a hat éve tartó együttműködést. Sokat tanultam és fejlődtem a közös munkánk közben. Szükség volt a kicsapongó gondolataim metszegetésére.

Pergelné Dr. Remete Eszter belső konzulensem támogatását is köszönöm.

Végül hálás vagyok **Tuzson Zoltán**, székelyudvarhelyi nyugalmazott líceumi matematikatanárnak, hogy lehetőségem volt publikálni a kolozsvári Matlapban a korábbi évek eredményeit. Reményt adott a folytatáshoz.

Köszönöm mindannyiuknak!

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés. A probléma bemutatása.....	4.
2. A kutatásaim rövid története	6.
3. Definíciók és fontos fogalmak. Analógia. Excel táblázat alkalmazása	9.
3.1 Venn-diagram definíció.....	9.
3.2 Analógia	10.
3.3 Szabályos háromszögek koncentrikus körre alakítása. Az általánosítás	11.
3.4 Vegyes forgásszimmetrikus Venn-diagram	11.
4. Egyszerűsített jelölésű metszet ábrák	12.
4.1 Három halmaz kölcsönös metszete	12.
4.2 Öt halmaz kölcsönös metszete.....	13.
5. Forgásszimmetrikus öt halmaz Venn–diagram, újítások	13.
5.1 Az első forgásszimmetrikus diagram	14.
5.2 Tengelyesen szimmetrikus alaphalmazok	15.
5.3 Végső alak	16.
5.4 Három és öt halmaz alkalmazása	18.
6. Forgásszimmetrikus Venn–diagram, újítások	19.
6.1 Hét halmaz.....	19.
6.2 Alkalmazások	21.
7. Térbeli, forgásszimmetrikus hat halmaz	22.
8. Térbeli, forgásszimmetrikus nyolc halmaz	26.
9. Lewis Carroll diagramok.....	28.
9.1 Két halmaz Carroll Venn-diagram	28.
9.2 Három halmaz Carroll Venn-diagram	29.
9.3 Négy halmaz Carroll Venn-diagram	29.
9.4 Öt halmaz poligon diagramok	29.
9.5 Négyzetekből felépülő poligon Venn-diagramok	29.
9.5.1 Hat halmaz poligon diagram.....	30.
9.5.2 Hét halmaz poligon diagram.....	32.
9.5.3 Alkalmazások	33.
10. Feladatok a halmazelméleti alapok tanításához	34.
10.1 Osztathóság hatodik és nyolcadik osztálynak, Carroll halmazok segítségével.....	34.
10.2 Osztathóság és a logikai szita alkalmazása kilencedikeseknek, C. halmazokkal	34.
11. Összefoglalás.....	37.
11.1 Eredményeim.....	37.
11.2 Összegzés	37.
11.3 További kutatási lehetőségeim	33.
12. Mellékletek.....	39.
13. Irodalomjegyzék.....	46.
14. Online	47.
15. Wikipédia online	47.

1. Bevezetés. A probléma bemutatása

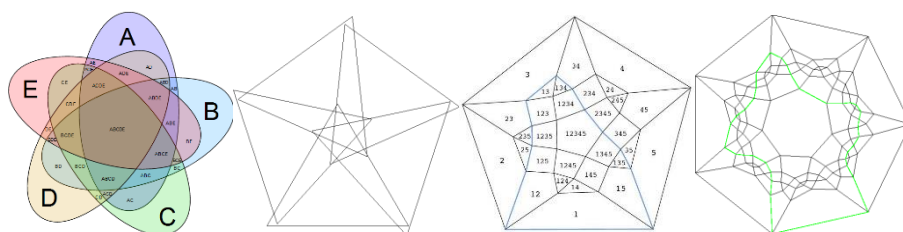
A halmazelméleti problémák, azon belül a halmazábrák, régóta foglalkoztatják a matematikusok érdeklődését. Sokan érezzük úgy, hogy iskolai tanulmányaink alapján lényegében szinte mindent tudunk már a halmazábrákról, hiszen nagyjából 1–2 hét alatt ugyanazokat az alapvető metszeteket tárgyalják. Ezért is érhet meglepetésként, ha belelapozunk néhány fontosabb áttekinthető könyvbe, amelyek összefoglalása a terület eredményeinek. Betekintést adok a halmazelmülethez köthető, felhasznált szakirodalomhoz. **Euler** (1768-1772). Munkássága nagyon termékeny volt a matematikában. Ezek közül egy ábrát felhasználtam, amelyen három koncentrikus kör szerepel (1.m). Egyik rendszerem erre épül. **Venn** (1881). Az eredeti forrásokhoz mentem vissza, utalva a hasonlóságokra is. **Carroll** (1886). Egy fejezetem a diagramjaival is foglalkozik. Lehet-e Venn-diagram definíciónak megfelelő ábrákat készíteni, a korabeli szerkesztésekből? **Henderson. D. W.** (1963). A szimmetrikusság visszahozatala a diagramokban, nagyon fontos lépés. Én csak forgásszimmetrikus alakzatokkal dolgozom. **Grünbaum** (1975). A definíció használata kritérium, csak az ennek megfelelő ábrák jöhetnek szóba. Alap tanulmánya a kutatóknak. **Edwards** (2004). Venn-diagram története, összefoglalása az eddig ismert, számottevő ábráknak. Összehasonlító kutatások elengedhetetlen eszköze, mely a tovább fejlődést elősegíti.

Ebben a dolgozatban alapvetően azzal foglalkozom, hogyan lehet a halmazokat Venn-diagramját egyre nagyobb n értékekhez kötni, megszerkeszteni. A feldolgozásnál fontosnak érzem, hogy bemutassam kutatásaim történetét. Sokszor rögzös volt ez az út, ahogy lépésről – lépésre megismerkedtem a terület egyes problémaival, szépségével. Kitérek arra is, hogyan inspirált az eredmények újabb és újabb vizsgálatokra, elemzésekre. Megfigyelésemből szerkesztések, állítások, bizonyítások és - reményeim szerint – hasznos gyakorlati alkalmazások születtek. Munkám során végig az a mottó vezérelt, hogyan lehet - főként minden részhalmazt – megjeleníteni? Ha meg lehet, miért lehet, ha nem, hogyan lehet esetleg másképp. A klasszikus Venn-diagramok mellett vizsgálom / vizsgáltam a

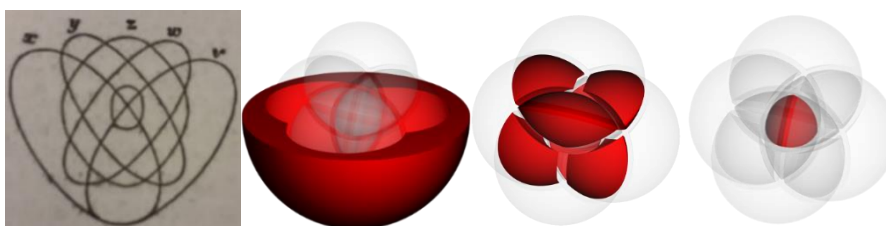
- térbeli diagramokat
- a nem kör, illetve ellipszis alapú diagramokat (pl.: gyűrű)
- a Carroll diagramokat
- a forgásszimmetriát
- Excel táblázat alkalmazását diagramok szerkesztésénél, adattárolóként is felhasználva

A dolgozatomban erősen törekedtem arra, hogy az időben és a megalkuvás tekintetében nagyon szétszórt eredményeket a logikai láncba szedve mutassam be. Emiatt lehetőleg tömbösítve

szerepelnek a definíciók, a történeti és személyes részek stb. A bevezető fejezet végén néhány ábrát mutatok be, amelyek reményeim szerint felkeltheti az Olvasó érdeklődéseit a témával kapcsolatban. Fontos, hogy helyes szerkesztés esetén minden lehetséges metszethalmaznak meg kell jelennie az ábrán. Venn ábrája jól szemlélteti, hogy négy, egymást kölcsönösen metsző körnél nem minden részhalmazt jeleníti meg. A szemben lévőknek nincs közös része (x, y-nak és w, z-nek) (2.m.). Minden részhalmazt megjelenítő ábrát, úgy lehet szerkeszteni, ha az előző három egymást kölcsönösen metsző halmazok minden részhalmazát metszi a következő halmaz. Többféleképpen lehet négy halmaz Venn-diagramot szerkeszteni, például Carroll téglalapokkal szemléltet. *Teljes indukcióval* bizonyítható, hogy nyolc téglalap metszete is Venn-diagramot alkothat (Tuzson. 2021.). Edwards teniszlabdán szemléltet. Az újabb halmaz eggyel több fogat tartalmaz ($n \leq 4$ esetén), az előző részhalmazokat *metszve*. (3.m., és 4.m.)



1. **ábra.** a) Ellipszisekkel (Grünbaum. 1975.), illetve háromszögekkel, b) Öt és hét halmaz (5)



2. **ábra.** a) Egy gyűrű felhasználásával (Venn. 1881. 107.), b) Térbeli Venn-diagram (2)

A gyűrű szerepe különösen fontos, ha figyelembe vesszük, hogy térbeli Venn-diagram szerkesztése még gyerekcipőben jár. A Carroll diagramoknál és a térbeli diagramoknál újabb alakzatok szerkeszthetők gyűrűk felhasználásával. Térbeli diagram: négy egymást metsző gömbbel, 2.b. Mivel a Venn-diagram halmazszám növelésével a részhalmazszámok exponenciálisan növekszenek (duplázódnak, a 2^n miatt), a szerkesztés gyorsan elbonyolódik. Ha azonban tekintek egy körlemezt, annak pontjait, akkor belátható, hogy megszámlálhatóan sok pontja van, amelynek megfeleltethetők egy részhalmaznak. Kérdés, léteznek-e, egyéb forgásszimmetrikus ábrázolások?

2. A kutatásaim rövid története

A dolgozatom címe, a tevékenységemet a legjobban kifejező, de egyben a szakmaiságot is közvetítő: Halmazábráim szemléltetései. 30 év az Euler-Venn piramis árnyékában 1992.-2022. A tartalmat az első szó tartalmazza, a hosszú ideig tartó küzdelmet pedig az időtartam. Fontos a lépcsőzetes felépítés ábráimnál (piramis). Euler egyik ábrája készített arra, hogy a koncentrikus körökkel készült ábrákat is tovább gondoljam (1.m.). Az időszakok megjelenítés, az azt követő hosszú kihagyással, azt is szemlélteti, hogy nem adtam fel végleg a szerkesztéseket. Az első, bő fél éves időszak (1992.09.–93.03.) után 2017-ig nem volt folytatás. A „30 év az Euler-Venn piramis árnyékában”, pedig azt jelképezi, hogy nem tudtam 24 évig szabadulni a problémától. Időről időre, újabb gondolatok bukkantak fel, amivel foglalkoznom kellett. Kíváncsiság vezérelt a szerkesztések elkezdésekor. Matematikai tanulmányaink során megismerkedünk a halmazelméleti alapokkal, szám-, és pontthalmazokkal. Értelmezzük a természetes számokat, majd kibővítjük egészszámokká. Pontokból építjük fel a pontthalmazokat. Ezeknek vannak elemeik, amelyek a közös tulajdonságaik miatt összetartoznak. Két vagy több halmaznak lehetnek közös elemei, ezek a metszetek. A 2.a ábrán szereplő négy ellipszis és egy eltorzított gyűrű alkalmazása Venn tollából különleges. A klasszikus Venn-diagram modell szerint adott egy kör, amely két részre osztja a síkot, belső és külső pontokra. Ezeket elmetszve egy következővel, maximum két metszéspont keletkezik. A körvonal nem tartozik az alakzathoz. Négy *diszjunkt* részre bontja a síkot. Folytatva egy harmadikkal úgy, hogy minden korábbi részhalmaz metszve legyen (Venn. 1880, 1881). Nyolc különböző rész keletkezik. Ha $n = 3$, akkor $8 = 2^3$, illetve, ha $n = 4$, akkor $16 = 2^4$. 1992-ben úgy kezdtem el a kutatásomat, hogy csak a Dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet tankönyvben szerepelt rajzokra támaszkodhattam. Az Internet megjelenése megsokszorozta az újabb eredményeket, amelyeket a Word, Excel és a PowerPoint is felgyorsított. Első ábráim papírra készültek. Ezeket is bemutatom a végleges változatok előtt (a fejlődést is kell látni). Több tényező együttesen elbizonytalanított. Például, hogy az *exponenciális növekedés* gyors, illetve, hogy négy egymást metsző körrel már nem lehet Venn-diagramot létrehozni. 2017 augusztusában készültek el az első hetes diagramjaim, amelyek forgásszimmetrikusak. 2022-re készült el a közel teljes kéziratom. Az első a No.1. közepén egy szabályos ötszöggel. Így forgásszimmetrikusak, egybevágók, de nem tengelyesen tükrösek, amely később alapkövetelmény lett. No.2. és a későbbi gépi szerkesztések. Az No.3. egy újabb eredmény a sokszögesítés, öt darab szabályos sokszöggel (5.m.). A halmazalakok egybevágók, de nem tengelyesen szimmetrikusak (cél, a minél több geometriai transzformáció). **Korábban, csak a**

létezését tudtam bizonyítani, hogy másik út is létezik a Venn-diagram szerkesztéseknél, továbblépni nem sikerült. Egy másik szemléltetés, hogyan lehet elhelyezni szabályos sokszögekben a Venn-diagram definíció teljesülésével a részhalmazokat. (1. cd.) Az eredeti probléma, hogy négy egymást, kölcsönösen metsző körök nem alkotnak Venn-diagramot, mert a szemben lévő köröknek nincs közös része. Venn publikált négy ellipszissel ábrát (2.a ábra), ahol már minden részhalmaz megjelenik, legfeljebb egyszer. A megoldás kulcsa, hogy minden következő halmazzal, az előző részhalmazokat kölcsönösen egyértelműen el kell metszeni. Ekkor keletkezik egy $(n+1)$ halmazból álló diagram, teljesítve a definíciót. Négy különböző rendszert dolgoztam ki, hozzáértve az Excel táblázatot is. $n \leq 7$ esetén az ábrák elbonyolódnak, ezt hidaltam át. A fejlődés folyamatos volt, bár időben elhúzódó.

Korábban létező ábrák. A Venn-diagramok történetében (Edwards. 2004.) teljes áttekintést ad. Publikációk jelentek meg a forgásszimmetrikus öt és hét halmazokkal. Ezek tartalmi lényege, hogy különböző síkidomok metszetét veszik. Így jönnek létre a Venn-diagramok. A gépi szerkesztések megjelenésével azután egyre sokasodó ábrák lelhetők fel az online felületeken. Némelyek szemre is tetszetősek. Egyre több publikációban (orvosi, ipar – raktározás, marketing) találkozni felhasznált halmazábrákkal. Egyre több betegség, egyre több bővülő kereslet, amelyeket össze kell hasonlítani és raktározni (adatokra gondolok). Az egyes rendszerek, n -re vonatkozó halmazszámok között kevés az általánosíthatóság (kivétel, Edwards teniszlabdán ábrái, amelyek *nem forgásszimmetrikusak*). A Carroll diagramok ugyan lehetnek forgásszimmetrikusak, de nagyobb n -ekre nézve, nem Venn-diagram. A 11 és 13 halmazra is készültek alkotások, amelyek a részhalmazszám exponenciális növekedése miatt, nagyon összetettek.

Szerkesztéseimet követően, az újdonságok. Kizárólag forgásszimmetrikus halmazalakokkal foglalkozom, ami azt jelenti, hogy egy szűkebb területet kiválasztottam kutatásom tárgyává. Ezek jobban kitűnnek a sokaság közül. Minden esetben a Venn-diagram definíció volt a sarokkő, amelytől kiindultam. Sok tényezőnek kell egyszerre megfelelni. A legfontosabb, az analógia keresése, hogyan lehet áttérni a klasszikusokról az új irányzatra. Kellett egy fogódzó az elinduláshoz. Majd a különböző rendszereim egymásba történő átalakítása következett. Ezek a görbevonalak közül a csak koncentrikus körökkel és szakaszokkal szerkesztettek. A szabályos sokszögekből felépülők, amikor az oldalfelezőket összekötve újabb n -szöget hozok létre, és így tovább, a szükséges részhalmazszámig tart az eljárás. Ennek a kettőnek van egy közös ábrája is, amikor a halmazára közepe sokszögből áll, a külső részek pedig koncentrikus körökből. *Érdekeség, hogy az első 1992-es ábrán ilyen volt (az eredeti dokumentum, a mellélkelteknél található sorszámozva).* Ebből alakultak ki

folyamatosan a szabályos sokszögekből és a körökből állók is (az volt a prototípus). A leíró részt még írógéppel rögzítettem! Internet használat akkor még nem volt. A keresett n-halmazszámokra vonatkozóan, csak az ötösökkel foglalkoztam. Négyig ismert volt, újat nem lehetett mutatni ezen a területen. Hattal foglalkoztam, de azzal szembesültem, hogy a szemben fekvő halmazoknak nem jelenik meg metszete. A hetest papírlapon modellezni, kivihetetlen vállalkozásnak tűnt. Újra kezdtem a szerkesztéseket, számítógéppel, programokkal. Elkészültek az első hetesek, de az ábrák még lyukasak voltak (szitaszerű). Nem voltak geometriai transzformációk sem a kritériumok között. Egyre több matematikai leírást akartam az ábráimhoz. Újszerű és nagy segítséget jelentet az Excel használata a hetes rajzoknál. $128 = 2^7$, ennyi szövegdobozt kellett mozgatni a gépi szerkesztésekor. Utána csak a számsorokat tartalmazó sorokat kellett áthelyezni. A számokon túl a kétféle színezést is jelentőséggel bír. Egyik alaphalmaz színes vagy fekete (itt mindegyikben kellett szerepelnie az egyesnek, a többiben nem). A többi fehér alapon fekete betűkkel. Gyakorlatilag LEGO-szerűen épültek fel az ábráim. Így készültek az ábrák, amelyek már forgásszimmetrikus Venn-diagramok voltak. A halmazalakok egybávagók, tengelyesen szimmetrikusak. El lehetett kezdeni általánosítást keresni, valamilyen szerkesztési öröklődéssel. A hármas halmazábráim ekkor készültek, majd sorba rendeződve az ötös és a hetesek. A piramisszerű kialakítás egy lehetőség volt, amely teljes siker lett. Utána már csak ilyenek készültek. Foglalkoztam még a négyszöges Carroll diagramok átalakításával, hogy megmaradjon a forgásszimmetria és Venn-diagram is legyen, ez nyolcig sikeres is lett. Téglalap alak, minden részhalmaz pontosan egyszer szerepel. Hasonlóan gyűrűt tartalmaz, mint a 2.a-nál. A hatos diagram egy 8x8-as sakktáblával azonos ($8 \cdot 8 = 64$, $64 = 2^6$). Ebből adatkocka is készíthető, azaz felhasználása sokrétű. Adattárolásra alkalmas, különböző matematikai műveleteket is tartalmazva. A térbeli diagramok ötlete onnét származott, hogy ami nem szerkeszthető a síkban, a térben megér egy próbát! Létrehoztam térbeli forgásszimmetrikus, nem prímből állókat (Wagon, Stan; Webb, Peter. 2008.). Összetett számok esetén is lehet a síkban Venn-diagramot szerkeszteni. Ezért nekem a létezést már nem, de a létező formákat be kell mutatnom. Ezek 3D nyomtatással a legegyszerűbbek. Szemléltető eszközként a matematikában több helyen alkalmazhatók. Tanulás és szakmódszertan segédeszközei lehetnek. Utoljára hagytam az érdekes Venn-diagramok bemutatását. Ilyen pl.: amikor egy diagramban egy utasítás szerint helyezzük el a részhalmazokat. Egy körben elhelyezkedő két körgyűrű fogaskerékszerűen egymásba kapcsolódik úgy, hogy két számra az igaz, hogy a két szomszéd metszete. Ezt tovább lehet gondolni azzal, hogy az egymással érintkező körgyűrűkre is ez legyen igaz. Háromra biztos, ötre lehetséges, hétre kérdéses volt a rendszer. Ez is megoldásra került. Az Excel segítségével egy halmazalak, vizuális élményt is

nyújthat. A továbbiakban a magasabb n számú halmazok matematikai leírása történik meg majd. Tizenegy a 3, 5, 7, szerint. A térbeli hat, nyolc és tíz és tizenkettő esetén a belső részek leírása is lehetséges. Ez azt jelenti, hogy megkeresem azokat a számcsoportokat, amelyek elrontják a szimmetriát nem prímek esetén (később, a térbeli fejezetnél értelmezem ezt). Ha ezek megvannak, egy körgyűrűn belül együtt már „megszelídíthetők” (példa erre a hatos fejezetem) és alakzatba kényszeríthetők.

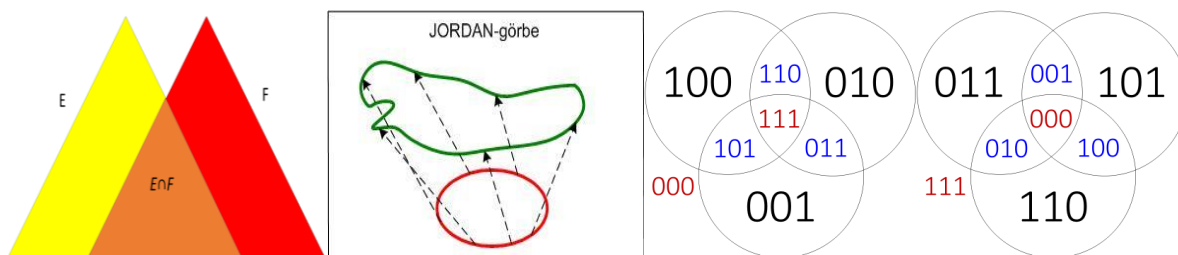
3. Definíciók és fontos fogalmak. Analógia. Excel táblázat alkalmazása

Venn-diagramok értelmezése, mi a kutatásom tárgya? Az Excel táblázat használata.

3.1 Venn-diagram definíció

Matematikai tanulmányunk kezdetén találkozunk a halmazábrákkal. A halmazoknak vannak elemeik, amelyek más halmazok elemeivel azonosak, vagy közös tulajdonsággal bírnak. Létezik az üres halmaz is, amelynek nincsen egyetlen eleme sem. Ezért halmazok közötti műveleteket lehet értelmezni. Közös rész (metszet), unió, különbség, komplementer (egy nagyobb halmazra vonatkoztatva) stb. Egy autógyártásból vett példa: egy gyár különböző márkatípusainak összehasonlítása, alkatrészeik szerint. Milyen közös alkatrészeket tartalmaznak a különböző autótípusok? Ezeket egyszerre le lehet gyártani (a gyártás előkészület nagy precizitást és odafigyelést igényel, fontos a nyereségesség).

Analógiát kerestem a klasszikus és a szabályos sokszögek, illetve a koncentrikus körök szerkesztéséhez. Három halmaz Gray-kóddal (3.cd ábra). A részhalmaz jelölések: csak 0-át (nem tartalmazás), vagy 1-et tartalmaznak (tartalmazás). Pl.: 100 az első halmaz elemei, a 2.-at és 3.-at nem tartalmazza. 111 a három halmaz metszet elemei.

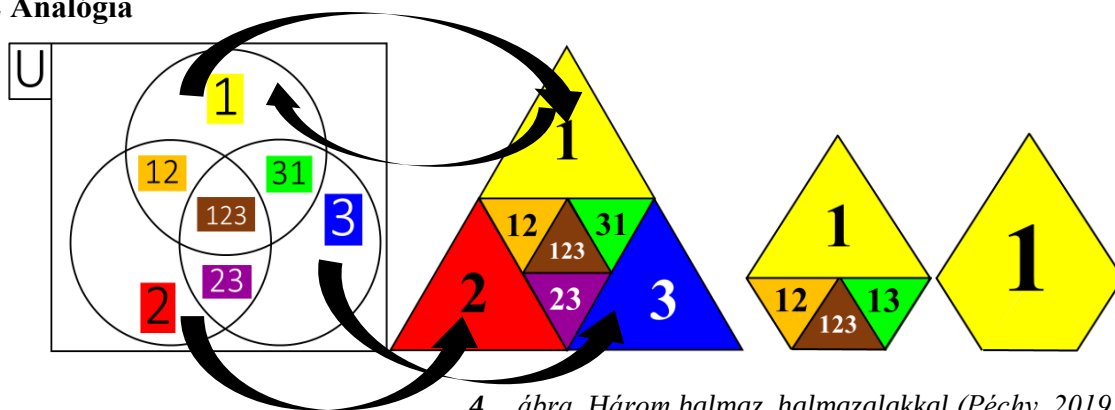


3. ábra. a) Két egymást metsző háromszög, b) Jordan-görbe (3)
c) a kör belseje egy halmaz, vagy külsője (Informatikában a 0, 1 jelölés), (Péchy. 2018.)

A halmaz alapfogalom, nem definiáljuk. Mondhatjuk azt, hogy a halmaz egy zsák, bizonyos objektumok kollekciója, amihez mindenki csak pontosan egyszer tartozhat hozzá. A halmazábrák több halmaz kölcsönös metszetképzését is szemléltethetik.

A Venn-diagram értelmése: Egy olyan diagram (például a szimbolikus logikában) (Péchy. 2018.), amely halmazok közötti kapcsolatokat (metszet, tartalmazás, kizárás) mutat be, átfedő körökkel vagy egyéb síkidomokkal. Formálisan (Grünbaum. 1975.), legyen $C = \{C_1, C_2 \dots C_n\}$ egyszerű zárt görbék gyűjteménye a síkon. A C kollekciót független családnak nevezzük, ha az $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$ metszethalmaz sosem üres, ahol X_i vagy $\text{int}(C_i)$ (azaz C_i belseje), vagy $\text{ext}(C_i)$ (azaz C_i külsője). Tehát: összesen 2^n különböző metszethalmazt kell megvizsgálni és a határvonal nincs benne egyik X_i -ben sem. A C független család görbéi Venn-diagramot állítanak elő, ha az $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$ metszet halmazok nyíltak és összefüggők. *Megjegyzés:* Egy egyszerű zárt görbe, a *Jordan-féle* meghatározás szerint a kör (síkgörbe) *topológikus képe*. A síkbeli Jordan-féle görbe fontos tulajdonsága (3), hogy a síknak a görbéhez nem tartozó pontjait két tartományra osztja: a görbe belseje és külsője. Ez a két tartomány diszjunkt, azaz egy külső és egy belső pontot összekötő ív metszi a görbét. Ez a tulajdonság a *térbeli Jordan-féle* görbékre nem teljesül. Ebből következik, hogy a *teljes gömb nem képezhető le a síkra* (téreképészet).

3.2 Analógia



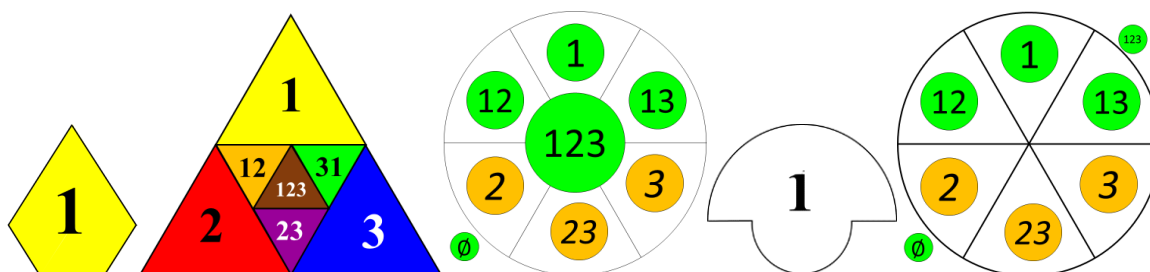
4. ábra. Három halmaz, halmazalakokkal (Péchy. 2019. 74.)

Áttérés a klasszikus ábráról a szerkesztettekre. Szabályos háromszög által határolt diagramra, amely matematikailag jól leírható. **Szerkesztési menet.** (Péchy. 2017. 7.) Első az oldalfelező pontok szerkesztése és összekötésük. Második a szerkesztett háromszög oldalfelező pontjainak megkeresése és összekötése. A külső háromszög hét szabályos háromszögre bomlik, így az üres halmazzal együtt, nyolc részhalmaz keletkezik. Az alaphalmaz többféle lehet (6.m.). Strukturális szempont szerint tárgyalom az eredményeimet, amelyből látható a különböző rendszerek elkülönülése. Ha valami új dologgal találkozunk, össze kell hasonlítani a régivel. Kell egy analógia, egy átvezetés az egyes rendszerek között, ami az oda-vissza átjárhatóságot biztosítja. Leírást adok az egyes új rendszereim között átjárhatósághoz.

	Alaphalmaz száma (n)	Az alakzat forgásszimmetrikus	Az alaphalmaz teng. szimmetrikus	Alaphalmaz alakja
1.	3	Igen	Igen	Kör, szabályos háromszög
2.	4	Igen	Igen	Négyzet
3.	5	Igen	Igen	Kör, szabályos ötszög
4.	6	Igen	Van ilyen is	Négyzet és forgásszim. térbeli alakzatok
5.	7	Igen	Igen	Kör, négyzet, szabályos hétszög

3.3 Szabályos háromszögek koncentrikus körré alakítása. Az általánosítás

Újabb ötlet, az egyik rendszerről átválthassunk egy másikra.

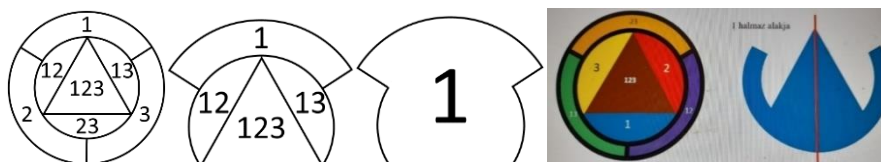


5. ábra. a) 4. ábra, b) Koncentrikus körökkel - egy halmazalak, b) {123} halmaz egy pont, az alaphalmazok félkörök - 120 fokkal elforgatva

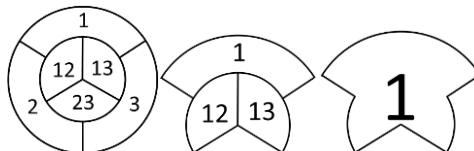
Forgásszimmetrikus a szabályos háromszög, azaz van olyan forgatás, amely az alakzatot önmagába viszi át – ez itt 120 fok. A forgatás középpontja a háromszög köré írható kör középpontja. Az új alakzat kör, ami forgásszimmetrikus. A két koncentrikus kör egy körgyűrűt alkot, amelyben két számsor felváltva váltja egymást, fogaskerékként kapcsolódva. Az óramutató járásával ellentétes: **1; 2; 3** és **12; 23; 31**. **1; 12; 2; 23; 3; 31**; és **1**, összeérnek. Ennek jelentősége van a nagyobb halmazszámok szerkesztésénél! Egy halmazalakot körbe forgatva 120 fokkal lefedik a körlemez. Előáll egy *három halmaz forgásszimmetrikus Venn-diagram*. Nagyobb alaphalmaz számú ábrák is szerkeszthetők! A forgásszimmetria három halmaznál megvolt. Fontos az *általánosítás*, az átörökítés nagyobb prímeke! (Péchy. 2017.)

3.4 Vegyes forgásszimmetrikus Venn-diagram

A vegyes közepe egy szabályos háromszög (*n* szög), körülötte koncentrikus körök. Az *alaphalmazok* egybevágók, tengelyesen szimmetrikusak és metszetképzésükkor minden részhalmaz pontosan egyszer jelenik meg, Venn-diagram. Ezek a tulajdonságok *átörökíthetők a következő príme*. Egy érdekesség.



6. **ábra.** a) Vegyes, egy halmazalakkkal (Péchy. 2018. 5.), b) Első hármas ábra (Péchy. 2017. 13.)

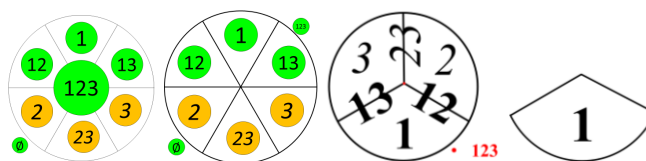


7. **ábra.** Az $\{123\}$ a körök középpontjában van, ide futnak be a szakaszok. A térbeli diagramok szerkesztésénél fontos kiindulási pont. A 3D modell elkészítése újabb ötletet ad (Péchy. 2018. 6.)

4. Egyszerűsített jelölésű metszet ábrák

Létezik négy különböző rendszer, amelyek segítségével tovább gondolhatók újabb fejlesztések. Ilyen például, hogy az egymás mellett elhelyezkedő részhalmazoknál halmazművelet értelmezhető. Csak közös rész szerepelhet a két körgyűrűk között (sorok) $(12;2;23;3;31;1; 12)$. Célom minél több szemléltető ábra bevonása az oktatásban. Három ^(4.1) és öt halmaz esetén a próba sikerült, ezt mutatom be ebben a fejezetben ^(4.2).

4.1 Három halmaz kölcsönös metszete

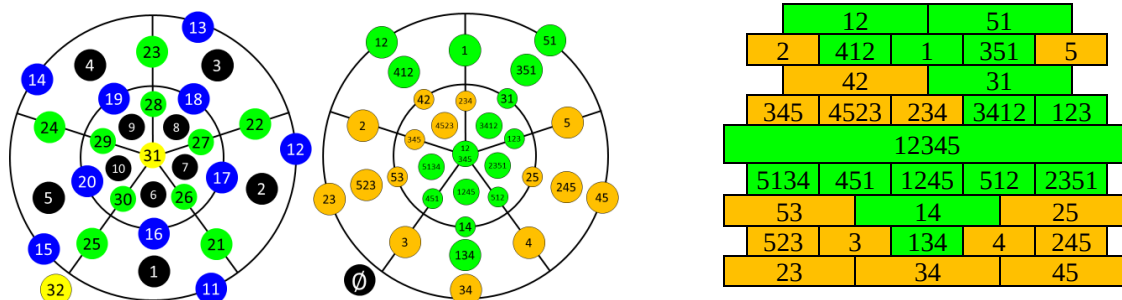


8. **ábra.** Három halmaz, egyszerűsített szerkesztéssel (Péchy. 2018. 6.)

Értelmezés: a különböző metszetek elhelyezkedése a mérvadó, egy sajátos felépítést szemlélettel. Felhasználva a 5. ábrákat: egyszerűsített szerkesztési mód, melyben a szakaszok és a körívek is részhalmazokat jelölnek! Ezekbe a halmazrészekbe, csak *metszethalmazok* kerülhetnek. Ez az újítás lényege. Háromnál egyértelmű, ötnél várható, de hét halmazra van-e, ilyen? A középpontból kiinduló szakaszok két alaphalmaz metszete. Három halmaz metszete, a kör középpontja $\{123\}$. A *Venn-diagram definíció* szerint a körvonal nem a diagram része, ezért itt részhalmazokat jelölnek. Egy körgyűrűben lévő dupla számsorok csökkentik a gyűrűk számát, amely a szerkesztést egyszerűsítik. Minden megoldást részletesen elemezni kell. Így sikerült előállítani három halmazra, egy gyűrűben két számsort egybefűzve. Egy részhalmaz, egy metszet, egy részhalmaz, így tovább.

4.2 Öt halmaz kölcsönös metszete

Értelmezés: 32-es az üres halmaz, 31-es az öt halmaz metszete, 1.-10.-ig a körgyűrűben lévő, a 11.-20.-ig az elválasztó szakaszokban (részhalmazokban). 21.-30.-ig a körvonal darabokban (részhalmazokban) szerepelnek. Az ábra jellegzetessége, hogy a körvonalak és szakaszok által meghatározott részhalmazok, itt is *metszetet* tartalmazhatnak. Bármely két szomszédos körgyűrű rész között, csak azok metszete van! Ez igaz a két körgyűrű közötti közös körívre is. A külső körön a megmaradt részhalmazok vannak, nem elrontva a diagramot. *Venn-diagram*.



9. ábra. a) $32 = 2^5$ részhalmaz, b) a zölddel jelölt rész egy alaphalmaz (Péchy. 2019. 77.)

1. **Táblázat.** Excel táblázat. Az újítás a hetes ábránál lett alkalmazva először

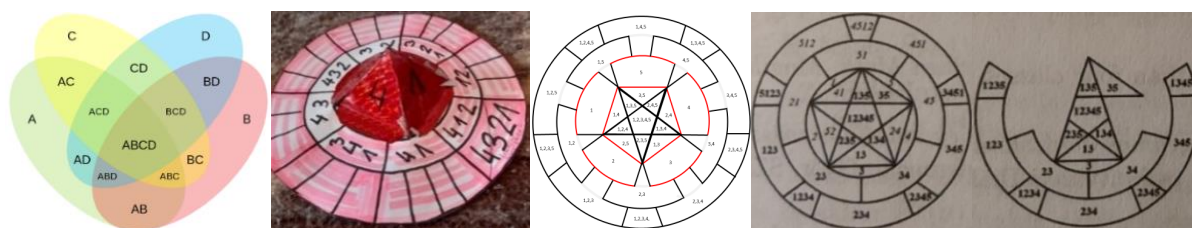
Egy halmazalak a zöld színű részhalmazok összessége. Ez egy újabb öt halmaz forgásszimmetrikus ábra. 9.b, Excellel. Hétnél az adatok sokasága miatt, elbonyolódik a szerkesztés. Minden ábrámra jellemző, hogy színesek és jelöltek, ezek a *szemléltetés legfontosabb szempontjai*, hogy jól láthatóak legyenek. Excel táblázatban az egyes köröknek megfelelően, sorokba vannak kifejtve a számsorok. Valahol egy számsor, máshol két számsor fogaskerékszerűen alkot egy körgyűrűt. Mi a jelentősége ennek a modellezésnek? Például, hogy hét halmaz esetén 128 Excel mező mozgatott. A sorcserékkel ez azonban egyszerű. A mezőkben a számok nem nagyság szerintiek, mert a láthatóság fontos. Pl.: 523; 134; 245; 351; 412; 523 esetén látszik az elforgatás. A 235; 134; 245; 135; 124 esetén rosszul áttekinthető. *Aprónak tűnik, de mégis sorsdöntő!*

5. Forgásszimmetrikus öt halmaz Venn–diagram, újítások

Nem tengelyesen szimmetrikus (5.1), tengelyesen szimmetrikus (5.2) alaphalmazok. Az ábrák mind forgásszimmetrikusak, geometriai adottságukat is figyelembe véve. A végső alakhoz (5.3) kellett az Excel táblázat felhasználása! Az nagymennyiségű adatok kezelése, mozgatása megkönnyítette a szerkesztést. Reményt adott egy tovább gondolt általánosításhoz. A végső cél, hogy minél nagyobb prímekre is igaz legyen a szerkesztési utasítás. Ezek hasznossága, alkalmazhatósága, az alkalmazás fejezetben lesz kifejtve (5.4).

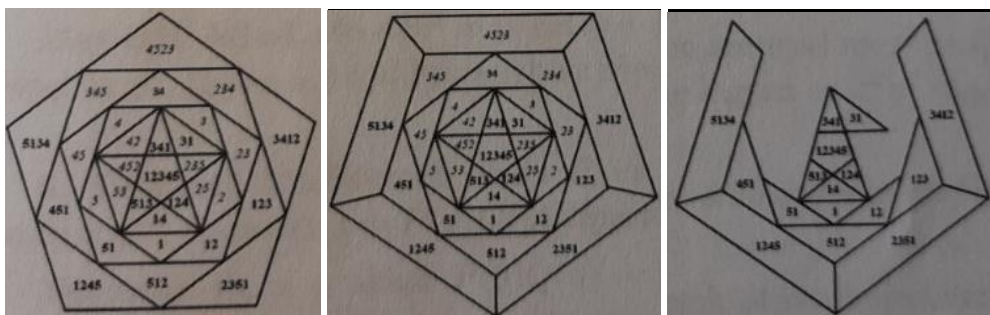
5.1 Az első forgásszimmetrikus diagram

Az érdeklődésemet felkeltette (1992), hogy ha van négy halmaz Venn-diagram, akkor miért nem látok 5, 6, 7, ... halmazra. Ez a kíváncsiság hajtott előre kezdetektől fogva. A siker nagy megkönnyebbülést jelentett. Később az összehasonlításokkal meggyőződtem arról, hogy egy teljesen új ötlettel dolgozom. Elkészíthetők térbeli forgásszimmetrikus testek, amelyek egy körlemezből és a síkból kiemelkedő gúla vagy kúp részekből áll (munkám). A sík által elválasztott mindkét féltérben egy-egy említett térbeli alakzatokkal. Az egyes és a hármas piramis oldal a körlemez által meghatározott azonos féltérben vannak (10.b a teljes piramist egy féltérben mutatja. Egyszerűen, csak le kell hajlítani a másik féltérbe a 2. és 4. piramis oldalt). A $(4k)$, illetve a $(4k+2)$ alakú páros számok (k eleme a nulla és a pozitív egész számoknak) esetén a térbeli Venn-diagram szerkesztésénél prioritást élvez ez a módszer. Ennek bemutatása a hat halmaz térbeli metszetnél lesz. (Griggs, Jerrold; Killian, Charles. E., és Savage, Carla, D. 2004.)



10. ábra. a) (Venn. 1881. 117.), b) Forgásszimmetrikus térbeli alakzat (Péchy. 2019. 79.), c) 5.m. No.1., d) forgásszimmetrikus diagram, egy halmazalakkal (Péchy. 2017. 10.)

A c) rendkívül bonyolultnak tűnik. Eredetijét még kézzel rajzoltam. A halmazalakok egybevágók és az öt alaphalmaz metszete teljesen lefedi a külső körvonalat. Ez az első, ahol a Venn-diagram körlemez, azaz forgásszimmetrikus. A halmazalakok még nem tengelyesen szimmetrikusak. A d) egy egyszerűsített, jobban átlátható, egy halmazalakkal. Ekkor még a szabályos ötszög és a koncentrikus körökkel rajzolt ábrák nem léteztek. A kacsacsőr kiküszöbölése fontos állomás volt. Vegyes alak a két rendszer között. Ez készült el legelőször! Az 1. szabályos sokszögekből álló, forgásszimmetrikus öt halmaz Venn-diagram:



11. ábra. a) Szabályos ötszög (később az ötágú csillag is ötszögre lett cserélve), a külső ötszög 180 fokkal forgatva, alaphalmaz (Péchy. 2017. 15-16.)

5.2 Tengelyesen szimmetrikus alaphalmazok

A végső cél az volt, hogy minden halmazalak egybevágó és tengelyesen szimmetrikus, matematikailag leírható legyen. Ez a törekvés sikerült!

A hetes diagramot, miután már a hatos sem sikerült, nem létezőnek gondoltam. A probléma az volt, ami a klasszikus négy halmaz esetén. A szemben lévő halmazok közös részei nem jelentek meg. A hatosnál az $\{123\}$ és a $\{246\}$ halmazokat tartalmazó részhalmazok. A síkban nem sikerült, a térbeli alakzat akkor fel sem merült, mint megoldás. Az említett évben a korábbi ábrák átszerkesztésével folytattam munkámat. Az első darab a (8.m.a.), ahol egy körgyűrűben csak egy ötös számsor van. A belső ötszög az átlóival megmaradt, a benne levő részhalmazokkal. Egy halmazalak nem tengelyesen tükrös. A (8.m.b.) az első, amelyik öt halmaz forgásszimmetrikus Venn-diagram, a halmazalakok egybevágók és tengelyesen szimmetrikusak. Ezek szabályos ötszögekből álló, illetve zárt görbe vonalak közül csak körvonalakból, illetve szakaszokból álló ábrák (8.m.). A következő ábrák jól szemléltetik, hogy az Excel használata nélkül sem a szemléltetés, sem a további kutatások nem voltak garantálva! Ennek következtében gyorsultak fel az események.



12. ábra. a) Vegyes, b) Excelben, 2021, c) Koncentrikus körökkel, d) Szabályos ötszögekből felépülő öt halmaz. A belső ötágú csillagot mára kiváltotta két további ötszög



13. ábra. a) Koncentrikus körökkel, b) Excelben, c) Ötszögekből és csillagból

Fontos újításom, hogy a Venn-diagramokat Excel táblázat segítségével modellezem - szerkeszsem. Öt halmaz metszete rajzban és Wordben is jól értelmezhető. Hét halmaz esetén

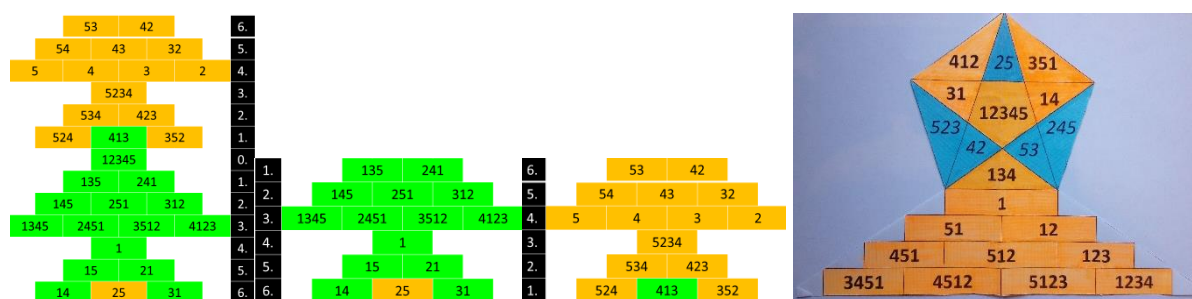
már nagy az adatmennyiség. Tizenegy halmaz esetén pedig szinte követhetetlen. A diagramot először Excel táblázatban megtervezem, ahol könnyű sorokat cserélni. A kész diagramból a részhalmaz számokat beírom az ábrákba. A hét halmaz ábrák is könnyedén szerkeszthetővé váltak. A korábbi publikált diagramok, mind ötnél, mind hét esetén vagy *egybevágók* vagy *tengelyesen szimmetrikusak* a halmazalakok. *A két tulajdonság nálam egyszerre követelmény. Sikerült a korábbi tulajdonságokat egyesítenem*, hogy közben szabályos sokszögek vagy koncentrikus körök a Venn-diagramok. A 13. ábra a következőképpen értelmezendő: a külső körgyűrű felel meg a táblázat alsó és felső sorának, melyek összeérnek. Pl.: **14**, 25, **31**, 42, 53, 14. Hasonlóan a többi: **15**, **21**, 32, 43, 54. Így lesz a koncentrikus körökből álló diagramból egy Excel táblázat. A szerkesztés egyszerű. A két szín segíti az átláthatóságot. Látványosak és jól áttekinthetők. Kezdetben heurisztikusan hoztam létre Venn-diagramokat. Azonban, ha van egy tovább örökíthető szerkesztési mód, akkor nagyobb halmazszámok esetén is jól alkalmazható. Sikerült többfélélt létrehoznom. Az áttörés azonban 2021-ben sikerült. Létrehoztam egy eljárást, mellyel a szerkesztés átörökíthető a hetesre. **Sejtésem**, hogy *az eljárás a tizenegyesre is működőképes lehet!* A prímszámok különlegesek. A 2, 3, 5 és 7 esetén exponenciálisan növekedő részhalmazszámok jönnek létre. Az ábrák elbonyolódnak, kilátástalan vállalkozásnak tűnik minden újabb próba. Sok publikációt megkerestem, amelyek összefüggésbe hozhatók a munkáimmal. Összehasonlító elemzéseket végeztem. A létrehozott módszereim semmiben nem hasonlítanak a korábbi diagramokhoz! A kezdeti lépéseknél csak a ***létezését akartam bizonyítani***, hogy van másféle megközelítés is. A koncentrikus körökkel, a szabályos sokszögekkel és ezek vegyes szerkesztéseikkel teljesen új rendszereket teremtettem. Hogy lehet általánosítani, nagyobb primértékekre a szerkesztést? Egy megoldást mutatok be.

5.3 Végző alak

Általánosításról akkor beszélünk, ha adott egy módszer, az újabb, nagyobb halmazszámok megrajzolásához.

Minden alakom forgásszimmetrikus, amely adódik az alakzatok tulajdonságából is (kör vagy szabályos sokszögek). 12. ábrák teljes értelmezését adom most, amellyel előkészítem a hetesre történő szerkesztési átöröklődés bemutatását is. A kiindulási pont a 4. ábra, az analógia kérdése. Hogyan tudom átalakítani a klasszikus három halmaz Venn-diagram ábrát a saját rendszereimmé. Utána már csak bővíteni kellet a részhalmaz számokat újabb körgyűrűkkel, vagy szabályos sokszögekkel. Egy gyűrűben egy vagy két számsor szerepel, amelyek a körgyűrűt n darabra (alaphalmaz szám) osztják. Ezek felépítése pl.: **1**, 2; 3; 4; 5 vagy **123**; 234; 345; **451**; **512**; (**123**). Ha a körbefordulást pozitívnak tekintjük, akkor minden számjegy eggyel

növekszik. Ez biztosítja a forgásszimmetriát. Ez a tulajdonság a hármastól kezdve öröklődik. Öt halmaz esetén van az üres és az öt halmaz kölcsönös metszete {12345}. Ezt a kettőt kivonva a 32-ből (2^5), marad 30, ami osztható prímszámok esetén mindig n -nel, itt $30 = 6 \cdot 5$. Azaz hat darab, ötös számsor létezik, melyeket el kell helyezni a diagramban. Gondoljunk bele hét halmaz esetén 128 ($2 + 18 \cdot 7$) részhalmaz, 18 számsor 18 helyre kerülhetne. Ezek $18! (6,4023 \cdot 10^{15})$ módon helyezhetők el. Ábráim jól átláthatók, két színűek. Egy adott halmazhoz tartozást, itt az 1., zöld színnel jelöltem. A nem tartalmazást mással. A Venn-diagram forgásszimmetrikus, egy alaphalmaz tengelyesen tükrös és mind egybevágók. Mind a koncentrikus köröknél, mind a szabályos ötszögnél. A térbeli hat halmaz esetén vannak egybevágó alaphalmazok, illetve tengelyesen tükrösök és különbözők is. A piramisszerű elrendezés nem véletlenszerű. Az Excel adta lehetőségeket kihasználva készült el a végső alak.



14. ábra. ab) Excel táblázatba szerkesztve, 2021, c) Piramis alakzat, (Péchy. 2019. 80.)

A szerkesztés folyamata: a 13.a szerint a körgyűrűben lévő számsorokat mezőkbe írom úgy, hogy a sorrend megmaradjon. A 0.-val jelölt sort úgy tekintjük, mint egy tükörtengely. Eltolással egymásba mozgathatók, 14.b). Ez nem véletlen, az általánosítás az oka. Minden számsornak megvan a **komplementer** sora. Egy halmaz komplementerének tekintünk definíció szerint, azt a halmazt, amelyre igaz $A^c = U/A$.

	a	b	c	d	e		a	b	c	d	e
A	42	53		25		B	2	3	4	5	
$A^c = U/A$			352		524	$B^c = U/B$					5234
U	12345					U	12345				

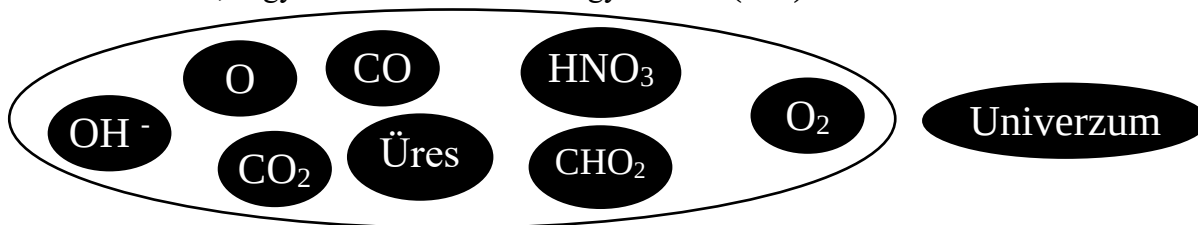
2. Táblázat. Mind a hat vízszintes számsornak van komplementer párja

Ezeket a számsorokat úgy kell elhelyezni, hogy az összetartozó sorok a körgyűrű „két ellentétes pólusára” kerüljenek. A külső körgyűrűbe az 1. táblázat első sora kerül, a legbelső gyűrűbe pedig a komplementer sora. Majd befelé haladva, megismételve az eljárást. Így készül el az **Excel táblázatos, forgásszimmetrikus 5 halmaz Venn-diagram**. Ez a megoldás teszi lehetővé, hogy a korábban leírt tulajdonságok teljesüljenek. A következő prím a hét, amelyre szintén sikerült alkalmazni. Végezetül, próba történt a piramisszerű ábrára, ahol a felső rész egy deformált gyűrű. Gyűrűt pedig már Venn is használt. 14.c.

5.4 Három és öt halmaz alkalmazása

Elsődleges célterület az oktatás, az általános-, a közép-, és a főiskolai gyakorlatban felhasználható. Elsőként az egyes tárgyak szimbiózisa, kapcsolatba hozása, játékos formában. Ötödik osztályban a halmazokkal kapcsolatban. *Feladat:* helyezze el a feladatban feltüntetett atomokat, molekulákat, vegyületeket! Nem kell ismerni, mi mit jelent. Házi feladat lehet hozzá, ezek nevének megkeresése és megtanulása. *Dolgozatban számon lehet kérni a teljes ábrát, kitöltve, a szereplők nevének beírásával.*

Egy ötödikes kicsi, de szereti a kihívásokat, új ismereteket. Hét éve napközizem ezzel a korosztállyal, szeretnek játszani, ez pedig az. Alap *kémiai* ismereteket tanítunk 15. ábra. Minden tárgyból lehet három halmazos ábrát szerkeszteni. *Magyar irodalom* esetén, legyen három költő, bármilyen hozzájuk köthető információval. Lehet közös az állampolgársága, születési dátuma, vagy a szerelmes versei és így tovább. (9.m.)



15. ábra. Feladat, helyezzük el a diagramban a betűcsoportokat

A téglalapokkal a Carroll diagramok felhasználásával látványosan szemléltethető a kettő és három halmaz. Két állítás és két tagadás szerepel. Így kell elhelyezni a képeket a helyükre. Ezt bővíteni lehet három halmazra. Pl.: piros-nem piros, paprika-nem paprika, illetve gömbölyűszerű-nem gömbölyűszerű. (9.m.) Négy téglalap segítségével is szemléltethető, amelyet a L. Carroll diagramoknál mutatok be. Végül egy az orvostudományban alkalmazható publikációból vett ábra. Öt halmaz esetén a tudományos felhasználás sokrétű. (10.m.) Van egy eszköz, amit még nem ismernek, akkor széles körben terjeszteni kell, hogy a gyakorlatban is alkalmazható legyen, segítve a területek munkáját. Steve Jobs (a világ legnagyobb technológiai cégének alapítója) egy mondása, „honnan tudnák, hogy kell-e, nekik, ha nem is látták?”

6. Forgásszimmetrikus Venn–diagram, újítások

Egy általánosítás, szerkesztési azonosságok hozzájárulnak ahhoz, hogy létrejöjjön egy szerkesztési rendszer. A tizenegy halmazra is elkezdtem a munkát. Egy sejtés van, hogy minden prímre igaz a szerkesztési menet. Az Excel táblázatos szerkesztési modellel könnyebben halad a munka. Itt is négy rendszer van, mint korábban. A részhalmaz számok az ötöshöz képest megnégyszereződtek. Ezeket mutatom be.

6.1 Hét halmaz

Céлом, egy matematikailag leírható rendszer létrehozása. A hetes az előzők általánosításának következménye. Egy Excel sorban (körgyűrűben) elhelyezkedő számsorokhoz egy olyan számsor tartozik, hogy az egyes mezők együttesen az **{1234567}** halmazt adják, 3. táblázat. A sorok végén jobbra, a piros és kék C1-8 jelölések mutatják az összetartozást. *Kívülről befelé haladva készül el a legújabb halmazábra. Ez egy forgásszimmetrikus hét halmaz Venn-diagram egy halmazalakja*, amelyet 360:7 (n) fokkal történő elforgatással jön létre a teljes ábra. (5. táblázat) Az alaphalmazok **egybevágók, tengelyesen szimmetrikusak és az alsó, illetve felső részek egymásba tolhatók**. Az elválasztó rész a hét halmaz metszet sora: **{1234567}**. Ezzel egy újabb *geometriai transzformációt* használok fel a szemléltetéshez, a *forgatást*. A gyűrűben levő számcsoportok minden egyes tagja a + elfordulással eggyel nő. Például: {1234}; {2345}; {3456}; {4567}; {5671}; {6712}; {7123}; és {1234} körbeér. Ezért **forgásszimmetrikus**. Mind az alsó, mind a felső diagramra érvényes, hogy lépcsőzetes (az alakzatok egybevágók). Egy Excel mezőnyit csúszik el a következő sor. Minden függőleges oszlopban levő számok összessége az **{1234567}**! Tengelyesen tükrös a számsor. Van *tükörtengely* (4. táblázat, zöld vonal).

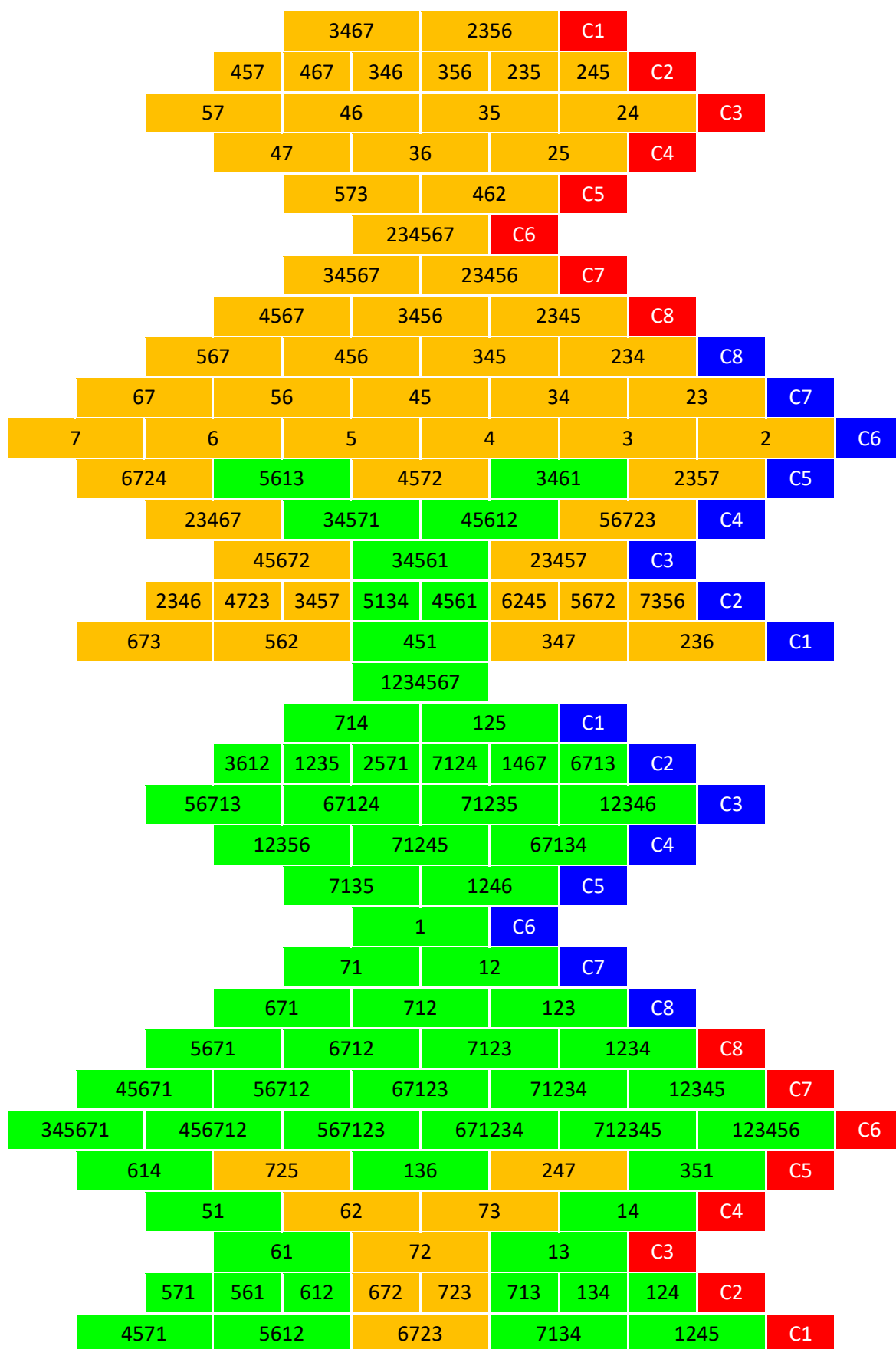
	a	b	c	d	e	f	g	
D	2356	3467			6723			C1 KÜLSŐ
$D^c = U/D$			236	347		562	673	C1 BELSŐ
U	1234567							

3. **Táblázat.** *Körgyűrűkből (egymással komplementer sorokból) felépülő Venn-diagram. Egymás komplementerei az összetartozó piros és kék C1-8 sorok*

	467	356	245		723	C2		457	467	346	356	235	245		C2
	235	346	457		672	C2				672	723				C2

4. **Táblázat.** a) Két aszimmetrikus sor, b) Dupla számsor fogaskerékszerűen egymásba: szimmetrikus

Venn-diagram Excel sorokban, a piramis rendszer folytatása



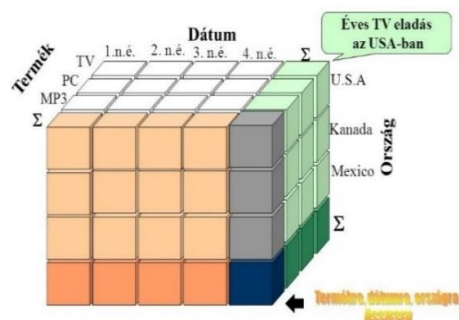
5. **Táblázat.** Lépcsős – többszörös piramis

A $2048 = 2^{11}$ részhalmazt csökkentve az üres halmazzal és a $\{123456789AB\}$, (ahol $A = 10$, $B = 11$) metszetével, azt kapjuk, hogy $2048 - 2 = 2046 = 11 \cdot 186$. Száznyolcvanhat darab sorban vannak a tizenegy számot tartalmazó számcsoportok (ez a 11-es ábra szerkesztésének alapja). Ha ezek dupla, egymásba fogaskerékszerűen összekapcsolódnak, akkor a sorok száma csökkenthető. Az elkészített Excelből megszerkeszthető a szabályos hétszögekből álló, illetve, a zárt görbe vonalak közül csak koncentrikus körökből álló, illetve a vegyes alak. Ábráim kézműves munkák, esztétikai élményt is nyújtanak. (12.m.) Szabályos hétszögekből (17), vagy koncentrikus körökből épül fel. Minden korábbi tulajdonsággal rendelkeznek. $\{1234567\}$ részhalmaz a legbelső kör, illetve szabályos hétszög. A szerkesztés menete: az oldalfelező pontokat összekötöm újabb hétszöggé, majd így tovább. Vannak olyan gyűrűk, ahol duplán szerepelnek a számsorok. Ennek következtében tengelyesen szimmetrikussá válnak. Bizonyos számsorok az aszimmetrikus tulajdonság miatt csak párban szerkeszthetők (3. és 4. táblázat). A két színnel való jelölés a szemléltetést erősíti. Jól érzékelhető az alaphalmazhoz tartozás (neonzöld). A harmadik, vegyes diagram közepében szabályos hétszög, az átlókkal. Így a koncentrikus körökben másféle számcsoportok vannak, mint az előző két típusnál. (12.m.) A három rajz elkészítése egyszerű, ha már kész az Excel!

Ezzel bebizonyítottam, hogy létezik a korábbiaktól független Venn-diagram család. A szerkesztési mód átöröközhető a következő prímre 3-ról, 5-re, 7-re.

6.2 Alkalmazások

Elsősorban az Excel felhasználása lehet érdekes pl.: az orvostudományban – betegségek, kórokozók esetén. Figyelembe véve a korábban felidézett tizenegy mellékletet (az ötös). A másik három típus helyigénye nagy (A3-as formátum). Érdekeség lehet egy autómárka különböző típusainak, azonos alkatrészei, ötös, hetes esetén (nem vagyok járatos az autóiparban, de el tudom képzelni). Az adatkocka felhasználása is megkönnyíti a gyári tervezést. De ugyanezt meg lehet tenni, műszak beosztásokra. *Nevek, műszak, munkaállomás.*



3D-ben helyezzük el a három adatcsoportot. Termék, dátum, illetve ország. Képzeljünk el hengert, amelynek van öt szintje. Minden szint egy köralakú Venn-diagram - koncentrikus körös, rajta elhelyezve egy alaphalmaz, adatokkal. Felülről ránézve az összes metszet látszik (pl.: raktározás, autóalkatrészek).

16. ábra. Három adatos Adatkocka (11, 33.)

7. Térbeli, forgásszimmetrikus hat halmaz

Összetett számok esetén is lehet forgásszimmetrikus alakzatokat szerkeszteni (Wagon, Webb, 2008.) Alapfelvetés, hogy térben felhasználható körgyűrű építőelemként a diagramokhoz. A 2.a, ábrában szerepel négy ellipszis és egy gyűrű (Venn, 1881.). Térbeli alakzatok metszete esetén előáll minden részhalmaz, pontosan egyszer 2.b. Kérdés, hogy a módszerem alkalmas-e, hogy térbeli alakzatot létrehozzak? 1992-ben gondot okozott, hogy hat halmaz esetén az $\{135\}$ és a $\{246\}$ részhalmazok nem jelentek meg. Az elkészült, körgyűrűt tartalmazó diagramokhoz kerestem matematikai magyarázatot (analógiát).

Bögre és lyukas fánk homeomorfiája.



17. ábra. Bögre és fánk egymásba alakítása, homeomorfiája (4), (Péchy. 2019. 79.)

Megjegyzések

1. Négy egymást, kölcsönösen metsző gömbnek a részhalmazai pontosan egyszer szerepelnek
2. Venn 1881. (2.a), amelyen egy körgyűrű van, létre hozva az öt halmaz Venn-diagramot
3. Harmadik segédgondolat a *homeomorfia*, amikor az alakzatok nyújtással egymásba alakíthatók. Egy lyukas közepű fánk és egy bögre egymásba alakíthatósága 17. ábra.

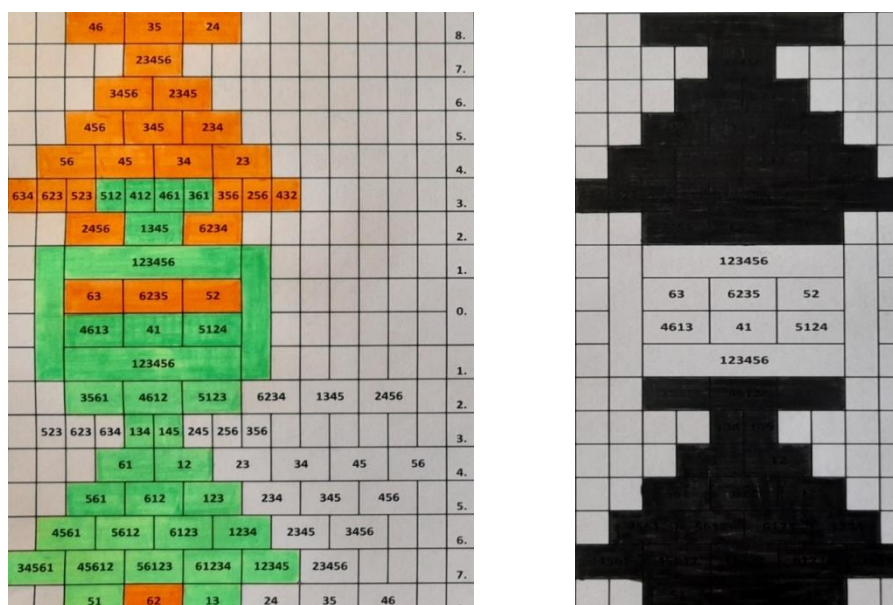
„Egy folyamatos deformálást egy bögre és egy fánk között jól illusztrálja, hogy homeomorfia.

Azonban nem szükséges a homeomorfia szempontjából az egymásba deformálhatóság” (4)

- 1) 41; 52; 63, **14; 25; 36** ismétlődnek a számsorban **egyszer**
- 2) 1346; 2451; 3562; **4613; 5124; 6235** ismétlődnek a sorban **egyszer**
- 3) 135; 246; **351; 462; 513; 624** ismétlődnek a számsorban **kétszer**
- 4) 1357; 2468; **3571; 4682; 5713; 6824; 7135; 8246** **háromszor** szerepelnek

A felhasznált számsorok között van több olyan, ami eltérő tulajdonságú a többitől. A számok nem emelkedő sorrendben vannak, hanem a sorokban szereplőként (14 és 41 ugyanaz a részhalmaz). A forgásszimmetriát ezek rontják el. A számok a gyűrűn belül ismétlődnek. Hat különböző számnak kell lennie. Mivel a hat nem **prím**, ezért így épül fel a sor. Prímek esetén ilyen probléma nincs. Öt esetén például $\{12\}$, $\{23\}$, $\{34\}$, $\{45\}$, $\{51\}$, és **$\{12\}$** . A 3). sor számai kétszer ismétlődnek. Nyolcnál ugyanez van, de több eltérő számmal és számsorral. Ezeket másképpen kell elhelyezni a diagramban. Hatos esetén az $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, és $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$ alaphalmazok egy pontban metszik egymást, de két különböző feltérben az $\{135\}$ és a $\{246\}$

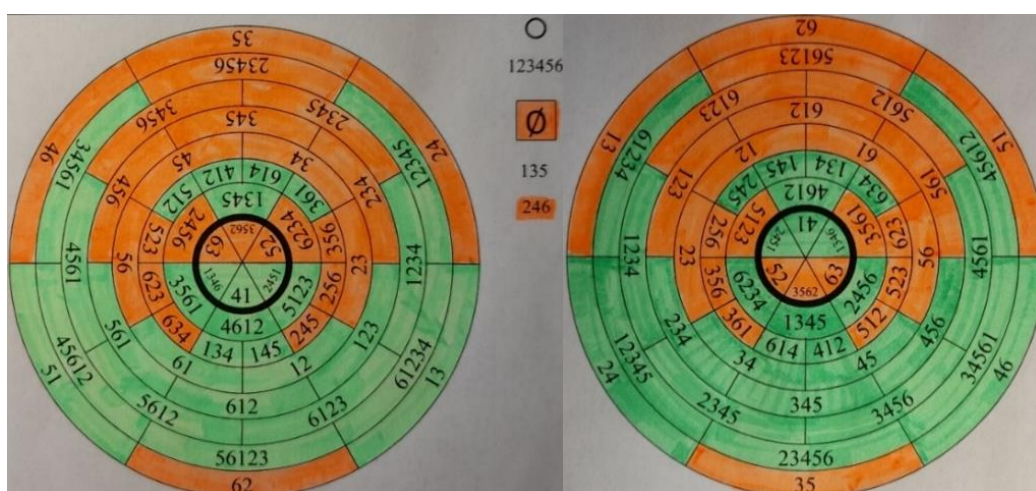
részhalmazként. A diagram többi részhalmaza a síkban van. **Alakjuk kör, illetve szabályos hatszög.** 3D-s nyomtatással a térbeli alakzat *egyszerűen létre hozható*, amely Excel táblázat nélkül szinte lehetetlen. A sorokban azok a számsorok helyezkednek el, amelyek a koncentrikus körökből álló, vagy szabályos hatszögeket tartalmazó diagramjaikban vannak. A számokkal való jelöléseken túl, a színezés jelentőséggel bír. A korábban említett öröklődési szabály (ötösről, hetesre) itt is alkalmazható. Ez azt jelenti, hogy korábban a diagram belsejében lévő, kilógó számsorok középre kerülnek. Köré pedig egy körgyűrű, a {123456} részhalmaz. Továbbá figyelembe véve, a **homeomorfiát** (4), amely értelmében egy halmazalak nyújtással, akár körgyűrűvé is alakítható. Összes részhalmaz egyértelműen megjelenik pontosan egyszer ($64 = 2^6$). Ennek alkalmazása biztosítja, hogy a Carroll diagramok is átalakíthatók.



18. ábra. Első hatos, lépcsős halmazalak - kehely formák

A hasonlóság szemmel látható az ötös és heteshez. Öröklődött a lépcsőzetesség, az alaphalmaz tengelyesen szimmetrikus, az alsó és felső rész (a középsőt mellőzve) egybevágó, így egymásba eltolható. Ha még el is forgatom az alsót 180 fokkal, majd a felsőre helyezve, az egymást fedő mezők komplementerek az {123456} -ra. A 18. jobb oldali ábra az egyes komplementer sorokat jól szemlélteti. A két fekete kehely egybevágó. A következő a szabályos hatszögekből álló ábra. (13.m.). Az Excel táblázatból lehet átmásolni, megfelelő módon elhelyezve a körgyűrűket.

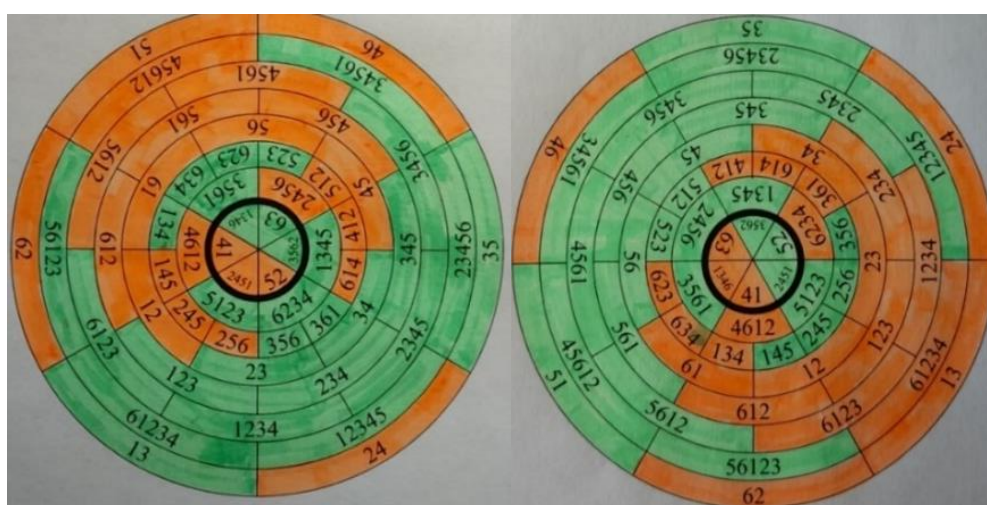
Síkban, görbevonalak közül, csak koncentrikus körökből felépülők



19. ábra. Az egyes és a négyes halmazalak tengelyesen szimmetrikusak, de nem egybevágók. A fekete körgyűrű az {123456} részhalmaz, az alaphalmazok metszete



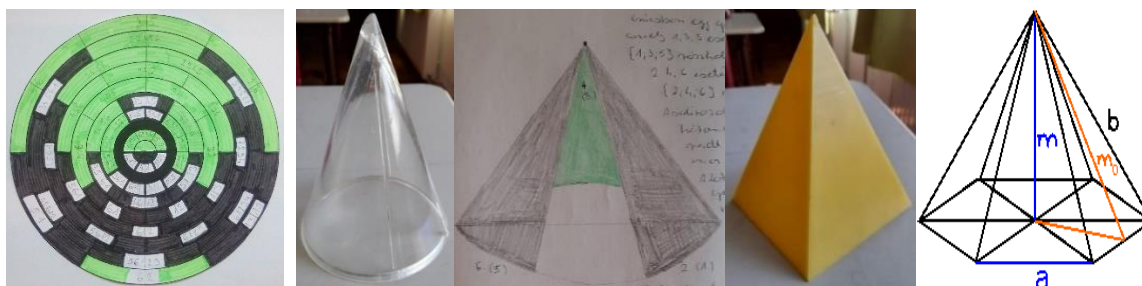
20. ábra. A kettes és hatos halmazalak egybevágó! Igazolható ránézéssel, vagy szembe fordítva őket



21. ábra. A hármas és ötös egybevágók! Igazolható ránézéssel, vagy szembe fordítva őket

Kiemelem, hogy a kettes-hatos és a hármas-ötös alaphalmazok párosával egybevágók, de nem tengelyesen szimmetrikusak. Az egyes-négyes ellenkezőleg, tengelyesen szimmetrikusak, de

nem egybevágók. Az általánosítás itt is működik. Korábban már említett, diagram a közepe nélkül: két részre válik az alakzat, amelyek egybevágók és egymásba tolhatók. A két rész alakja a lépcsőzetes szerkesztés miatt egy kehely 18. ábra. A lépcsőzetesség jelenti az általánosítás megerősítését. Ez nem egy heurisztikus felfedezés, mert ötre, hatra és hétre is alkalmazható. Kétféle alapsík van, *szabályos hatszögek* és *koncentrikus körök* úgy, mint öt és hét esetén. A síkban lévő részhalmazokhoz tartozik, a meghatározott két fél térben egy kúp vagy gúla.



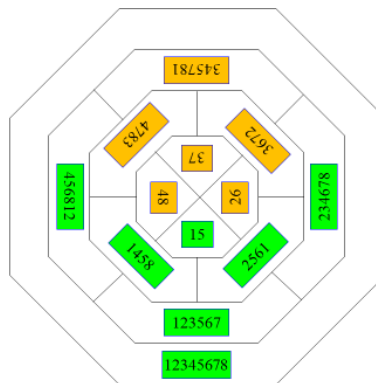
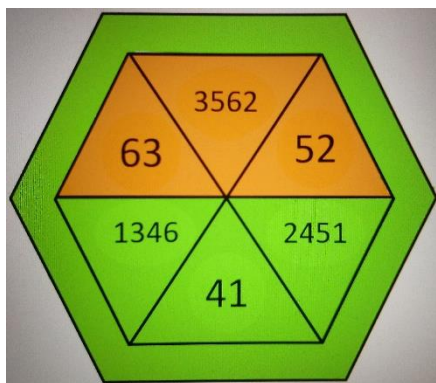
22. ábra. a) Az első hatos, amely tovább lett fejlesztve (19.-21. ábrák),
b, c) Síkból kiemelkedő kúp, d, e) Négy, illetve hat halmaz esetén a síkból kiemelkedő részek

Így áll elő a térbeli, forgásszimmetrikus hat halmaz diagram. Minden részhalmaz pontosan egyszer szerepel. Hiányoznak még az $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{1;3;5\}$, $\{2;4;6\}$ részhalmazok. Ezek a térben, a síkból kiemelkedve alkotják a diagramot. Koncentrikus körök esetén kúp, szabályos hatszög esetén egy hatoldalú gúla, szabályos hatszög alappal. A fekete kört metszi a kúp, az 1. 3. 5. halmaznál. Külső részére van emelve a kúp „m” magasságig (egyenest kúp). Csúcsa a körök középpontjában emelt merőlegese egyenesen van (m). A kúp bizonyos része kivágásra kerül (22. c). Hasonló az eljárás a sík (diagram) másik oldalán, de a 2. 4. és 6. halmazoknál marad meg a kúp-részlet. A csúcsokban egy-egy pont, amely az 1, 3, 5 esetén az $\{1;3;5\}$ részhalmaz. A 2. 4. és 6. esetén az $\{2;4;6\}$ részhalmaz. A sátrózott, a három megmaradt rész a kúpból. A többi eltávolított (22. c). Így szerkeszthető a hatoldalú gúla is.

A térbeli alakzat

- Forgásszimmetrikus (120 fok)
- Az 1. és a 4. halmazalak tengelyesen szimmetrikus, de nem egybevágók
- A 2. és a 6., ill. a 3. és az 5. egybevágó alakzatok, de nem tengelyesen szimmetrikusak

A forgásszimmetriát itt a $\{14\}$; $\{25\}$; $\{36\}$, $\{135\}$; $\{246\}$, $\{1346\}$; $\{2451\}$; $\{3562\}$ részhalmazok rontják el. Ha a diagramot térben elhelyezem, forgásszimmetrikus lesz.



23. ábra. Hatos és a nyolcas közepe. Az $\{123456\}$ és a $\{12345678\}$ metszet a külső gyűrűben

A három eltérő számsor (**41**, 2451, **52**, 3562, **63**, 1346) közül kettő a gyűrűn belül szerepel, mint egy fogaskerékszerűen kapcsolódva egymáshoz. A harmadik, a két fél térben, egy-egy csúcsban alkot metszetet $\{135\}$, és $\{246\}$. Korábban már szerepelt ilyen ábra, a négy halmaz eseteinek bemutatásakor (10.b). Az általánosítás miatt kellett ehhez az eszközhöz is nyúlni. Ez különösen akkor figyelemreméltó, ha ez a módszer alkalmazható a nyolc halmazra is (23. jobb). Hasonlóan szerkeszthetők, de a részhalmazszámok duplázódása nehézségekkel jár.

Álláspontom, ez egy térbeli, forgásszimmetrikus hat halmaz Venn-diagram. Hat darab térbeli alakzataból. A forgásszimmetria nyilvánvaló. Minden részhalmaz pontosan egyszer szerepel ($2^6 = 64$), a részhalmazok diszjunktak egymással. Van üres halmaz is.

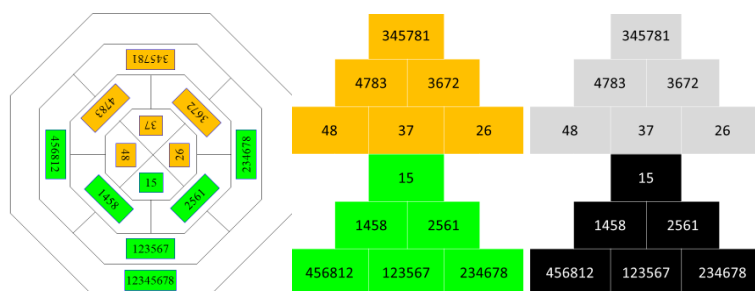
8. Térbeli, forgásszimmetrikus nyolc halmaz

Az i), ii), iii) számsorok a középső részbe kerülnek. Az iv) számsorok a diagram által meghatározott, két különböző féltérben helyezkednek el, hasonlóan a hatoshoz. A felépítés megegyezik a hatossal. Excel táblázatban készült, majd át kellett másolni a koncentrikus körökből álló diagramba. $2^8 = 256$ részhalmaza van. Tovább bonyolódik a szerkesztés, mert négy kilógó számsor nem illeszthető a körgyűrűkbe.

- i) $\{15\}$, $\{26\}$, $\{37\}$, $\{48\}$, $\{51\}$, $\{62\}$, $\{73\}$, $\{84\}$, **$\{15\}$** körbeért, egyszer ismétlődik
- ii) $\{1458\}$; $\{2561\}$; $\{3672\}$; $\{4783\}$; $\{5814\}$; $\{6125\}$; $\{7236\}$; $\{8347\}$, **$\{1458\}$** egyszer
- iii) $\{123567\}$; $\{234678\}$; $\{345781\}$; $\{456812\}$; $\{567123\}$; $\{678234\}$; $\{781345\}$; $\{812456\}$, **$\{123567\}$** körbeért, egyszer ismétlődik
- iv) $\{1357\}$; $\{2468\}$; $\{3571\}$; $\{4682\}$; $\{5713\}$; $\{6824\}$; $\{7135\}$; $\{8246\}$, és **$\{1357\}$** háromszor

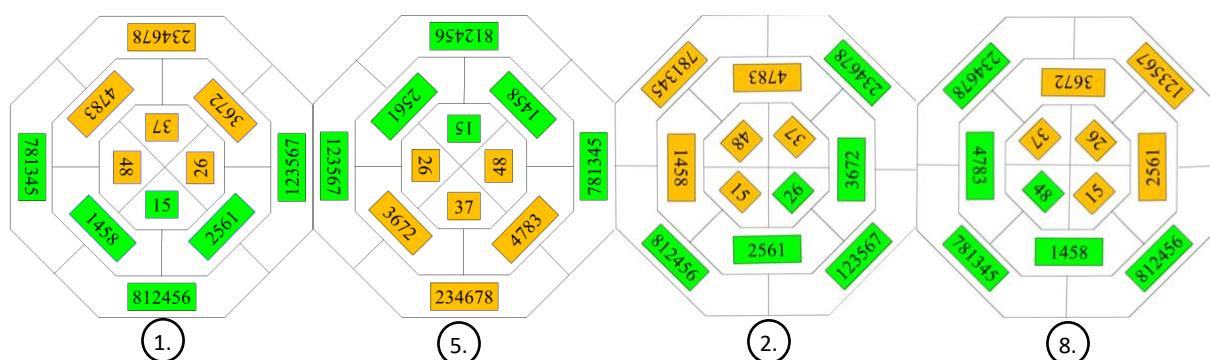
A színek alkalmazása különös élménnyel bír. Látható, hogy a kiemelt számsorok szín szerint piramisszerűen helyezkednek el. Alulról nézve 3; 2; 1 zöld, majd 3; 2; 1 okker. Eltolhatók egymásba (24.), mint az ötös, hatos és hetes diagramok! A külső gyűrű a nyolc halmaz metszetét

alkotja $\{12345678\}$. A részhalmazszámok jelentős növekedésével a sorok elhelyezése is egyre bonyolultabb. A szerkesztésnél a lépcsőzetes felépítést alkalmaztam.

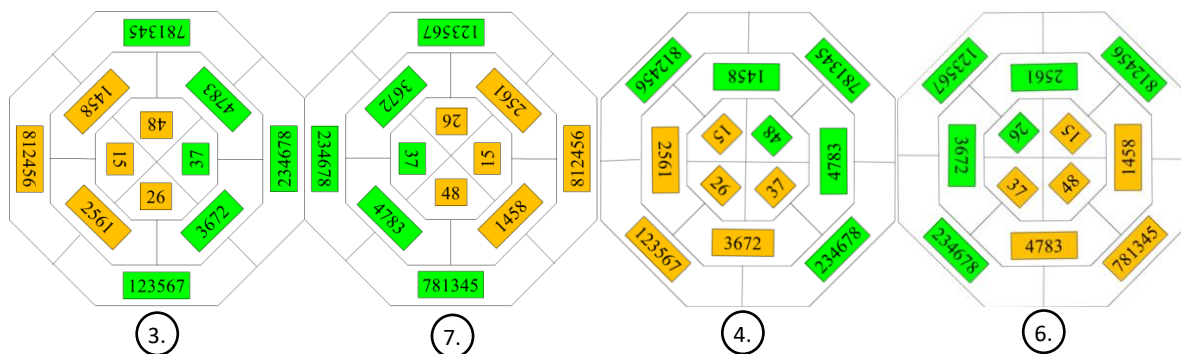


24. ábra. A diagram belseje a részhalmazokkal. Lépcsős Excel felépítés - átörököített tulajdonság -, azaz a szimmetriát elrontó számsorok egy belső egységet alkotnak

A belső három számsort (gyűrűt) leszámítva, amelyek elrontják a forgásszimmetriát, a diagram alaphalmazai egybevágók, mint a hatosnál. Ezért elég csak erre a három számsorra fókuszálni.



25. ábra. a) Az 1. és 5. tengelyesen szimmetrikusak ábrák, de nem egybevágók,
b) A 2. és 8. halmazalak egybevágó, de nem tengelyesen szimmetrikusak



26. ábra. a) A 3. és 7. halmazalak egybevágó, de nem tengelyesen szimmetrikusak,
b) A 4. és 6. halmazalak egybevágó, de nem tengelyesen szimmetrikusak

Az ábrák alatti számok, az adott alaphalmaz számai. A szerkesztések bizonyítékok a halmazok egybevágóságára vagy tengelyes szimmetriájára. A szabályos nyolcszögekből álló diagram elkészíthető. Ezzel a síkbeli rész leírásra került. Az ehhez tartozó térbeli kúp vagy az egyenes nyolcoldalú gúla, a térbeli, forgásszimmetrikus nyolc halmazt hozza létre. Mindegyik halmazalak lyukas, mint a hatos és a hivatkozott, gyűrűt tartalmazó Venn, (2.a). A sok részhalmaz szám miatt, szinte elképzelhetetlen a szerkesztés az Excel táblázat nélkül.

9. Lewis Carroll diagramok

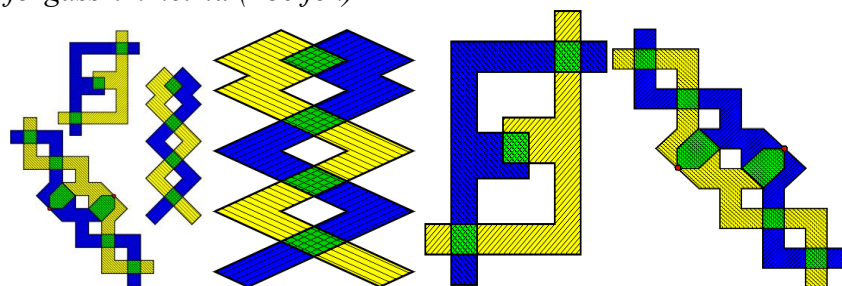
A Carroll diagramok akkor kezdtek érdekelni, amikor olvastam, hogy nyolc téglalappal is szerkeszthető Venn-diagram (Tuzson, 2021). Bizonyítása: teljes indukcióval. Megpróbáltam a Carroll négyszöges diagramokat Venn-diagrammá alakítani. Miután publikálásra került, hogy síkban is lehet összetett számok esetén forgásszimmetrikus Venn-diagramot szerkeszteni, a létezését már nem kell a továbbiakban bizonyítani!

Alkalmazás

A halmazelméleti alapok játékos, életszerű formában történő tanítása (8.m.) *Két halmaz esetén*, egy halmazt alkotnak a paprikák, egy másikat, amik pirosok. Ezek közös része a piros paprikák, illetve, amely nem piros, nem paprika. *Három halmaz*, középen egy újabb halmazzal, amely csak gömbölyűszerű testeket tartalmaz. Négy újabb részhalmaz keletkezik. 1. gömbölyűszerű, piros paprika (bal felső). 2. nem piros, gömbölyűszerű paprika (bal alsó). 3. piros, gömbölyűszerű, nem paprika (jobb felső). 4. gömbölyűszerű, nem piros és nem paprika (jobb alsó). Gyakorlat: meg kell keresni a helyüket a Carroll ábrában. Négyre is szemléltet.

Néhány különleges ábra

Tükörkép-, és forgásszimmetria (180 fok)



27. ábra. a) Grünbaum feltekeredett kígyói, b) A k -szoros 2-Venn diagram tükörkép szimmetria (8)

Ezekkel az ábrákkal csak az a problémám, hogy több különálló metszet (zöld rész) keletkezik. Venn-diagram szerkesztésre, ebben a formában nem felhasználhatók.

9.1 Két halmaz Carroll Venn-diagram

- az 1. sor x tulajdonságú
- a 2. sor, nem x tulajdonságú, x'
- az 1. oszlop y tulajdonságú
- a 2. oszlop, nem y tulajdonságú, y'
- a sárga mező csak x tulajdonságú, xy
- a kék mező csak y tulajdonságú, $x'y$
- a zöld mező x és y tulajdonságú, xy
- a fehér mező sem x , sem y tulajdonsággal nem rendelkezik, $x'y'$

xy	$x'y'$
$x'y$	$x'y'$

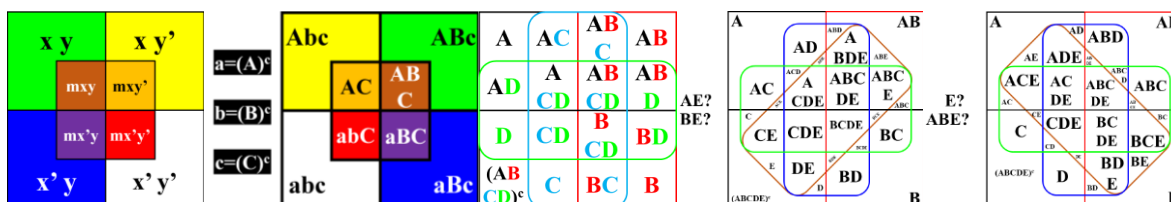
Két halmaz

Ezt használok fel alapegységként a szerkesztéseknél

9.2 Három halmaz Carroll Venn-diagram

Különböző jelölésmódok

1. Carroll: x, x', y, y', m, m'
2. Gray-kód pl.: 0000, 1111, ahol 1 a tartalmazás, 0 a nem tartalmazás
3. 123...89AB jelöléssel. $A=10, B=11$
4. ABC...ZS és abc...zs, ahol $a=(A)^c, b=(B)^c$, és $c=(C)^c$



28. ábra. a) Három halmaz, kétféle jelöléssel, b) Négy halmaz 9.3 alfejezet, c) öt halmaz Carroll diagram (az ötödik halmaz átlósan)

9.3 Négy halmaz Carroll Venn-diagram

Nincs újabb információ, csak egy kép a négyesről (28.b).

9.4 Öt halmaz poligon diagramok

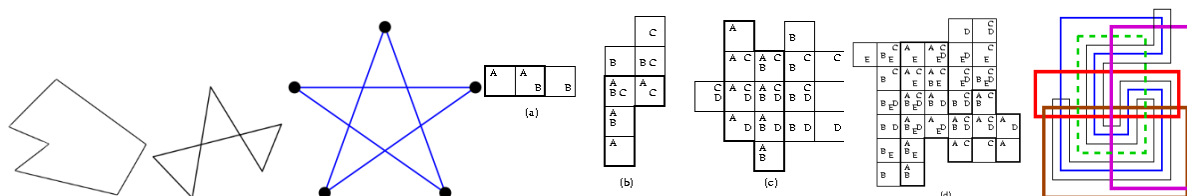
Az ötödik halmaz átlósan, két elrendezéssel. Hiányzó részhalmazok: $\{AE\}$ és $\{BE\}$, vagy $\{E\}$ és $\{ABE\}$. Teljes indukcióval bizonyítható, hogy nyolc téglalappal szerkeszthető (Tuzson. 2021.). Grünbaum öt ellipszis felhasználásával ($360:5=72$ fok) visszatért a forgásszimmetria. A téglalapokat is el lehet forgatni, hogy meglegyen az összes részhalmaz. Minden következő halmazzal, az előzők részhalmazait kell metszeni. Így keletkezik az eggyel nagyobb számú diagram. Ha az ötödik téglalapot itt ellipszissre cseréljük, Venn-diagrammá válik.

Más utat választottam!

9.5 Négyzetekből felépülő poligon Venn-diagramok

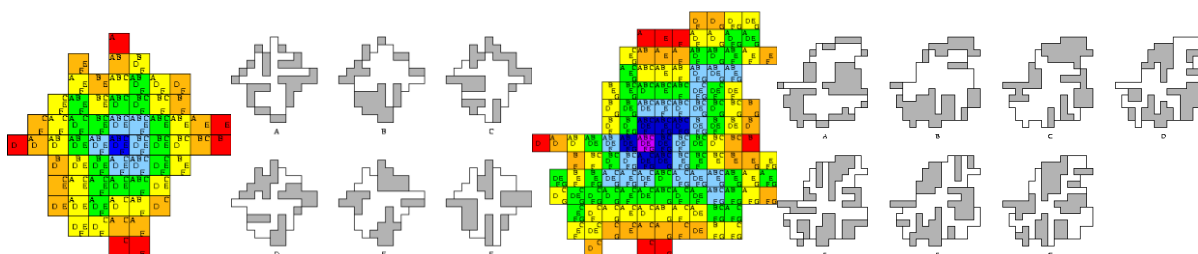
Vannak ábrák poligonok metszeteivel. Poligonokból felépített Venn-diagramok. (29. ábra) Minden alaphalmaz különböző, metszetük adja a hat és hét halmazt. Az a tény, hogy nem kell bizonyítanom a forgásszimmetrikus alakzatok és az összetettszámok kapcsolatát, megkönnyítette a dolgomat. Ebben az alfejezetben, csak be kell mutatnom az elkészített szerkesztéseket, melyek a térbeli Venn-diagramok halmazába sorolok. Korábban hivatkoztam már, az egyetlen publikált szerkesztésre (négy gömb kölcsönös metszete). A hetes és nyolcas is könnyen elkészíthető, csak minden meglévő részhalmazt metszeni kell a következő alaphalmazzal – Smith eljárási móddal.

„Az egyszerű sokszögeket gyakran hívják Jordan-sokszögeknek is, mivel a Jordan-féle görbetétel szerint egy ilyen sokszög a síkot két részre osztja, a belső és a külsőre. Egy egyszerű sokszög a síkban topologikusan izomorf egy körrel, míg a belseje egy körlappal. A nem egyszerű sokszögeket a geometriában önmetsző sokszögeknek, a grafikusok pedig komplex poligonoknak nevezik. A csúcsokat csak az élek végén számolják, nem ott, ahol az élek metszik egymást a térben. Az ilyen poligonoknak nem feltétlenül van egyértelmű belső és külső része.” (6)



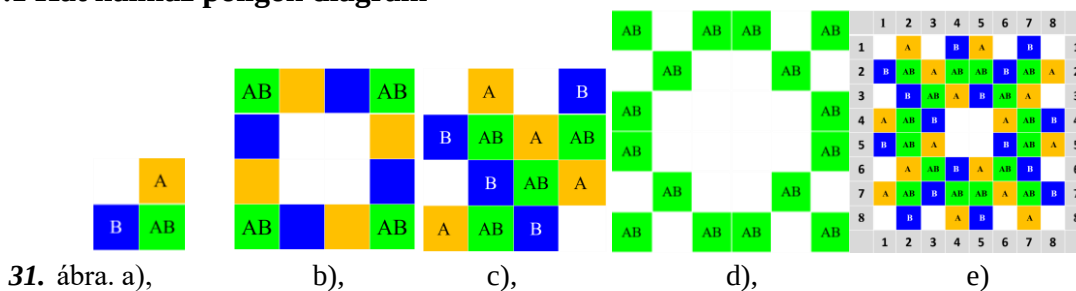
29. ábra. a) Egyszerű konkáv (6), (13), b) Nem egyszerű, komplex, c) Összetett (önmetsző) ötszög.

Kettő, három, négy és öt négyzetből felépülő Venn-diagramok (8). Hat halmazra egy változat

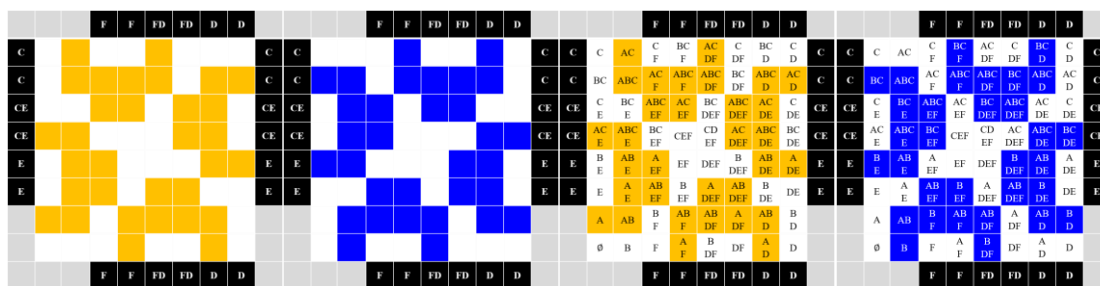


30. ábra. Chow és Ruskey, hat és hét halmaz Venn-diagram. A színnel, az azonos számú metszeteket csoportosítják, A; B; C; D; E; F egyelemű (piros mezők). További is hasonlóan (7)

9.5.1 Hat halmaz poligon diagram



Az a) két halmaz Carroll diagram. A b), az e) belső része kinagyítva. Ez itt négy darab, két halmaz diagram úgy, hogy a sarkokban vannak elhelyezve a zöld mezők ($A \cap B$) Középen az üres halmazok vannak. Továbbá, azonos színek nem kerülhetnek egymás mellé, csúcsban érintkeznek, c. A csatlakozó diagramok úgy illeszkednek, hogy minden zöld mező ($A \cap B$), csúcsban érintkezzen d). Az e) ábrából az A 32. a és b halmaz alakja szerkeszthető.



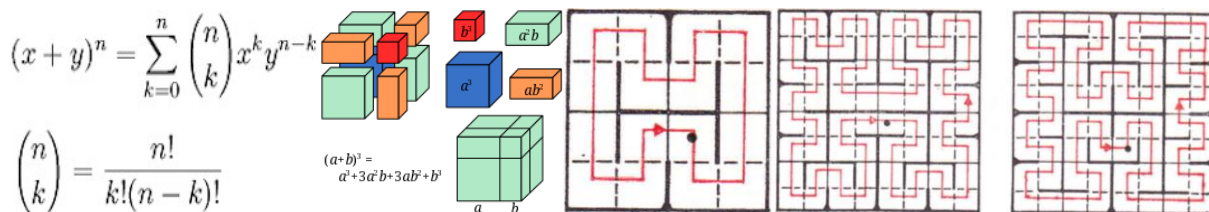
32. ábra. a), b), c), d)

Cél, hogy megmaradjon a négyzetes alakú diagram, így lesz forgásszimmetrikus. A négyzetben belül kellett létrehozni a halmazalakokat. Adott az 31.a, amely a klasszikus két halmaz Carroll diagram. Ezek építőelemekként alkotják a hatos diagramot. Nem lehet alkalmazni a kettes alkotókat csak úgy egymás mellé téve. Ennek oka, a Venn-diagramnak zártnak kell lenni (az alaphalmazoknak is). Ha egymás mellé és alá tennénk a fenti négyzetet, akkor több A és B halmaz is lenne, de ez nem lehet! Ilyen felépítésű a nyolc halmaz L. Carroll diagram, ami nem Venn-diagram. Minden részhalmaz szerepel, pontosan egyszer. Az A és B zárt halmazok metszetének is zártnak kell lenni. Azaz, minden négyzetből át lehet jutni, minden vele megegyező színűbe. Ilyen az 31.d) Az A és B halmazok metszete zárt alakzatot hoz létre. „A homeomorfia (topológiai izomorfia) miatt a két alakzat azonos, mert egymásba alakíthatók nyújtással. Így szintén zárt alakzatot alkot. Az izomorfia (14) két matematikai struktúrának az a tulajdonsága (kölsönös viszonya), hogy elemeik a strukturális tulajdonságokat megőrizve egymásra kölcsönösen egyértelműen, bijektíven leképezhetők. A struktúramegőrző és kölcsönösen egyértelmű leképezést, amely az izomorfia létét bizonyítja, nevezzük izomorfizmusnak. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy a két struktúra „tulajdonképpen” ugyanaz, csak az elemeik másképp vannak elnevezve, jelölve”. A két alaphalmaz 31.a, b, egybevágó. Ezek az alakzatok egy körgyűrűvel homeomorf, a két alaphalmaz metszete. Ezeket metszem el négy téglalappal (ellipszissel). A $C \cap D \cap E \cap F$ metszetekkel együtt, hat halmaz diagramhoz jutunk, $2^6 = 64$. Ebben a 8x8-as négyzetben minden részhalmaznak megvan a helye. Az üres halmaz a bal alsó sarokban van. Az 33.a, az A, B halmazok és a metsző halmazok részhalmazai vannak. Az 33.b, az összes betűcsoport, színezve. Értelmezésében az 34. ábra segít. Ezek a Binomiális tétel együtthatói. Így előáll egy 8x8-as négyzetben a hat halmaz forgásszimmetrikus diagram. Összetevője négy egybevágó téglalap, és a két további alaphalmaz 31.a, b. A kis négyzeteken belül, felül ABC, alul DEF van. A bal alsó sarkot összekötve a jobb felsővel, egy színszerinti szimmetria tengelyt van, középen.

			F	F	FD	FD	D	D					F	F	FD	FD	D	D				
C	C	AC	C	BC	AC	C	BC	C	C	C	C	AC	C	BC	AC	C	BC	C	C	C	C	C
C	BC	ABC	AC	BC	ABC	BC	ABC	AC	C	C	C	BC	ABC	AC	BC	ABC	BC	ABC	AC	C	C	C
CE	C	BC	BC	ABC	AC	BC	ABC	AC	C	CE	CE	C	BC	ABC	AC	BC	ABC	AC	C	CE	CE	CE
CE	AC	ABC	BC	ABC	CE	AC	ABC	BC	CE	CE	CE	AC	ABC	BC	CE	AC	ABC	BC	CE	CE	CE	CE
E	B	AB	A	AB	A	AB	A	AB	E	E	E	B	AB	A	AB	A	AB	A	AB	E	E	E
E	E	A	AB	AB	AB	AB	AB	AB	E	E	E	A	AB	AB	AB	AB	AB	AB	E	E	E	E
	A	AB	B	AB	B	AB	B	AB				A	AB	B	AB	B	AB	B				
	Ø	B	F	A	B	DF	A	D				Ø	B	F	A	B	DF	A	D			
			F	F	FD	FD	D	D					F	F	FD	FD	D	D				

Ø	1	2	3	4	5	ABC DEF
1	6	15	20	15	6	1

6. Táblázat. $n=7$ hehez tartozó binomiális sor mindegyik részhalmaz megjelenik
33. ábra. Hat halmaz forgásszimmetrikus, kölcsönös metszete, a poligonoknál jelölt színezéssel (Wagon; Webb. 2008.)



34. ábra. a) Binomiális tétel, az együtthatókkal b) A tétel geometriai jelentése, ha $n=3$,
c) H. J. S. Smith ábra (15), alapja, hogy az előző részhalmazokat metszeni kell a következővel

9.5.2 Hét halmaz poligon diagram

A Venn ábrák (3.m.) alapján, a hetedik halmazt úgy kell szerkeszteni, hogy az összes részhalmazt metssze (Smith, 60.a). Amely tengelyes-, és forgásszimmetrikus. Mind a $128=2^7$ részhalmaz pontosan egyszer szerepel. A Venn-diagram definíció szerint térbeli, az A és B alaphalmazok, körgyűrűszerűek.

Üres	1	2	3	4	5	6	7
1	7	21	35	35	15	7	1

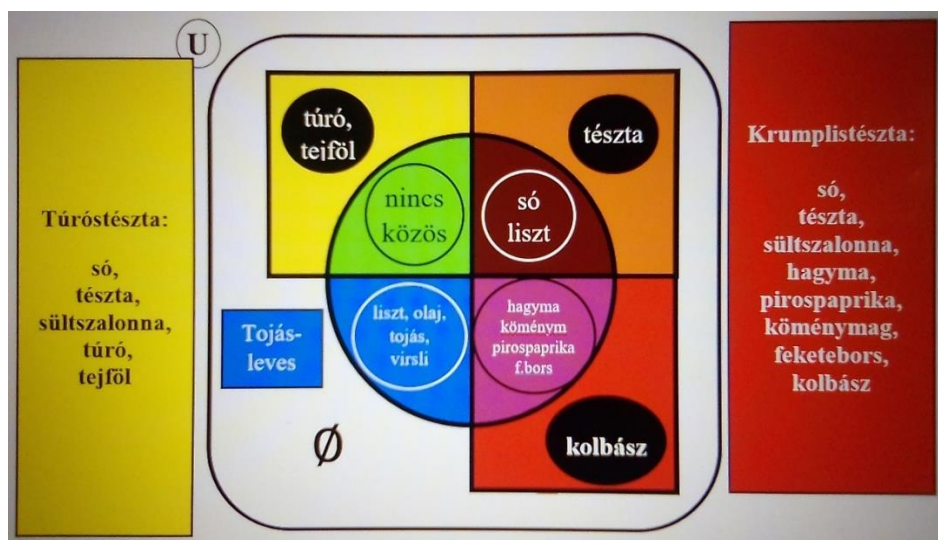
7. Táblázat. $n=7$ hehez tartozó binomiális sor mindegyik részhalmaz megjelenik

			G		F	FG	F	FD	FDG	FD	D	DG	D				F	F	FD	FD	D	D			
C	C	CG	ACG	AC	CF	BCFG	BCF	ACDF	ACDFG	CDG	CD	BCDG	CDG	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
C	BC	BCG	ABCG	ABC	ACF	ACFG	ABCF	ABC	BCDF	BCD	BCD	BCD	BCD	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
CE	CE	CEG	BCEG	BCE	ABC	ACE	ACEF	BCD	BCD	ABC	ABC	ACD	ACD	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE
CE	ACE	ACEG	ABCE	ABCE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE	CE
CEG	CEG	CEG	ABCEG	ABCEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG	CEG
EG	EG	EG	ABEG	ABEG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG	EG
E	E	E	ABE	ABE	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
E	E	E	ABE	ABE	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
	A	AG	ABG	AB	BF	BFG	ABFG	ABF	ABD	ABD	ABD	ABD	ABD												
	D	DG	BG	B	F	FG	ABF	ABF	ABD	ABD	ABD	ABD	ABD												
			G		F	FG	F	FD	FDG	FD	D	DG	D				F	F	FD	FD	D	D			

35. ábra. Forgásszimmetrikusak

Az 33.-as ábra, mint adattároló is használható. Hat csoport közös részei elhelyezhetők. Egy raktározási feladat esetén, vagy a korábban említett orvosi felhasználás. A kémiai kifejezések is bővíthetők hatra. Még nehezebb feladatot lehet csinálni belőlük. Az egyes tantárgyi feladatok, a halmazok számának növelésével, duplázódó adatmennyiség jön létre. Az általános, de a középiskolai felhasználás is már meghaladhatja a tanulók befogadóképességét. Háromra, négyre vagy ötre biztos felhasználást jelent. Hatnál nagyobb felhasználásra a korábban említettek alkalmasak. Szakmai tapasztalataim ezeken a területeken hiányos, így a lehetőséget adom meg arra, hogy jól használható legyen. Szakács ismerősöm javaslatára, a szakképzésben is alkalmazható lehet ez az eljárás. Veszek négy, öt, illetve hat különböző ételt. A közös összetevőjük alapján töltöm ki a részhalmazokat. Ez egy gyakorlási vagy ellenőrzési forma.

9.5.3 Alkalmazások



36. ábra. Alkalmazások, három halmaz körrel (Venn-diagram), illetve Lewis Carroll diagrammal. Kémiai atomok, molekulák és vegyületek felhasználásával (9; 10)

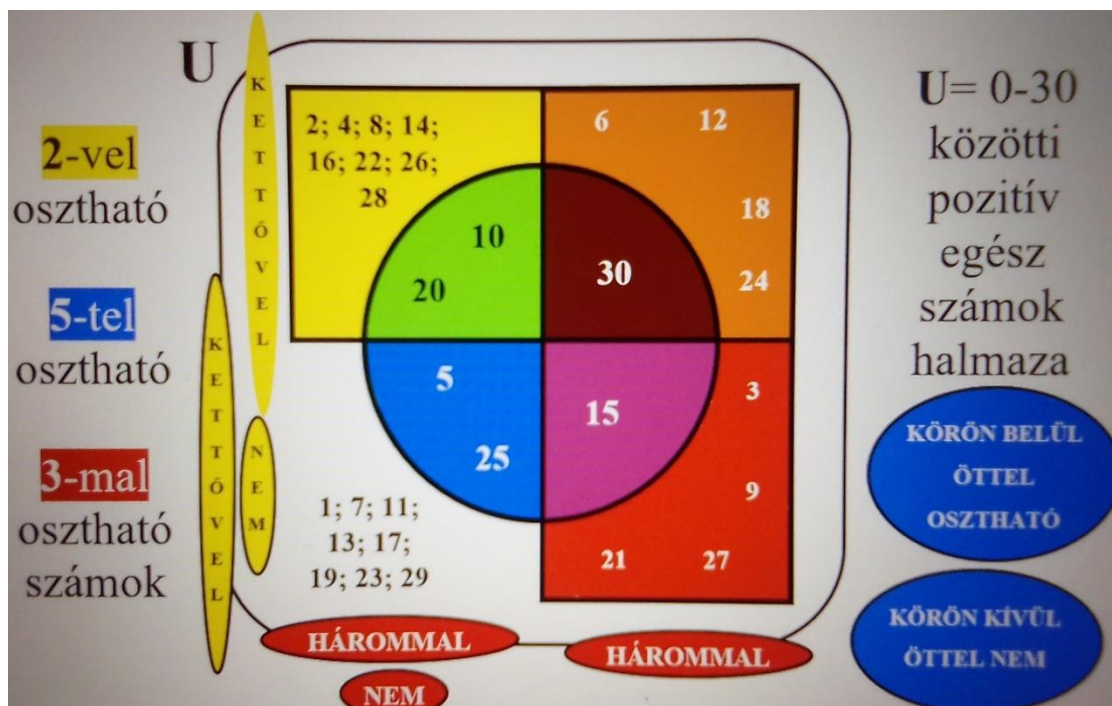
1. Túróstészta: sós, liszt, tészta, sült szalonna, túró, tejföl
2. Krumplitészta: sós, liszt, tészta, sült szalonna, hagyma, piros paprika, köménymag, feketebors, kolbász
3. Virslis tojásleves: sós, liszt, hagyma, p. paprika, köménymag, f.bors, liszt, olaj, tojás, virsli

Az 33.-as, hat halmaz ábra, mint adattároló is használható. Hat csoport közös részei elhelyezhetők. Egy raktározási feladat esetén, vagy a korábban említett orvosi felhasználás. A kémiai kifejezések is bővíthetők hatra. Még nehezebb feladatot lehet csinálni belőlük. Az egyes tantárgyi feladatok, a halmazok számának növelésével, duplázódó adatmennyiség jön létre. Az általános, de a középiskolai felhasználás is már meghaladhatja a tanulók befogadóképességét.

10. Feladatok a halmazelméleti alapok tanításához

10.1 Oszthatóság hatodik és nyolcadikosoknak, Carroll halmazok segítségével

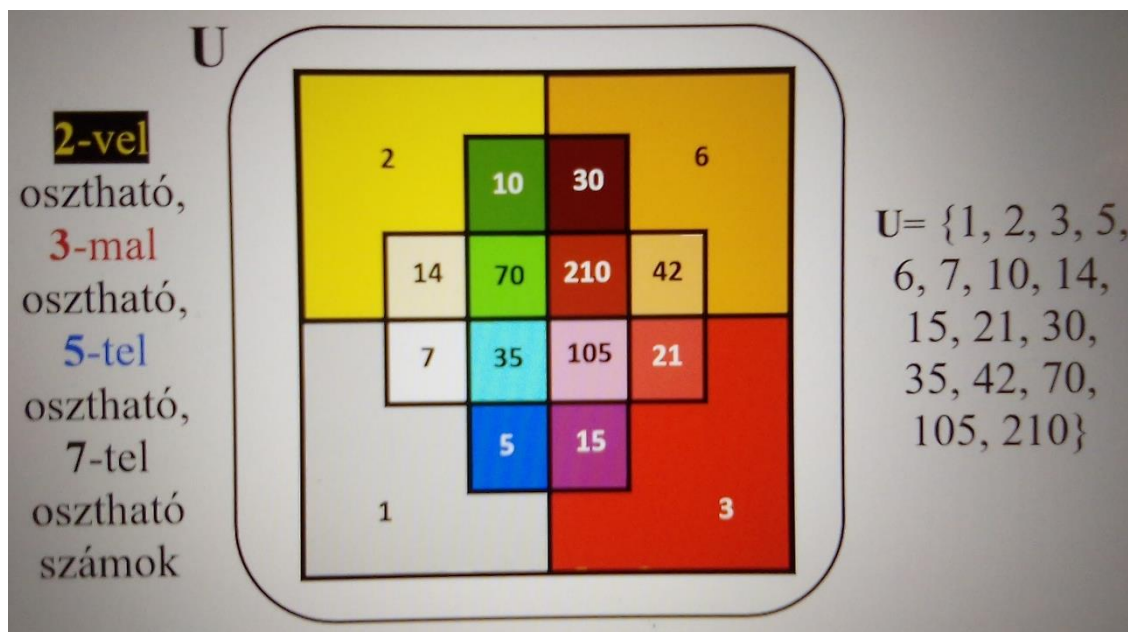
1. **Feladat.** 0-30-ig keressük meg minden számnak a helyét!



37. Kettővel, hárommal és öttel osztható számok, az U halmazon értelmezve

10.2 Oszthatóság és a logikai szita alkalmazása kilencedikeseknek, C. halmazokkal

1. **Feladat.** Helyezzük el az U elemeit az ábrában. Mindegyiknek van helye, egy mezőbe 1!



38. Kettővel, hárommal, öttel és héttel osztható számok, az U halmazon értelmezve

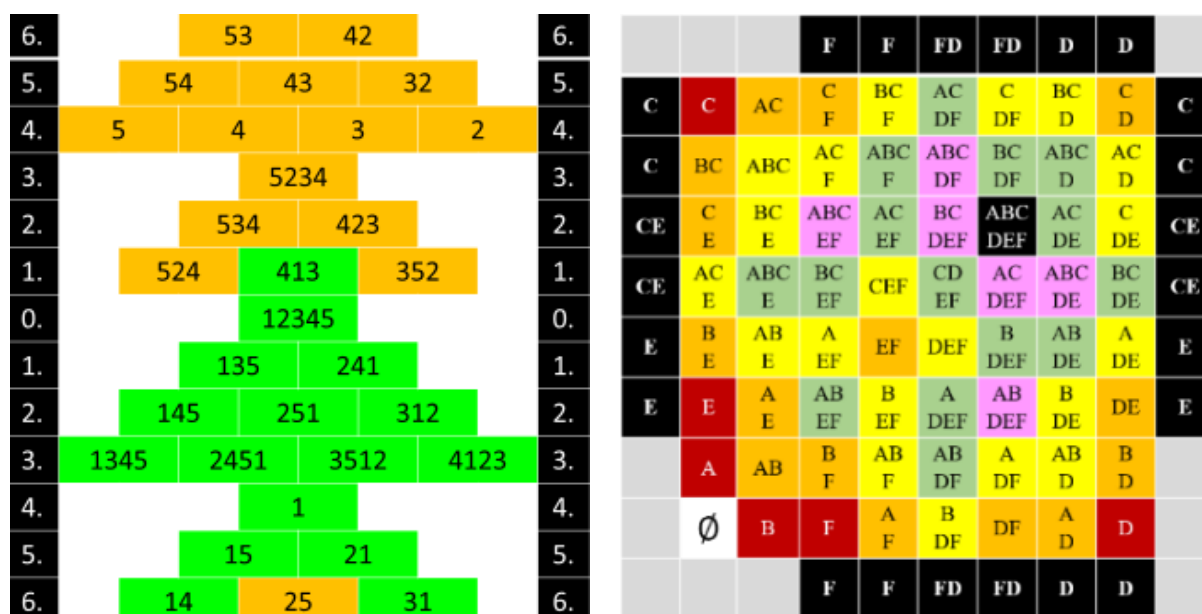
Háromra, négyre vagy ötre biztos felhasználást jelent. Hatnál nagyobb felhasználásra a korábban említettek alkalmasak. Szakmai tapasztalataim ezeken a területeken hiányos, így a lehetőséget adom meg arra, hogy jól használható legyen. Szakács ismerősöm javaslatára, a szakképzésben is alkalmazható lehet ez az eljárás. Veszek négy, öt, illetve hat különböző ételt. A közös összetevőjük alapján töltöm ki a részhalmaz helyeket. Ez egy gyakorlási vagy ellenőrzési forma lehet (36. ábra).

Logikai szita: két véges halmaz uniójának elemszámát megkapjuk, ha a halmazok számosságát összeadjuk, és kivonjuk ebből a metszetük számosságát, hiszen a metszetben lévő elemeket az összeadás során **kétszer** is számoltuk, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Három véges halmaz uniója elemszámának vizsgálatakor még körültekintőbben kell eljárunk: – összeadjuk a három halmaz számosságát; – majd kivonjuk ebből a kettős metszetek számosságát, hiszen az azokban szereplő elemeket kétszer számoltuk az előző összeadásnál; – végül hozzáadjuk a hármas metszet számosságát, hiszen az abban szereplő elemek számát háromszor számoltuk első lépésben, majd háromszor kivontuk a másodikban.

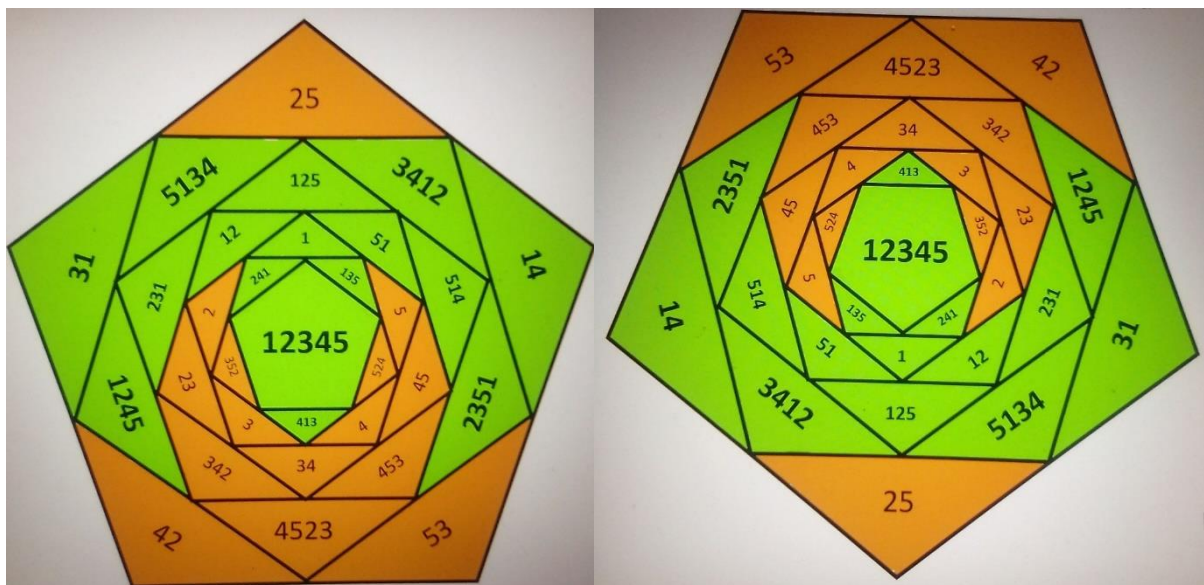
Három véges halmaz uniója:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Négy, öt és hat véges halmaz uniójának elemszáma is ezzel a módszerrel megkaphatók. Ezek a **szitaformulák** (9.-es tankönyv, 20-31.). (Tuzson, 1994, 2014, 2021)



39. a) Forgásszimmetrikus öt halmaz Venn-diagram, egy halmazalakja Excelben – adattárolás, 13. ábra, b) forgásszimmetrikus hat halmaz, 33. ábra. 3-7 halmazig vannak szerkesztéseim. Kémiai kifejezések felhasználásával, négy, öt, hat halmaz esetén is lehetséges (9.m)



40. A zöld egy alaphalmaz, el kell forgatni 72 fokkal. Így lehet előállítani Venn-diagramot. Hasonló, mint a 11. melléklet (orvosi alkalmazás). A két ábra közti különbség, hogy a számok 180 fokkal elforgatottak (így az ábra is)

11. Összefoglalás

11.1 Eredményeim

1. Koncentrikus körök alkalmazása Venn-diagramként
2. Szabályos, prím sokszögek alkalmazása Venn-diagramként ($n \leq 3$)
3. Ezek vegyes rendszere három, öt és hét halmazra
4. Excel használata a szerkesztések átláthatósága és megkönnyítéseért. Adattárolás
5. Geometriai transzformációk alkalmazása a szemléltetéshez
6. Egyszerűsített jelölésű ábrák
7. A térbeli Venn-diagram, hatos halmazábra
8. A poligonból felépülő Carroll diagramok lehetséges átalakítása Venn-diagrammá
9. Színek és a szám jelölések kompozíciója. Esztétikai élmény
10. Mi rontja el a forgásszimmetriát a nem prímek esetén (hat és nyolc)?

11.2 Összegzés

Az összegzés esetemben nem egyszerű, már csak a három évtizedes kutatómunka miatt sem. A következő elem, hogy mi-mire jó, mire alkalmazható, miért készült? Az ábrák fejlettségé sem volt még tökéletes. Azonban a halmazábrák az élet minden területén alkalmazhatók, az oktatás, a közgazdaságtól, az orvostudományig számtalan helyen. Ezeknek sok, az Interneten fellelhető példája van, amelyek bemutatása a dolgozatomnak nem feladata.

Meghatározó különbség munkám és egyéb szerkesztések között, hogy geometria alakzatok az alaphalmazok, amelyeknek metszetét képzik. Én szabályos sokszögekben és koncentrikus körökben kerestem a megfelelő n -hez tartozó alaphalmazokat.

A kezdeti gondolatok abból indultak ki 1992-ben, hogy ha van négyes Venn-diagram, akkor hogyan néz ki az 5, 6, 7, 8, 9 ...? Sok hiába való próbálkozás után felhagytam minden reménnyel és huszonöt évig ez így is maradt. Ekkor már sok online irodalom hozzáférhető vált, amelyből először tudakoztam. Megnéztem mik találhatók, majd folytattam korábban elkezdett munkámat. A forgásszimmetrikus Venn-diagramok különlegeseek, amelyek újabb gondolatokat ébresztettek bennem. Első lépéseim arra vonatkoztak, hogy legyen nekem is forgásszimmetrikus öt halmaz Venn-diagrammom, bárhog is néz ki. Ez sikerült. Folytatva, viszont arra törekedtem, hogy minél több matematikailag is leírható, megfogalmazható támfalam legyen. Addig próbálkozom, ameddig valami nem sikerül. Az alaphalmazalakok, kezdetben nem voltak tengelyesen szimmetrikusan, de azzá tettem őket (ötös, hetes). Következő lépésem, hogy legyen a következő prímszámnak is saját ábrája. Ameddig nem használtam Excel táblázatot a munka lassan haladt. Utána már gyors fejlődésnek indult a kutatómunkám. Csak úgy egymás után kinőtek az újabbnál újabb ábrák. A probléma, hogy nem

sikerült tengelyesen szimmetrikus hetes alaphalmazú ábrát szerkesztenem. Majd ezt is sikerült megoldanom. Folyamatos volt az igény, hogy kell egy általánosítás minden p prímre, akkor lenne igazán nagyszerűvé tenni. Feltett célom, ennek belátása. Most még csak sejtésnek kezelem, hogy ez a szerkesztési mód, minden prímre érvényes lehet! Egyetlen egy ilyen van, Edwards munkái a teniszlabdás modellel. Sokat gondolkoztam, hogyan adaptálhatom bizonyos részleteit, de nekem más a kiindulási pontom, ezért nehéz közös nevezőt találnom. *Stuart Anderson öt és hét halmaz* ábrái hasonlatosak. Itt szembesültem, hogy másoknak is van hasonló gondolata, közel hasonló az enyémhez. Amikor már vannak kész szerkesztések, akkor lehet újabb gondolatokat kipróbálni, esetemben is ez történt. Lépésről - lépésre haladtam, végül a L. Carroll ábráknál is leragadtam. A térbeli diagramok felépítése nagyon gyerekcipőben jár. Ennek 3D-s modellje elengedhetetlen. Minden párosszám, $4 \cdot k + 4$ vagy $4k$ ($k=0, 1, 2, 3, 4, \dots$, 0 és pozitív egészek) alakú, azaz a számok fele modellezhető ezzel az eljárással. A prím és párosszámokon túl, csak nyitott kérdések vannak. Pl.: 9, 15..., a kilenc ráadásul négyzetszám is. Kísérletet sem tette előállítására. Ezért van, hogy ilyen számokkal nincsenek kutatási eredményeim. Nincs fogódzkodó, semmi nem működik, ami a többinél igen. Ezt a témát jelenleg elengedtem. Azonban, ami érdekes a párosszámok esetén, mi rontja el a szimmetriát? Ez is érdekelt. Igyekeztem erre választ adni. Lényege, hogy vannak olyan számsorok, amelyek nem illeszkednek a többi közé, ezért nem szerkeszthető ilyen számok esetén Venn-diagram. Egy-egy gyűrűben háromszor fordul elő 1-1 számcsoport. Ez nem maradhat benne az ábrában! Ha az eltérő számcsoportokat kiveszük, meglepő módon forgásszimmetrikus alakzat lesz. Az eltérő számsorok, egy körgyűrű belsejébe kerülnek, ahol el lehet helyezni őket úgy, hogy alaphalmazokat képezzenek. Ez engem is meglepetésszerűen érintett, amit a nyolcas esetén piramis felépítés kezdet létre jönni.

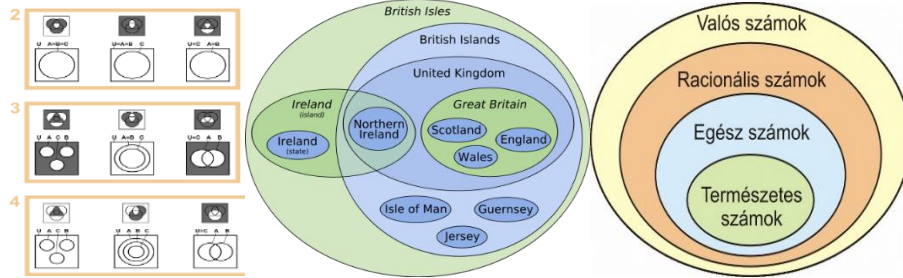
11.3 További kutatási lehetőségek

- Oktatási célra felhasználható modellek előállítása 3-7 halmaz esetén
- Mérnöki szerkesztő programok használata, színezéssel
- 3D-s térbeli modellek készítése, a prímek, illetve a párosszámok esetén
- A tizenegyes forgásszimmetrikus Venn-diagram elkészítése, az általánosítás szerint (Ruskey; Savage; és Wagon 2006). (Khalegh; Ruskey; Roses, N. 2014.)
- A nyolcas és tízes térbeli alakzatok, és modelljeinek elkészítése
- Feladatgyűjtemény különböző tantárgyakhoz. Óravázlatok. Lehet az általános-, közép-, és felsőoktatási tanítás
- Internetes feladatgyűjtemények. Vannak ilyenek, ezek újragondolása (9. és 10.)

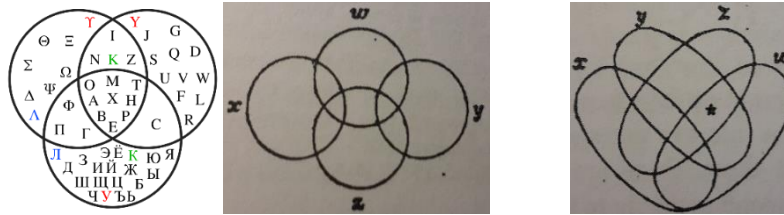
Örömet fejezem ki, hogy egy matematikai témával ilyen hosszú ideig foglalkozhattam!

Még jelentős potenciált érzek benne!

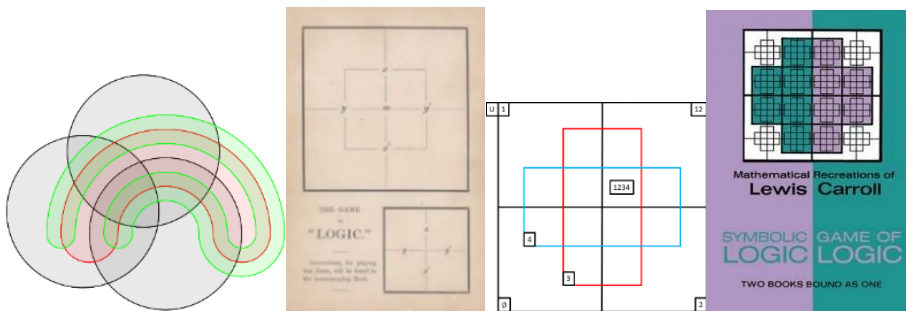
12. Mellékletek



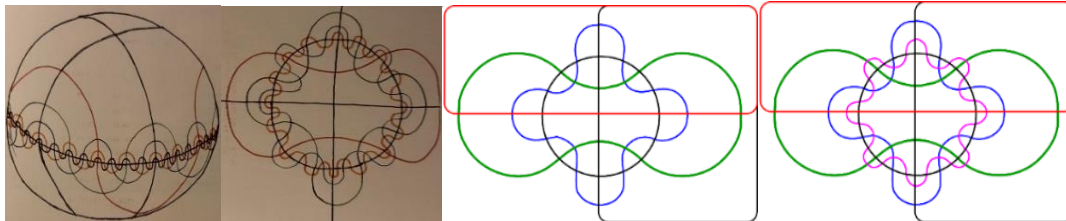
1.m. Halmazábrák, a brit nyelvek etimológiája (Euler. 1772). Számhalmazok (1)



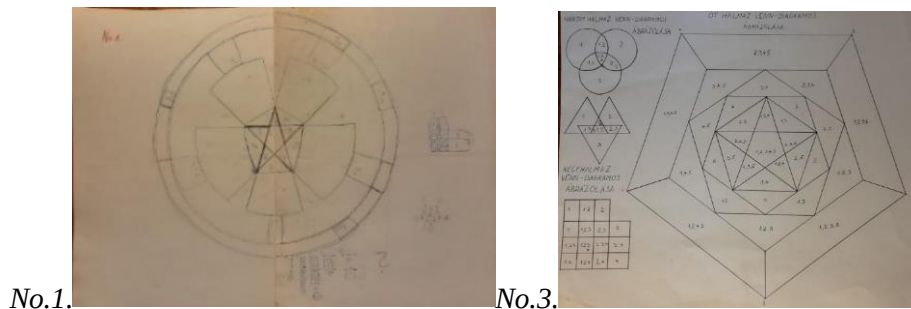
2.m. a) Három halmaz metszete (Venn 1881. 105. (2)), b) Négy halmaz próbája (Venn 1881. 117.), c) Siker négy ellipszis (Venn 1881. 106.)

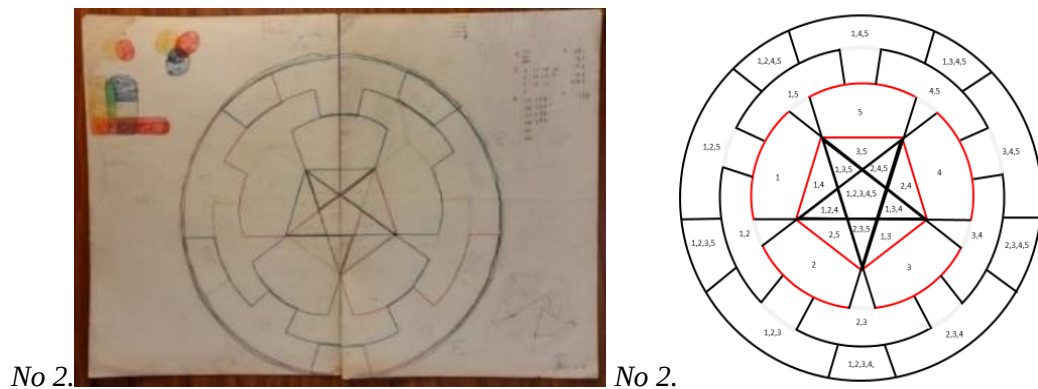


3.m. a) Öt halmaz (Edwards. 2004. 30.), b) 2, 3, négy, és nyolc halmaza (Carroll. 1886.)

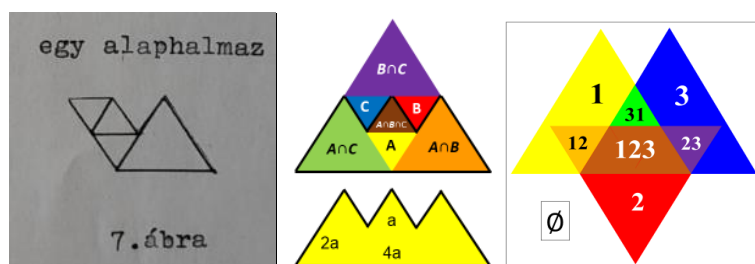


4.m. a) Teniszlabda modell (Edwards. 2004. 37.), b) Öt, illetve hat halmaza (Edwards. 2004. 51.o.)

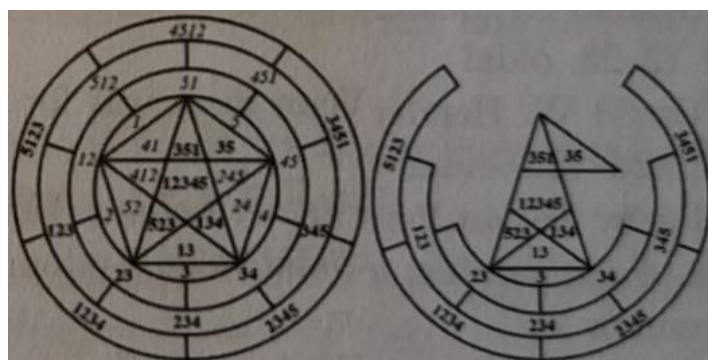




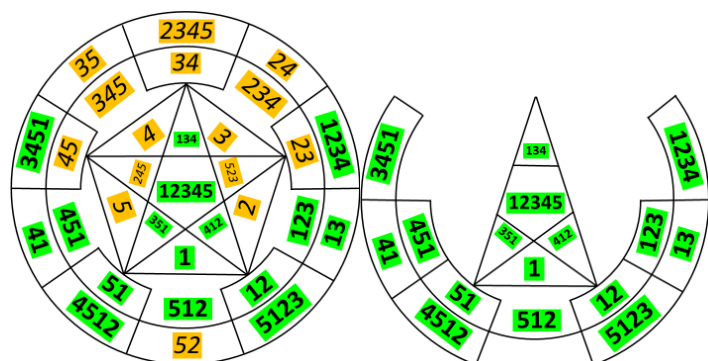
5.m. Első rajzaim No.1, No.3. és No.2 és PowerPointtal (Péchy. 2021.)



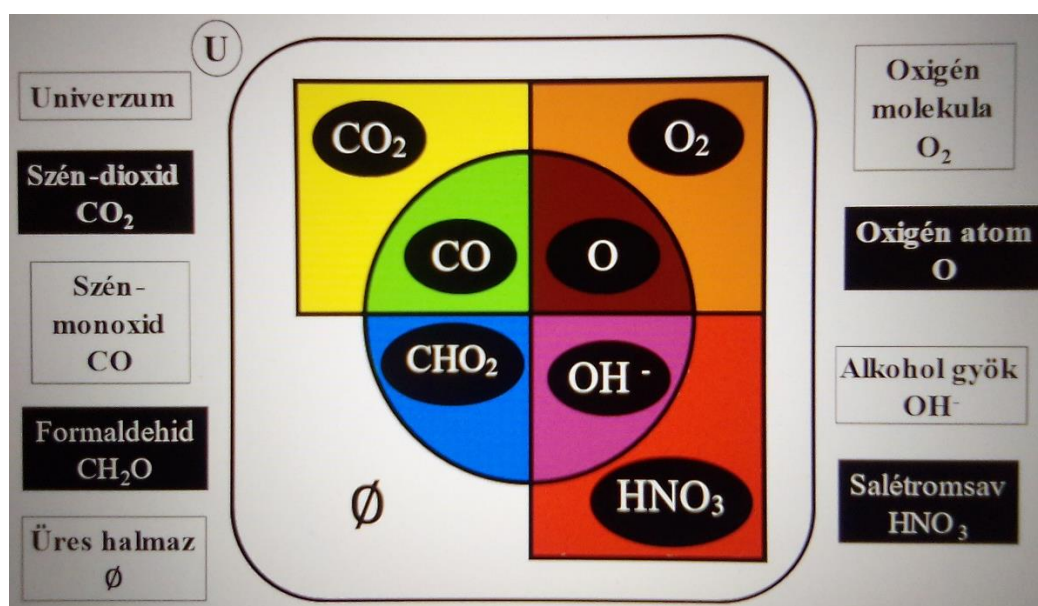
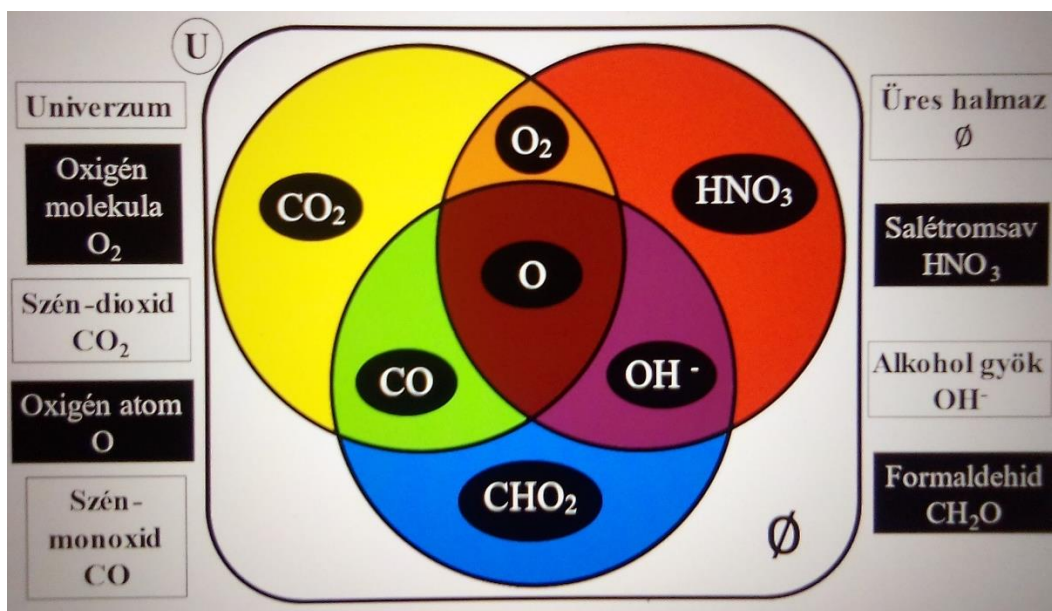
6.m. 1993 (Péchy. 2017.), (2019 és 2021) (Péchy. 2017. 14.). Három szabályos háromszögből álló



(Péchy. 2021.)



7.m. a) Módosított diagram 2017.aug (Péchy. 2017. 10.), b) Tengelyesen szimmetrikus halmazalak



8.m. Alkalmazások, három halmaz körrel (Venn-diagram), illetve Lewis Carroll diagrammal.

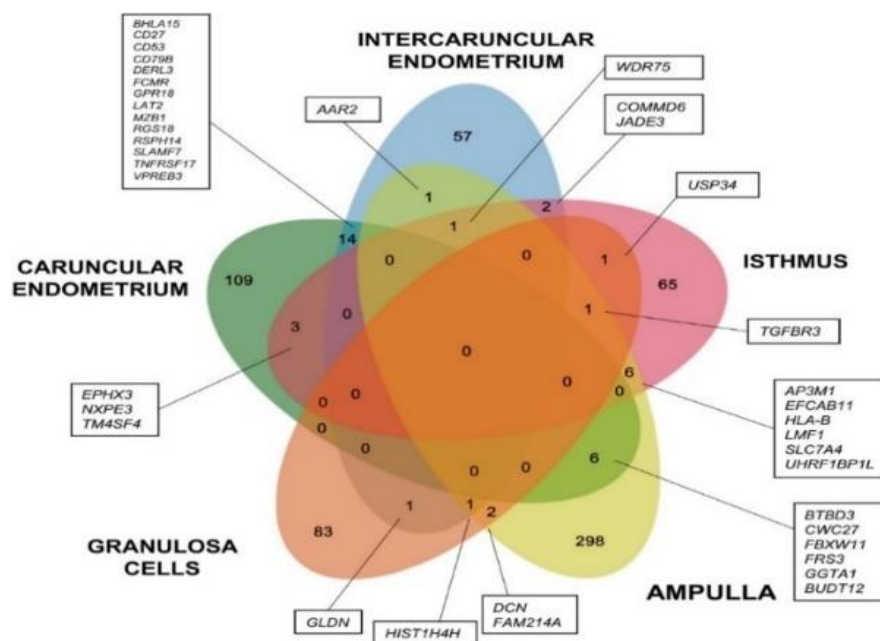
Kémiai atomok, molekulák és vegyületek felhasználásával

Két állítás és ezek tagadása, egy téglalapban elhelyezve, négy részre bontva azt

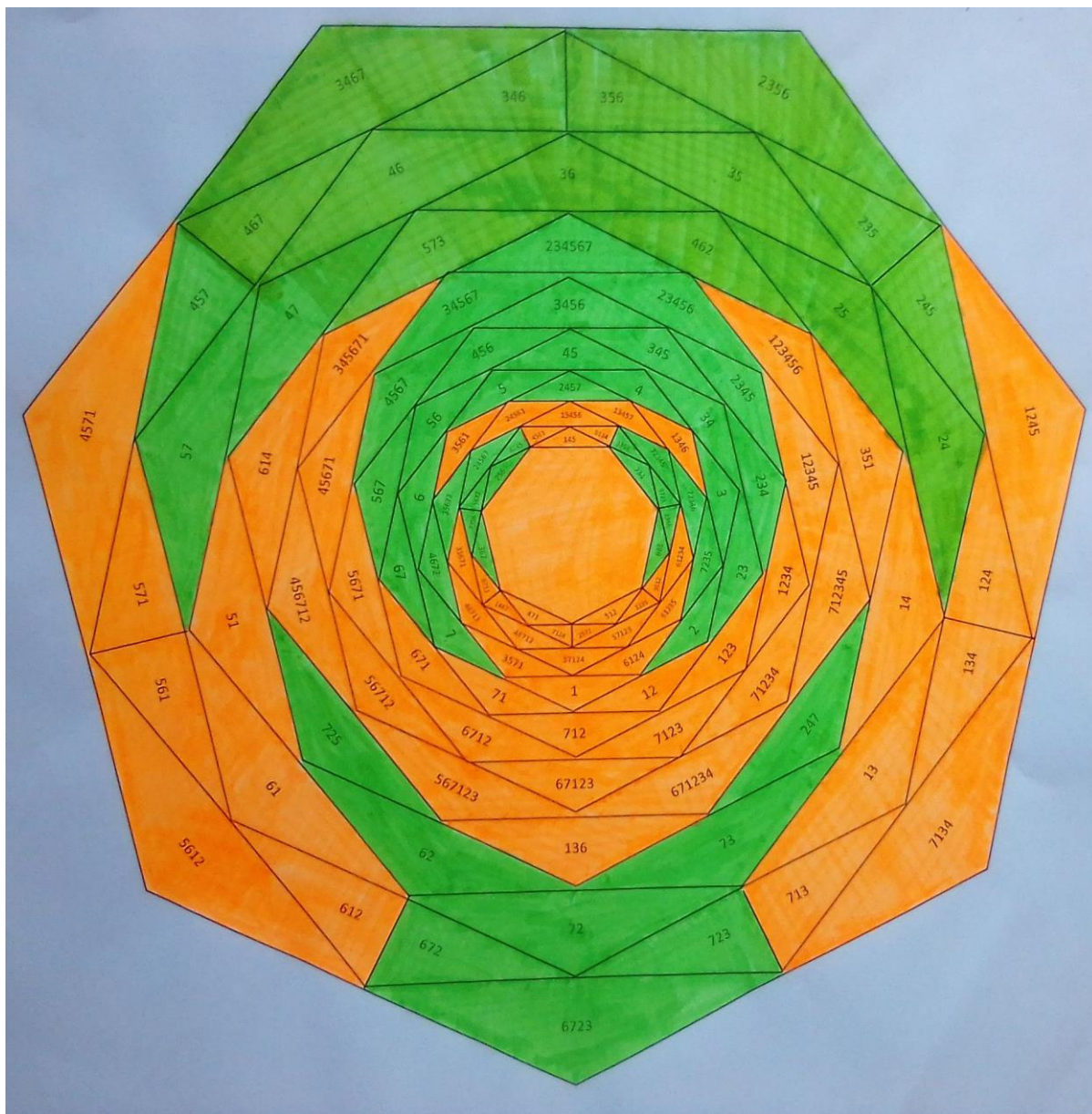
	paprika	nem paprika
P I R O S	  	   
P I N E R O S	  	     

	paprika	nem paprika
P I R O S	  	 
P I N E R O S	  	  

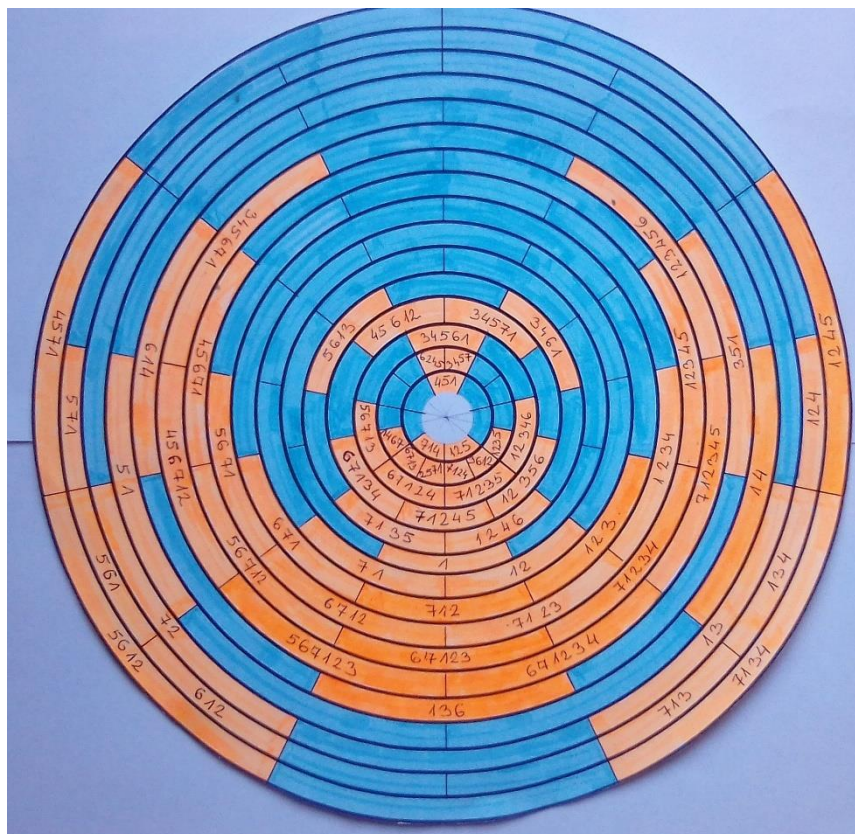
9.m. Kettő, illetve három halmaz játékos, sokszínű tanításának lehetséges módja



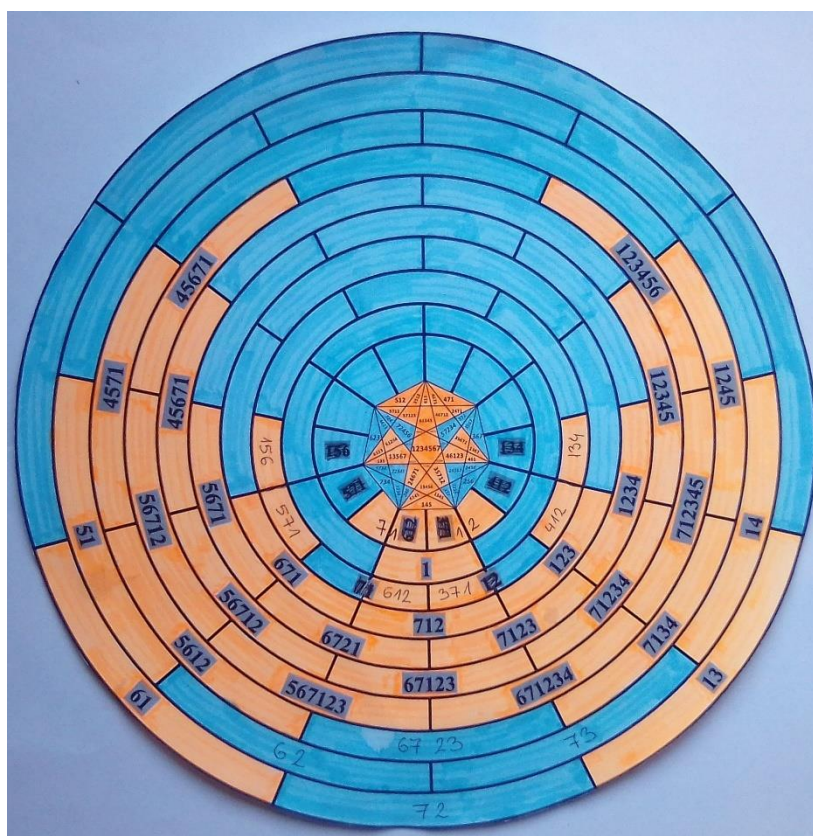
10.m. Orvosi alkalmazások öt halmazzal, Br. Grünbaum ábrájával angolul (több szerző, 4.)



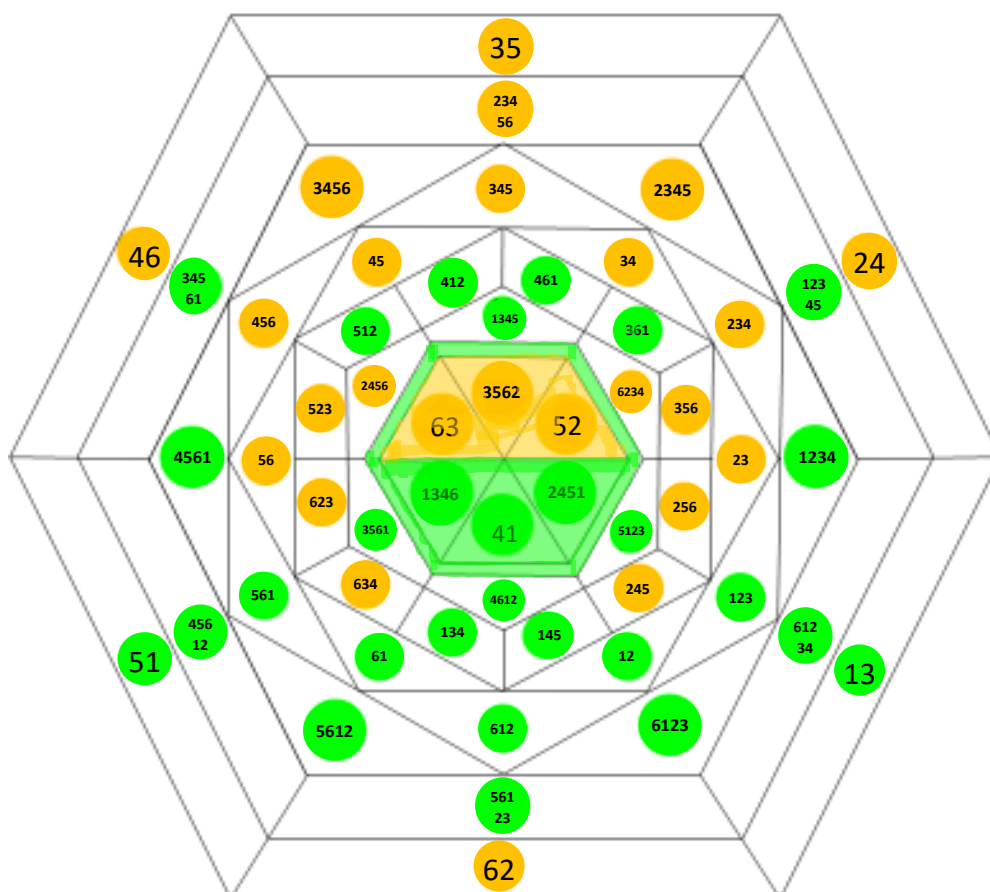
Tizenhét szabályos sokszögből álló, hét halmaz Venn-diagram, az oldalfelező pontok összekötésével. Egy halmazalak, a zöld rész. Minden részhalmazában szerepel az egyes. Ez az 1. alaphalmaz. Ebből hetet véve, majd $360:7$ fokkal elforgatva kapjuk a forgásszimmetrikus hét halmaz Venn-diagramot



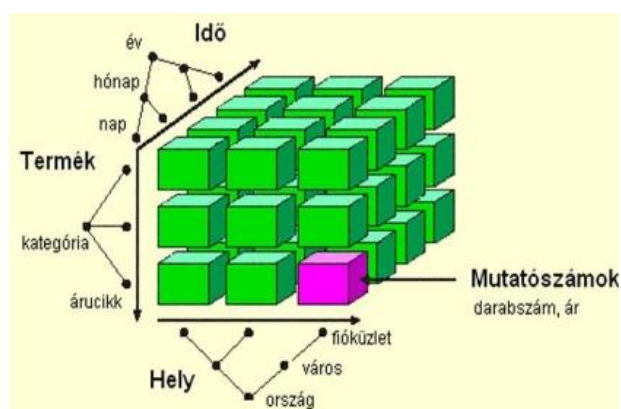
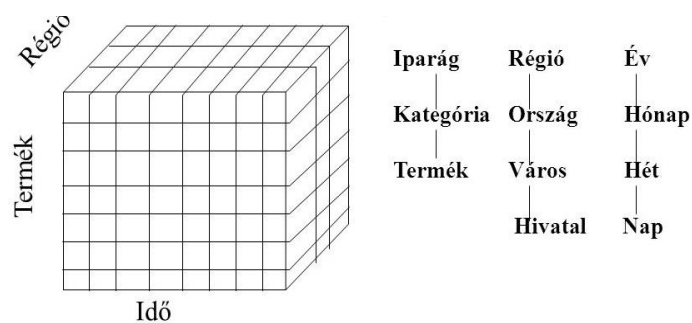
Tizenhét koncentrikus körből álló, hét halmaz Venn-diagram. Egy halmazalak, a narancssárga rész. Minden részhalmazában szerepel az egyes. Ez az 1. alaphalmaz. Ebből hetet véve, majd $360:7$ fokkal elforgatva kapjuk a forgásszimmetrikus hét halmaz Venn-diagramot



12.m. Vegyes hét halmaz Venn-diagram. Jellegénél fogva, más-más a számcsoporthal



13.m. Szabályos hatszögekkel. A számozás pozitív irányítottságú. Az $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$ a felső, a $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$ az alsó féltérben vannak a részhalmazok. Az $\{1;3;5\}$, $\{2;4;6\}$ részhalmazok az előzők metszete, egy pontként vagy gömbként. Az $\{1;2;3;4;5;6\}$ metszet, két hatszög közé zárt gyűrűt alkot



- 14.m.** a) Az eladási mennyiség a termék, az idő és a régió függvényben (11. 32.)
b) Adatkocka: nemzetközi ker. cég értékesítési adatainak multidimenzionális nézete (12. 37.)

13. Irodalomjegyzék

1. Carroll, Lewis (Állnév: Dodgson, Charles Lutwidge). 1886. *The Game of Logic*. Anglia. Dover Publ Inc 2000. Illetve, USA. Createspace Independent Publishing Platform, 2018.)
2. Edwards, Anthony. W. F. 2004. *Cogwheels of the Mind: The Story of Venn Diagrams*. The John Hopkins University Press. Baltimore, Maryland.
3. Euler, Leonard. 1772. *Lettres à une Princesse d'Allemagne*. Szentpétervár. CII - CVIII levelek 337-366.
4. Griggs, Jerrold; Killian, Charles. E., and Savage, Carla, D. 2004. *Venn diagrams and symmetric chain decompositions in the Boolean lattice*. Electron. J. Combin. 11 #R2.
5. Grünbaum, Branko. 1975. *Venn diagrams and Independent Families of Sets*. Mathematics Magazine, 48, 12-23.
6. Henderson, David. W. 1963. *Venn diagrams for more than four classes*. American Mathematical Monthly. 70, 424-426.
7. Mamakani, Khalegh; Ruskey, Frank; Roses, N. 2014. *Simple Symmetric Venn Diagrams with. 11 and 13 Curves*. Discrete Comput. Geom. 52. 71–87.
8. Péchy, Zoltán Péter. 2017. *Öt és hét halmaz Venn-diagramos ábrázolásai, kör és szabályos sokszög alakokban. A szerkesztési menet öröklődése*. TMDK, Győr, SZE.
9. Péchy, Zoltán Péter. 2018. *Matematikai halmazábrák, mint az oktatás szakmódszertani segédeszközei. (Újszerű szerkesztési módok szimmetrikus és majdnem szimmetrikus Venn-diagramjaik)*. TMDK Győr, SZE.
10. Péchy, Zoltán Péter. 2019. *Halmazábrák újragondolva*. Szombathely. Nemzetközi Konferencia. ELTE-SEK. XVIII. Természet-, Műszaki-, és Gazdaságtud. alkalmazása.
11. Péchy, Zoltán Péter. 2021. *Venn-diagram konstrukcióim*. Kolozsvár. Matlap 5-6. Ifjúsági matematika lapok. Radó Ferenc Matematikaművelő Társaság.
12. Ruskey, Frank; Savage, Carla D.; Wagon, Stan. 2006. *The Search for Simple Symmetric Venn Diagrams*. Notices of the Amer. Math. Society 53/11, 1304-1311.
13. Tuzson, Zoltán. (5/1994). *A Venn-Euler diagram felhasználása halmazelméleti feladatok-megoldására*. Matematikai Lapok. Románia Matematikai Tud. Társulata, 174.-178.
14. Tuzson, Zoltán. (05/2014). *A Venn-diagram és a logikai szita alkalmazásai*. POLYGON, XXII / 1.-2.
15. Tuzson, Zoltán. (04/2021). *Ismerkedés a Venn-Euler diagramokkal*. Ifjúsági matematika lapok (Matlap). Radó Ferenc Matematikaművelő Társaság. Kolozsvár. 130.-135.
16. Venn, John. 1880. *On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings*. Philosophical Magazine Series 5, 10:59, 1-18.
17. Venn, John. Venn. 1881. *Symbolic Logic*. MACMILLAN AND Co. London.
18. Wagon, Stan and Webb, Peter. 2008. *Venn Symmetry and Prime Numbers: A Seductive Proof Revisited*. American Mathematical Monthly. 115, 645–648.

14. Online

- (1) luciencastex.com/IMG/pdf/CarrollLewis_TheGameOfLogic.pdf
- (2) en.wikipedia.org/wiki/Branko_Gr%C3%BCnbaum
- (3) rep.bioscientifica.com/view/journals/rep/160/1/REP-19-0564.xml (Anthony D, Horlock Rachel, L Piersanti, Rosabel Ramirez-Hernandez, Fahong Yu, Zhengxin Ma, Kwang Cheol C Jeong, Martin J D Clift, Jeremy Block, José E P Santos, John J Bromfield, I Martin Sheldon) **(orvosi cikk)**
- (4) www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/OH-MAT09TA_I_teljes.pdf (halmazok, szitaformula)

15. Wikipédia online

- (1) tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-7-osztaly/ket-halmaz-unioja/halmazok-abrazolasa
- (2) hu.wikipedia.org/wiki/Venn-diagram
- (3) hu.m.wikipedia.org/wiki/F%C3%A1jl:Jordan-f%C3%A9leg%C3%B6rbe_topol%C3%B3giai_%C3%A9rtelmez%C3%A9se.jpg
- (4) hu.wikipedia.org/wiki/Homeomorfia
- (5) www.combinatorics.org/files/Surveys/ds5/VennSymmExamples.html
www.combinatorics.org/files/Surveys/ds5/jpgs/venn5-tutte.jpg
- (6) hu.wikipedia.org/wiki/Egyszer%C5%B1_soksz%C3%B6g
- (7) combinatorics.org/files/Surveys/ds5/VennPoly67EJC.html
- (8) combinatorics.org/files/Surveys/ds5/VennKfoldEJC.html
- (9) wordwall.net/hu/resource/36788687/halmazok-oszthat%C3%B3s%C3%A1g-5-3-2-4-oszt%C3%A1ly
- (10) wordwall.net/hu-hu/community/matek/5-oszt%C3%A1ly-halmazok
- (11) slideplayer.hu/slide/4867532/
- (12) slideplayer.hu/slide/2185662/
- (13) en.wikipedia.org/wiki/Complex_polygon
- (14) hu.wikipedia.org/wiki/Izomorfia
- (15) en.wikipedia.org/wiki/Henry_John_Stephen_Smith