

Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Kar
Matematikai és Informatikai Intézet



Függvénytan játékosan

Témavezető:

Dr. Eisner Tímea
Adjunktus

Készítette:

Pollmann Norbert
Matematika-német osztatlan
tanár szakos hallgató
Nappali tagozat

Pécs, 2023

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Nemzetközi és hazai tanulmányok és a hipotézis megfogalmazása	3
2.1. Nemzetközi és hazai tanulmányok	3
2.2. Hipotézis	5
3. A „Függvényrengeteg” oktatási segédanyag bemutatása	6
3.1. Függvényfogalmat elmélyítő kártyák	7
3.1.1. Tájékozódás a koordinátarendszerben	7
3.1.2. Halmazábrás kártyák	7
3.1.3. Descartes-diagram	8
3.1.4. Párosítások	9
3.1.5. Az elveszett koordináta-rendszer	9
3.2. Függvény-arborétum	10
3.2.1. Arborétum-kártyák	10
3.2.2. Sorbarendezés	11
3.2.3. Arborétum játék	11
3.2.4. Sequence-Arborétum	13
3.2.5. További játéklehetőségek a kártyákkal	15
3.3. Függvény-Quarto	15
3.3.1. Quarto kártyák	16
3.3.2. A Függvény-Quarto játék	17
3.3.3. Sequence-Quarto	18
3.3.4. Függvény-SET	19
3.3.5. További játéklehetőségek a kártyákkal	20
4. Hatékonyságvizsgálat	23
4.1. Kísérletek körülményei	23
4.1.1. A csoportok bemutatása	23
4.2. Mérések	25

4.2.1.	Tanulói hangulati kérdőív	25
4.2.2.	Tanulói szöveges visszajelzés	26
4.2.3.	Bemeneti és kimeneti tesztek	26
4.2.4.	Tanári visszajelzés	26
4.3.	Mérésekre érkezett válaszok	27
4.3.1.	Tanórák végén kitöltött anonim hangulati kérdőív – válaszok . . .	27
4.3.2.	Témakör végén kitöltött szöveges visszajelzés – válaszok	28
4.3.3.	Bemeneti és kimeneti tesztek – válaszok	29
4.3.4.	Témakör végén kitöltött tanári kérdőív – válaszok	34
5.	Összegzés	41
	Köszönetnyilvánítás	43
	Irodalomjegyzék	44
	Mellékletek	46

1. fejezet

Bevezetés

A nemzetközi matematikai versenyeken évről évre kiemelkedően szerepelnek a magyar diákok. (Bolyai Társulat, [3]) A PISA felmérések eredményei azonban folyamatosan romló tendenciát mutatnak hazánkra vonatkozólag (PISA teszt, [22]). Ebből arra lehet következtetni, hogy a tehetségek kiemelése, a velük való foglalkozás jól működik, ugyanakkor az átlagos diákok matematikai felkészültsége romlik. Ennek nyilván több oka is lehet. Véleményünk szerint ezek közé tartozik az is, hogy a diákok az iskolában elveszítik a gyermekkorukban még természetesen meglévő kíváncsiságukat, érdeklődésüket. Erre keresünk megoldást.

Célunk egy olyan eszközkészlet fejlesztése volt a függvénytan tanításához, amely a tevékenységen alapuló tanulás és a társasjátékok jótékony hatását ötvözi a motiváció fenntartása érdekében. Az eszközkészlet ennek a nehéz témakörnek az élményszerű feldolgozását segíti.

A fejlesztés már 2019-ben elkezdődött. Először egy bevezető kártyacsomag és egy ezt alkalmazó tananyag készült 7. évfolyamos diákok számára, melyet egy osztályon teszteltünk is. (Pollmann 2020, [24]). A tapasztalatok arra ösztönöztek minket, hogy az eszközök fejlesztését, használhatóságának és hatékonyságának vizsgálatát tovább folytassuk. A használhatóság érdekében olyan népszerű társasjátékok kerültek átdolgozásra, melyek egy tanóra keretében is alkalmazhatóak. Így készült el a jelen fejlesztés során a „Függvényrengeteg” oktatási segédanyag, amely alkalmazása több kompetenciaterületet érint: kommunikációs készség, csoportmunkában való együttműködés, matematikai gondolkodás, szabálykövetés.

Az eszközök prototípusai elkészültek, egymással párhuzamosan 6 tanulói csoport tudott velük dolgozni. A kísérletben 4 általános iskolai és 3 középiskolai tanár vett részt. Az oktatókat megtanítottuk az eszközök használatára és felkértük őket arra, hogy a függvénytan témakörének tanítását ezek használatával egészítsék ki, majd osszák meg velünk tapasztalataikat. Összesen 3 városban, 3 általános iskolában és 2 középiskolában

zajlott a hatékonyságmérés.

A kísérlet során kvantitatív és kvalitatív mérést is végeztünk. A diákok és a tanárok is adtak hosszabb visszajelzést a témakör lezárása után, ezen kívül a diákok minden óra után egy hangulati kérdőívet is kitöltöttek. Felsőbb évfolyamokon a függvénytulajdonságok leolvasásának képességét bemeneti és kimeneti teszttel ellenőriztük.

A fejlesztett és szélesebb körben végrehajtott tesztelés alátámasztotta az eszköz használhatóságát, alkalmasságát az érdeklődés fenntartására, továbbá bizonyos ismeretek könnyebb elsajátíthatóságát.

A dolgozat egy rövid elméleti bevezető és a hipotézis megfogalmazása után bemutatja az eszközparkot, az egyes elemeivel megoldható feladatokat, játékokat, illetve a kísérletbe bevont tanárok tapasztalatait, és a gimnáziumi évfolyamokon mért hatékonyságvizsgálat eredményét.

Lezárás dátuma: 2022. január 15.

2. fejezet

Nemzetközi és hazai tanulmányok és a hipotézis megfogalmazása

2.1. Nemzetközi és hazai tanulmányok

Az utóbbi években sok kutatás foglalkozik a társasjátékok jótékony hatásaival. Három japán kutató 2019-ben 71 társasjátékkal kapcsolatos tudományos cikket talált, melyből 27 eredményeit hasonlította össze. Arra következtetésre jutottak, hogy a társasjátékok (mint az ilyen eszközöktől az elvárható) javítják az ismeretek megértését, fokozzák a résztvevők közötti interperszonális interakciókat, és növelik a résztvevők motivációját. (Nakao, Noda, Shiotsuki 2019, [21])

Jesztli és Lencse tanulmányukban rámutattak arra, hogy a gyerekek játék közben könnyebben tanulnak, ráadásul úgy, hogy közben a tanulást nem érzik tehernek. (Jesztli és Lencse 2019, [15])

A játékon keresztüli tanulásnak két alapvető típusát különböztethetjük meg.

1. Adott egy tananyag, amit meg szeretnénk tanítani, és konstruálunk egy játékot, aminek a segítségével ezt el tudjuk érni.
2. Keresünk olyan társasjátékot, ami élvezetes, jól, könnyen játszható és a játék jótékony hatását használjuk ki.

A matematika területén az első csoportban jelentős eredményeket ért el Dienes Zoltán és Varga Tamás. Dienes már az 50-es évektől kezdve rengeteg olyan játékot konstruált, melyek bonyolult, felsőbb matematikai struktúrákat modelleztek, és kísérletekkel bizonyította, hogy a játékokon keresztül a gyerekek még ezeknek, a sokszor mély matematikai tartalmat is rejtő struktúrák szabályszerűségeit is felfedezik. (Dienes, Golding 1966, [8]) Varga Tamás többek között a számrendszerek és a valószínűségszámítás elemeinek játékos, felfedeztető tanítását dolgozta ki. (Varga 1974, [28])

A második csoportba tartozik például a SET játék, mely véges matematikai kérdé-

seket vet fel (Eisner, Sztojkovics 2021, [7]). Dukán, Fried és Szabó mérésrel igazolták, hogy a Da Vinci Code és az Avalon társasjátékok tanórai használatával a matematikai kompetenciamérés eredmények javulnak. (Dukán, Fried, Szabó 2021, [10])

1996-ban Lee (Lee 1996, [17]) bevezette a matematikai játékok fogalmát, osztályozta őket és a „Cover Up” játék átdolgozását a közönséges törtek tanításánál alkalmazta. Megállapította, hogy ha a játékokat gondosan választják ki az oktatási céloknak megfelelően, és beépítik az oktatási programba, javíthatják a tanítást és a tanulást. Ezen felül a játékok segíthetnek a gyermekeknek a társas kapcsolatok fejlesztésében. Véleménye szerint a matematikai játékoknak fontos szerepe lenne az általános iskolai matematika tanításában, és a tanároknak érdemes megpróbálniuk ezeket beépíteni az oktatásba.

Egy közelmúltbeli kutatás (J. Russo, L. A. Bragg, T. Russo 2021, [1]) kimutatta, hogy Ausztráliában az általános iskolai pedagógusok igen szívesen nyúlnak társasjátékokhoz az oktatás során, ugyanakkor az is kiderült, hogy viszonylag kis eszköztárat használnak.

Nachlieli és Tabach 2012-ben arra a következtetésre jutott (Nachlieli, Tabach 2012, [20]), hogy a függvények témaköre azért nehéz a gyerekeknek, mert nem rendelkeznek korábbi tapasztalataik alapján elegendő informális bázissal.

A Varga Tamás és Dienes Zoltán által kidolgozott anyagok nem csak a játékosak, hanem tevékenységen is alapulnak, melyek hatékonysága jóval magasabb, mint a hallott vagy olvasott tanulása. (E. Dale 1969, [6]) A függvénytan esetén ők leginkább a függvényfogalom kialakítását segítő módszereket dolgoztak ki. (Pl. Dienes Zoltán: Építsük fel a matematikát, (Dienes 1972, [9]))

Az általunk fejlesztett „Függvényrengeteg” oktatási segédanyag is a tevékenységen alapuló és a játékon alapuló oktatást ötvözi, azzal a különbséggel, hogy szerepelnek benne a fenti osztályozás mindkét típusa szerinti játékok.

Az eszközök többsége a függvénygrafikonok elemzésének és a függvénytulajdonságok leolvasásának játékos tanítását segíti általános tantervű osztályokban, így az oktatásban igen széles körben hasznosítható és véleményünk szerint hasznos építőköve lehet a matematikatanítás egy modernebb, játékos elemeket is alkalmazó formájának.

Az eszközpark lehetőséget biztosít számos társasjáték játszására is, így használatukkal nem csak a függvénytanban mélyednek el a diákok, hanem a társasjátékok személyiség-fejlesztő hatása is érvényesülhet.

A társasjátékok között találhatók egyéni és csapatjátékok is, melyek véleményünk szerint az intrinzik motiváción belül főleg a teljesítménymotivációban játszanak szerepet, de pozitívan hathatnak az érdeklődés- és a kompetenciamotivációra is, és tudjuk, hogy a „tanulás annál hatékonyabb és sikeresebb, minél többféle és minél stabilabb tényezőkből álló motivációs bázissal rendelkezik.” (Gaskó, Hajdú, Kálmán, Lukács, Nahalka, Petriné Feyér 2006, [12])

2.2. Hipotézis

A „Függvényrengeteg” oktatási segédanyag használata

1. jó hatással van az intrinzik motivációra;
2. a függvénytan tanulása a diákok számára élvezhetőbbé és ezáltal könnyebbé válik;
3. a tanárok is könnyen elsajátítják a használatát és számukra is élvezetes a tanítás;
4. jelentősen segíti a függvénytulajdonságok grafikon alapján történő leolvasásának elsajátítását.

A hipotézis igazolásához kvalitatív és kvantitatív méréseket végeztünk. A mérés és az eredmények összefoglalása a [4.](#) fejezetben található.

3. fejezet

A „Függvényrengeteg” oktatási segédanyag bemutatása

A „Függvényrengeteg” eszközparkban szerepel 8-féle kártyacsomag és egy játéktábla. Ezen kívül szükség van 30 – 30 db jelölőkorongra három színben, vékony táblafile-re és törlőszivacsra.

A kártyapaklik közül négy társasjátékon alapul, melyekkel az alapjátékon túl számos játék megvalósítható. A játékok között szerepelnek hagyományos, az oktatásban gyakran alkalmazott játékok, mint a „Fekete Péter” vagy a memória játékok, de megtalálhatók újabb népszerű játékokon alapuló játékok is, mint például Arborétum, Quarto és a Sequence. Mi azzal a szóhasználattal élünk, hogy ezeket a játékokat „függvényesítettük”.

Olyan társasjátékokat választottunk, melyeknél a lapokat/bábukat tudjuk függvényekkel helyettesíteni és az alapjáték népszerű, előkelő helyen szerepel a játékok közötti ranglistákon.

Egy játék kivételével az összes játék a tanóra időkeretébe is belefér, de javasoljuk, hogy a diákok számára elérhető helyen legyenek a kártyacsomagok, hogy tudjanak vele szabadidejükben is játszani.

A kártyák nyomtatás után laminálásra kerültek, így táblafileccel lehet rájuk írni, játék után pedig száraz szivaccsal letörölni az írást.

Az eszközpark a következő célok megvalósítására készült:

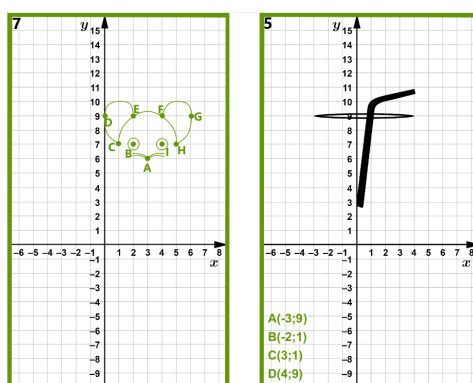
1. A diákokban kialakult függvényfogalom ne csak a formulákkal vagy a grafikonnal megadhatóakra szűküljön.
2. A szám-szám függvények ábrázolásakor a diákok az x és y szerepét pontosan ismerjék.
3. A diákok a szám-szám függvények tulajdonságait magabiztosan olvassák le a grafikon segítségével.
4. A kártyákkal a tanórákon autonóm környezetet hozunk létre.

3.1. Függvényfogalmat elmélyítő kártyák

A függvényfogalom kialakítását négyféle kártyapakli segíti. A kártyákat itt csak röviden mutatjuk be, részletesebb használatuk megtalálható a 2020-as dolgozatomban. (Pollmann 2020, [24])

3.1.1. Tájékozódás a koordinátarendszerben

Ahhoz, hogy a diákok függvények grafikonjairól pontosan olvassanak le adatokat, elengedhetetlen, hogy jól tájékozódjanak a koordinátarendszerben. Ennek fejlesztése érdekében hoztunk létre olyan kártyákat, ahol különböző ábrák segítségével gyakorolhatják ezt a tudást a tanulók. A 3.1. ábrán ilyen kártyák láthatók. Az elsőn a pontok koordinátáit kell leolvasni, a másodikon a pontok berajzolása a feladat.



3.1. ábra

Ezen kívül üres koordinátatengelyes kártya is található a csomagban. Ezzel

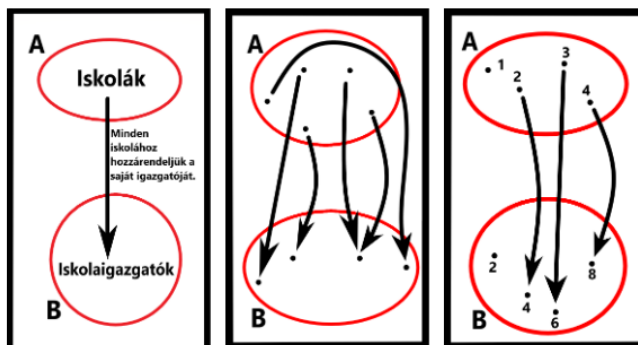
- önállóan is kitalálhatnak egymásnak feladványokat a gyerekek;
- illetve lehet **kincskereső játékot** játszani. A gyerekek párokban játszanak. Mindkettejük egy egész koordinátájú pontra gondol, ott helyezi el a „kincset”. Felváltva kérdeznek egymástól egy-egy pontot, és azt kell megválaszolni, hogy attól a ponttól milyen „távolságra” van a kincs. Távolság alatt a rácsvonalak mentén a legkevesebb egységlépések számát értjük, mellyel a mondott pontból a kincset elérhetjük. Az nyer, aki hamarabb megtalálja a kincset.

3.1.2. Halmazábrás kártyák

A csomagban található olyan kártyák, melyeken halmazábrával ábrázolt hozzárendelések szerepelnek. Ezek között vannak egy- és többértelmű hozzárendelések, függvények és nem függvények is.

Találhatók számokat, pontokat tartalmazó halmazok, illetve szövegesen megfogalmazott hozzárendelések is.

A halmazábrás kártyák a 7. osztályos függvénytan bevezetésében fontos szerepet kapnak. A 3.2. ábrán három ilyen kártyát láthatunk.



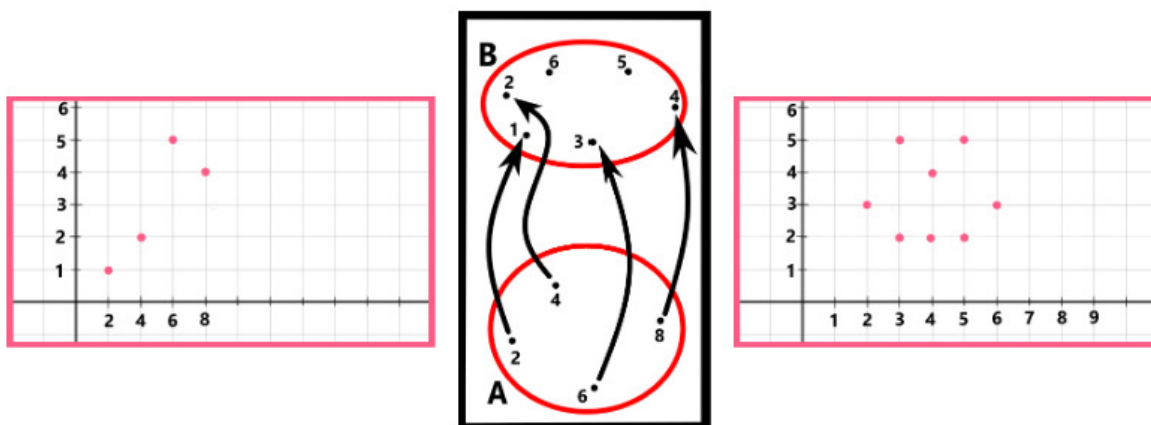
3.2. ábra

3.1.3. Descartes-diagram

A Descartes-diagram a relációk/hozzárendelések egy lehetséges ábrázolási módja, mely előkészíti a valós-valós függvények koordinátarendszerben történő ábrázolását is.

A csomagban megtalálhatók a számos halmazábrás hozzárendelések Descartes-diagramjai is, így lehetőség van egy párosítási feladat megoldására.

Ezen kártyákon felül szerepelnek további Descartes-diagramos kártyák is. A 3.3. ábrán egy Descartes-diagramos és egy halmazábrás párt, illetve egy második Descartes-diagramos kártyát láthatunk.



3.3. ábra

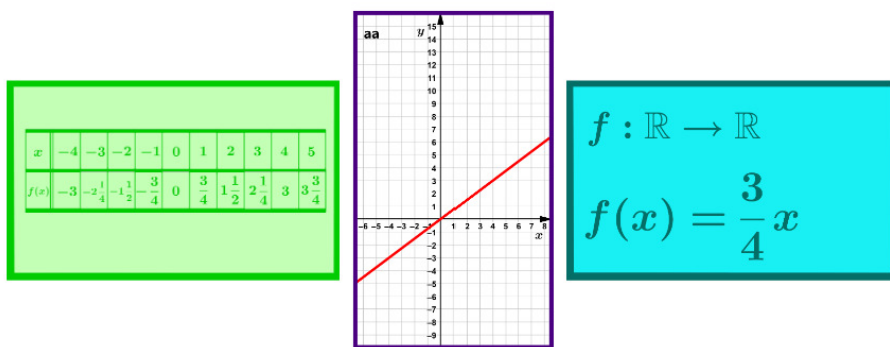
3.1.4. Párosítások

Minden általános és középiskolában előforduló valós-valós függvénytípusról készült három kártya. A kártyákon a függvények hozzárendelési utasítása (türkiz), grafikonja (lila keret) és értéktáblázata (zöld) szerepel.

Összesen 29 függvényhez készült kártya. Ebből a 7. osztályban 8, a magasabb évfolyamokon egyre több használható.

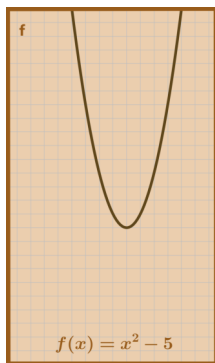
Ezeket a kártyákat párosítás játékokra tudjuk használni, mint például a Fekete Péter vagy a Memória, mivel bármely lapot is választjuk ki valamelyik fajtából, mindegyiknek lesz bármelyik másik fajtából egy-egy egyértelmű párja, ami ugyanahhoz a függvényhez tartozik.

Kakukktojás- vagy Fekete Péter lapnak egy Dirichlet függvényt készítettünk, mert bár az nem tananyag, de meglehetősen különleges szerepet tölt be a függvényelméletben. A 3.4. ábrán az $f(x) = \frac{3}{4}x$ függvény Fekete Péter-hármasa látható.



3.4. ábra. Példa a párosítás kártyákra

3.1.5. Az elveszett koordináta-rendszer



Barna kerettel és barnával ábrázolt függvénygrafikkal láthatóak olyan kártyák, amelyeken megadott a hozzárendelési szabály illetve a függvények grafikonja, maga a koordináta-rendszer viszont hiányzik. Ezen kártyáknál a feladat a koordináta-tengelyek megfelelő helyre való berajzolása. Egy ilyen kártya látható a 3.5. ábrán.

3.5. ábra. Az elveszett koordináta-rendszer

3.2. Függvény-arborétum

Az Arborétum társasjáték egy matematikai gondolkodást igénylő, családi társasjáték. A Board Game Geek családi kategóriájának előkelő, 58. helyezettje (2023. január 3.). Ezek mellett 5 nemzetközi díjra jelölték, ebből egyet megnyert. (Board Game Geek 2022, [2])

Ebben a fejezetben bemutatjuk az Arborétum kártyapakli mintájára tervezett Függvény-arborétum kártyákat, az alapjátékot, amit ezekkel a kártyákkal is lehet játszani, és mutatunk több más játék és feladatlehetőséget a kártyákkal.

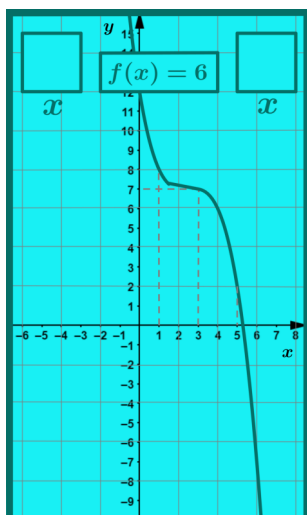
3.2.1. Arborétum-kártyák

Az új, általunk fejlesztett Függvény-Arborétum kártyák alaptulajdonságaiban megegyeznek az eredeti társasjáték lapjaival. A két csomag összehasonlítását láthatjuk a 3.1. táblázatban.

	Arborétum	Függvény-Arborétum
Fő motívum	10-féle fa képe	10-féle függvény grafikonja
Lapok pontértéke	1 – 8	1 – 8
Érték leolvasása	sarokban jelölve	lap tetején lévő utasítás alapján

3.1. táblázat. Az eredeti és a Függvény-Arborétum kártyák összehasonlítása.

A könnyebb megkülönböztethetőség végett a különböző függvényekhez tartozó lapok más-más színűek. A kártyák pontos értékének meghatározása egy matematika feladat.



A játékosok minden kártyán találnak felül-középen egy utasítást. Ez alapján kell beírni a felső sarkok valamelyikébe a kártya számát. Ezen utasítások kérdeznek:

- hely-érték párokra (akárcsak a 3.6. ábrán),
- szélsőértékekre és a hozzájuk tartozó helyekre,
- zérushelyre.

A 3.6. ábrán látható lapon az $f(x) = 6$ függvényértékhez keressük a megfelelő behelyettesítési értéket, melyet a grafikonról leolvasva adódik, hogy akártya értéke a 4, mert

3.6. ábra. Egy Függvény- $f(4) = 6$, más megoldás nincs.
arborétum kártya

3.2.2. Sorbarendezés

Játékosok száma: 1 – 10 fő/kártyacsomag

Játék időtartama: 5 perc

Nehézségi szint: 1/10

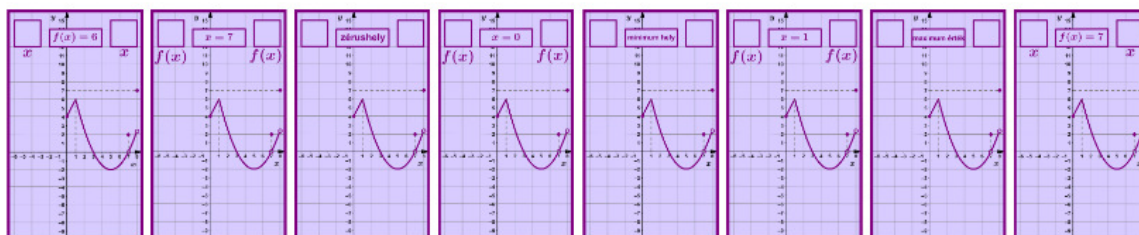
A játék célja: A legrövidebb idő alatt teljesíteni a feladatot.

Előkészületek: Minden játékos megkapja a pakli egy színének összes, azaz 8 lapját, melyet lefelé fordítva maga elé tesz. Egyszerre kezdődik a játék.

Feladat: A feladat, a megfelelő sorrend felállítása, azaz a kártyák értékeik szerinti növekvő sorrendbe helyezése.

Győztes: A játékot az nyeri, aki leghamarabb teljesítette hibátlanul a feladatot.

Példa: A lila kártyák esetén a helyes kirakást mutatja a 3.7. ábra.



3.7. ábra. A lila színű kártyák növekvősorba rendezése

3.2.3. Arborétum játék

A játékszabály az *Arborétum* játék szabályával egyezik meg. (Renegade Studios 2018. [4])

Játékosok száma: 2 – 4 fő

Játék időtartama: 30 – 40 perc

Nehézségi szint: 5/10

A játék célja: Legtöbb pont gyűjtése.

Előkészületek: 3 személyes parti esetén 2, 2 személyes parti esetén 4 tetszőleges szín összes lapját félretesszük, amelyekre nem lesz szükség a későbbiekben. Az összes lapot 4 személyes játék esetén használjuk.

A legfiatalabb játékos kezd. A tőle jobbra ülő játékos lesz az osztó, aki miután megkeverte a paklit, mindenkinek 7 lapot oszt. Ez a 7 lap lesz a játékosok kezdő lapja. A maradék, ki nem osztott lapokból álló pakli lesz a húzópakli.

Minden játékos maga elé fogja építeni saját arborétumát és lesz saját dobópaklija is, tehát megfelelő méretű aztalt célszerű választani.

A játék menete: Amikor sorra kerül a játékos, akkor a következő akciókat kell végrehajtania egymás után a következő sorrendben:

1. 2 kártya húzása,
2. 1 lap kirakása a kezéből az arborétumába,
3. végül 1 lap eldobása.

Ezután a játék az óramutató járásának megfelelően folytatódik tovább, a soron következő játékos bal oldali szomszédja következik.

Két kártya húzása: Két lap húzása, egyik a másik után. A lapokat lehet húzni a képpel lefelé fordított húzópakliból, vagy bármelyik játékos képpel felfelé néző dobópaklijából (akár a saját dobópaklijából is). Mindig csak a pakli legfelső lapja húzható fel. A két kártya húzható ugyanabból a pakliból, vagy akár két különböző helyről.

Egy lap kirakása az arborétumba: Az első körében a játékos leteszi a kezéből az egyik lapját maga elé képpel felfelé. Ez lesz az arborétumának kezdő lapja. A következő körökben a kitett lapokat csak a már lent lévő lapokkal oldalszomszédos (vízszintes vagy függőleges) helyekre lehet kirakni. A lerakott lapokat nem lehet elvenni és másik lappal sem szabad letakarni.

Egy lap eldobása: Végül, a játékosnak a lépése végén el kell dobnia 1 lapot a kezéből a dobópaklijába, így ismét 7 lap marad a kezében. **Pontozás:** A játék akkor ér véget, ha már nincs több lap a húzópakliban. Az a játékos, aki felhúzta az utolsó lapot, még befejezi a körét, majd a pontozás következik.

A sétautak pontozása: A sétaút egy növekvő értékű kártyákból álló sort jelent, ahol az első és az utolsó lap színe azonos. Az osztó végigveszi a színeket (fákat) egymás után (pontozó táblának megfelelően).

Minden szín esetén a játékosok megmutatják a színnel megegyező, kézben maradt lapjaikat. Az a játékos számolhatja meg az adott színnek megfelelő, legtöbb pontot érő sétaútját, akinek az imént megmutatott, tehát az adott színnel megegyező lapjainak összértéke a legnagyobb. Döntetlen esetén minden érdekelt pontozhatja az adott színű sétaútját.

Kivétel: Ha egy játékosnak a kezében van az adott szín 8-as értékű lapja, és egy másik játékosnak a kezében van az 1-es értékű lap ugyanabból a színből, akkor a 8-as 0-nak

számít amikor annak eldöntése van, hogy ki számolhatja össze a sétaút pontjait az adott színből. Az 1 mindig 1-et ér.

Megjegyzés: Elképzelhető olyan eset is, amikor a játékos olyan sétaútvonalat pontozhatna le, amilyen szín nincs az arborétumában, mert az ő kezében van a legtöbb összértékű lap abból a színből. Ilyen esetben senkinek nem jár azért a színért pont.

Ha az adott színből egyik játékos kezében sincs lap, akkor mindenki összeszámolhatja pontjait az adott színű sétaútjain.

Egy sétaúton minden lapnak nagyobb értékűnek kell lennie, mint amelyik előtte van. Így a legkisebb lehetséges sétaút 2 ugyanolyan színű lapból áll, a leghosszabb pedig 8 lapból (ennek a sétaútnak 1-es értékű lappal kell kezdődnie és 8-as értékű lappal kell végződnie). Ahhoz, hogy egy sétautat értékelni lehessen, a sétaút első és utolsó lapjának színe meg kell egyezzen az éppen értékelendő színnel. A sétaút első és utolsó lapjai közötti kártyák színe csak a sétaút pontjainak kiszámításakor lesz lényeges.

A pontozás a következő szabályok szerint történik:

- A sétaúton található minden kártya 1 pontot ér.
- További 1 pont jár minden lapért, ha a sétaút legalább 4 kártyából áll és minden kártya ugyanolyan színű.
- További 1 pont jár, ha a sétaút 1 értékű lappal kezdődik.
- További 2 pont jár, ha a sétaút 8 értékű lappal végződik.

3.2.4. Sequence-Arborétum

A játék alapgondolatát a Sequence társasjáték adta.

Játékosok száma: 2, 4, 6, 8, 9, 10 vagy 12 fő.

Játék időtartama: 10 – 30 perc

Nehézségi szint: 3/10

A játék célja: *Három csapat* esetén a saját csapatunk színével megegyező 6 azonos színű korong elhelyezése a táblán egy vonal mentén vízszintesen, átlósan vagy függőlegesen (**sequence**).

Két csapat esetén 2 sequence kialakítása a cél, melyek kapcsolódhatnak egymáshoz.

Sequence kialakításánál a tábla sarkában található ún. bónusz mezők is használhatók korong lerakása nélkül.

Az a játékos/csapat nyer, akinek először sikerül a cél teljesítése.

Játékhoz szükséges eszközök :

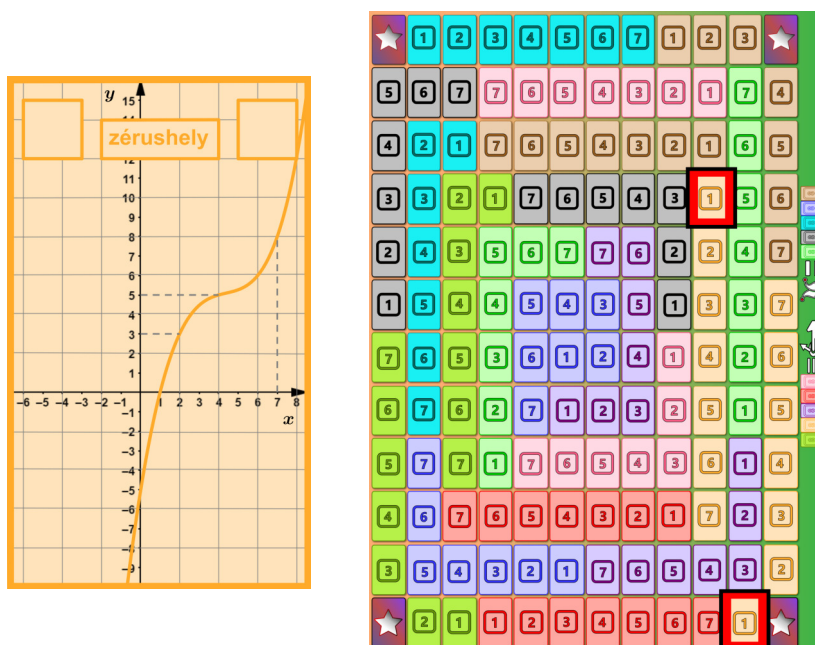
- 2 pakli Arborétum kártya,

- 1 játéktábla, mely a játéksomagban megtalálható;
- 1 korongkészlet.

Játék előkészítése :

- A játékosokat 2 vagy 3 egyenlő létszámú csapatra osztjuk, és a tábla köré felváltva ültetjük le.
- A paklikat összekeverjük, és minden játékosnak adunk
2 – 3 játékos esetén 7,
4, 6 játékos esetén 6,
8 játékos esetén 5,
10, 12 játékos esetén 4 lapot. A maradék lapok alkotják a húzópaklit.
- A különböző csapatok különböző színű korongokat kapnak, mindenki vesz maga elé néhányat.

A kártyák és a tábla: A táblán minden kártyának pontosan két mező felel meg, kivéve a 8-as értékűeknek, mert azok különleges képességgel bírnak. A 3.8. ábrán látható az egyes számú narancs lap és a neki megfelelő mezők a táblán.



3.8. ábra. Egy kártya és a neki megfelelő mezők a táblán.

A játék menete: Az osztótól balra ülő játékos kezdi a játékot. Ezután a játékosok az óramutató járásával megyegyező irányba követik egymást. Az éppen soron következő játékos a kezében tartott lapjai értékét az utasítás szerint meghatározza. (Ha szükséges, táblafilccel a kártyára lehet írni a számot.) Ezután megkeresi a kártya színének és számának megfelelő mezőket. A megfelelő és üres mezők közül kiválasztja, hogy melyikre

szeretné kirakni a korongját. A neki megfelelő lapot kijátsza, lerakja a korongot, és húz egy lapot a húzópakliból. (Ha ezt elfelejtjük, akkor csak a következő kör végén pótolhatjuk.) Ha a kártyának megfelelő mezők már foglaltak, akkor a kártya kicserélhető. Azaz mikor soron következünk, eldobjuk és húzunk helyette egy lapot, és ezután helyezünk el egy, az általunk kiválasztott megfelelő korongot.

A nyolcas számú lapok képességei:

- a sötétzöld, narancs, lila, piros, rózsaszín kártyák egy tetszőleges helyen lévő **korong levételére** jogosítanak fel, kivéve ha a korong már egy sequence része.
- a világoszöld, fekete, türkiz, kék, barna kártyák: **joker kártyák**, azaz kijátszásukkal bárhová lehet korongot elhelyezni.

3.2.5. További játéklehetőségek a kártyákkal

Az itt felsorolt játékokon túl több egyéb játék is játszható a kártyákkal.

1. Négy tetszőleges szín (javasolt: barna, zöld, piros, fekete) megfeleltethető a **Magyar kártya** lapjainak, így a magyar kártya játéka is játszhatóak vele.
2. Két tetszőleges szín esetén egy 16 darabos **memória-játékot** tudunk játszani. A párok az azonos értékű lapok.
3. **Barchoba**. Mindenki kap minden színből egy-egy lapot. Az egyik tanuló kimegy a táblához és kiválaszt a 10 kártya közül egyet. A többiek feladata, hogy eldöntendő kérdések segítségével megfejtsek, hogy melyik színű lap van a kezében.
4. **Párok, csoportok alakítása**. Gyakori a tanórákon, hogy heterogén csoportokat kell létrehozni. Az éppen zajló tananyagtól függetlenül lehet használni ezeket a kártyákat többek között csoportok, párok létrehozására is. Annyi színt használunk, ahány fős csoportokat szeretnénk létrehozni. A lényeg, hogy a diákoknak ugyanazt a számot kell megkeresniük egy másik színből vagy színekből, mint ami a saját kártyájukon van.

3.3. Függvény-Quarto

A Quarto egy 1991-ben bemutatott díjnyertes társasjáték, mely élvezetes, és fejleszti a matematikai gondolkodást. A Boardgamegeek absztrakt kategóriájának jelenleg (2022. ősz) 72. helyezettje.

Ebben a fejezetben bemutatjuk a Quarto mintájára tervezett Függvény-Quarto kártyákat, továbbá bemutatunk további játékokat, feladatokat, melyek ezzel a kártyacsomaggal játszhatók.

3.3.1. Quarto kártyák

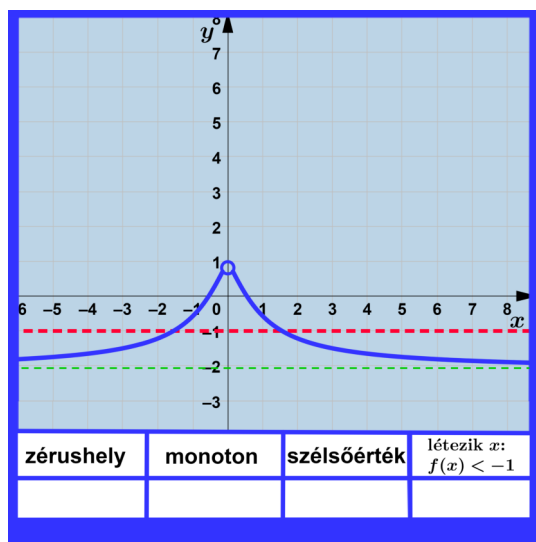
A Függvény-Quarto létrehozásához olyan függvénytulajdonságokat kerestünk, melyek mindegyikénél pontosan két lehetőség adódik, minden lehetséges variációja a tulajdonságoknak megvalósítható és középiskolában is tananyag.

A Quarto és a Függvény-Quarto összehasonlítását mutatja a 3.2. táblázat.

	Quarto	Függvény-Quarto
Fő motívum	fafigurák	függvénygrafikonok
Tulajdonságok	kicsi/nagy világos/sötét kerek/szögletes lyukas/tömör	van/nincs zérushelye monoton/nem monoton van/nincs szélsőértéke $\exists/\nexists x \in D_f : f(x) < -1$ korlátos/nem korlátos

3.2. táblázat. Az eredeti játék és a Függvény-Quarto kártyák összehasonlítása.

A táblázat is mutatja, hogy 5 tulajdonságot vizsgáltunk, így a Quarto 16 bábuja helyett a készlet $2^5 = 32$ függvénygrafikont ábrázoló kártyát tartalmaz. Minden kártya a 3.2. táblázatban felsorolt tulajdonságok alapján egy bináris kódot kapott. Egy kódban a számjegyek (tulajdonságok) sorrendje megegyezik a 3.2. táblázatban található sorrenddel. Ha egy adott helyiértéken 1-es szám van, az a tulajdonság meglétét jelöli, ha 0-s szám van, az a tulajdonság nem meglétét jelöli.



3.9. ábra. Egy Függvény-Quarto kártya

A Quarto játékhoz elég 4 tulajdonság választása. A kártyákon a táblázat első 4 tulajdonságát soroltuk fel (3.9. ábra), ezeket javasoljuk használni, de ettől természetesen el lehet térni.

Egy csomag két különböző Quarto-paklira bontható.

Egy lehetséges bontást jelöl az y koordinátatengely. Az egyik paklinál a tengely bal oldalán szerepel a felirat, a másiknál a jobb oldalon.

Az egyszerűbb függvényeket tartalmazza az a csomag, melynél a jobb oldalon szerepel a felirat, a másik kicsit nehezebb. Így a kártyacsomag alkalmas differenciálásra is, az ügyesebbek a nehezebb, a kevésbé ügyesek az egyszerűbb kártyacsomaggal játszanak.

3.3.2. A Függvény-Quarto játék

A játék szabálya megegyezik a Quarto (Gigamic 1991, [19]) játékszabályával, itt Függvény-Quarto-ra vonatkoztatva írjuk le a játékszabályt.

Játékosok száma: 2 fő

A játék időtartama: 10 perc

A játék nehézsége: 4/10

A játék célja: Vízszintes, függőleges, vagy átlós irányban 4 olyan kártya elhelyezése, amelyeknek legalább egy közös tulajdonsága van, például 4 monoton, vagy 4 zérushellyel rendelkező, stb függvényt ábrázoló kártya. Az ilyen tulajdonságú kártya-négyest quarto-nak hívjuk.

A játék menete: A játék két partiból áll, egyszer az egyik, majd a másik játékos a kezdő.

A kezdő játékos kiválaszt egy kártyát, és odaadja ellenfelének, aki azt lehelyezi egy asztalra. Ezután a másik játékos választ ki egy kártyát a maradék 15-ből, amit most ő ad ellenfelének, amit az elhelyez az asztalon. Arra figyelni kell, hogy egy 4×4 -es tábla alakuljon a lerakáskor. A játékhoz lehet használni játéktáblát is, akkor egyértelmű a lerakott lap pozíciója. Egyébként eleinte még alakítható. A játék ugyanígy folytatódik.

A játék nyertese: A játszmát az a játékos nyeri meg, aki egy kártya lerakásának eredményeképpen egy vízszintes, függőleges vagy átlós vonal mentén kialakít egy „quarto”-t. Ilyenkor azt mondja, hogy „quarto”.

Ha a játékos nem ismeri fel a „quarto”-t, hanem egy újabb kártyát nyújt ellenfelének, de a másik játékos a kártya-négyesre mutatva bemondja a „quarto”-t, akkor ő nyeri meg a játszmát.

Ha egyik játékos sem ismeri fel a „quarto”-t, akkor az érvényét veszti, és a játszma tovább folytatódik.

A játszma vége: A játék akkor ér véget, ha valamelyik játékos jogosan bemondja a „quarto”-t, vagy ha az összes kártya felhasználásra került. Utóbbi esetben a játék döntetlennel ér véget.

Megjegyzés. A Quarto-játéknak több könnyítését is lehet játszani, ha ez a játékvariáció túl nehéznek bizonyul, vagy valamelyik függvénytulajdonságot még nem ismerik a diákok:

- **Csavar nélküli Quarto:** A játékosok maguk választhatják ki, hogy melyik kártyát szeretnék lerakni, nem az ellenféltől kapott kártyát kell elhelyezni.

- **Kevesebb tulajdonság:** 16 kártyával történik a játék, de csak 2 vagy 3 tulajdonságot vizsgálunk.
- **Triple:** Csak 3 tulajdonságot vizsgálunk és a 3 tulajdonságnak megfelelő 8 kártyával játszunk. Ilyenkor egy 3×3 lyukas négyzet mentén helyezzük el a kártyát a szabályok szerint, 3 lap **triplát** alkot, ha egy vonal mentén helyezkedik el, és rendelkezik közös tulajdonsággal.

3.3.3. Sequence-Quarto

A játék alap gondolatát a Sequence társasjáték adta.

Játékosok száma: 2, 4, 6 vagy 8 fő.

Játék időtartama: 10 – 30 perc

Nehézségi szint: 3/10

A játék célja: A saját csapatunk színével megegyező 4 azonos színű korong elhelyezése a táblán egy vonal mentén vízszintesen, átlósan vagy függőlegesen (**sequence**).

Sequence kialakításánál a tábla sarkában található ún. bónusz mezők is használhatók korong lerakása nélkül.

Az a játékos/capat nyer, akinek először sikerül kialakítania a sequence-t a táblán.

Játékhoz szükséges eszközök :

- 1 pakli Quarto kártya (32 + 4 darab),
- 1 pakli utasításlap,
- 1 korongkészlet.

Játék előkészítése :

- A játékosokat 2 egyenlő létszámú csapatra osztjuk, és az asztal köré felváltva leültetjük.
- A 36 lapos Quarto pakliból tetszés szerint megalkotunk egy 6×6 -os játéktáblát/játékteret, azzal a megkötéssel, hogy a négy Joker a sarkokba kerül.
- Az utasításlapokat összekeverjük, és minden játékosnak adunk
2 – 3 játékos esetén 4,
4, 6 játékos esetén 3,
8 játékos esetén 2 lapot. A maradék lapok alkotják a húzópaklit.
- A különböző csapatok különböző színű korongokat kapnak, mindenki vesz maga elé néhányat.

Az utasításlapok és a kártya: Háromféle utasításlap van:

- A kártyán szerepel az öt függvénytulajdonság, amit vizsgálunk (3.2. táblázat). A fehérrel kiemelt tulajdonsággal rendelkező kártyákat keressük a táblán. Az utasításlapok különböző számú kártyáknak felelnek meg az asztalon.
- *Joker lap*: Egy korong tetszőleges helyre felhelyezhető a táblán.
- *Korongleemelő lap*: Egy korong tetszőleges helyről leemelhető a tábláról.

A játék menete: Az osztótól balra ülő játékos kezdi a játékot. Ezután a játékosok az óramutató járásával megyegyező irányba követik egymást. Az éppen soron következő játékos a kézbe fogott utasításlapjainak megfelelő kártyákat megkeresi a táblán. A megfelelő és üres mezők közül kiválasztja, hogy melyikre szeretné kirakni a korongját. A neki tetsző lapot kijátssza, lerakja a korongot, és húz egy lapot a húzópakliból. (Ha ezt elfelejtjük, akkor csak a következő kör végén pótolhatjuk.)

Ha van olyan utasításlap valakinek a kezében, aminek megfelelő kártyákon már van korong, akkor azt ki lehet cserélni.

3.3.4. Függvény-SET

Ezt a játékot egy szintén ismert népszerű játék, a SET ihlette (Falco 1988, [11]). Itt nem laphármasokat, hanem párokat keresünk.

Miután már a játékok során kiderült, hogy minden Quarto-kártyához pontosan egy olyan kártya tartozik, mely minden tulajdonságban eltér tőle, érdemes őket **duális pároknak** nevezni.

Játékosok száma: 2 – 4 fő/kártyacsomag

Játék időtartama: 10 perc

Nehézségi szint: 4/10

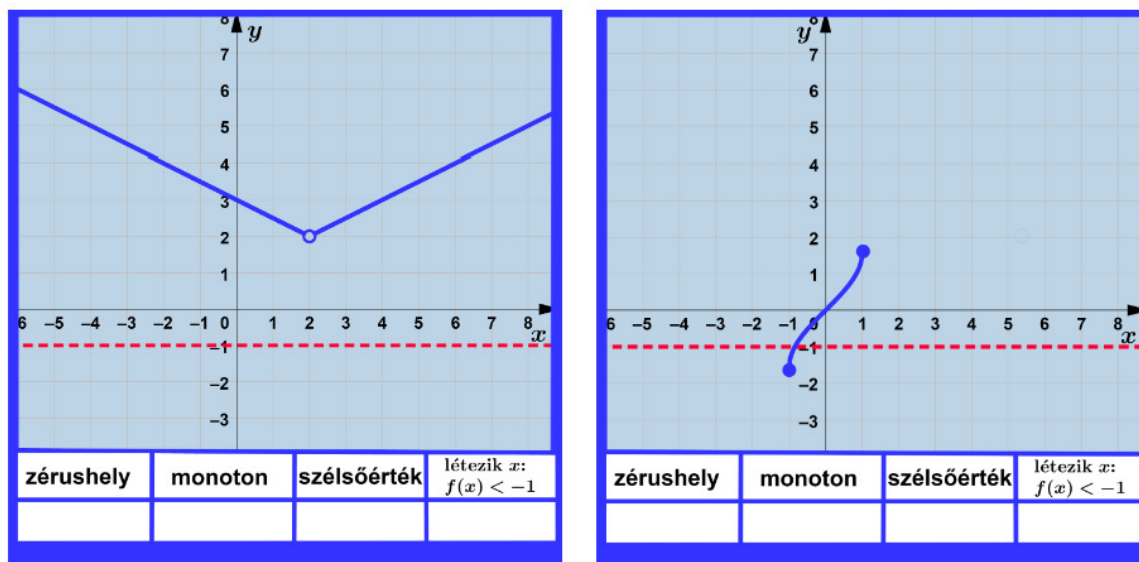
A játék célja: Minél több duális párt találni.

Előkészületek: A 32 lapos kártyapaklit összekeverjük, 8 lapot az asztalra helyezünk felfordítva 4×2 elrendezésben.

Feladat: A feladat, duális párok keresése. Aki talál ilyet, annak hangosan kell mondania, hogy SET, megmutatja, és ha helyesen mondta, elveheti a párt. Elképzelhető, hogy több duális pár is van az asztalon, és olyan is előfordul hogy egy sincs. Ha egy párt elveszünk, akkor a helyére a pakliból új párt kell tenni. Ha nincs duális pár, akkor addig helyezünk újabb lapokat az asztalra, amíg valaki nem talál duális párt. Ilyenkor csak akkor kerül újabb lap az asztalra, ha az asztalon lévő lapok száma 8 alá csökken.

Győztes: A játékot az nyeri, aki a legtöbb duális párt találja.

Példa: Duális párt láthatunk a 3.10. ábrán.



3.10. ábra. Egy duális pár.

Megjegyzés. A játék ebben a formában nem könnyű, viszont egyszerűsíthetjük úgy, hogy az egyik tulajdonságot (javasolt a korlátosság) nem vesszük figyelembe. Így egy lapnak két duális párja is lehet, és kevesebb dologra kell koncentrálni.

A játék nagyon jól fejleszti a struktúrált gondolkodást. Például, ha látjuk, hogy az egyik kártyán lévő függvény felvesz -1 -nél kisebb értékeket, akkor a többi függvény közül csak azok lehetnek duális párok, melyek grafikonja az $y = -1$ egyenes felett halad.

Lehet két tulajdonságot is egyszerre vizsgálni, így gyorsabban lehet haladni.

Vagy ha észrevesszük, hogy a legtöbb függvény monoton, akkor a nem monoton függvényekhez keresünk duális párt a táblán.

3.3.5. További játéklehetőségek a kártyákkal

Az alábbi játéklehetőségek ötletét Pintér Klára (Pintér 2013, [23]) és Dienes Zoltán (Dienes 1966, [8]) logikai készletéhez készített játécai ihlették.

1. **Elvitte a szarka.** Összekeverjük a Quarto kártyáit, majd a gyerekeknek be kell csukniuk a szemüket és ezalatt a teljes pakliból kivesszünk egy lapot (ezt vitte el a szarka). Amikor a gyermekek kinyitják a szemüket meg kell mondaniuk, hogy melyik volt az elvitt kártya.

Ahhoz, hogy a hiányzó lapot meghatározhassák, mindenképpen valamilyen szempont szerint rendet kell rakniuk, s ezáltal megtapasztalják az kártyák rendszerét. (Kezdetben dolgozhatunk könnyítésként részkészlettel is, pl. kivesszük az összes szélsőértékkel rendelkező függvénygrafikont.)

2. **Telefonos játék.** Két játékos egy-egy paklival játssza. Az egyik játékos kirak egy alakzatot a saját készletéből úgy, hogy a másik játékos ne lássa. Ezután sorban minden elemre elmondja, hogy mely elemet rakta le, és meghatározza a többi elemhez viszonyított helyét. Például leraktam egy mínusz egynél kisebb értékkel is rendelkező, monoton, szélsőértékkel és zérushellyel is rendelkező függvényt, ennek a jobboldalára egy mínusz egynél kisebb értéket nem felvevő, nem monoton, szélsőértékkel és zérushellyel is rendelkező függvényt stb. A másik játékosnak ki kell választania a saját készletéből a megfelelő elemet, és a meghatározott helyre kell raknia. Ha ehhez nem elegendő a kapott információ, akkor kérdezhet. Így a játékosok gyakorolhatják az elemek megnevezését, a megnevezések alapján azok kiválasztását, valamint a megadott téri viszonyok alapján való elhelyezést. A sikeres kirakás után a játékosok szerepet cserélnek. (Ha páronként csak egy készletünk van, játszhatjuk úgy is, hogy az alakzatot kirakó játékos lefényképezi az általa kirakott alakzatot és a kép alapján mondja el a társának, hogy melyik elemet hova kell elhelyeznie.)

3. Sorba rendezős játékok:

A következő játékok lehetőséget teremtenek arra, hogy a diákokkal először a szabály követését majd szabály felismerését, illetve szabály alkotását gyakoroltassuk.

Kirakunk egy kezdőlapot a pakliból, és a diákoknak folytatniuk kell a sorozatot úgy, hogy az új lap

Egykülönbség játék esetén pontosan egy tulajdonságban térjen el az öt megelőző elemtől, és így tovább minden újonnan lerakott elem esetében;

Kétkülönbség játék esetén pontosan két tulajdonságban térjen le az öt megelőző laptól, és így tovább minden újonnan lerakott lap esetében;

Háromkülönbség játék esetén pontosan három tulajdonságban térjen el az öt megelőző laptól, és így tovább minden újonnan lerakott lap esetében.

Variálhatjuk a játékot úgy, hogy a játékosoknak nem csak balról jobbra lehet folytatni a sort, hanem balra is, valamint felfelé és lefelé is. Csupán az a kikötés, hogy minden irányban teljesülnie kell, hogy az adott szabálynak megfelelő kártya kerüljön. További lehetőség, hogy felváltva rakunk egy és két különbségre lévő kártyákat egymás mellé.

4. Rontó játék

Kirakunk néhány lapot a pakliból, és mondunk róluk egy igaz állítást. Ezután a következő játékosnak hozzá kell tennie egy lapot a halmazhoz úgy, hogy a korábbi igaz állítást elrontsa, azaz az új lappal hamissá teszi azt, és mondania kell egy új, igaz

állítás, és így tovább.

5. Barkochbák

Hagyományos barkochba: Egy függvényt/lapot kell kitalálni olyan kérdések segítségével, amelyekre igennel vagy nemmel lehet felelni.

Rakosgatós barkochba: A gyerekek egy-egy kérdés után mindig szétválogatják a lapokat, és visszateszik a dobozba azokat, amelyek biztosan nem lehetnek a játékvezetőnél. A rakosgatás addig ismétlődik, míg csak egy lap/függvény marad elől, és ez lesz a megoldás.

Hazudós barkochba: Egy függvényt kell kitalálni olyan kérdések segítségével, amelyekre igennel vagy nemmel lehet felelni, azonban most a játékvezető minden kérdésre hamis választ ad, azaz az „igen” helyett „nem”-et, a „nem” helyett „igen”-t válaszol.

Fordított barkochba: Ennél a barkochbánál nem egy lapot/függvényt, hanem egy tulajdonságot (monoton, nem monoton, van zérushelye, nincs zérushelye, van -1 -nél kisebb függvényértéke, nincs -1 -nél kisebb függvényértéke, van szélsőértéke, nincs szélsőértéke) kell kitalálni, és egy-egy lap/függvény felmutatásával kell kérdezni, amire a játékvezető válasza megmondja, hogy a felmutatott függvénynek megvan-e a gondolt tulajdonsága.

6. Alkossunk csapatokat az elemekből!

Gyakori a tanórákon, hogy heterogén csoportokat kell létrehozni. Az éppen zajló tananyagtól függetlenül lehet használni ezeket a kártyákat többek között csoportok, párok létrehozására is. Alkothatunk csoportokat úgy, hogy mindenki húz egy lapot. Egy csoportba kerülnek azok, akik egy tulajdonságot tekintve megegyező lapokat húztak. (pl: monoton függvények) Ilyenkor kétfelé osztottuk az osztályt. Minnél több kritériumot hozunk be a csoportalakításba, annál kisebb létszámú csoportokat hozhatunk létre, sőt akár párokat is alkothatunk.

4. fejezet

Hatékonyságvizsgálat

Előző OTDK dolgozatomban egy 7. osztályos tananyag kártyákkal történő feldolgozása és annak kipróbálásának leírása szerepelt. Akkor még kevesebb eszköz volt készen, az órákat én tartottam. A hatékonyságmérés úgy történt, hogy ugyanazt a témazáró dolgozatot egy másik hasonló képességű csoport is megírta, akik nem használták a kártyákat. A mérések azt igazolták, hogy a diákok szívesen használják a kártyákat, és a témazáró dolgozatok eredményében nem volt eltérés sem a kontrollcsoporttól sem a korábbi dolgozatok eredményétől.

A továbbfejlesztett „Függvényrengeteg”eszkőzparkot tapasztaltabb tanárokkal, szélesebb körben, több városban, korban és képességekben is különböző osztályokban próbáltuk ki. Ezen mérés bemutatása és eredményei szerepelnek ebben a fejezetben.

4.1. Kísérletek körülményei

A legyártott eszközökkel egymással párhuzamosan 6 tanulói csoport tudott dolgozni. A kísérletben 4 általános iskolai és 3 középiskolai tanár vett részt.

A tanárokhoz egyénileg elmentünk, és megtanítottuk őket az eszközök használatára. A játékok egy részének kipróbálása és az eszközpark bemutatása hozzávetőlegesen 1, 5 – 2 órát vett igénybe alkalmanként.

Összesen 3 városban, 3 általános iskolában és 2 középiskolában zajlott a kísérlet.

4.1.1. A csoportok bemutatása

PTE GYÁIG Deák Ferenc Általános Iskolája

A pécsi gyakorló iskolában két tanár, Lovas Zoltán és Bere Gyöngyi használta az eszközeinket. Témavezetőmmel mindketten több, mint 10 éve állandó munkakapcsolatban állnak. Mindketten tapasztalt tanárok Bere Gyöngyi már nyugdíjasként tanít az iskolában.

Két 7. osztályban próbálták ki az eszközöket. A 7.a osztályban Lovas Zoltán, a 7.b osztályában Bere Gyöngyi tanított. Mindkét osztály csoportbontásban tanulja a matematikát. A mérésben résztvevő 2 csoport átlagos képességű, az iskola általános tanrendű, heti 4 órájuk van matematikából. Az osztály matematikában tehetséges tanulói egy másik csoportban tanulnak. (A későbbiekben az iskolára „Deák”-ként hivatkozunk.)

Néri Szent Fülöp Katolikus Általános Iskola

A budapesti iskolában tanító Záborszkyne Kuzmann Ildikóval a Varga Tamás Módszertani Napokon kerültünk kapcsolatba. Ő jelentkezett, hogy szívesen részt venne a kutatásban, szívesen kipróbálná az eszközöket. A Budapesti Néri Szent Fülöp Katolikus Általános Iskola 7. osztályában alkalmazta az eszközöket.

Az általános tanrendű osztály heti 4 órában tanulja a matematikát. A csoport meglehetősen kétpólusú, vannak BTMN-es tanulók is a csoportban, de vannak, akik jobb képességekkel rendelkeznek, nincs a két pólus között középút. (A későbbiekben az iskolára „Néri”-ként hivatkozunk.)

A tananyag feldolgozása a dolgozattal együtt 16 órát vett igénybe. A diákok majdnem minden órán használták a csomag valamely elemét.

Radnóti Miklós Általános Iskola

A móri iskolában korábbi matematikatanárom, Major István vállalkozott az eszközök kipróbálására. Bár ő inkább a régi iskola módszereit részesíti előnyben, fontosnak tartottuk, hogy olyan tanár is használja a kártyákat, aki nem mozog otthonosan a gamifikáció témakörében, közegében.

Az iskola általános tanrendű, heti 5 órában tanulják a matematikát. Tanárhiány miatt az eredeti csoportbontást meg kellett szüntetni, így az a szerencsétlen helyzet alakult ki, hogy a csoportban a matematikában tehetséges és a tanulási nehézségekkel küzdő diákok együtt tanulnak. (A későbbiekben az iskolára „Radnóti”-ként hivatkozunk.)

MNOÖ Koch Valéria Iskolaközpont

A pécsi nemzetiségi iskola 4 osztálya is kipróbálta az eszközöket. A csoportokat Hebling Eszter tanítja, aki sok éves oktatási tapasztalattal rendelkezik a közoktatásban, és az utóbbi években elemi matematikát tanít az egyetemen.

Az iskola német nemzetiségi tanrendű, így a diákok a tárgyak többségét németül tanulja. A középiskolában van természettudományos tehetséggondozó csoport. A 9. és a 12. évfolyamon a tehetséggondozós csoportban, a 10. és 11. évfolyamon nem tehetséggondozós csoportban került kipróbálásra az eszközcsoomag. A tehetséggondozós csoportok heti 5, a

nem tehetséggondozós csoportok heti 3-4 órában tanulják matematikát. (A későbbiekben az iskolára „Koch”-ként hivatkozunk.)

Pécsi József Nádor Gimnázium és Szakképző Iskola

A pécsi iskolában szeptembertől hallgatóként óraadó vagyok. Rajtam kívül Erb Kotiers Rebeka kolléganőm is vállalkozott az eszközök kipróbálására, aki ebben az iskolában szintén óraadó, egy másik iskolában főállású matematika tanár néhány év tapasztalattal.

Az iskolában vannak gimnáziumi és szakképző osztályok, nappali és esti tagozatos képzés. Itt az eszközök egy 9. és egy 10. nappali képzésben résztvevő, illetve egy 11. esti képzésben résztvevő gimnáziumi osztályban lettek kipróbálva. A 10. évfolyamos diákokat Erb Kotiers Rebeka, a 9. és 11. évfolyamos diákokat én tanítottam.

A 9. és a 10. évfolyam nappali tagozatos diákjai heti 3 órában tanulják a matematikát, szintem mindenki valamilyen tanulási zavarral küzd. A 11. évfolyam általános tanrendű csoportját szinte kizárólag felnőttek alkotják, akik munka mellett készülnek az érettségire. Ők heti 4 órában tanulják a matematikát. (A későbbiekben az iskolára többször „JNGSZI”-ként hivatkozunk)

4.2. Mérések

A kérdőívek elektronikusan készültek. Az eszközök kipróbálása és az online kérdőívek kitöltése 2022 októberétől 2022 decemberéig tartott. Ebben az alfejezetben a kérdőívek fajtái és a feltett kérdések kerülnek bemutatásra.

4.2.1. Tanulói hangulati kérdőív

A tanulásnak elengedhetetlen része a belső (intrinzik) motiváció megteremtése, a figyelem és érdeklődés elősegítése, az ezekhez szükséges autonóm környezet megteremtése. Az ilyen környezethez szükség van :

1. bizonytalan szituációkra,
2. minél kevesebb korlátozottságra,
3. közepesen erős motivációra. (Stöckert, 1995 [25])

A kártyák és a játékok e környezetre való hatását egy három kérdéses kérdőívvel mértük fel, Kő Natasa pszichológus (ELTE) szemináriumi anyaga alapján. Arra kértük a tanárokat, hogy minden óra végén töltsék ki a diákokkal a kérdőívet. A Koch Valéria Iskolaközpont 9. és a Deák Ferenc Általános Iskola 7. osztályai az idő szűke miatt nem, de a többiek minden órán kitöltötték. A kérdésekre a diákok egy **7** fokozatú skálán jelölték a válaszukat.

1. Jelöld be az alábbi skálán, hogy az előbbi órán milyen volt a hangulatod!

2. Jelöld be az alábbi skálán, hogy mennyire élvezted az előbbi órát!
3. Jelöld be az alábbi skálán, hogy mennyire érdeklődsz az előbbi tantárgy iránt!

4.2.2. Tanulói szöveges visszajelzés

A diákoknak a téma lezárása után lehetőségük volt egy szöveges értékelést is adni. Egy elektronikus kérdőíven kapták meg a kérdéseket, de lehetőségük volt a válaszokat papírra is leírni. Itt a diákok személyes véleményére voltunk kíváncsiak. Kérdések:

„Mennyire tetszett a kártyákkal folytatott munka? Mi a véleményed a kártyacsomagról? Van valami ötleted hozzájuk?”

4.2.3. Bemeneti és kimeneti tesztek

A mellékletben megtalálható bemeneti és kimeneti tesztek a kártyacsomagok által fejlesztendő területek tudásszintjének mérésére hoztuk létre.

A bemeneti tesztnél még szerepelnek a kártyákon is szereplő függvények, a kimeneti tesztnél figyeltünk arra, hogy a kártyákon nem szereplő függvények tulajdonságaira kérdezzünk rá.

A 9-10. osztályra a tanulók már minden szükséges tudást elsajátítottak a korábbi tanulmányaik során. Emiatt a felsőbb osztályokban az aktuális évi függvénytan tanítása előtt és után is tudtunk tudáspróbát íratni az adott témában.

A méréssel azt vizsgáltuk, hogy az adott témában milyen mértékben gyarapodott a diákok tudása. Mindkét tesztet megírta a Koch Valéria Iskolaközpont 9. és 12. osztálya, illetve a József Nádor Gimnázium és Szakközépiskola 11. esti tagozatos osztálya.

4.2.4. Tanári visszajelzés

A tanárok tapasztalataikat, véleményüket a témakör végén osztották meg velünk.

A kérdőívet a tanárok minden egyes csoportra külön-külön kitöltötték. A kérdések:

1. Hány órát vett igénybe a témakör feldolgozása?
2. Hány órája van az osztálynak egy héten?
3. Az órák mekkora részén használta a kártyákat? (1-9 skála)
4. Kérjük írja meg, hogy a témakör hányadik óráján (vagy mely napokon) használta a kártyákat.
5. Mit gondol, mekkora mértékben járult hozzá a „Függvényrengeteg” a tananyag elsajátításához? (1-9 skála)
6. Mit gondol, mekkora mértékben járult hozzá a „Függvényrengeteg” a diákok jókedvéhez? (1-9 skála)

7. Az adott témakör adott csoportbéli eredményeit összehasonlítva korábbi ön által tanított csoportokkal mit tapasztalt? (skála –4-től 4-ig)
 8. Ugyanennek a diákcsoportnak a kártyák használatával hogyan alakult a dolgozatokban és az órán a teljesítményük az előző dolgozatokhoz és órai tapasztalatokhoz képest? (skála –4-től 4-ig)
 9. Jelölje be azt a legfeljebb 4 eszközt, amit a leghasznosabbnak tart az oktatásban!
 10. Jelölje be azt a legfeljebb 4 eszközt, amit a legkevésbé tart hasznosnak az oktatásban!
 11. Jelölje be azokat az eszközöket, melyek használatát az ön meglátása alapján a diákok a legjobban élvezték!
 12. Használná-e a jövőben ezt az eszközcsomagot?
 13. Ajánlaná-e a másoknak az eszköz használatát?
 14. Van valami ötlete a további eszközfejlesztésre vagy ezen eszközök további felhasználására? Milyenek a tapasztalatai a kártyákkal kapcsolatban?
- Legutóbbi egy kifejtős kérdés volt, a többi kérdésnél skálák voltak megadva illetve feleletválasztós kérdésekre válaszolhattak a tanárok.

4.3. Mérésekre érkezett válaszok

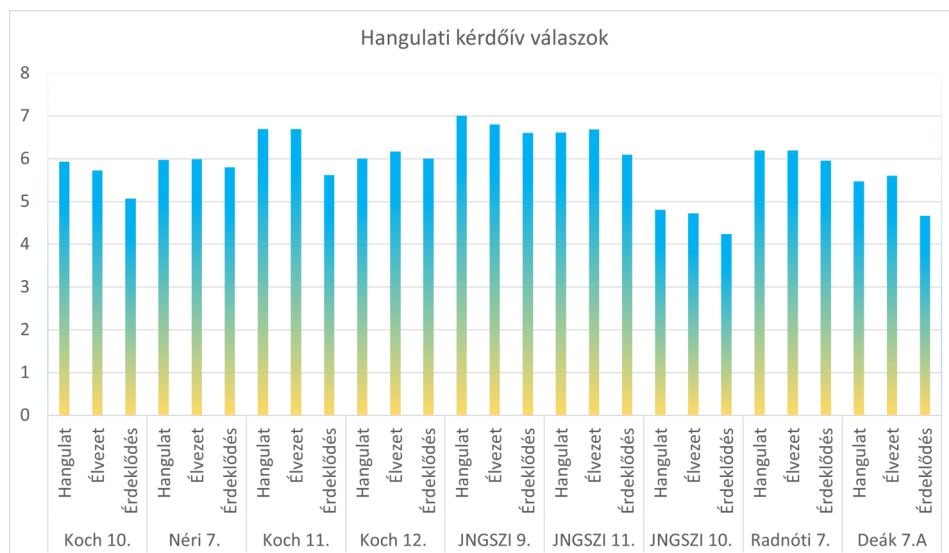
4.3.1. Tanórák végén kitöltött anonim hangulati kérdőív – válaszok

A 4.2. alfejezetben ismertetett hangulati kérdőív kérdéseire innentől rendre csak „Hangulat, Élvezet és Érdeklődés”-ként fogunk utalni. A kérdőívre összesen 604 kitöltés érkezett. Az egyes osztályokban adott válaszok átlagát a 4.1. ábrán szemléltettük. A kérdésekre maximálisan adható pontszám 7 volt.

A hangulati kérdőívre beérkező eredmények is azt mutatják, hogy a diákok jól érezték magukat az órákon. Ez azért is jelentős, mert ahogy a 4.1.1. alfejezetben is írtuk, a csoportok szociális háttér, matematikai és egyéb tanulmányi képesség szempontjából is nagyon eltérőek. Fontos kiemelni azt is, hogy a csoportok többségét különböző tanárok tanították. A legmagasabb és a legkisebb értékeket is különböző típusú osztályokban tanuló diákok adták. A 4.1. táblázatban a hangulati kérdőívre adott válaszok átlagai találhatók.

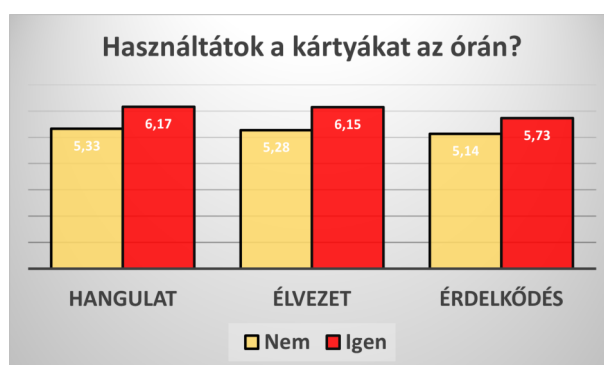
	Hangulat	Élvezet	Érdeklődés
Átlagosan	6,188	6,190	5,948

4.1. táblázat. Hangulati kérdőívek átlaga az összes beérkezett eredmény alapján.



4.1. ábra. A diákok válaszainak átlaga a hangulati kérdőívre.

A kérdőívekben rákérdeztünk arra, hogy az adott órán használták-e az eszközöket. A 4.2. ábrán a válaszok függvényében is ábrázoltuk az átlagokat. A nem és az igen válaszok aránya hozzávetőlegesen 9 : 1. Látható, hogy a hangulatra pozitív hatással van az eszközök használata.



4.2. ábra. A hangulati kérdőív átlagai az eszközhasználat függvényében

4.3.2. Témakör végén kitöltött szöveges visszajelzés – válaszok

A témakör végén minden, a kutatásban résztvevő diák leírta az eszközcsomagról a véleményét. Volt, aki csak néhány szóban, rövidebb mondatban válaszolt, viszont voltak olyan diákok is, akik hosszabban fejtették ki a véleményüket.

Ez a kvalitatív felmérés számunkra segítséget jelentett, hogy pontosabb képet kapjunk a hangulati kérdőívre kapott válaszokról.

A visszajelzések többsége rendkívül pozitív volt, és a tanárok szóbeli visszajelzése alapján tudjuk, hogy a diákok nagyon örültek, hogy az ő véleményükre is kíváncsiak

voltunk.

Az általam tanított iskolában a másik csoport diákja személyesen is megkeresett, hogy szóban elmondja, hogy mennyire élvezte a kártyákat a tanulás során.

Külön öröm volt olvasni, hogy a diákok szívesen látnának hasonlóan kidolgozott játékokat más témakörök tanításánál is.

Néhány választ kiemelünk, a többi a mellékletben található:

- „Nagyon tetszettek a kártyák. Olyan függvényábrákkal találkoztam amikről nem is gondoltam, hogy léteznek. Sokat segített a megértésben.”
- „Nekem nagyon tetszettek ezek az órák, amikor a tanárnővel ezekkel a kártyák segítségével dolgoztuk fel a tananyagot. Így szerintem sokkal könnyebben és érthetőbben megértjük a matek anyagokat. Nekem nagyon tetszett ez a társasjáték is, amit most legutóbb a végén játszottunk. Én örülnék neki ha nem csak matekból hanem másik órán is ilyen élményszerűen, játékosan dolgoznánk fel a tananyagokat. És ha matekból más anyagrészben is lennének ilyen játékok, ezzel az anyagnak is sokkal könnyebb és élményszerűbb a megtanulása!”
- „Sosem volt a függvény a szívem csücske, de ezekkel a kártyákkal és a játékkal, kicsit megszerettem. Könnyebben le tudom olvasni az egyszerűbb függvényeket, jó volt matek órán játszani, úgy hogy közben tanultunk és gyakoroltunk is. A kedvenc játékom az volt amihez volt tábla.”
- „Szerintem egy nagyon érdekes játék és rengeteget segít a függvények könnyebb megértésében. Én személy szerint élvezek vele játszani mert nem csak szórakoztató, ahogy izgulunk, hogy nyerünk-e hanem rengeteg gyakorlást is biztosít. Minél többet játszottunk vele, annál gyorsabban ment a függvények olvasása. Emellett király csapatépítő program is.”
- „Nekem nagyon tetszett mert nem egy „kötött óra” volt hanem szinte így gyakoroltunk/-tanultunk, hogy közben szinte észre sem vettük. A versenyszellem szerintem hajtott mindenkit, hogy „többet” gondolkozzon, ne mástól várja a megoldást. Összességében nekem nagyon tetszett, mert gyakorlás mellett jó csapatépítőként is funkcionálhat.”

4.3.3. Bemeneti és kimeneti tesztek – válaszok

Ebben az alfejezetben bemutatjuk a bemeneti és kimeneti tesztek eredményeit. A tesztek közül mindnek megnéztük a Cronbach-féle alfa-koefficiensét, amelyik osztály pedig mindkét tesztet megírta, ott t-próbát is végeztünk.

A Cronbach-alfát az alábbi képlettel számoltuk.

$$\alpha = \left(\frac{n}{n-1} \right) \left(1 - \frac{\sum s_i^2}{s_t^2} \right) \quad (4.1)$$

Ahol α : Cronbach-féle koeficiens, n : itemek száma, s_i^2 : az itemek szórásnégyzete, s_t^2 : a teszt-összpontszámok szórásnégyzete.

Arról, hogy egy kérdőív milyen Cronbach-alfa esetén reliábilis megoszlanak a vélemények, de a legtöbb forrás szerint 0,8 és 0,85 között kapott értékek a legjobbak. Csapó (2004, [5]) így mutatja be a számértékeket:

„A tanárok által készített tesztek reliabilitásmutatói ritkán haladják meg a 0,6 értéket. A gyakorlatban használt egyszerűbb tesztekől megkövetelhetjük, hogy reliabilitásmutatójuk legalább a 0,8 legyen. A 0,9 már a standardizált tesztek körében is elfogadható érték, a hosszas fejlesztő munka eredményeként elkészült tesztek reliabilitása pedig elérheti 0,95-0,98 értékeket is. ”

A különböző csoportokra külön is számoltuk a Cronbach-féle koeficiens értékét. Azt tapasztaltuk, hogy a jobb képességű csoportok esetén az érték alacsonyabb, mint a gyengébb képességű csoportok esetén. A kimeneti teszten elért pontszámok mindegyik csoportnál jelentősen nőttek a bemeneti teszthez képest.

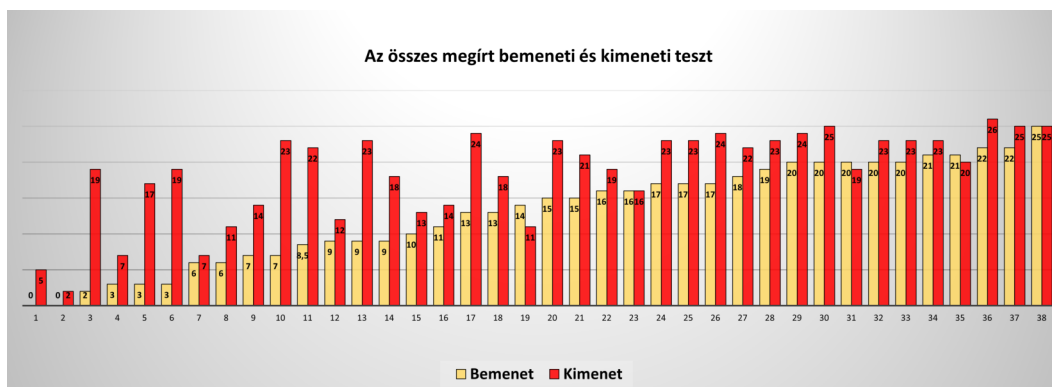
Három olyan csoport volt, akik a bemeneti és a kimeneti tesztet is megírták. Feltételezhetjük, hogy a teszten elért pontszámok normál eloszlást követnek. Az elért eredményekre mindhárom csoportban külön-külön egyoldali párosított t-próbát végeztünk Microsoft EXCEL program segítségével. Nullhipotézisnek azt vettük, hogy nem javult a diákok adott témakörbeli tudása, azaz a kimeneti teszt eredménye nem jobb a bemeneti teszt eredményénél. A nullhipotézist a t-próba eredménye alapján mindegyik csoportban elvetettük, azaz a kimeneti teszten mindhárom csoportban szignifikánsan jobb eredményt értek el a diákok.

Összesített kimeneti és bemeneti eredmények

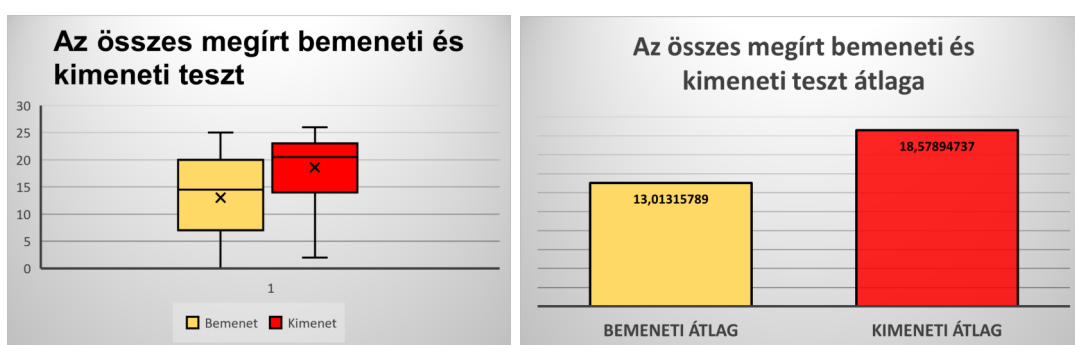
A 4.3. és 4.4. ábra mutatja az egyesített bemeneti és kimeneti teszteredményeket. Többségében jelentős javulást figyelhetünk meg az eredmények között. A dolgozatok összesített Cronbach-alfa-értékét és átlagait mutatja a 4.2. táblázat. Mivel a Koch Valéria iskola diákjai nem oldották meg az első 2 feladatot, ezért az összesített eredményeket csak a 3. feladattól vettük figyelembe.

Cronbach-alfa Kimenet	Cronbach-alfa Bemenet	Kimenet átlag	Bemenet átlag
0,886	0,943	15,51	22,18

4.2. táblázat. Összesített Cronbach-alfa és átlageredmények



4.3. ábra. A bemeneti és kimeneti tesztek összesített eredményei I.

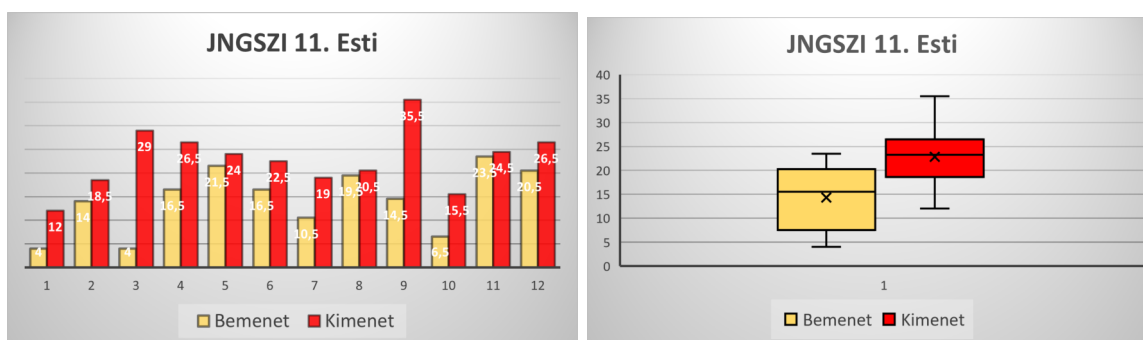


4.4. ábra. A bemeneti és kimeneti tesztek összesített eredményei II.

József Nádor Gimnázium és Szakközépiskola 11. osztály

Ahogy a 4.1.1. alfejezetben írtuk, a kísérletben részt vevő diákok felnőttek. Képességeik messze elmaradnak a nappali tagozatos elit gimnáziumban tanulókétól. Ugyanakkor az ugyanebben az iskolában tanuló nappalis diákokhoz képest tudatosabbak, nagyon szeretnék érettségit szerezni matematikából.

Az eredményeiket a 4.5. ábrán szemléltettük. Mindkét diagram ordinátatengelye az elért pontokat mutatja. Az oszlopdiagram abszcisszája az egyes diákokat jelöli. A bemeneti teszten elérhető maximális pontszám 40 pont volt.



4.5. ábra. A József Nádor gimnáziumi 11. osztályának bemeneti és kimeneti eredményei

Ebben az osztályban a diákok a 11.-es, 2020-as Nemzeti Alaptanterv szerinti témakört vették: hatvány, gyök, logaritmus, exponenciális kifejezések, exponenciális függvény. Az exponenciális függvény tulajdonságainak, jelölésének, értelmezési tartományának, értékkészletének stb. megértéséhez a kártyákat aktívan, majdnem minden órán elővettük. A korábbi tananyagokat az eszközök segítségével elevenítettük fel.

A teszteredményekre vonatkozó Cronbach-féle alfa koefficiens, továbbá az egyoldali párosított t-próba eredményét a 4.3. táblázat mutatja.

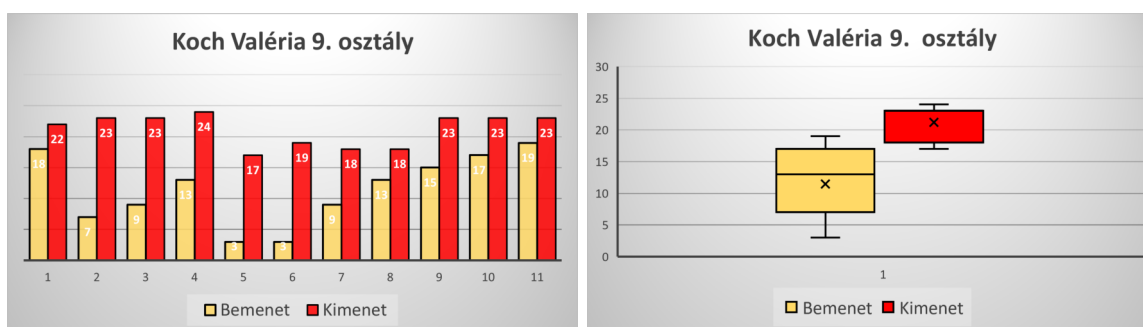
Cronbach-alfa Bemenet	Cronbach-alfa Kimenet	t-próba
0,879	0,840	0,00108

4.3. táblázat. A 11. osztály tesztjeinek Cronbach-alfája és t-próbája

Az eredményekből arra következtetünk, hogy a tesztek megbízhatóak, a diákok grafikonnal adott függvények tulajdonságait biztosabban tudták leolvasni az eszközök használata után, mint előtte.

Koch Valéria Iskolaközpont 9. osztály

Az osztálynak csak általános iskolai függvényfogalmi ismeretei voltak. A témakör elkezdése előtt megírták a bemeneti tesztet, a témakör végén a kimeneti tesztet. A 4.6. ábrán szemléltetjük az eredményeiket. Mindkét diagram ordinátatengelye az elért pontokat mutatja. Az oszlopdiaagram abszcisszája az egyes diákokat jelöli. Az elérhető pontszám 26 pont volt, mert tanári döntés alapján a bemeneti és kimeneti teszt első két feladatát nem oldották meg a diákok.



4.6. ábra. A Koch Valéria Iskolaközpont 9. osztályának bemeneti és kimeneti eredményei

A csoportot átlag feletti képességű diákok alkotják. A bemeneti tesztek eredményei nem mutatnak kimagasló teljesítményeket. Ennek oka, hogy a függvénytulajdonságok grafikon alapján történő leolvasása csak speciális függvények esetén kerül elő, és nem is hangsúlyos ez a témakör általános iskolában. A kimeneti tesztek eredményeiben nagy

arányú növekedést tapasztalunk. A legalacsonyabb elért eredmény és a legmagasabb elért eredmény szintén nőtt, nőtt az átlag, és a medián is.

A teszteredményekre vonatkozó Cronbach-féle alfa koefficiens, továbbá az egyoldali párosított t-próba eredményét a 4.4. táblázatban találjuk.

Cronbach-alfa Bemenet	Cronbach-alfa Kimenet	t-próba
0,903	0,547	0,0000224

4.4. táblázat. A 9. osztály tesztjeinek Cronbach-alfája és t-próbája

Amíg bemeneti tesztek Cronbach-féle alfa koefficiense elég magas, addig a kimeneti eredményekből számolt Cronbach-alfa nem lett magas, inkább csak átlagos. Ez annak köszönhető, hogy a kimeneti tesztekben a diákok közel hasonló, magas eredményeket írtak (4.6. ábra), amelyek szórása emiatt kevesebb lett, továbbá kevesebb item szerepel a dolgozatban, ami csökkenti a Cronbach-féle alfa koefficiens értékét.

Az eredményekből arra következtetünk, hogy a tesztek megbízhatóak, a diákok grafikonnal adott függvények tulajdonságait biztosabban tudták leolvasni az eszközök használata után, mint előtte.

Koch Valéria Iskolaközpont 12. osztály

Ettől a csoporttól vártuk a legmagasabb bemeneti eredményeket, hiszen ők a tanulmányaik során már több ízben találkoztak a függvények témakörével, ráadásul a csoportból 4-5 fő matematikából versenyeken is sikeresen szerepel.

Az eredményeket a 4.7. ábrán találjuk. Már a bemeneti eredmények is magasak voltak, többen is a maximálisan elérhető 26 ponthoz közeli pontszámot érték el, de a kimeneti teszten még ennél is jobb eredményt értek el.

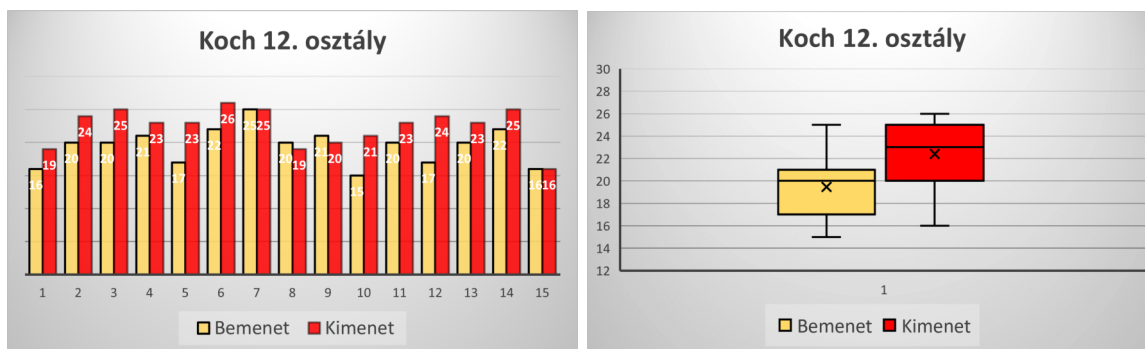
Tanári döntés alapján a diákok itt is kihagyták a tesztek első két feladatát, ezért volt 26 pont az elérhető maximális pontszám.

Ez a csoport már az idei félévben tanterv szerint nem foglalkozik függvényekkel, így a tanárnő az órákon haladt a tanmenet szerinti tananyaggal. Közben 3 héten keresztül az órák második felében játszottak a játékokkal.

A bemeneti és kimeneti tesztek között tehát függvénytanal kizárólag az eszközök használatával találkoztak, ezért a bemeneti és kimeneti eredmények közötti különbséget teljes egészében a kártyáknak tulajdoníthatjuk.

A 4.7. ábrán is látható, hogy nőtt mind a legalacsonyabb és legmagasabb elért pontszám, a medián és az átlag is.

Ennek a csoportnak a Cronbach-alfáját és t-próbáját a 4.5. táblázatban találjuk.



4.7. ábra. A Koch Valéria Iskolaközpont 12. osztályának bemeneti és kimeneti eredményei

Cronbach-alfa Bemenet	Cronbach-alfa Kimenet	t-próba
0,586	0,715	0,000270

4.5. táblázat. A 12. osztály tesztjeinek Cronbach-alfája és t-próbája

A Cronbach-féle alfa koefficiensek értéke megfelelő, de nem magas. Ennek oka itt is a kisebb szórás és a kevesebb itemszám.

Annak a valószínűsége viszont, hogy a 4.5. táblázatban bemutatott pontszámnövekedés ellenére a diákok tudása stagnált vagy csökkent csupán $p = 0,00270$ (t-próba).

4.3.4. Témakör végén kitöltött tanári kérdőív – válaszok

A kísérlet során kifejezetten fontosnak tartottuk, hogy ne csupán a kutatáshoz szerezzünk adatokat az eszközeink kezelhetőségéről és a velük történő munka hatásosságáról, hanem a tanárok egyéb tapasztalatait, ötleteit, kritikáit is meghallgassuk. Éppen ezért minden a kutatásba bevont tanárt megkértünk arra, hogy kifejezetten keresse az eszközök hibáit, legyenek azok elvi, szakmai vagy nyomdai hibák és ossza meg velünk ötleteiket, amellyel az eszközparkot bővíthetjük és javíthatjuk.

Hány órát vett igénybe a témakör feldolgozása?

A kérdésre a válaszokat a 4.8. ábrán találjuk. Itt arra voltunk kíváncsiak, hogy a kártyák használatával mennyi ideig tart az adott évi függvénytan témakörének feldolgozása. Itt jelentős eltéréseket nem tapasztalunk, a kapott értékek nem térnek el jelentősen a kerettantervben megadottól.

Az órák mekkora részén használta a kártyákat?

A kérdésre a válaszokat a 4.9. ábrán láthatjuk. A legtöbb tanár igen sokszor alkalmazta a kártyákat. A legkevesebb értékek a felsőbb elit gimnáziumi osztályokban voltak és a Deák 7.b osztályában. A felsőbb gimnáziumi osztályokban a kártyák már inkább a tudás mélyítésére használhatók, így érthető a 40%-körüli eszközhasználat. A Deák

Ferenc Általános Iskola 7.b osztályában Bere Gyöngyi nyugdíjasként vállalta az eszközök tanításba való integrálását. Nagyon örülünk neki, hogy képes megújulni, új dolgokat alkalmazni a tanításban, és hogy az órák negyedén használta a kártyákat.



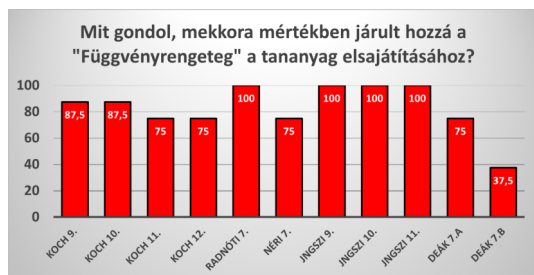
4.8. ábra. Az 1. kérdés válaszai



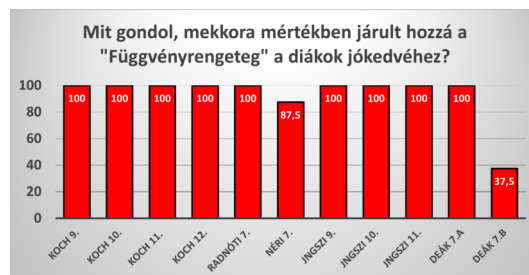
4.9. ábra. A 3. kérdés válaszai

Mit gondol, mekkora mértékben járult hozzá a „Függvényrengeteg” a tananyag elsajátításához?

A kérdésre adott válaszokat a 4.10. ábrán találjuk. Az eredményeket a szemléletesség miatt százalékosan adtuk meg. A tanárok minden osztály esetében úgy ítélték meg, hogy az eszközeink nagy mértékben hozzájárulnak a tananyag elsajátításához.



4.10. ábra. Az 5. kérdés válaszai



4.11. ábra. A 6. kérdés válaszai

Mit gondol, mekkora mértékben járult hozzá a „Függvényrengeteg” a diákok jókedvéhez?

Ezen kérdésre érkezett válaszokat találjuk a 4.11. ábrán. A tanárok úgy látták, hogy az eszközeink jelentős mértékben hozzájárulnak a diákok jókedvéhez. Ez azért is hangsúlyosan érdekes eredmény, mert összhangban van a diákok válaszaival, amit a 4.2.1. alfejezetben fejtettünk ki.

Az adott témakör adott csoportbéli eredményeit összehasonlítva korábbi ön által tanított csoportokkal mit tapasztalt?

Erre a kérdésre egy -4 -től 4 -ig terjedő skálán válaszoltak a tanárok. Ahol a -4 jelöli, hogy ebben a témakörben sokkal rosszabb volt az eredmény, a 4 pedig, hogy ennél a témakörnél sokkal jobb eredményt ért el a csoport, mint korábban. Ezen kérdésre beérkezett válaszokat a 4.12. ábrán láthatjuk. Megállapíthatjuk, hogy minden tanár úgy

tapasztalta, hogy az adott csoportjuk a korábbi témakörökhöz képest jobb teljesítményt nyújtott. Ez azért fontos eredmény, mert többségében a diákok a függvénytant a nehezebb témakörök közé szokták sorolni (Nachlieli, Tabach 2012, [20]).

Ugyanennek a diákcsoportnak a kártyák használatával hogyan alakult a dolgozatokban és az órán a teljesítményük az előző dolgozatokhoz és órai tapasztalatokhoz képest?

Erre a kérdésre beérkezett válaszokat a 4.13. ábrán találjuk. A Koch Valéria Iskola 12. osztálya a kártyákat nem tananyagfeldolgozás közben használta, így esetünkben ez a kérdés nem releváns. Minden további csoportnál úgy ítélték meg a tanárok, hogy a diákok a korábbi teljesítményükhöz képest ebben a témakörben jobban teljesítettek.

Ha ezen válaszokat összevetjük a 4.2. ábrán és a 4.12. ábrán szemléltetett eredményekkel, arra a következtetésre jutunk, hogy a diákok teljesítménye a tanórákon nőtt, méghozzá úgy, hogy a tanulás közben jól érezték magukat.



4.12. ábra. Az 7. kérdés válaszai



4.13. ábra. A 8. kérdés válaszai

A leghasznosabbnak és legkevésbé hasznosnak tartott eszközeink

A tanárok véleménye szerint a Függvény-Arborétum (3.2. alfejezet) és az ezen kártyákhoz készült Sequence-tábla kimagaslóan a leghasznosabb eszközök a „Függvényrengeteg”-ben. Hasonlóan magas eredményt értek még el a halmazábrás kártyák is (3.1.2. alfejezet).

A legkevésbé hasznosnak a pontkeresős (3.1.1. alfejezet) és az Elveszett koordinátatengely kártyáinkat (3.1.5. alfejezet) tartották a tanárok. Míg a leghasznosabb kártyáknál kimagaslóan magas eredményt értek el az adott eszközök, addig ezen kérdésnél kevésbé volt egyértelmű a válasz, minden eszközt legfeljebb 2 ember választott.

Használná-e a jövőben ezt az eszközcsomagot? Ajánlaná-e a másoknak az eszköz használatát?

Mindkét kérdésre ugyanazon válaszok érkeztek: minden egyes, a kutatásban résztvevő tanár szívesen használná a jövőben a kártyacsomagot, sőt minden tanár ajánlaná is másoknak, hogy eszközeinket a tanórákon alkalmazzák.

Van valami ötlete a további eszközfejlesztésre vagy ezen eszközök további felhasználására? Milyenek a tapasztalatai a kártyákkal kapcsolatban?

Erre a kérdésre rajtam és Erb Kotiers Rebekán kívül mindenki válaszolt. Volt aki bővebben fejtette ki a véleményét, volt viszont olyan is, aki csak pár szóban.

Szeretnénk Bere Gyöngyi és Major István válaszait külön is kiemelni. Mindkettőjük esetében olyan tanárokról van szó, akik sok év tapasztalattal bírnak. Mindketten a személyes találkozások alkalmával kiemelték, hogy nem szoktak hasonló módon tanítani. Bere Gyöngyi a szóbeli és írásbeli visszajelzései alapján nehezen tudta elengedni a régi, jól bevált módszereit, azok mellett próbálta meg alkalmazni az eszközöket. Így kevesebbszer jutott ideje ezeket az eszközöket használni az órán (4.1.1. alfejezet). A „Függvényrengeteg” egy fontos aspektusát ismertük meg általuk: azon tanárok esetében, akik kevésbé találkoztak a gamifikációval és egyéb játékos tanulásokkal, nagy elszántságot követel, hogy az eddigi módszereik helyett az általunk kidolgozott módon tanítsanak.

Záborszkykyné Kuzmann Ildikó részletes és alapos visszajelzésében sok ötletet kaptunk az eszközcsoomag bővítésére, tökéletesítésére.

A kapott válaszok név szerinti sorrendben rendezve:

„Az óra szervezésben jobbnak kellennem.”

Bere Gyöngyi

PTE Deák Ferenc Általános Iskolája

7.b osztály

„Azok a gyerekek kerültek ebbe a csoportba, akik a nyolcadikos központi felvételi matematika részét a legjobb eredménnyel irták (min 34 pont). Heti 3 matematikaórájuk van, plusz az egész csoportnak 1 óra kötelezően választott szakköri óra és kb a csoport fele jár még heti 2 óra versenyfelkészítő szakkörre. Sajnos rengeteg tanóra sérült náluk idén a cserekapcsolat, osztálykirándulások, fellépések, betegségek miatt, így a függvények témakört is nehezen tudtuk bepaszirozni erre a félévre, de nagyjából az utolsó pillanatra, a szünet előtti utolsó órákra sikerült. Velük ezért túl sok játékra nem maradt időnk. Mindegyik kártyatípust használtuk, megismerték őket, de komplett, összetett játékok lejátszása nem volt. Párosítottak, csereberéltek, sorbarendeztek... Függvényekről annyi előtudásuk volt, amire általános iskolából emlékeztek. Ez látszik a bementi méréseiken.”

Hebling Eszter

Koch Valéria Iskolaközpont

9. osztály

„ők egy 20 fős, gyengébb matematika központi eredményt irt csapat. Heti 4 órában tanulják a matematikát. A függvények témakör a kilencedikes tananyagban már szerepelt náluk. Azt kicsit feleleveníttük és míg az órákon az aktuális tizedikes témakörrel haladtunk tovább az órák utolsó 10-15 percében a kártyákkal játszottunk. Voltak párkeresős, sorbarendező feladatok, végül pedig a sequence. A sequencet nagyon élvezték, sokat játszották. A quarto kártyák nekik már kicsit összetettek voltak, de azért párkeresőst

kicsit azzal is játszottak. ”

Hebling Eszter

Koch Valéria Iskolaközpont

10. osztály

„Ez a csoport a sequence-t játszotta a legszívesebben, de úgy láttuk, hogy a játék jelenlegi szabályával a játékidő nagyon hosszú lett. Többnyire 5, esetleg 4, korong alkotott nálunk egy sequence-t, hogy a játék „pörgősebb” legyen. A quatro kártyákhoz ezeknek a diákoknak annyira nem volt türelmük. Ott a kártyák értelmezése, illetve a függvénytulajdonságokra való „ráérzés” több időt vesz igénybe. Ehhez ez a csoport nem volt elég motivált.”

Hebling Eszter

Koch Valéria Iskolaközpont

11. osztály

„A kártyákat tizenkettedik évfolyamon tananyagtól függetlenül, óra végi játékos ismétlésként használtuk. A kártyák a függvénytulajdonságok, illetve a függvény definíció rögzülésében és elmélyülésében segítik a diákokat. Többszöri ismételt használatával a diákok sokkal hamarabb felismernek bizonyos függvénytulajdonságokat. A csoport a sequence játékot élvezte a legjobban, illetve még magyar kártyaként használták és az azzal játszható kártyajátékokat játszották.”

Hebling Eszter

Koch Valéria Iskolaközpont

12. osztály

„Nagyon jó a kártyacsomag. Nekem hiányzott egy részletes módszertani útmutató, amely a függvénytanítást feldolgozza a kártyák alapján az alapoktól a legmagasabb szintig.”

Lovas Zoltán

PTE Deák Ferenc Általános Iskolája

7.a osztály

„Nagyon örültem a lehetőségnek, hogy kipróbálhattam a kártya csomagot. Külön öröm számomra, hogy Norbit taníthattam általános iskolában és egy ilyen minőségi matematikai újítást dolgozott ki. Úgy gondolom, hogy tanítványaim könnyebben sajátították el a tananyagot. A kártyák tartós jó minőségűek. Eszköz fejlesztésre javaslom általános iskolában az egyenes és fordított arányosságra szöveges feladatok kártyás kidolgozása. Nagyon büszke vagyok rád Norbi! Major István”

Major István

Móri Radnóti Miklós Általános Iskola

„A Varga Tamás napokon hallottam a függvénykártyákról, ami egyből felkeltette

érdeklődésemet. Ugyanis mindennapi munkámban folyton azt tapasztalom, hogy a felső tagozatos diákoknak nagyon nagy szükségük van kézzelfogható eszközökre a tanuláshoz. Én magam az ELTÉ-n végeztem 1998-ban, a szakdolgozatomnál Vancsó Ödön volt a konzulensem. Már akkor is az volt az alapvető törekvés, hogy amennyire csak lehet, közelítsük a matematikát a mindennapokhoz. Ezek után 18 évig otthon voltam a saját gyerekeimmel és csak 8 éve tanítok egy általános iskolában. Ez azért fontos, mert eleve teljesen más a látásmódom, a gyerekek szemszögéből vizsgálom a tanítás folyamatát is. Illetve állandóan a diák – tanár – szülő körben dolgozom mindig más oldalról. Mindig is nagy hangsúlyt fektettem arra, hogy a gyerekek jól érezzék magukat az órákon, ami a függvénykártyáknál is könnyen, szinte magától ment. A gyerekek nagyon szívesen játszottak. A játék egy olyan tevékenység számukra, amikor azt hiszik, hogy nem tanulnak éppen semmit, pedig közben több készségüket, képességüket is mozgósítják. Ezért jelöltem be azt, hogy bár láttam attitűdbeli változást, mégsem olyan jelentőset, mint ha egyébként frontálisan tanítanék. A tanórák és a tevékenységek, játékok felépítése lépcsőzetes és egyre nehezebb volt. Aki hiányzott (és sajnos a Corona óta hosszabb ideig hiányoznak a gyerekek), kicsivel jobban elvesztette a fonalat, hiszen ezeket a tevékenységeket nem láthatta leírva, összefoglalva egy füzetben sem. Nagyon sok dolog szóban és a fejekben mélyült. Ezeknek a gyerekeknek a teljesítményén is megmutatkozott ez a szummatív értékelésnél. A kompetenciák területén az analitikus gondolkodásuk fejlődött ugrásszerűen. Hirtelen nagyon sokféle függvénnyel megkínáltam őket, amitől már néha keresztbe is állt a szemük. Ráadásul a függvénykártyákon a valós számok halmaza jelent meg, ami néhány embert zavart is. Mivel a számhalmazt csak 8. osztályban bővítjük a valós számok halmazával, ezért én mindenhol Q -t írtam, mint ismert legbővebb számhalmaz. Jeleztem is egyszer, hogy egy kicsit megtorpantunk. A grafikonoknál egy idő után túl sok volt nekik a sok furcsa grafikon, néhányukat kicsit elrettentette, hogy még ennyi mindent fog tanulni az évek során. Ennél a pontnál én magam is gyártottam kártyákat csak lineáris függvényekkel, akár korlátosokkal is. Csere-bere kártyákat gyártottam ugyanúgy laminálva, amin ábrázolni és leolvasni is tanultak. (Néhányat mellékelek.) A kártyák közül nagy hasznát vettük a hozzárendeléseknek, hiszen ez előtt a halmazokat jártuk körbe. Ezeket a kártyákat ők maguk is kirakták halmazok, számkártyák és ceruzák segítségével. (Kép a mellékletben.) Ugyanilyen sokszor használt kártya volt az, amelyiken kis piros pöttyök vannak. Ezekhez szabályokat alkottak, pontokat, rendezett párokat olvastak le, és bármiről meg tudták már mondani, hogy egyáltalán lehet-e függvény. Maga a fogalom a kártyák segítségével jól beépült a gondolkodásukba. A diagnosztikus mérésben kitűnik, hogy a függvényről ugyan nem tudták, hogy mi az, de a szó felkeltette az érdeklődésüket, a függést sokan megfogalmazták. Érdekes volt megtapasztalni, hogy most a középpontos tükrözés kapcsán a négyzethálón a gyerekek fele egyből a függvény meredekségével

operált. Szinte minden magyarázat nélkül azonnal tudta, hogyan tükrözzön.

Számomra is érdekes volt megtapasztalni, hogy a lineáris függvények körbejárása után a quarto-kártyák semmilyen nehézséget nem jelentettek a számukra. Rendkívül szívesen dolgoztak azokkal a kártyákkal akár csere-bere formájában, akár feladatküldésként, akár társasként. A kártyák nagy segítséget nyújtottak abban is, hogy a gyerekek mentorálják egymást. Szívesen vették a kezükbe, örültek annak, hogy lehetett rá írni, és úgy magyaráztak egymásnak, mintha csak egy játékszabályt ismertettek volna. Sokat jelentett a tanulóknak, hogy részt vehettek egy kutatásban, hiszen ez által kitüntetettnek érezték magukat. Főleg azért, mert szeretik, ha az ember kíváncsi a véleményükre. Csoportjaikban alkalmazok egy Nevelő-Növelőt, amibe írásos értékelések, visszajelzések kerülnek tanári, diák és szülői oldalról is. Más tantárgy keretében azonban nincs ez így. A gyerekek pedig rendkívül hálásak, ha az ő véleményük is számít, ha nem csak meghallgatják őket, de érzik is azt, hogy a visszajelzésük befolyással bír a tanítási folyamat szervezésére. Kitekintésként, továbbgondolásra ajánlanám, hogy készüljön több lineáris függvénykártya, egyszerűbb értéktáblázatok, szűkebb számhalmazzal ($\mathbb{Q}$). Ez azonban nem rejt semmilyen butítási szándékot, csak azt a gondolatot, hogy akár már hatodikban is elővehettünk volna ebből néhány kártyafajtát (nem csak a pontok ábrázolását, hogy milyen alakzat jön ki). A matematika spirálisan épül fel, ezért én a jövőben már kisebbeket is megkínálnék egy-egy kártyával. Éppen ezért talán jó lenne nagyobb koordináta rendszer is, ahol akár korongokkal is lehetne ábrázolni, szabályt megfogalmazni, pontokat és hozzárendeléseket keresni. A csere- bere kártyák az önálló tanulást és egymás mentorálását is segítenék. (Ez a mentorálás nagyon fontos, mert szerintem az ismer valamit igazán, aki el is tudja azt másnak magyarázni.) Nagyon köszönöm, hogy részese lehettem a kártyák kipróbálásának, és a jövőben is szívesen fogom használni azokat, sőt buzdítani fogom a kollégáimat is. ”

Záborszky Zsuzsanna Ildikó

Néri Szent Fülöp Katolikus Általános Iskola

5. fejezet

Összegzés

Kutatásunk céljának azt tűztük ki, hogy a függvénytanítást segítő eszközparkot kibővítsük, azt szélesebb körben, tapasztalt tanárok által teszteljük, ezáltal az eszközök használhatóságát, hatékonyságát és autonóm környezetre kifejtett hatását mérjük.

Az eszközpark tervezése 2022. nyarára befejeződött, 2022. szeptemberére a prototípusok is elkészültek.

Ezt követően tanárokat kértünk fel az eszközök kipróbálására. Az ország 3 városának összesen 5 iskolájában használták eszközeinket. 7 tanár vett részt a kísérletben, akik összesen 11 osztályban tanítottak a „Függvényrengeteg”-nek elkeresztelt csomaggal.

A kísérlet során kvantitatív és kvalitatív mérést is végeztünk. A diákok és a tanárok is adtak hosszabb visszajelzést a témakör lezárása után, ezen kívül a diákok minden óra után egy hangulati kérdőívet is kitöltöttek. Felsőbb évfolyamokon a függvénytulajdonságok leolvasásának képességét bemeneti és kimeneti teszttel ellenőriztük.

A diákok a témakör során minden óra után a hangulatukat felmérő kérdőívet töltöttek ki. Ezek eredményei alapján megállapítottuk, hogy a „Függvényrengeteg” használata mellett a diákok a tanórákat élvezték, a hangulatuk az órán remek volt.

Bemeneti és kimeneti tesztek 3 osztály írt. Függetlenül attól, hogy melyik iskolában és milyen szociális háttérű diákok írták meg a tesztek, a kimeneti tesztek eredményei rendre magasabbak lettek, ezen dolgozatok Cronbach-alfája és t-próbája egyaránt a kísérlet sikerességét támasztották alá.

Diákok által írt szöveges értékelés alapján diákok szerették az eszközöket, több diák adott építőjellegű kritikát is.

A tanárok visszajelzése alapján az eszközeink nagy mértékben hozzájárultak a tananyag elsajátításához és a diákok jókedvéhez. Úgy ítélték meg, hogy minden csoport az adott témakör során jobban teljesített, mint a tanárok által tanított korábbi csoportok ugyanebben a témakörben. 11 osztályból 10 esetében úgy látták ezen középiskolai és általános iskolai oktatók, hogy a függvények témakörében az adott osztályok jobban

teljesítettek, mint a korábbi témakörök során.

Tehát a mérésünk alapján a hipotézisünk igaznak bizonyult, azaz a „Függvényrengteg” oktatási segédanyag használata

1. jó hatással van az intrinzik motivációra;
2. a függvénytan tanulása a diákok számára élvezhetőbbé és ezáltal könnyebbé válik;
3. a tanárok is könnyen elsajátítják a használatát és számukra is élvezetes a tanítás;
4. jelentősen segíti a függvénytulajdonságok grafikon alapján történő leolvasásának elsajátítását.

Köszönetnyilvánítás

Elsőként szeretném kifejezni köszönetemet Eisner Tímeának, aki hosszú évek óta kitartó munkájával segíti a kutatást. Legyen szó akár szellemi tőkééről vagy időről, a tanárnő minden alkalommal mellettem állt és segítséget nyújtott, legyen szó akár a kutatásról, akár az egyetemi teendőkről vagy mindennapi dolgokról. Eisner Tímea nélkül e dolgozat és az eszközpark sem jöhetett volna létre.

Köszönöm minden, a kutatásban résztvevő diáknak, de legfőkébb a tanáraimnak, akik nyitottan álltak a megkeresésünkhöz és vállalták az ezzel járó papírmunkát. Köszönöm Major Istvánnak, egykori matematikatanáromnak a gyors és precíz munkáját. Köszönöm Hebling Eszternek, hogy mindig a rendelkezésünkre állt és hogy ekkora energiákat fektetett bele a kártyákkal folytatott munkába. Köszönöm Erb Kotiers Rebekának, hogy bár nagyon hamar kellett elfogadnia a felkérésünket mégis kitartóan és lelkiismeretesen folytatta a munkáját. Köszönöm Záborszkyne Kuzmann Ildikónak, aki a vártnál is magasabb energiákat tett bele a munkájába, rengeteg tapasztalatot osztott meg velünk, és hogy sok értékes gondolattal gazdagodhattunk általa a „Függvényrengeteg” használatáról. Végül köszönöm Lovas Zoltánnak és Bere Gyöngyinek, hogy a rendelkezésünkre álltak és minden fontos információt időben megkaphattunk tőlük.

Hatalmas köszönettel tartozunk Kruzslicz Ferencnek, aki már-már kötéldegekről tett tanúbizonyságot a közös munkánk során. Nélküle a kártyák fizikai kivitelezése nem valósulhatott volna meg.

Szeretném megköszönni menyasszonyomnak Pető-Katona Viktóriának és barátomnak Berecz Zsuzsannának, hogy a kártyák fizikai kivitelezésénél gyártósorszerűen készítették el azokat.

Köszönöm Mátrai Péternek és Di Giovanni Márknak, akik a statisztikai kérdésekben álltak rendelkezésünkre. Hálásak vagyunk Márknak, hogy a teendői mellett időt tudott szakítani a kutatásunkra és hogy rengeteg ötlettel és tudással lettünk gazdagabbak általa.

Köszönöm nagynénémnek Pollmann Juditnak, szaktársamnak és kollégámnak Simon Zsófi Karolinnak, unokatestvéremnek Vida Martinnak és barátomnak Incze Viktóriának a dolgozat lektorálását, hatalmas energiákat fektettek bele ők is a munkába.

Irodalomjegyzék

- [1] Bragg A.; Russo J.; Russo T. 2021. *How primary teachers use games to support their teaching of mathematics*, International Electronic Journal of Elementary Education
- [2] BoardGameGeek: Arboretum (2022.10.25)
<https://boardgamegeek.com/boardgame/140934/arboretum>
- [3] Bolyai János Matematikai társulat. *IMO - Nemzetközi Matematikai Diákolimpia*
<https://www.bolyai.hu/matematikai-diakolimpiak-imo> (2023.01.15)
- [4] Cassar D. 2018. *Arborétum játékszabály*. Renegade Games Studios. (2022.09.27)
<http://jatekdijs.hu/tartalom/tarsasjatek/Arboretum.pdf>
- [5] Csapó B. 2004. *Tudásszintmérő tesztek*. In: Falus Iván: *Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe*. Budapest, Műszaki Könyvkiadó. (2021.01.08)
<https://core.ac.uk/download/pdf/84775002.pdf>
- [6] Dale, E. *Audio-Visual Methods in Teaching*, 3rd ed., Holt, Rinehart & Winston, New York, 1969, p.108
- [7] Eisner, T., Sztojkovics, D. 2021. A SET kártyajáték alkalmazása a kombinatorika és a valószínűségszámítás oktatásában. POLYGON, 26(1), 21–34.
- [8] Dienes Z. P.; Golding E. W. 1966 *Beginning Mathematics: Learning Logic, Logical Games* ESA in association with University of London Press LTD. ISBN-10: 0-340-15791-7
- [9] Dienes Z.; 1972. *Építsük fel a matematikát*. Gondolat Kiadó. Budapest.
- [10] Dukán A. F., Fried K., Szabó Cs. 2021 *The time spent on board games pays off: links between board game playing and competency motivation*. University of Debrecen
- [11] Falco, M. J., SET játékszabály
https://www.setgame.com/sites/default/files/instructions/SET%20INSTRUCTIONS%20-%20HUNGARIAN_0.pdf (2022.10.29.)

- [12] Gaskó K., Hajdú E., Kálmán O., Lukács I., Nahalka I., Petriné Feyér J. 2006. *Hatékony tanulás* Budapest. Bölcsész Konzorcium.
- [13] Goliath: Sequence
https://www.okosjatek.hu/custom/okosjatek/image/data/srattached/69b5ad40c7b0489052b252038bacf44a_sequence_tarsasjatek_jatekszabaly.pdf
 (2022.09.27)
- [14] Hampel Gy. 2019. *PÁROS T-PRÓBA PROGRAMOZHATÓ KIALAKÍTÁSA EXCEL VBA KÖRNYEZETBEN* In: Jelenkori társadalmi és gazdasági folyamatok, (2019) XIV. évfolyam, 1. szám, pp. 53–59.
- [15] Jesztl J. - Lencse M. 2019. *A jókedvű játék az első*. Interjú a Jól játszani készítőivel. Pagony. (2022.09.20.)
<https://www.pagony.hu/a-jokedvu-jatek-az-elso>
- [16] Kő N. - Pajor G. - Szabó M. 2017. *Motiváció*. In: N. Kollár Katalin - Szabó Éva *Pedagógusok pszichológiai kézikönyve*. 1. kötet. Budapest. Osiris kiadó. 223. & 306. & 330.-332.
- [17] Lee K. P. 1996. *The Use Of Mathematical Games In Teaching Primary Mathematics* The Mathematics Educator, 1(2), 172-180. Association of Mathematics Educators.
- [18] Michaletzky Gy., Mogyoródi J, 1995. *Matematikai statisztika*. Budapest. Nemzeti Tankönyvkiadó
- [19] Müller B. 1991. *Quarto játékszabály*. Gigamic.
- [20] Nachlieli T., Tabach M. 2012. *Growing mathematical objects in the classroom – The case of function* In: *International Journal of Educational Research* Volumes 51–52, Pages 10-27.
- [21] Nakao M.; Noda S.; Shiotsuki M. 2019. *The effectiveness of intervention with board games: a systematic review* BioPsychoSocial Medicine,
- [22] Oktatási hivatal: PISA tesztek
<https://www.oktatas.hu/kozneveles/meresek/pisa> (2022.11.24.)
- [23] Pintér K. 2013. *Matematika tantárgy-pedagógia*. (2020.12.01)
http://www.jgypk.hu/mentorhalo/tananyag/Matematika_tantrgyppedaggia/index.html

- [24] Pollmann N. 2020. *Kártyajátékokkal támogatott függvénytanítás* Pécs. Pécsi Tudományegyetem
- [25] Stöckert K. 1995. *Játékszichológia*. Eötvös József Könyvkiadó. Budapest.
- [26] Szanyi Gy. 2017. *A Függvényfogalom kialakításának vizsgálata*
- [27] Varga T. 1969. *A matematika tanítása*. 4. kiadás. Budapest. Tankönyvkiadó.
- [28] Varga T. 1974 *Játsszunk matematikát! 1.-2.* Budapest. Móra Ferenc Ifjúsági Könyvkiadó.

Mellékletek

1. Melléklet. Diákok visszajelzései

- Nagyon tetszett ,ilyent meg matek tanár nem hasznalt.de sokkal jobb lenne ha alkalmaznák.érdekes volt ,és jobban meg lehetett érteni az anyagot .
- Jó volt. Szerintem nagyon jó ötlet ezek a kártyák.
- Tetszett
- tetszett
- Nagyon érdekes volt. Játékosan tanulni a legjobb főleg matekból.
- Tetszett, szerintem jó volt.
- Nagyon jó volt . Érdekesebbé tette az órákat.
- Szerintem nagyon jó volt,mert sokkal egyszerűbb volt így tanulni.
- élvezetes volt jobban lekött
- Teljesen jó volt. Élvezetes. Érthető. Tanítójellegű.
- Nagyon tetszettek a kártyák. Olyan függvényábrákkal találkoztam amikről nem is gondoltam, hogy léteznek. Sokat segített a megértésben
- Hasznos volt. Viszont egy két játék túl sokáig tartott.
- Alsóbb évfolyamokon működhet, gimiben kevesebb a motiváció a játékkal
- A fiatalabbaknál motiváló a játék.
- Köszönjük a lehetőséget!
- Nagyon tetszettek a játékok, főleg a sequence. Így szerintem több gyereknek lett kedve részt venni az órákon, ráadásul nem csak a függvényeket tanultuk meg jobban, de a játékban alkalmazott stratégiát is fejlesztettük. Talán ami nem annyira tetszett, hogy a kártyák értékét folyamatosan fejben kellett tartanunk, mivel nem voltak konkrétan ráírva a lapokra, ezért sokkal nehezebb volt eltervezni a következő lépéseinket. Ezt lehetne úgy orvosolni, hogy filccel ráírjuk a kártyákra az eredményt, amit a következő játéknál le lehet törölni.
- A kártyák segítségével, mostmár könnyen, ránézésre meg tudom mondani a választ bármilyen függvényes kérdésre. Szép, igényes kártyák és játékok, feldobták a matekóránkat.
- A legjobban a sequence játék tetszett, nagyon szórakoztató volt. (Négy fős csapatok

voltak és párban gondolkoztunk azon, hogy mi legyen a következő lépésünk.) A többi játék is szórakoztató volt, és nagyon szép .

- Nagyon szépek a kártyák! Legetne hasonló ilyen szép kis bábukat a társashoz kitalálni. Meg ezekből a kis bábukból jó sok kell mert hosszú a játék.
- Nekem személy szerint tetszett. A kártyacsomagok nagyon szépek és igényesek. A játékban, ahol 2 csapat játszik egymás ellen és 6 ugyan olyan színű korongot kell összegyűjteni, azt kicsit hosszúnak találtam, és mi a további játékokat 5 koronggal folytattuk.
- Lassu es hosszú, de szórakoztató
- NAGYON
- kicsit unalmas volt
- Nagyon tetszett.
- Tetszett és ötletesnek tartom
- Nekem nagyon tetszettek ezek az órák amikor a Tanárnővel ezekkel a kártyák segítségével dolgoztuk fel a tananyagot. Így szerintem sokkal könnyebben és értehetően megértjük a Matek anyagokat. Nekem nagyon tetszett ez a társasjáték is amit most leggútobb a végén játszottunk. Én örülnék neki ha nem csak Matekból hanem másikat is ilyen elmenyszerűen játékosan dolgoznánk fel a tananyagokat. És ha Matekból mas anyagrészben is lennének ilyen jatekok ezzel az anyag is sokkal könnyebb es élményszerűbb a megtanulása!
- Könnyen meglehet tanulni kartyakrol a matekot
- Könnyen meglehet tanulni kártyákról
- Nagyon tetszett
- Szerintem jóvólt
- Nagyon tetszett
- Nagyon tetszettek a kártyák. Főleg a táblás társasjáték tetszett. Szerintem jó ötlet a diákokat játszva tanítani a függvényekre. Így szinte erőlködés nélkül megjegyzi a tulajdonságokat.
- Sosem volt a függvény a szívem csücske, de ezekkel a kártyákkal és a játékkal, kicsit megszerettem. Könnyebben le tudom olvasni az egyszerűbb függvényeket, jó volt matek órán játszani, úgy hogy közben tanultunk és gyakoroltunk is. A kedvenc játékom az volt amihez volt tábla.
- A játék nagyon szórakoztató és több játék után is érdekes marad. Az egyetlen probléma talán az volt, hogy többször is kihúztuk ugyanazt a kártyát és így nem nagyon tudtunk tovább haladni. Szerintem ezt a játékot csapatban jobb játszani mint egyedül, szóval azt javasolnám, hogy mindenki úgy játssza.
- Sokat segített a játék a függvények gyors értelmezésében, és jobban meg tudtam

tanulni vele a grafikonok leolvasását. Szerintem hasznos azoknak, akik ezt a témakört veszik, mert sok játék után kevesebb időt kell az elemzésekre szánni feladatoknál.

- Tetszett, lehetett belőle tanulni, izgalmasabbá tette az órát.
- Szerintem egy nagyon érdekes játék és rengeteget segít a függvények könnyebb megértésében. Én személy szerint élvezek vele játszani mert nem csak szórakoztató, ahogy izgulunk, hogy nyerünk-e hanem rengeteg gyakorlást is biztosít. Minél többet játszottunk vele, annál gyorsabban ment a függvények olvasása. Emellett király csapatépítő program is.
- Szuper volt használni matek órán; vicces, élvezhető módja a függvények tanulásának. Tisztábbak lettek az ismereteim a függvényekről.
- oldott hangulatban folyt a tanítás, könnyebben megértettem a függvények működését. ahhoz viszonyítva, hogy a játék maga elég egyszerűen épül fel, szórakoztató volt.
- Érdekesebbé tette az órát és volt egy kis újdonság ami felkeltette a diákok figyelmét
- Nekem nagyon tetszett mert nem egy "kötött óra" volt hanem szinte így gyakoroltunk/tanultunk hogy közben szinte észre sem vettük. A versenyszellem szerintem hajtott mindenkit hogy "többet" gondolkozzon ne mástól várja a megoldást. Összeségében nekem nagyon tetszett mert gyakorlás mellett jó csapatépítőként is funkcionálhat.
- nem tetszett annyira mert nekem ilyen sokszor kicsit uncsi volt
- Átlátható volt, tetszett
- Tetszett de az nem tetszett hogy a kártyákon kellett dolgozni
- Nekem nagyon tetszett és szerintem jól lehet róla tanulni.
- Nekem eléggé tetszett és jó volt hogy picit játékosabb volt.
- Nagyon tetszett, jó hogy nem csak a füzetbe írtunk mert volt interaktív része is.
- Nagyon tetszett, örülök hogy játékosan telhetek az órák
- A kártyák jók, néha viszont már unalmas. Felkészítenek a dolgozatra.
- Nagyon.
- Szerintem nagyon jó és így "játékosabban" tanulunk és jól megmarad, szuper csak ajánlani tudom!
- eléggé tetszett, jó volt ezek segítségével tanulni
- Nagyon tetszett nekem
- Nagyon motiváló, érdekes játék. Mindig vártuk hogy használjuk őket.
- Tetszettek a kártyák, jó volt velük dolgozni, érdekesek voltak a feladatok.
- Nagyon tetszett a kártyákkal folytatott munka, én jó ötletnek tartom, segíti a tanulást.
- Teljesen jó volt nem volt vele semmi probléma a tanulásnál mindig jobb ha játszunk

- Nagyon tetszett, nagyon elgondolkodtató kártyák vannak benne. Nincsen semmi más ötletem tökéletes volt
- 10/10 (nincs ötlet)
- Tetszett, szerintem jó dolog játékosan oktatni.
- Nekem nagyon tetszett. Jó volt hogy játékosan tanulhatuk meg az anyagot. Nekem nagyon tetszettek a kártyák alakjai és a kialakítása is nagyon jó volt. Én egyáltalán nagyon élveztem a kártyákkal való játékos tanulást.
- Nekem nagyon tetszett a kártyákkal folytatott munka! A kártyacsomag is tetszett, nem voltak nehezek a kártyán lévő feladványok
- Tetszett. Kicsit hosszú a játék.
- Nagyon tetszett, főként az hogy játékosan tanultunk matematikát.
- Nagyon tetszett így jobban meg tudom érteni az anyagot mint ha csak sima átlagos óra lenne.
- Nekem nagyon tetszett .Szerintem nagy kreatív szórakoztató egy újítás . Sok lehetőség van benne játékos feladatokhoz !
- A kártya jó módszer a tanulásra nekem személy szerint tetszik és például a tengelyes tükrözésnél a kártyák a legjobbak
- Nagyon tetszett ez a fajta függvény tanulás. A kártyacsomag nagyon jó volt. Jó volt őket használni. A kártyákra lehetne olyan dolgokat írni amik érdeklik a mai fiatalokat. Voltak nagyon nagy és nagyon kicsi kártyák. Kicsit lehetne őket 'normális' méretre rakni. Egyébként nagyon jól össze voltak állítva a kártyák. Jó volt velük 'játszani'.
- Nekem nagyon tetszett.
- naon menő, interaktív, vicces, jó, játékos
- Nagyon tetszett! Játékosabbá tette az órákat. Csak a koordináta rendszerben nem tudtuk jelölni a pontokat.
- Nagyon jól éreztem magam az órákon, nagyon tetszettek a kártyák. Szeretek játékosan tanulni, így kicsit szívesebb lesz a napom. :-)
- Elégé tetszett. Menő volt. Szerintem kicsik voltak a kártyák.
- Nagyon jó volt, érdekes, szórakoztató és gondolkodtató
- Nagyon tetszett, sokkal jobb így tanulni, mint csak úgy.
- Nagyon tesztet jobban tudtam figyelni.
- Nekem nagyon tetszett, nem tudnék negatívumot felsorolni.
- Nekem nagyon tetszett. A kártyákkal ténylegesen átláttuk a dolgokat. Nagyon jók voltak rajtuk az ábrázolások. Ötletem az nincs de gyakrabban lehetne ilyen.
- Nekem nagyon tetszett. Lehetne többször is!
- Nagyon tetszettek a kártyák, mert így könnyebben értettem az anyagot. Nincs

~~Match~~ Match on

Nagyon tetszik az a Kórház ön
Nagyon élveztem nemcsak lecsúszni
még egy órák. Hányórkor fizetelné
több mint drágán utolsó.

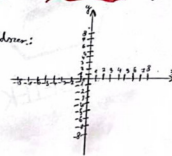
Nagyon jó a Matul Szessétek!!
Nagyon jó!!!

Mein Vater ist ein in London lebender
deutscher Arzt, er ist sehr fleißig in seiner
Arbeit, sehr wohlhabend und ein
sehr guter Mann mit einer sehr
guten Frau.

MATEK

Ena waga: 16 m³ 100 (craball, oblatuk) waz. ~~Yam~~ Yam is wall miden bona
a bebon nemem az a pidutit nendren. A leffle dra sa az wall amher
patritak ilgen tiele, uni wagun pi wall. Es wig ni so wall az az to
hutan pi so pyet pi (3:4). De wam midig wot pi. Hiut pi: (wam sewa
wam sewa wam). De nemem baggy a st pi wag wam.

Sordisata rendneri:

[illegible]

Néhány nagyon tetszett a kártyák és a hozza! kapcsolt feladatok. Jól ki voltak alakítva és dolgoz-
va a feladatok. Az egy nagyon jó ötlet volt, hogy készült hozza! egy tábla amin tudtunk sokan játszani és olyan hangulata volt mind ha társasjátékkal játszottunk volna. Igazamásak voltak a feladatok. Jól volt velük játszani. Márkor is ki-
próba'ndám őket annyira tetszett. Köszönöm, hogy ki-
próba'elátam. Nagyon izgalmas volt.

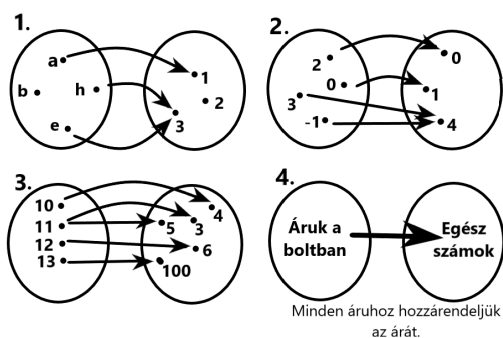
ötletem.

- Nagyon tetszett, érdekes volt. jó volt egy kis változás. A kedvenc feladatomból az volt amikor egymásnak diktáltuk a pontokat és kijött egy alakzat.
- Nagyon tetszett, sokkal könnyebben megértettem a tananyagot. Ötletes és vicces játékok voltak! Ez az egész úgy tökéletes ahogy van!
- Nekem nagyon tetszettek a kártyák csak azt sajnálom hogy nincs több anyagrészből ilyen, jobban lehet játékosan tanulni.
- menő,menő,menő
- Nagyon jó volt, segített a függvények megértésében.
- A kártyákkal való munka jó volt, nem mondanám kifejezetten hogy tetszett, de ez nem a kártya hibája, hanem a témájáé (viszont a sima feladatoknál ezerszer jobb). A kártyacsomag minősége jó és nincs ötletem a változtatásukon
- A kártyák jók voltak sokat segítettek
- Nagyon tetszett ez a játékos tanuló forma és sokat segített a fejlődésemben.
- Érdekesnek és hasznosnak találom
- Szerintem jó játékos tanulási lehetőség.
- Remek kártyák, kevésbé kötött tanórákhoz megfelelőek.
- nagyon. nincs hozza ötletem, így tökéletes
- Tetszett, izgalmas volt
- Elég jó, fejtörő volt.
- Nagyon jó volt, könnyű volt úgyhogy jól ment az óra
- Nagyon
- tetszett, de sok az egyforma vagy nagyon hasonló kártya

2. Melléklet. Bemeneti teszt

Név:.....

1. Feladat. *Döntsd el a következő hozzárendelésekről, hogy egyértelműek vagy többértelműek, függvények vagy nem függvények! Az eredményeket írd be a táblázatba!* 4+4 pont



	Egyértelmű vagy többértelmű	Függvény-e?
1.		
2.		
3.		
4.		

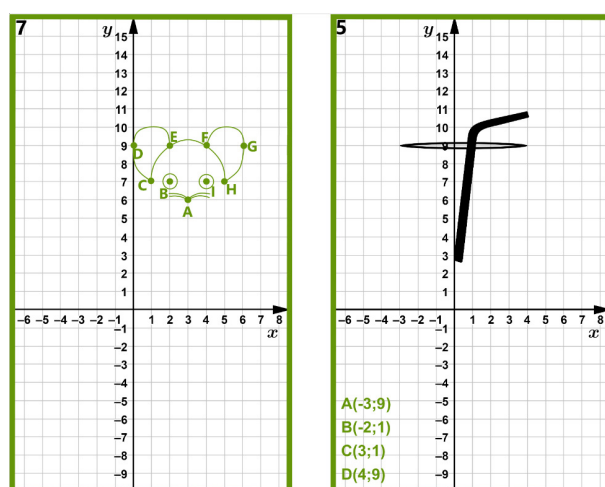
2. Feladat. a) *Add meg a 7-es ábrán (balra) szereplő A, B, C, D, E, F, G, H, I pontok pontok koordinátáit! Írd le a koordinátáit a felsorolt pontoknak!*

b) *Az 5-ös ábrán (jobbra) ábrázold a felsorolt A, B, C, D pontokat! Kösd össze egyenes vonallal a pontokat abc-sorrendben.*

7 pont

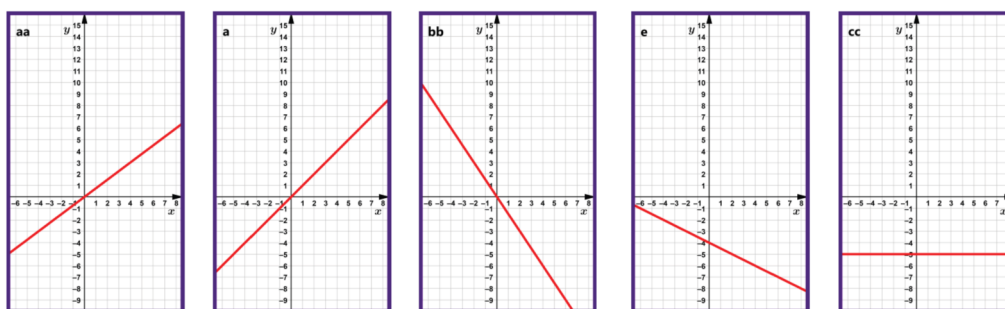
A 7-es ábra pontjai:

A(;) B(;) C(;)
D(;) E(;) F(;)
G(;) H(;) I(;)



3. Feladat. *Kösd össze a megfelelő hozzárendelési utasításokat a megfelelő függvény-grafikonokkal.*

5 pont



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = -\frac{3}{2}x$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 4$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

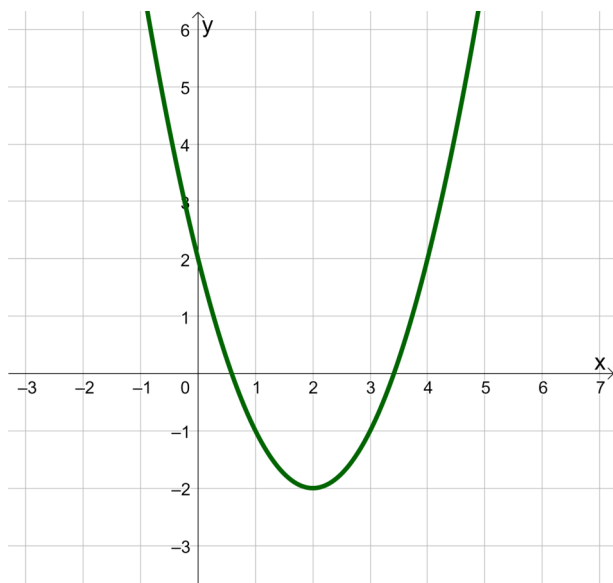
$$f(x) = x$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = -5$$

4. Feladat. Olvasd le a függvény grafikonjáról a a kért adatokat és válaszolj a kérdésre!

8 pont



a) $x = 0$; $f(x) =$

b) $x = 2$; $f(x) =$

c) $f(x) = -2$; $x =$

d) $x = 4$; $f(x) =$

e) Van-e szélsőértéke a függvénynek? Ha van, add meg a fajtáját, helyét és értékét is!

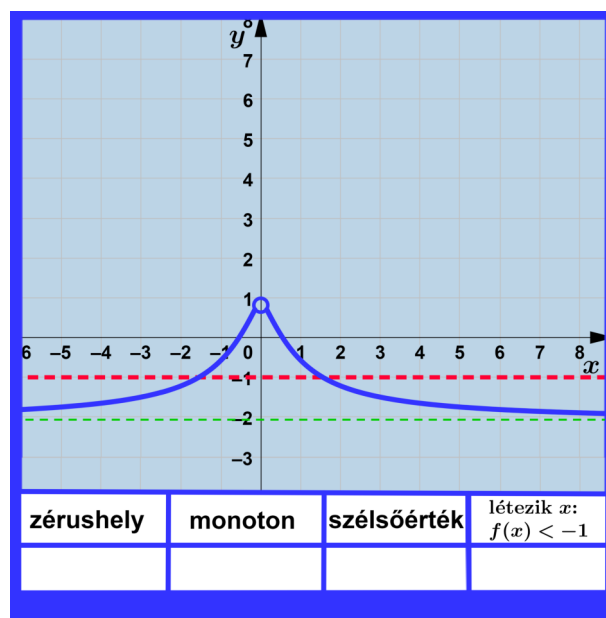
5. Feladat. Tekintsük az ábrán látható, grafikonjával adott függvényt.

1. Döntsd el, hogy van-e zérushelye, monoton-e, van-e szélsőértéke, és hogy felvesz-e -1 -nél kisebb értéket! A válaszokat a kis négyzetekbe írd. Tegyél $\checkmark$ jelet, ha teljesül, $\times$ jelet, ha nem.

2. Mi a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete?

ÉT =

ÉK =



6 pont

6. Feladat. Döntsd el az alábbi függvényről, hogy

a) Add meg a függvénynek a maximum helyét és értékét, minimum helyét és értékét!

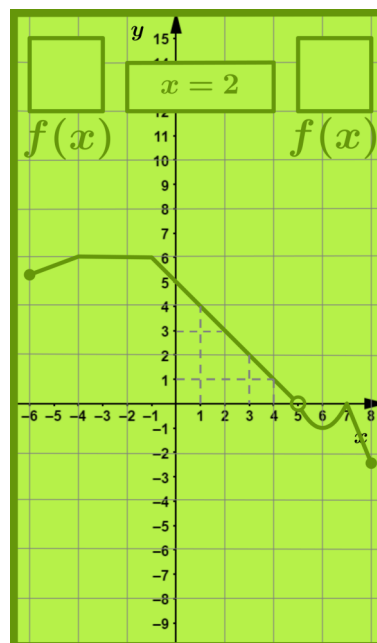
max. hely: _____ max. érték: _____

min. hely: _____ min. érték: _____

b) Zérushely:

c) $x = 2$; $f(x) =$

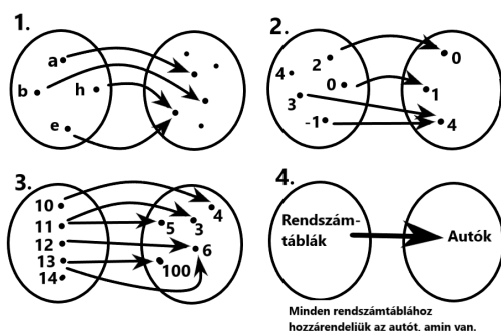
d) $f(x) = 3$; $x =$



3. Melléklet. Kimeneti teszt

Név:.....

1. Feladat. *Döntsd el a következő hozzárendelésekről, hogy egyértelműek vagy többértelműek, függvények vagy nem függvények! Az eredményeket írd be a táblázatba!* 4+4 pont



	Egyértelmű vagy többértelmű-e?	Függvény-e?
1.		
2.		
3.		
4.		

2. Feladat. a) Add meg a 7-es ábrán (balra) szereplő A, B, C, D, E, F, G, H, I pontok pontok koordinátáit! Írd le a koordinátáit a felsorolt pontoknak!

b) Az 5-ös ábrán (jobbra) ábrázold a felsorolt A, B, C, D pontokat!

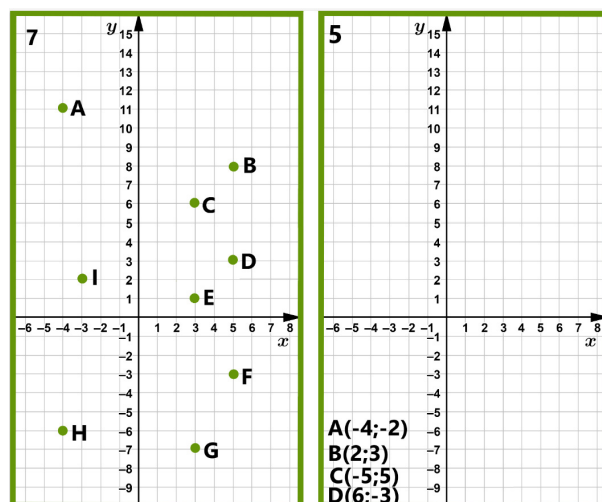
7 pont

A 7-es ábra pontjai:

A(;) B(;) C(;)

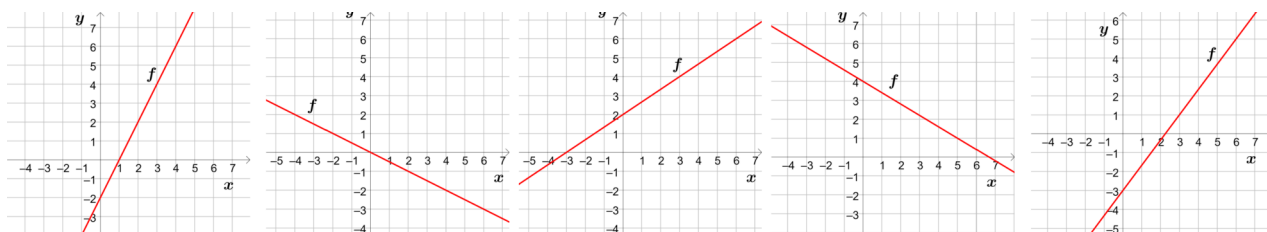
D(;) E(;) F(;)

G(;) H(;) I(;)



3. Feladat. *Kösd össze a megfelelő hozzárendelési utasításokat a megfelelő függvény-grafikonokkal.*

5 pont



$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

$$f(x) = \frac{4}{3}x - 3$$

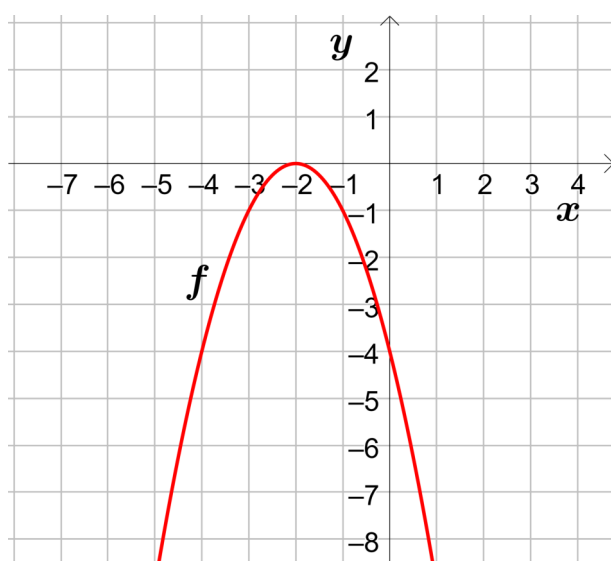
$$f(x) = -\frac{1}{2}x$$

$$f(x) = 2x - 2$$

$$f(x) = -\frac{3}{5}x + 4$$

4. Feladat. Olvasd le a függvény grafikonjáról a a kért adatokat és válaszolj a kérdésre!

8 pont



a) $x = -2$; $f(x) =$

b) $x = 0$; $f(x) =$

c) $f(x) = 0$; $x =$

d) $x = -4$; $f(x) =$

e) Van-e szélsőértéke a függvénynek? Ha van, add meg a fajtáját, helyét és értékét is!

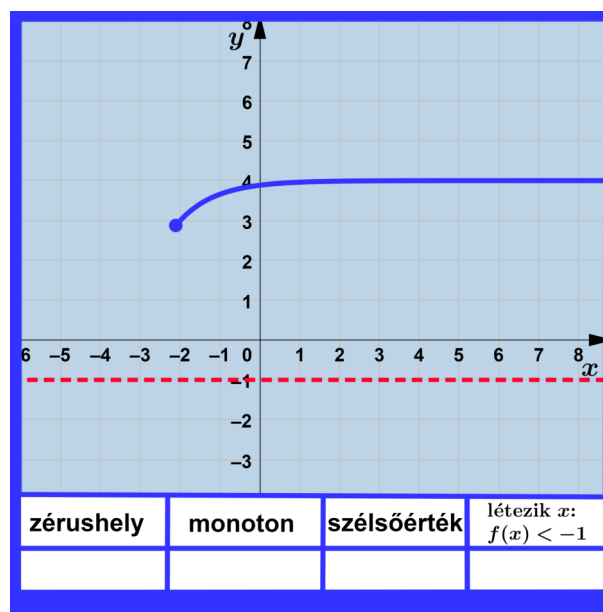
5. Feladat. Tekintsük az ábrán látható, grafikonjával adott függvényt.

1. Döntsd el, hogy van-e zérushelye, monoton-e, van-e szélsőértéke, és hogy felvesz-e -1 -nél kisebb értéket! A válaszokat a kis négyzetekbe írd. Tegyél $\checkmark$ jelet, ha teljesül, $\times$ jelet, ha nem.

2. Mi a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete?

ÉT =

ÉK =



6 pont

6. Feladat. a) Add meg a függvénynek a maximum helyét és értékét, minimum helyét és értékét!

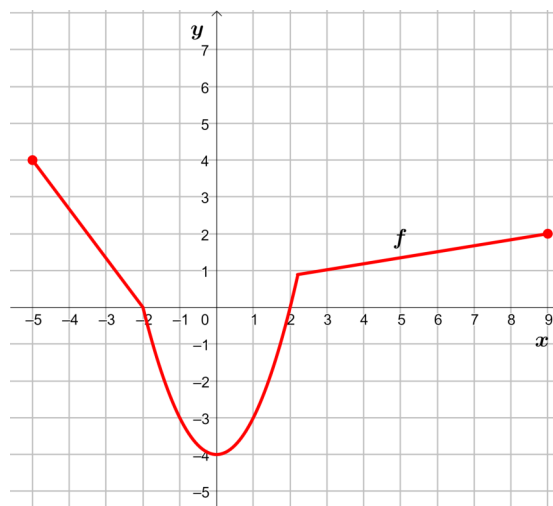
max. hely: _____ max. érték: _____

min. hely: _____ min. érték: _____

b) Zérushely(ek):

c) $x = 0$; $f(x) =$

d) $f(x) = 4$; $x =$



4. Melléklet. Képek az iskolákból

