

TDK–dolgozat

Témavezető:

Dr. Németh Zsolt

Szerző:

Busa Máté

Budapest, 2023



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

INFORMATIKAI KAR

NUMERIKUS ANALÍZIS TANSZÉK

**Kvaternió értékű polár–Fourier
momentumok algoritmusai digitális
képfeldolgozáshoz**

Témavezető:

Dr. Németh Zsolt

egyetemi adjunktus

Szerző:

Busa Máté

modellalkotó informatikus MSc, 2. évf.

Budapest, 2023

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. Egységekörlemezen ortogonális polár–Fourier függvényrendszerek	7
2.1. Chebyshev–Fourier függvényrendszer	8
2.2. Legendre–Fourier függvényrendszer	9
2.3. RadialHarmonic–Fourier függvényrendszer	10
3. Kép ábrázolása polár–Fourier momentumokkal	11
3.1. Kép ábrázolása az egységekörön	11
3.1.1. Részleges ábrázolás	11
3.1.2. Teljes ábrázolás	12
3.2. Szürkeárnyaltos kép ábrázolása polár–Fourier momentumokkal . . .	13
3.2.1. Kép ábrázolása Chebyshev–Fourier függvényrendszerben . . .	13
3.2.2. Kép ábrázolása Legendre–Fourier függvényrendszerben	14
3.2.3. Kép ábrázolása RadialHarmonic–Fourier függvényrendszerben	14
3.3. Színes kép ábrázolása polár–Fourier momentumokkal	15
3.3.1. Áttérés kvaternió értékű polár–Fourier momentumokra	16
3.4. Rekonstrukció	17
4. Basic módszer	18
4.1. Polár–Fourier momentumok meghatározása	19
4.1.1. Chebyshev–Fourier momentumok meghatározása	19
4.1.2. Legendre–Fourier momentumok meghatározása	20
4.1.3. RadialHarmonic–Fourier momentumok meghatározása	20
5. Accurate módszer	21
5.1. Polár–Fourier momentumok meghatározása	22

5.1.1.	Chebyshev–Fourier momentumok meghatározása	23
5.1.2.	Legendre–Fourier momentumok meghatározása	24
5.1.3.	RadialHarmonic–Fourier momentumok meghatározása	24
5.1.4.	Momentumszámítás gyorsítása	25
5.2.	Rekonstrukció gyorsítása	26
6.	Diszkrét módszer	27
6.1.	Polár–Fourier momentumok meghatározása	28
6.1.1.	Chebyshev–Fourier momentumok meghatározása	29
6.1.2.	Legendre–Fourier momentumok meghatározása	30
6.1.3.	RadialHarmonic–Fourier momentumok meghatározása	32
6.1.4.	Momentumszámítás gyorsítása I.	33
6.1.5.	Momentumszámítás gyorsítása II.	33
6.2.	Rekonstrukció gyorsítása I.	34
6.3.	Rekonstrukció gyorsítása II.	35
7.	Momentumszámítási módszerek numerikus összehasonlítása	37
7.1.	Mérési eszközök	38
7.2.	Általános összehasonlítás	39
7.2.1.	FFT használata	42
7.3.	Rekonstrukciós hiba vizsgálata	43
7.3.1.	Polár–Fourier momentumtípusok összehasonlítása	43
7.3.2.	Accurate és Diszkrét módszer összehasonlítása	45
7.4.	Futási idő vizsgálata	45
7.4.1.	Teoretikus futási idő	45
7.4.2.	Accurate és Diszkrét módszer összehasonlítása	46
7.4.3.	FFT használata	48
8.	Transzformáció–invariáns mennyiségek	50
8.1.	Eltolás invariancia	50
8.2.	Forgatás invariancia	51
8.3.	Skálázás invariancia	52
8.4.	RST invariancia	53
8.5.	Mérési eredmények	53

8.5.1. Eltolás invariancia eredmények	55
8.5.2. Forgatás invariancia eredmények	55
8.5.3. Skálázás invariancia eredmények	56
8.5.4. RST invariancia eredmények	57
9. Objektum felismerés	59
9.1. Invariáns vektor	60
9.2. Tesztelési eredmények	61
9.2.1. Objektum felismerés skálázott képek esetén	61
9.2.2. Objektum felismerés elforgatott képek esetén	63
9.2.3. Objektum felismerés RST transzformáció után	65
10.Képek vízjelezése	68
10.1. Vízjel beágyazásának folyamata	68
10.1.1. Vízjelezési tartomány meghatározása	69
10.1.2. Felhasznált momentumindexek meghatározása	69
10.1.3. Momentumok kiszámítása	70
10.1.4. Vízjel előállítása	70
10.1.5. Vízjelezett kép előállítása	70
10.2. Vízjel kiolvasásának folyamata	71
10.3. Vízjelezési eredmények	72
10.3.1. Vízjelezett képek összehasonlítása	73
10.3.2. A kvantálási lépésköz nagyságának hatása	74
10.3.3. Vízjel visszanyerése zajos kép esetén	75
10.3.4. Vízjel visszanyerése képtranszformáció után	76
11.Összegzés	78
11.1. Szempontok konkrét feladathoz illő módszer kiválasztásához	80
11.2. További kutatási és fejlesztési lehetőségek	80
Irodalomjegyzék	83

1. fejezet

Bevezetés

A momentumalapú képfeldolgozás már régóta kutatott terület az informatikában. A momentumok kiszámolásának motivációja az, hogy fontos információkat nyerjünk ki egy képről, amit aztán használhatunk például tömörítésre, vízjelezésre [1, 2] vagy objektum felismerésre [3] is.

Kezdetben ezek a módszerek főleg szürkeárnyaltos képeknél voltak használatosak, ahol a képet egy valós értékű függvényként lehet reprezentálni. Színes képek kezelésére az adott lehetőséget, hogyha külön kezelték az RGB színcsatornákat, egymástól függetlenül.

Az utóbbi években megjelent egy új technika a színesképek reprezentálására: valós helyett kvaternió [4] értékű függvénnyel reprezentáljuk a képet. Ennek a reprezentálási módnak az előnye, hogy egységesen kezeli a színcsatornákat, így számos képfeldolgozási eljárás az emberi szem számára természetesebb eredményeket ad.

Elért eredményeink

Dolgozatomban többféle kvaterniós polár–Fourier típusú momentumot vizsgáltunk (mely egy aktívan kutatott terület a képfeldolgozás területén [5, 6, 7, 8, 9]), különös tekintettel azok hatékony kiszámítási módjaira:

- az ismert kvaterniós Legendre–Fourier momentumok (QLFMs) [8] kiszámolására bevezettünk egy új módszert, és ezt összehasonlítottuk más ismert kiszámítási algoritmusokkal;
- definiáltuk az új, kvaterniós Chebyshev–Fourier momentumokat (QCFMs) és több kiszámítási módszert rájuk, melyek eltérő feltételek esetén is hatékonyan alkalmazhatók;
- implementáltuk a kvaterniós RadialHarmonic–Fourier momentumokat (QRHFM-s) [9], többféle kiszámítási módszerrel és ezeket összehasonlítottuk az előző momentumokkal.

A 2-3. fejezetekben definiáljuk a fenti polár–Fourier momentumokat az őket meghatározó ortogonális függvényrendszereken keresztül, továbbá ismertetjük alkalmazásukat színes képek reprezentálására.

A 4-5. fejezetekben bemutatjuk a polár–Fourier momentumok numerikus kiszámítására használt főbb ismert módszereket. Az 5. fejezetben bemutatott, a Legendre–Fourier momentumok kiszámítására ismert Accurate módszert általánosítjuk a többi momentumtípusra. Végül egy új, a korábbiaknál időhatékonyabb módszert adunk az Accurate pontrendszeren alapuló interpolációs képrekonstrukcióra.

A 6. fejezetben kidolgoztunk egy saját, interpolációs újramintavételezésen és mátrixaritmetikán alapuló, az ismerteknél jóval gyorsabb momentumszámítási és rekonstrukciós eljárást, ami egységesen alkalmazható a fent említett momentumtípusokra. A Chebyshev–Fourier momentumoknál továbbá egy gyors Fourier–transzformáción (FFT-n) alapuló, nagyobb mérettartományban még hatékonyabb momentum kiszámítási és rekonstrukciós eljárást készítettünk.

A különböző polár–Fourier momentumtípusok és számítási algoritmusaik numerikus összehasonlítását a 7. fejezetben részletesen tárgyaljuk.

A 8. fejezetben definiáltunk a Chebyshev–Fourier momentum módszerhez eltolás, forgatás és skálázás invariánsokat, majd teszteltük ezek robusztusságát a többi polár–Fourier momentum módszer invariánsaihoz képest.

Lehetséges alkalmazásként, a 9. fejezetben az invariánsokat felhasználva objektum felismerési algoritmust implementáltunk. A felismerés pontosságát széles körben teszteltük, és összehasonlítottuk a különböző polár–Fourier momentum módszerekkel.

A 10. fejezetben további alkalmazásként bitsorozatok kódoló, szabad szemmel nem látható vízjeleket helyeztünk el képekre, melyek a képek transzformálása, más formátumba való exportálása valamint zaj hozzáadása után is kis veszteséggel visszanyerhetők.

2. fejezet

Egységekörlemezen ortogonális polár–Fourier függvényrendszerek

Ebben a fejezetben bemutatunk három, az egységekörlemezen ortogonális függvényrendszert: a Legendre–Fourier (LF) [8], RadialHarmonic–Fourier (RHF) [9] és az általunk definiált, eddig nem használatos Chebyshev–Fourier függvényrendszereket. A függvényrendszerek konstrukciója hasonló: egy $[0, 1]$ intervallumon (sugármenti) ortogonális függvényrendszer, valamint a $[0, 2\pi]$ intervallumon (szögelfordulási) ortogonális trigonometrikus függvényrendszer direktszorzataként állnak elő. Az ilyen jellegű szorzatrendszerek jól használhatóak olyan képfeldolgozási feladatokban, amelyek képek geometriai transzformációihoz kötődnek.

Az egységekörlemezen a vizsgált függvényrendszerekkel természetesebb számolni polárkoordinátákkal, így azokat használunk.

A trigonometrikus rendszer

Mindhárom, az egységekörlemezen ortogonális függvényrendszerhez szükségünk van az $E_q(\phi) = e^{iq\phi}$ (komplex) trigonometrikus polinomokra, amik a $[0, 2\pi]$ intervallumon ortogonálisak:

$$\int_0^{2\pi} E_q(\phi) E_{q'}^*(\phi) d\phi = 2\pi \delta_{qq'} \quad (2.1)$$

ahol $*$ a komplex (később a kvaterniós) konjugáltat jelöli, δ pedig a Kronecker-delta.

2.1. Chebyshev–Fourier függvényrendszer

A továbbiakban definiálunk egy új, Chebyshev polinomokon alapuló, az egységkörlemezén ortogonális függvényrendszert.

Jelölje T_p a p -ed fokú, elsőfajú Chebyshev polinomot, melynek értéke a

$$T_p(x) = \cos(p \cdot \arccos(x)) \quad (p \in \mathbb{N})$$

képletből adódik.

Ez a függvényrendszer a $[-1, 1]$ intervallumon ortogonális a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvény mellett. Az ortogonalitást a következő integrálformula fejezi ki:

$$\int_{-1}^1 T_p(x) T_{p'}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, & \text{ha } p \neq p' \\ \pi, & \text{ha } p = p' = 0 \\ \pi/2, & \text{ha } p = p' \neq 0 \end{cases}$$

Számunkra azonban $[-1, 1]$ helyett a polársugarak mentén, azaz a $[0, 1]$ intervallumon van szükség az ortogonalításra, ezért az alábbi, eltolt Chebyshev polinomokat használjuk:

$$\bar{T}_p(r) = T_p(2r^2 - 1)$$

Ekkor az eltolt Chebyshev polinomok értéke is könnyen számolható az eredeti polinomokból:

$$\bar{T}_p(r) = T_p(2r^2 - 1) = \cos(p \cdot \arccos(2r^2 - 1))$$

Az eltolt Chebyshev polinomokra már teljesül az alábbi, számunkra hasznos ortogonalitás, ezúttal $\frac{1}{\sqrt{r^2-r^4}}$ súlyfüggvény mellett (ami könnyen levezethető a $x = 2r^2 - 1$ helyettesítéssel):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{T}_p(r) \bar{T}_{p'}(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r^4}} &= \int_0^1 \bar{T}_p(r) \bar{T}_{p'}(r) \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T_p(x) T_{p'}(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} 0, & \text{ha } p \neq p' \\ \pi/2, & \text{ha } p = p' = 0 \\ \pi/4, & \text{ha } p = p' \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Az előzőek alapján elkészíthetjük az egységkörlemezén ortogonális

$$C_{pq}(r, \phi) = \bar{T}_p(r) E_q(\phi)$$

(Chebyshev–Fourier) függvényrendszert:

$$\begin{aligned} \langle C_{pq}, C_{p'q'} \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 C_{pq}(r, \phi) C_{p'q'}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi \\ &= \int_0^1 \bar{T}_p(r) \bar{T}_{p'}(r) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \int_0^{2\pi} E_q(\phi) E_{q'}^*(\phi) d\phi = \begin{cases} 0, & \text{ha } p \neq p' \text{ vagy } q \neq q' \\ \pi^2, & \text{ha } p = p' = 0, q = q' \\ \pi^2/2, & \text{ha } p = p' \neq 0, q = q' \end{cases} \end{aligned}$$

2.2. Legendre–Fourier függvényrendszer

A Legendre polinomok [10] széles körben használatosak a $[-1, 1]$ intervallumon való konstans $w \equiv 1$ súlyfüggvény melletti ortogonalitásuk miatt. Jelölje P_p a p -ed fokú Legendre polinomot.

Ekkor tetszőleges fokszámmra a polinomok értékei a következő rekurzióval adhatóak meg:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, P_1(x) = x \\ P_p(x) &= \left(2 - \frac{1}{p}\right) x P_{p-1}(x) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) P_{p-2}(x) \end{aligned}$$

Az ortogonalitást leíró integrálformula:

$$\int_{-1}^1 P_p(x) P_{p'}(x) dx = \frac{2}{2p+1} \delta_{pp'}$$

Számunkra azonban $[-1, 1]$ helyett a polársugarak mentén, azaz a $[0, 1]$ intervallumon van szükség az ortogonalításra, ezért az eltolt Legendre polinomokat használjuk:

$$\bar{P}_p(r) = P_p(2r^2 - 1) \quad (p \in \mathbb{N})$$

Könnyen megadható rekurzió az eltolt Legendre polinomokra is:

$$\begin{aligned} \bar{P}_0(r) &= 1, \bar{P}_1(r) = 2r^2 - 1 \\ \bar{P}_p(r) &= \left(2 - \frac{1}{p}\right) (2r^2 - 1) \bar{P}_{p-1}(r) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \bar{P}_{p-2}(r) \end{aligned}$$

Az eltolt Legendre polinomokra már teljesül az alábbi, számunkra hasznos ortogonalitás (ami könnyen levezethető az $x = 2r^2 - 1$ helyettesítéssel):

$$\begin{aligned}\int_0^1 \bar{P}_p(r) \bar{P}_{p'}(r) r dr &= \int_0^1 P_p(2r^2 - 1) P_{p'}(2r^2 - 1) r dr \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 P_p(t) P_{p'}(t) dt = \frac{1}{4p+2} \delta_{pp'}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Az előzőek alapján elkészíthetjük az egységszögkörlemezén ortogonális

$$L_{pq}(r, \phi) = \bar{P}_p(r) E_q(\phi)$$

(Legendre–Fourier) függvényrendszert:

$$\begin{aligned}\langle L_{pq}, L_{p'q'} \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 L_{pq}(r, \phi) L_{p'q'}^*(r, \phi) r dr d\phi \\ &= \int_0^1 \bar{P}_p(r) \bar{P}_{p'}(r) r dr \cdot \int_0^{2\pi} E_q(\phi) E_{q'}^*(\phi) d\phi = \frac{\pi}{2p+1} \delta_{pp'} \delta_{qq'}\end{aligned}$$

2.3. RadialHarmonic–Fourier függvényrendszer

Liu és társai dolgozata [9] alapján induljunk ki a következő, $[0, 1]$ intervallumon ortogonális függvényrendszerből:

$$R_p(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{r}}, & \text{ha } p = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{r}} \cos(p\pi r), & \text{ha } p \text{ páros} \\ \sqrt{\frac{2}{r}} \sin((p+1)\pi r), & \text{ha } p \text{ páratlan} \end{cases} \quad (2.4)$$

Ahol az ortogonalitást a következő integrálformula írja le:

$$\int_0^1 R_p(r) R_{p'}(r) r dr = \delta_{pp'}$$

Ez alapján elkészíthetjük az egységszögkörlemezén ortogonális

$$H_{pq}(r, \phi) = R_p(r) E_q(\phi)$$

(RadialHarmonic–Fourier) függvényrendszert:

$$\begin{aligned}\langle H_{pq}, H_{p'q'} \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 H_{pq}(r, \phi) H_{p'q'}^*(r, \phi) r dr d\phi \\ &= \int_0^1 R_p(r) R_{p'}(r) r dr \cdot \int_0^{2\pi} E_q(\phi) E_{q'}^*(\phi) d\phi = 2\pi \delta_{pp'} \delta_{qq'}\end{aligned}$$

3. fejezet

Kép ábrázolása polár–Fourier momentumokkal

3.1. Kép ábrázolása az egységgörön

Láthattuk, hogy az előző függvényrendszerek az egységgörlemezre értelmezettek, ezért valamilyen módon le kell képeznünk a feldolgozandó képünket az egységgörlemezre.

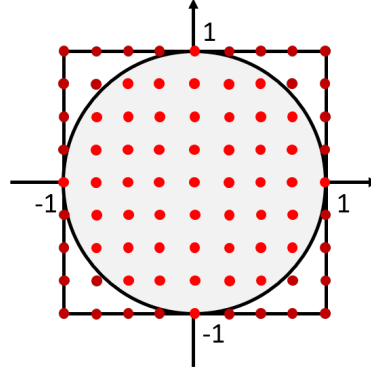
Feltehetjük, hogy a képünk négyzet alakú, ami $M \times M$ pixelből áll.

A következőkben bemutatunk két módot az egységgörlemezre való áttérésre.

3.1.1. Részleges ábrázolás

A képünk bal alsó sarkának koordinátája legyen $(-1, -1)$, a jobb felsőjé pedig $(1, 1)$. Ekkor a képnek csak az egységgörlemezbe eső pontjaival foglalkozunk. Ez a fajta ábrázolási mód nagyobb pontosságot eredményez, ezért jól használható képelemzési feladatokban (például objektumfelismerésnél vagy vízjelezésnél).

Az alábbi ábrán látható az egységgör és a kép elhelyezkedése. A piros pontok a kép pixeleit jelölik.



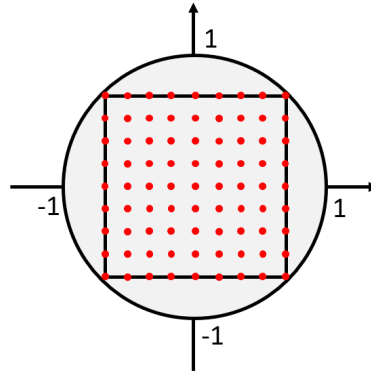
3.1. ábra. Kép részleges lefedése

Ekkor a kép pixeleinek koordinátái Descartes-féle koordináta-rendszerben felírva $(x_i, y_j) = (\frac{2i}{M-1} - 1, \frac{2j}{M-1} - 1)$ alakúak, ahol $0 \leq i, j < M$.

3.1.2. Teljes ábrázolás

A képünk bal alsó sarkának koordinátája legyen $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, a jobb felsőjé pedig $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Ekkor a kép teljes egészében az egységkörlemezbe esik. Ez a fajta ábrázolási mód használatos, hogyha szükséges a teljes kép megőrzése (például tömörítés vagy átméretezési feladatok esetében).

Az alábbi ábrán látható az egységkör és a kép elhelyezkedése. A piros pontok a kép pixeleit jelölik.



3.2. ábra. Kép teljes lefedése

Ekkor a kép pixeleinek koordinátái Descartes-féle koordináta-rendszerben $(X_i, Y_j) = (\frac{\sqrt{2}i}{M-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}j}{M-1} - \frac{\sqrt{2}}{2})$, ahol $0 \leq i, j < M$.

Érdemes megjegyezni, hogy az egységkörlemezbe eső, de a képen kívül levő részeket jellemzően nem feketével töltjük ki, hanem sugárirányban kiterjesztjük a kép szélén levő színeket.

3.2. Szürkeárnyaltos kép ábrázolása polár–Fourier momentumokkal

Szürkeárnyaltos képeket $f : [0, 1] \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}$ valós függvényként reprezentálhatunk az egységkörlemezen, ahol $f(r, \phi) \in \mathbb{R}$ jelöli a kép (r, ϕ) polárpontjában vett értékét.

Ekkor az előző fejezetben bemutatott függvényrendszerek segítségével többféleképpen előállíthatjuk f -et. Ehhez a továbbiakban tegyük fel, hogy az f függvény négyzetesen integrálható az egységkörlemezen. Látható, hogy a direktszorzos konstrukció következtében a négyzetesen integrálható függvények körében a korábban definiált függvényrendszerek mindegyike teljes ortogonális rendszer.

3.2.1. Kép ábrázolása Chebyshev–Fourier függvényrendszerben

A Chebyshev–Fourier függvényrendszer ortogonalitását és teljességét kihasználva a kép egy pontja felírható a következő módon:

$$f(r, \phi) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} M_{pq}^{(C)} C_{pq}(r, \phi)$$

ahol $M_{pq}^{(C)} \in \mathbb{C}$ komplex értékek a Chebyshev–Fourier momentumok: egy tetszőleges $M_{pq}^{(C)}$ momentum az f -nek C_{pq} -val vett skalárszorzata az egységkörlemezen (felszorozva megfelelő konstansokkal, az ortogonalitás képletéből adódóan):

$$M_{pq}^{(C)}(f) = M_{pq}^{(C)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2} \langle f, C_{0q} \rangle = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \phi) C_{0q}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi, & \text{ha } p = 0 \\ \frac{2}{\pi^2} \langle f, C_{pq} \rangle = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \phi) C_{pq}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi, & \text{ha } p \neq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Természetesen a gyakorlatban az összes momentum kiszámolására nincs lehetőség, csak valamilyen előre rögzített p_0, q_0 indexekig tesszük ezt meg. Ezek felhasználásával

a képnek is csak egy megközelítő értéke adható meg:

$$f(r, \phi) \approx f_{p_0 q_0}^{(C)}(r, \phi) = \sum_{p=0}^{p_0-1} \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} M_{pq}^{(C)} C_{pq}(r, \phi) \quad (3.2)$$

3.2.2. Kép ábrázolása Legendre–Fourier függvényrendszerben

A Legendre–Fourier függvényrendszer ortogonalitását és teljességét kihasználva a kép egy pontja felírható a következő módon:

$$f(r, \phi) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} M_{pq}^{(L)} L_{pq}(r, \phi)$$

ahol $M_{pq}^{(L)} \in \mathbb{C}$ komplex értékek a Legendre–Fourier momentumok: egy tetszőleges $M_{pq}^{(L)}$ momentum az f -nek L_{pq} -val vett skalárszorzata az egységkörlemezen (felszorozva $\frac{2p+1}{\pi}$ -vel, hisz $\langle L_{pq}, L_{pq}^* \rangle = \frac{\pi}{2p+1}$):

$$M_{pq}^{(L)} = \frac{2p+1}{\pi} \langle f, L_{pq} \rangle = \frac{2p+1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \phi) L_{pq}^*(r, \phi) r dr d\phi \quad (3.3)$$

Ekkor előre rögzített p_0, q_0 indexek mellett megkapható a képnek egy közelítése:

$$f(r, \phi) \approx f_{p_0 q_0}^{(L)}(r, \phi) = \sum_{p=0}^{p_0-1} \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} M_{pq}^{(L)} L_{pq}(r, \phi)$$

3.2.3. Kép ábrázolása RadialHarmonic–Fourier függvényrendszerben

A RadialHarmonic–Fourier függvényrendszer ortogonalitását kihasználva a kép egy pontja felírható a következő módon:

$$f(r, \phi) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} M_{pq}^{(H)} H_{pq}(r, \phi)$$

ahol $M_{pq}^{(H)} \in \mathbb{C}$ komplex értékek a RadialHarmonic–Fourier momentumok: egy tetszőleges $M_{pq}^{(H)}$ momentum f -nek H_{pq} -val vett skalárszorzata az egységkörlemezen (leosztva 2π -vel):

$$M_{pq}^{(H)} = \frac{1}{2\pi} \langle f, H_{pq} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \phi) H_{pq}^*(r, \phi) r dr d\phi \quad (3.4)$$

Ekkor előre rögzített p_0, q_0 indexek mellett megkapható a képnek egy közelítése:

$$f(r, \phi) \approx f_{p_0 q_0}^{(H)}(r, \phi) = \sum_{p=0}^{p_0-1} \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} M_{pq}^{(H)} H_{pq}(r, \phi)$$

3.3. Színes kép ábrázolása polár–Fourier momentumokkal

Láthatjuk, hogy az eddig leírt módszerek csak valós értékű f függvény reprezentálására alkalmasak. Ebből adódóan, ha egy színesképet akarnánk így feldolgozni, akkor szét kellene bontanunk a képet 3 színcsatornára, és külön foglalkozni velük. Ekkor azonban elvesznek a színtonkomponensek közti esetleges összefüggések.

Tisztán képzetes kvaterniókkal [4] azonban könnyen tudunk egy $\hat{f}(r, \phi)$ színes pixelt reprezentálni:

$$\hat{f}(r, \phi) = f_R(r, \phi) \cdot i + f_G(r, \phi) \cdot j + f_B(r, \phi) \cdot k$$

ahol f_R, f_G, f_B az adott színcsatornákat reprezentálják és i, j, k a kvaterniók képzetes egységei.

Komplex helyett definiálhatunk kvaternió értékű polár–Fourier függvényrendszereket, illetve momentumokat, hogyha az eddig használt $E_q(\phi)$ függvényeket lecseréljük a kvaterniók megfelelőjükkre: $\hat{E}_q(\phi) = e^{\mu q \phi}$, ahol $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (i + j + k)$ a tisztán képzetes kvaterniók egysége.

A kvaternió értékű Chebyshev–Fourier függvényrendszer például a következő alakban írható fel:

$$\hat{C}_{pq}(r, \phi) = \bar{T}_p(r) \hat{E}_q(\phi)$$

Ekkor a színeskép egy pontja az alábbi módon határozható meg:

$$\hat{f}(r, \phi) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \hat{M}_{pq}^{(C)} \hat{C}_{pq}(r, \phi) \approx \hat{f}_{p_0 q_0}^{(C)}(r, \phi) = \sum_{p=0}^{p_0-1} \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} \hat{M}_{pq}^{(C)} \hat{C}_{pq}(r, \phi)$$

ahol $\hat{M}_{pq}^{(C)} \in \mathbb{H}$ kvaterniók értékek a jobboldali Chebyshev–Fourier momentumok (a kommutativitás hiánya miatt beszélhetünk bal és jobboldali kvaterniók momentumokról).

Egy tetszőleges jobboldali kvaterniók Chebyshev–Fourier momentum a következőféleképpen írható fel:

$$\hat{M}_{pq}^{(C)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2} \langle \hat{f}, \hat{C}_{0q} \rangle = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{f}(r, \phi) \hat{C}_{0q}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi, & \text{ha } p = 0 \\ \frac{2}{\pi^2} \langle \hat{f}, \hat{C}_{pq} \rangle = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{f}(r, \phi) \hat{C}_{pq}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi, & \text{ha } p \neq 0 \end{cases}$$

A kvaterniós Chebyshev–Fourier momentumokhoz (QCFMs) hasonló módon definiálhatók a kvaterniós Legendre–Fourier (QLFMs) és RadialHarmonic–Fourier momentumok (QRHFM).

3.3.1. Áttérés kvaternió értékű polár–Fourier momentumokra

A következőkben megmutatjuk, hogy egyszerűen áttérhetünk komplexről kvaterniós Chebyshev–Fourier momentumokra. Ez hasonlóan megtehető a másik két polár–Fourier momentumtípusnál is.

Jelölje $M_{pq}^{(C)}(f_R), M_{pq}^{(C)}(f_G), M_{pq}^{(C)}(f_B)$ értékek az adott színcsatornához tartozó komplex Chebyshev–Fourier momentumokat.

Ekkor a jobboldali kvaterniós Chebyshev–Fourier momentumok felírhatóak

$$\hat{M}_{pq}^{(C)} = \alpha_{pq} + \beta_{pq}i + \gamma_{pq}j + \delta_{pq}k$$

alakban, ahol

$$\alpha_{pq} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \Im(M_{pq}^{(C)}(f_R) + M_{pq}^{(C)}(f_G) + M_{pq}^{(C)}(f_B))$$

$$\beta_{pq} = \Re(M_{pq}^{(C)}(f_R)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \Im(M_{pq}^{(C)}(f_G) - M_{pq}^{(C)}(f_B))$$

$$\gamma_{pq} = \Re(M_{pq}^{(C)}(f_G)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \Im(M_{pq}^{(C)}(f_B) - M_{pq}^{(C)}(f_R))$$

$$\delta_{pq} = \Re(M_{pq}^{(C)}(f_B)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \Im(M_{pq}^{(C)}(f_R) - M_{pq}^{(C)}(f_G))$$

Ezek a formulák a momentumok definíciójából vezethetők le, a formulát a kvaterniós trigonometrikus tag szerint kifejtve.

Hasonló számolással a kvaterniós Chebyshev–Fourier momentumokat felhasználva megkaphatjuk mindhárom színcsatorna értékeit egy adott (r, ϕ) pontban a következő módon:

$$f_R(r, \phi) = \Re(\tilde{\beta}_{pq}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \Im(\tilde{\alpha}_{pq} + \tilde{\gamma}_{pq} - \tilde{\delta}_{pq})$$

$$f_G(r, \phi) = \Re(\tilde{\gamma}_{pq}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \Im(\tilde{\alpha}_{pq} + \tilde{\delta}_{pq} - \tilde{\beta}_{pq})$$

$$f_B(r, \phi) = \Re(\tilde{\delta}_{pq}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \Im(\tilde{\alpha}_{pq} + \tilde{\beta}_{pq} - \tilde{\gamma}_{pq})$$

ahol

$$\tilde{\alpha}_{pq} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \alpha_{pq} C_{pq}(r, \phi) \approx \sum_{p=0}^{p_0-1} \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} \alpha_{pq} C_{pq}(r, \phi)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{pq} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \beta_{pq} C_{pq}(r, \phi) \approx \sum_{p=0}^{p_0-1} \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} \beta_{pq} C_{pq}(r, \phi) \\ \tilde{\gamma}_{pq} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \gamma_{pq} C_{pq}(r, \phi) \approx \sum_{p=0}^{p_0-1} \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} \gamma_{pq} C_{pq}(r, \phi) \\ \tilde{\delta}_{pq} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta_{pq} C_{pq}(r, \phi) \approx \sum_{p=0}^{p_0-1} \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} \delta_{pq} C_{pq}(r, \phi)\end{aligned}$$

Látjuk tehát, hogy a továbbiakban elég a komplex értékű esetet tárgyalnunk; onnan könnyedén áttérhetünk kvaterniós esetre.

3.4. Rekonstrukció

Természetes módon használhatjuk a rekonstrukciós képleteket (például Chebyshev–Fourier esetben a (3.2) képletet), közvetlenül a kép pixelpontjaiban. Jelenleg polár–Fourier momentumoknál és más hasonló jellegű momentumtípusoknál szinte kizárólag ez a rekonstrukciós módszer van használatban.

Ekkor egy pixelpontbeli érték kiszámítása (a függvényrendszer értékeinek előszámítása mellett) $O(p_0 q_0)$ futási idővel történik, ezért az összes pixel meghatározásához $O(p_0 q_0 M^2)$ időre van szükség.

Egyik fő célkitűzésünk volt időhatékonyabb eljárások keresése rekonstrukcióra, melyek megőrzik a rekonstrukció pontosságát is. A későbbiekben bemutatunk több általunk készített módszert is, melyek jelentősen gyorsabbak az eddig használt módszernél, és nem vesztenek jelentősen a pontosságból sem.

4. fejezet

Basic módszer

A polár–Fourier momentumok kiszámolására, valamint a rekonstrukcióra több lehetőség van; az egyik legrégebbi (és esetünkben leglassabb, illetve legpontatlanabb) a Basic módszer, melyet ebben a fejezetben mutatunk be. Ezt a módszert eredetileg a Zernike momentumok közelítésére találták ki (lásd [6, 11]), de az összes momentumtípusra könnyen alkalmazható. Láthatjuk majd, hogy a módszer próbálja megőrizni a Descartes-féle koordináta-rendszert és az eredeti pixelpontok koordinátáit.

Általánosságban elmondható, hogy a Basic módszer mindhárom polár–Fourier momentumtípusnál $O(p_0 q_0 M^2)$ futásidővel határozza meg a momentumokat.

A következőkben csak a részleges képábrázolással foglalkozunk, a teljes eset hasonlóan számolható.

Pontrendszer

A Basic módszer a kép pixeleinek koordinátáit használja alapul. Már tudjuk, hogy részleges esetben a kép pixeleinek koordinátái Descartes-féle koordináta-rendszerben (x_i, y_j) alakúak, ahol

$$x_i = \frac{2i}{M-1} - 1, \quad y_j = \frac{2j}{M-1} - 1, \quad 0 \leq i, j < M$$

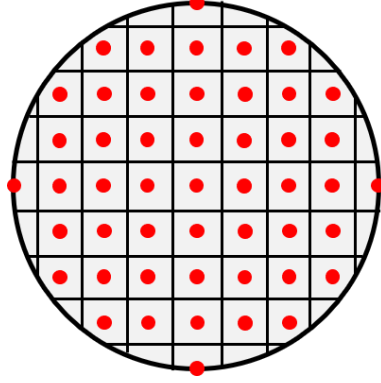
Ezeket átváltva polárkoordinátákra megkapjuk a Basic pontrendszer alappontjait.

Ekkor egy (x_i, y_j) pont polárkoordinátái: $\tilde{R}_{ij} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2}$, $\tilde{\Phi}_{ij} = \text{atan2}(y_j, x_i)$.

Tehát a pontrendszerünk polárkoordinátákban a következő:

$$\left\{ (\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij}) = \left(\sqrt{x_i^2 + y_j^2}, \text{atan2}(y_j, x_i) \right) \mid i, j < M; i, j \in \mathbb{N} \right\}$$

Rajzoljunk be egy négyzetrácsot az alábbi ábrán látható módon, ahol a négyzetek középpontjai a pontrendszerünk pontjai és a kis négyzetek $\frac{2}{M-1}$ oldalhosszúságúak. A piros pontok a Basic pontrendszer alappontjait (pixelpontok) jelölik.



4.1. ábra. Basic pontrendszer, avagy a kép pixelei

4.1. Polár–Fourier momentumok meghatározása

A momentumok kiszámolásánál azzal a közelítéssel élünk, hogy egy tetszőleges $(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij})$ alappont köré rajzolt négyzeten az f függvény, illetve az adott típusú polár–Fourier függvényrendszer tagjai konstans értékeket vesznek fel, mégpedig az $(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij})$ -beli értékeket.

Látni fogjuk, hogy egy tetszőleges típusú polár–Fourier momentum $O(M^2)$ komplexitással számolható, ezért az összes momentum kiszámolásához $O(p_0 q_0 M^2)$ időre van szükség.

4.1.1. Chebyshev–Fourier momentumok meghatározása

A következőkben levezetjük, hogy hogyan számolhatóak ki az általunk definiált Chebyshev–Fourier momentumok a Basic módszer segítségével.

Tekintsük minden kis négyzeten belül konstans $f(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij})$ -nek f -et és konstans $C_{pq}(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij})$ -nek C_{pq} -t.

Ekkor az $M_{pq}^{(C)}$ kiszámolásához szükséges (3.1) integrált közelíthetjük összegként a következő módon:

$$M_{pq}^{(C)} \approx \begin{cases} \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{4}{(M-1)^2} f(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij}) C_{0q}^*(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij}) \frac{1}{\tilde{R}_{ij} \sqrt{1-\tilde{R}_{ij}^2}}, & \text{ha } p = 0 \\ \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{4}{(M-1)^2} f(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij}) C_{pq}^*(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij}) \frac{1}{\tilde{R}_{ij} \sqrt{1-\tilde{R}_{ij}^2}}, & \text{ha } p \neq 0 \end{cases}$$

ahol az egységkörön kívüli f értékeket 0-nak tekintjük.

4.1.2. Legendre–Fourier momentumok meghatározása

Tekintsük minden kis négyzeten belül konstans $f(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij})$ -nek f -et és konstans $L_{pq}(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij})$ -nek L_{pq} -t. Ekkor az $M_{pq}^{(L)}$ kiszámolásához szükséges (3.3) integrált közelíthetjük összegként a következő módon:

$$M_{pq}^{(L)} \approx \frac{2p+1}{\pi} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{4}{(M-1)^2} f(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij}) L_{pq}^*(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij})$$

ahol az egységkörön kívüli f értékeket 0-nak tekintjük.

4.1.3. RadialHarmonic–Fourier momentumok meghatározása

Tekintsük minden kis négyzeten belül konstans $f(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij})$ -nek f -et és konstans $H_{pq}(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij})$ -nek H_{pq} -t. Ekkor az $M_{pq}^{(H)}$ kiszámolásához szükséges (3.4) integrált közelíthetjük összegként a következő módon:

$$M_{pq}^{(H)} \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{4}{(M-1)^2} f(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij}) H_{pq}^*(\tilde{R}_{ij}, \tilde{\Phi}_{ij})$$

ahol az egységkörön kívüli f értékeket 0-nak tekintjük.

5. fejezet

Accurate módszer

Ebben a fejezetben bemutatjuk Hosny és Darwish módszerét [8] a Legendre–Fourier momentumok kiszámolására (a használt technika eredetileg a [12] publikációban jelent meg) és kiterjesztjük ezt a módszert az általunk definiált Chebyshev–Fourier momentumokra, valamint a RadialHarmonic–Fourier momentumokra is.

A módszerhez szükségünk van egy előre rögzített $N \in \mathbb{N}^+$ értékre, ami a mintavételezési pontrendszer nagyságát fogja meghatározni. Általánosságban elmondható, hogy az Accurate módszer mindhárom polár–Fourier momentumtípusnál $O(p_0 q_0 N + q_0 N^2 + M^2)$ futásidővel határozza meg a momentumokat, ami jelentősen gyorsabb, mint a Basic módszer.

Megadunk továbbá egy új rekonstrukciós eljárást, ami használható mindegyik polár–Fourier momentummódszernél, és a 3.4. szekcióban mutatott módszer $O(p_0 q_0 M^2)$ futási ideje helyett $O(p_0 q_0 N + q_0 N^2 + M^2)$ időben fut.

Pontrendszer

Osszuk fel egyenletesen N darab $\Delta\tilde{r} = \frac{1}{N}$ szélességű körgyűrűre az egységkörlemez. Belülről az i . körgyűrűt pedig osszuk fel polárszög szerint egyenletesen $8i + 4$ darab $\Delta\tilde{\phi}_i = \frac{2\pi}{8i+4}$ szögszélességű részre. Ezzel felosztottuk az egységkörlemezünket polártartományokra, jelöljük az i . körgyűrű j . tartományát T_{ij} -vel.

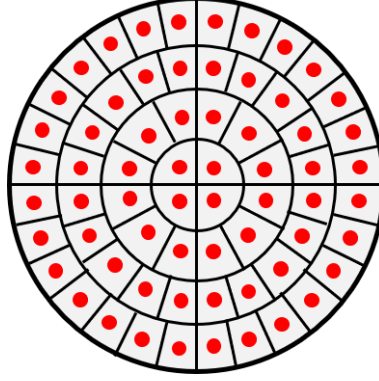
Mintavételezzük az f képünket minden polártartomány középpontjában. Ezek $(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij})$ alakú polárpontok, ahol $0 \leq i < N$ és $0 \leq j < 8i + 4$ korlátok mellett:

$$\tilde{r}_i = \Delta\tilde{r}/2 + i\Delta\tilde{r}, \quad \tilde{\phi}_{ij} = \Delta\tilde{\phi}_i/2 + j\Delta\tilde{\phi}_i$$

Tehát a pontrendszerünk polárkoordinátákban a következő:

$$\left\{ (\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij}) = \left(\frac{i+0.5}{N}, \frac{(j+0.5)2\pi}{8i+4} \right) \mid i < N; j < 8i+4; i, j \in \mathbb{N} \right\}$$

Az alábbi ábrán láthatjuk a polártartományokat és az $(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij})$ pontrendszerünket (piros pontok).



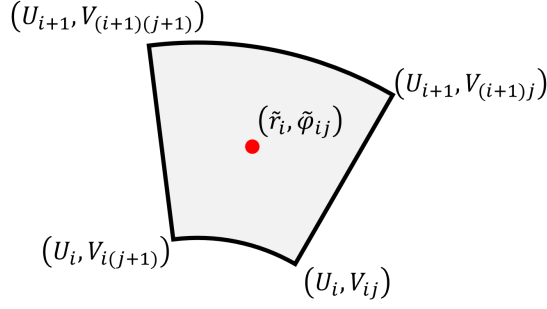
5.1. ábra. Accurate pontrendszer ($N = 4$)

A mintavételezésre itt bicubic [13] interpolációt használunk, aminek a lényege, hogy először origótól való távolság szerint, aztán polárszög szerint alkalmazunk cubic (köbös) interpolációt. Ilyen módon megkaphatjuk az $f(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij})$ függvényértékek egy megközelítő értékét.

5.1. Polár–Fourier momentumok meghatározása

A momentumok kiszámolásánál már csak azzal a közelítéssel élünk, hogy egy tetszőleges T_{ij} polártartományon f konstans $f(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij})$ értéket vesz fel. Ezen egyszerűsítés miatt, ki tudjuk számolni a momentumokhoz szükséges integrálok pontos értékét a polártartományokon, amelyek összegéből fognak adódni az egyes momentumok.

Vezessük be a $U_i = i \cdot \Delta\tilde{r}$ és $V_{ij} = j \cdot \Delta\tilde{\phi}_i$ jelöléseket, melyek az alábbi ábrán látható módon meghatározzák a T_{ij} tartományokat.


 5.2. ábra. T_{ij} polártartomány

Látni fogjuk, hogy egy tetszőleges típusú polár–Fourier M_{pq} momentum $O(N^2)$ komplexitással számolható, ezért az összes momentum kiszámolásához $O(p_0 q_0 N^2)$ időre lenne szükség. Kihasználva az Accurate alappontok körkörös elhelyezkedését, ez csökkenthető $O(p_0 q_0 N + q_0 N^2)$ -re.

5.1.1. Chebyshev–Fourier momentumok meghatározása

A következőkben levezetjük, hogy hogyan számolhatóak ki az általunk definiált Chebyshev–Fourier momentumok az Accurate módszer segítségével.

A (3.1) egyenlet alapján:

$$M_{pq}^{(C)} \approx \begin{cases} \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{8i+3} \left(f(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij}) \int_{T_{ij}} C_{0q}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi \right) & \text{ha } p = 0 \\ \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{8i+3} \left(f(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij}) \int_{T_{ij}} C_{pq}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi \right) & \text{ha } p \neq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Tehát nem az egész egységkörlemezen integrálunk, hanem T_{ij} polártartományokon egy konstans $f(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij})$ szín feltételezése mellett. Ekkor a kettős integrál szétbontható:

$$\int_{T_{ij}} C_{pq}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi = \int_{U_i}^{U_{i+1}} \bar{T}_p(r) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \int_{V_{ij}}^{V_{i(j+1)}} E_q^*(\phi) d\phi \quad (5.2)$$

ahol

$$\begin{aligned} \int_{U_i}^{U_{i+1}} \bar{T}_p(r) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} &= \frac{1}{2} \int_{2U_i^2-1}^{2U_{i+1}^2-1} T_p(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int_{2U_i^2-1}^{2U_{i+1}^2-1} \frac{\cos(p \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} [\arcsin(x)]_{2U_i^2-1}^{2U_{i+1}^2-1}, & \text{ha } p = 0 \\ -\frac{1}{2p} [\sin(p \arccos(x))]_{2U_i^2-1}^{2U_{i+1}^2-1}, & \text{ha } p > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

valamint

$$\int_{V_{ij}}^{V_{i(j+1)}} E_q^*(\phi) d\phi = \begin{cases} V_{i(j+1)} - V_{ij}, & \text{ha } q = 0 \\ \frac{1}{q} (E_q^*(V_{i(j+1)}) - E_q^*(V_{ij})), & \text{ha } q \neq 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Ezek alapján a T_{ij} -n vett integrál már konstans időben, pontosan kiszámolható.

5.1.2. Legendre–Fourier momentumok meghatározása

Egy tetszőleges Legendre–Fourier momentum Accurate módszerrel a (3.3) egyenlet alapján a következő módon határozható meg:

$$M_{pq}^{(L)} \approx \frac{2p+1}{\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{8i+3} \left(f(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij}) \int_{T_{ij}} L_{pq}^*(r, \phi) r dr d\phi \right)$$

Tehát nem az egész egységkörlemezen integrálunk, hanem T_{ij} polártartományokon egy konstans $f(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij})$ szín mellett. Ekkor a kettős integrál szétbontható:

$$\int_{T_{ij}} L_{pq}^*(r, \phi) r dr d\phi = \int_{U_i}^{U_{i+1}} \bar{P}_p(r) r dr \cdot \int_{V_{ij}}^{V_{i(j+1)}} E_q^*(\phi) d\phi$$

ahol

$$\int_{U_i}^{U_{i+1}} \bar{P}_p(r) r dr = \begin{cases} (U_{i+1}^2 - U_i^2) / 2, & \text{ha } p = 0 \\ \frac{1}{4} \left[\frac{\bar{P}_{p+1}(r) - \bar{P}_{p-1}(r)}{2p+1} \right]_{U_i}^{U_{i+1}}, & \text{ha } p > 0 \end{cases}$$

valamint az $\int_{V_{ij}}^{V_{i(j+1)}} E_q^*(\phi) d\phi$ integrált már kifejeztük (5.3).

5.1.3. RadialHarmonic–Fourier momentumok meghatározása

Egy tetszőleges RadialHarmonic–Fourier momentum Accurate módszerrel a (3.4) egyenlet alapján a következő módon határozható meg:

$$M_{pq}^{(H)} \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{8i+3} \left(f(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij}) \int_{T_{ij}} H_{pq}^*(r, \phi) r dr d\phi \right)$$

Tehát nem az egész egységkörlemezen integrálunk, hanem T_{ij} polártartományokon egy konstans $f(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij})$ szín mellett. Ekkor a kettős integrál szétbontható:

$$\int_{T_{ij}} H_{pq}^*(r, \phi) r dr d\phi = \int_{U_i}^{U_{i+1}} R_p(r) r dr \cdot \int_{V_{ij}}^{V_{i(j+1)}} E_q^*(\phi) d\phi$$

ahol

$$\int_{U_i}^{U_{i+1}} R_{pq}^*(r, \phi) r dr = \begin{cases} \int_{U_i}^{U_{i+1}} \sqrt{r} dr = \left[\frac{2}{3} r \sqrt{r} \right]_{U_i}^{U_{i+1}} \\ \int_{U_i}^{U_{i+1}} \sqrt{2r} \cos(p\pi r) dr = \sqrt{2} \int_{\sqrt{U_i}}^{\sqrt{U_{i+1}}} 2x^2 \cos(p\pi x^2) dx \\ \int_{U_i}^{U_{i+1}} \sqrt{2r} \sin((p+1)\pi r) dr = \sqrt{2} \int_{\sqrt{U_i}}^{\sqrt{U_{i+1}}} 2x^2 \sin((p+1)\pi x^2) dx \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{2}{3} r \sqrt{r} \right]_{U_i}^{U_{i+1}}, & \text{ha } p = 0 \\ \sqrt{2} \left[\frac{x \sin(p\pi x^2)}{p\pi} \right]_{\sqrt{U_i}}^{\sqrt{U_{i+1}}} - \sqrt{2} \int_{\sqrt{U_i}}^{\sqrt{U_{i+1}}} \frac{\sin(p\pi x^2)}{p\pi} dx, & \text{ha } p \text{ páros} \\ -\sqrt{2} \left[\frac{x \cos((p+1)\pi x^2)}{(p+1)\pi} \right]_{\sqrt{U_i}}^{\sqrt{U_{i+1}}} + \sqrt{2} \int_{\sqrt{U_i}}^{\sqrt{U_{i+1}}} \frac{\cos((p+1)\pi x^2)}{(p+1)\pi} dx, & \text{ha } p \text{ páratlan} \end{cases}$$

és a megmaradt integrálok a $p \neq 0$ esetekben Fresnel-integrálok, melyek [14] alapján hatékonyan számolhatóak.

Az $\int_{V_{ij}}^{V_{i(j+1)}} E_q^*(\phi) d\phi$ integrált korábban kifejeztük (5.3).

5.1.4. Momentumszámítás gyorsítása

Az előbbiekben láthattuk, hogy egy momentum kiszámolása a kettős szumma miatt $O(N^2)$ időbe telik, így az összes momentum kiszámolása közvetlenül a definíció alapján $O(p_0 q_0 N^2)$ ideig tartana.

Megmutatjuk, hogy ez Hosny és Darwish [8] képlete alapján hogyan gyorsítható a Chebyshev–Fourier momentumoknál (a többi polár–Fourier momentumtípusnál ez hasonlóan megtehető).

Az (5.1) képletből kiindulva, (5.2) felhasználásával a szummát és az integrált felcserélve a következőt kapjuk ($p \neq 0$ esetet tekintve):

$$M_{pq}^{(C)} \approx \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{U_i}^{U_{i+1}} \bar{T}_p(r) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \sum_{j=0}^{8i+3} \left(f(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij}) \int_{V_{ij}}^{V_{i(j+1)}} E_q^*(\phi) d\phi \right) \right)$$

Láthatjuk, hogy a belső szumma értéke nem függ p -tól, az összes lehetséges értékének kiszámítása $O(q_0 N^2)$ ideig tart. Ha ezeket az értékeket már ismerjük, akkor egy momentum kiszámolása csak $O(N)$ ideig tart a külső szumma miatt. Tehát az összes momentum kiszámítása (a belső szummák előkalkulációjával együtt) $O(p_0 q_0 N + q_0 N^2)$ ideig tart.

5.2. Rekonstrukció gyorsítása

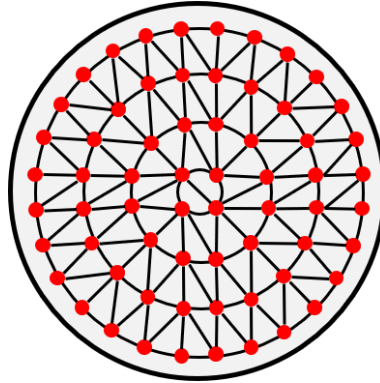
Ebben a szekcióban bemutatunk egy általunk készített új, gyorsabb rekonstrukciót az Accurate pontrendszer felhasználásával. A 3.4-ban leírt rekonstrukcióval ellentétben most nem az eredeti pixelpontokban, hanem első lépésben az Accurate pontrendszerben állítjuk elő az f színértékeket, majd interpolációval határozzuk meg az eredeti pixelpontbeli értékeket.

A következőkben a Chebyshev–Fourier momentum módszeren fogjuk demonstrálni az eljárást, de ez könnyedén átültethető a többi polár–Fourier momentum módszerre is. A (3.2) rekonstrukciós képletet felhasználva az Accurate pontrendszeren:

$$f(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij}) \approx \sum_{p=0}^{p_0-1} \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} M_{pq}^{(C)} C_{pq}(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_{ij}) = \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} \left(E_q(\tilde{\phi}_{ij}) \sum_{p=0}^{p_0-1} M_{pq}^{(C)} \bar{T}_p(\tilde{r}_i) \right)$$

Láthatjuk, hogy a belső szumma értéke nem függ j -től, az összes lehetséges értékének kiszámítása $O(p_0 q_0 N)$ ideig tart. Ha ezeket az értékeket már ismerjük, akkor egy Accurate pontrendszerbeli színérték kiszámolása csak $O(q_0)$ ideig tart a külső szumma miatt. Tehát az összes f érték kiszámolása (a belső szummák előkalkulációjával együtt) $O(p_0 q_0 N + q_0 N^2)$ ideig tart.

Háromszögeljük az accurate pontrendszert az ábrán látható módon:



5.3. ábra. Accurate pontrendszer háromszögelése

Az eredeti pixelpontokban megkaphatjuk f egy megközelítő értékét, ha a megfelelő háromszögben baricentrikus koordináták segítségével interpolálunk [15].

A rekonstrukció futási ideje az interpolációkkal együtt $O(p_0 q_0 N + q_0 N^2 + M^2)$.

6. fejezet

Diszkrét módszer

Ebben a fejezetben bemutatunk egy integrál diszkrétizáción alapuló új módszert a Legendre–Fourier momentumok, illetve az általunk definiált Chebyshev–Fourier momentumok kiszámolására. Jelenleg egyetlen hasonló módszerről tudunk a szakirodalomban [9] (melyet az összehasonlítás végett szintén bemutatunk), de ott a fő motiváció a trigonometrikus rendszerre való visszavezetés és nem a diszkrét ortogonalitás elérése volt. A későbbiekben látni fogjuk, hogy az ily módon konstruált RadialHarmonic–Fourier rendszer számos, elméleti és gyakorlati szempontból előnytelen tulajdonsággal rendelkezik. A mi megközelítésünk ezzel szemben széles körben alkalmazható, általános módszer a momentumszámítás és a rekonstrukció hatékony kezelésére.

A módszerhez szükségünk van előre rögzített $N_R, N_A \in \mathbb{N}^+$ értékekre, amik a mintavételezési pontrendszer nagyságát fogják meghatározni sugár és szögelfordulási irány szerint. Általánosságban elmondható, hogy a Diszkrét módszer mindhárom polár–Fourier momentumtípusnál $O(p_0 q_0 N_A + p_0 N_R N_A + M^2)$ futásidővel határozza meg a momentumokat, ami jelentősen gyorsabb, mint a Basic módszer (és látni fogjuk, hogy konstansszorzóban gyorsabb, mint az Accurate módszer).

A módszerünk a momentumértékek számolását ortogonális mátrixokkal való szorzásokra vezeti vissza (ami numerikusan stabil), így hatékonyan implementálható, és rendkívül könnyen párhuzamosítható.

Bemutatunk továbbá a Chebyshev–Fourier momentumok esetében egy gyors Fourier–transzformáción (FFT) alapuló, aszimptotikusan még gyorsabb momentumszámítási módot, valamint [9] alapján egy hasonló módszert a RadialHarmonic–

Fourier momentumokra is.

Megadunk továbbá egy új rekonstrukciós eljárást, ami használható mindegyik polár–Fourier momentummódszernél, és az eddig használt 3.4 rekonstrukció $O(p_0 q_0 M^2)$ futási ideje helyett $O(p_0 q_0 N_A + p_0 N_R N_A + M^2)$ időben fut. Látni fogjuk hogy ez szintén tovább gyorsítható Chebyshev–Fourier és RadialHarmonic–Fourier esetben FFT-vel.

Pontrendszer

A Diszkrét módszer által használt pontrendszer polár–Fourier momentumtípusonként eltérő, de általánosságban felírható a következő alakban polárkoordinátákkal:

$$\{(r_i, \phi_j) \mid i < N_R; j < N_A; i, j \in \mathbb{N}\}$$

ahol r_i -k az adott momentumtípus integráldiszkrétizációjához szükséges alappontok, $\phi_j = \frac{j2\pi}{N_A}$ pedig a szögtartomány egyenletes felosztása.

Mintavételezzük az f képünket az (r_i, ϕ_j) polárpontokban. A mintavételezésre itt bicubic [13] interpolációt használunk, aminek a lényege, hogy először origótól való távolság szerint, aztán polárszög szerint alkalmazunk cubic (köbös) interpolációt. Ilyen módon megkaphatjuk az $f(r_i, \phi_j)$ függvényértékek egy megközelítő értékét.

6.1. Polár–Fourier momentumok meghatározása

A momentumok meghatározásához szükséges (Chebyshev–Fourier esetben (3.1)) integrált, már nem az egységgörlemez területekre bontásával fogjuk közelítőleg meghatározni, hanem az integrál diszkrétizációjával.

Látni fogjuk, hogy egy tetszőleges típusú polár–Fourier M_{pq} momentum $O(N_R N_A)$ komplexitással számolható, ezért az összes momentum kiszámolásához $O(p_0 q_0 N_R N_A)$ időre lenne szükség. Szerencsére kihasználva a Diszkrét alappontok körkörös, illetve sugármenti elhelyezkedését, ez csökkenthető $O(p_0 q_0 N_A + p_0 N_R N_A)$ -re. A Legendre–Fourier momentummódszer kivételével pedig még gyorsabb eljárást tudunk megadni.

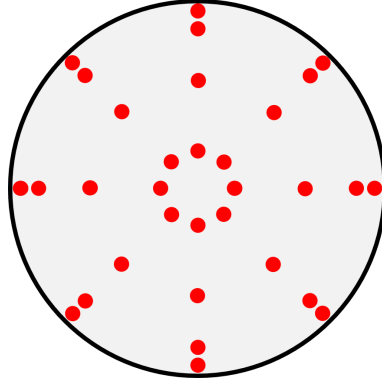
6.1.1. Chebyshev–Fourier momentumok meghatározása

Jelöljük T_{N_R} gyökeit $x_i^{(C)}$ -vel. Könnyen látható, hogy $x_i^{(C)} = \cos\left(\frac{(i+0.5)\pi}{N_R}\right)$ és pontosan N_R darab gyök van ($i < N_R; i \in \mathbb{N}$). Jelöljük $\bar{T}_{N_R}$ gyökeit $r_i^{(C)}$ -vel, ekkor $r_i^{(C)} = \sqrt{\frac{x_i^{(C)}+1}{2}}$.

Ekkor a pontrendszerünk legyen tehát a következő alakú:

$$\left\{ (r_i^{(C)}, \phi_j) = \left(\sqrt{\frac{\cos\left(\frac{(i+0.5)\pi}{N_R}\right) + 1}{2}}, \frac{j2\pi}{N_A} \right) \mid i < N_R; j < N_A; i, j \in \mathbb{N} \right\}$$

Az alábbi ábrán látható ezen polárpontok elhelyezkedése:



6.1. ábra. Chebyshev–Fourier Diszkrét pontrendszer($N_R = 4, N_A = 8$)

Szükségünk lesz a későbbiekben az E_q polinomok, illetve a $\bar{T}_p$ polinomok diszkrét ortogonalitásához. Lásd például [16] alapján

$$\sum_{j=0}^{N_A-1} E_{q'}(\phi_j) E_q^*(\phi_j) = \frac{\delta_{qq'}}{N_A} \quad (6.1)$$

továbbá [17] alapján

$$\sum_{i=0}^{N_R-1} \bar{T}_{p'}(r_i^{(C)}) \bar{T}_p(r_i^{(C)}) = \sum_{i=0}^{N_R-1} T_{p'}(x_i^{(C)}) T_p(x_i^{(C)}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p \neq p' \\ N_R, & \text{ha } p = p' = 0 \\ N_R/2, & \text{ha } p = p' \neq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

A momentumok meghatározásához induljunk ki $p \neq 0$ esetből (3.1) alapján:

$$\begin{aligned}
 M_{pq}^{(C)} &= \frac{2}{\pi^2} \langle f, C_{pq} \rangle \approx \frac{2}{\pi^2} \langle f_{p_0 q_0}^{(C)}, C_{pq} \rangle = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f_{p_0 q_0}^{(C)}(r, \phi) C_{pq}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\sum_{p'=0}^{p_0-1} \sum_{q'=-q_0+1}^{q_0-1} M_{p'q'}^{(C)} C_{p'q'}(r, \phi) \right) C_{pq}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{p'=0}^{p_0-1} \sum_{q'=-q_0+1}^{q_0-1} \left(M_{p'q'}^{(C)} \int_0^{2\pi} \int_0^1 C_{p'q'}(r, \phi) C_{pq}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi \right) \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{p'=0}^{p_0-1} \sum_{q'=-q_0+1}^{q_0-1} \left(M_{p'q'}^{(C)} \int_0^1 \bar{T}_{p'}(r) \bar{T}_p(r) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \int_0^{2\pi} E_{q'}(\phi) E_q^*(\phi) d\phi \right)
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Innen (2.1) és (2.2), valamint (6.1) és (6.2) ortogonalitásokat felhasználva:

$$\begin{aligned}
 M_{pq}^{(C)} &\approx \frac{2}{\pi^2} \sum_{p'=0}^{p_0-1} \sum_{q'=-q_0+1}^{q_0-1} \left(M_{p'q'}^{(C)} \frac{\pi}{2N_R} \sum_{i=0}^{N_R-1} \bar{T}_{p'}(r_i^{(C)}) \bar{T}_p(r_i^{(C)}) \cdot \frac{2\pi}{N_A} \sum_{j=0}^{N_A-1} E_{q'}(\phi_j) E_q^*(\phi_j) \right) \\
 &= \frac{1}{2N_R N_A} \sum_{i=0}^{N_R-1} \sum_{j=0}^{N_A-1} \left(\left(\sum_{p'=0}^{p_0-1} \sum_{q'=-q_0+1}^{q_0-1} M_{p'q'}^{(C)} \bar{T}_{p'}(r_i^{(C)}) E_{q'}(\phi_j) \right) \bar{T}_p(r_i^{(C)}) E_q^*(\phi_j) \right) \\
 &= \frac{1}{2N_R N_A} \sum_{i=0}^{N_R-1} \sum_{j=0}^{N_A-1} \left(\left(\sum_{p'=0}^{p_0-1} \sum_{q'=-q_0+1}^{q_0-1} M_{p'q'}^{(C)} C_{p'q'}(r_i^{(C)}, \phi_j) \right) C_{pq}^*(r_i^{(C)}, \phi_j) \right) \\
 &= \frac{1}{2N_R N_A} \sum_{i=0}^{N_R-1} \sum_{j=0}^{N_A-1} f_{p_0 q_0}^{(C)}(r_i^{(C)}, \phi_j) C_{pq}^*(r_i^{(C)}, \phi_j)
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Tehát az általunk bevezett pontrendszer segítségével a következőképpen határozhatjuk meg a momentumokat:

$$M_{pq}^{(C)} \approx \begin{cases} \frac{1}{4N_R N_A} \sum_{i=0}^{N_R-1} \sum_{j=0}^{N_A-1} f(r_i^{(C)}, \phi_j) C_{0q}^*(r_i^{(C)}, \phi_j), & \text{ha } p = 0 \\ \frac{1}{2N_R N_A} \sum_{i=0}^{N_R-1} \sum_{j=0}^{N_A-1} f(r_i^{(C)}, \phi_j) C_{pq}^*(r_i^{(C)}, \phi_j), & \text{ha } p \neq 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

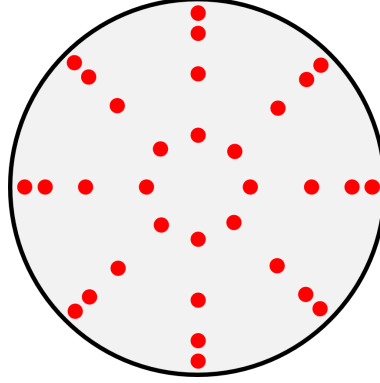
6.1.2. Legendre–Fourier momentumok meghatározása

Jelöljük P_{N_R} gyökeit $x_i^{(L)}$ -vel. Belátható, hogy pontosan N_R darab gyök van ($i < N_R; i \in \mathbb{N}$). Jelöljük $\bar{P}_{N_R}$ gyökeit $r_i^{(L)}$ -vel, ekkor $r_i^{(L)} = \sqrt{\frac{x_i^{(L)} + 1}{2}}$, mely értékek meghatározására [18] segítségével kerül sor.

Ekkor a pontrendszerünk legyen tehát a következő alakú:

$$\left\{ (r_i^{(L)}, \phi_j) \mid i < N_R; j < N_A; i, j \in \mathbb{N} \right\}$$

Az alábbi ábrán látható ezen polárpontok elhelyezkedése:



6.2. ábra. Legendre–Fourier Diszkrét pontrendszer ($N_R = 4, N_A = 8$)

Szükségünk lesz még a $\bar{P}_p$ polinomok diszkrét ortogonalitására. Gauss–Legendre kvadratura felhasználásával, [18] alapján:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4p+2}\delta_{pp'} &= \int_0^1 \bar{P}_{p'}(r)\bar{P}_p(r)rdr = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 P_{p'}(x)P_p(x)dx \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{N_R-1} w_i P_{p'}(x_i^{(L)})P_p(x_i^{(L)}) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{N_R-1} w_i \bar{P}_{p'}(r_i^{(L)})\bar{P}_p(r_i^{(L)}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

ahol az N_R -ed rendű w_i Gauss–Legendre súlyokat [18] segítségével számoljuk.

A (6.3) levezetéshez hasonlóan azt kapjuk (3.3)-ból, hogy

$$M_{pq}^{(L)} \approx \frac{2p+1}{\pi} \sum_{p'=0}^{p_0-1} \sum_{q'=-q_0+1}^{q_0-1} \left(M_{p'q'}^{(L)} \int_0^1 \bar{P}_{p'}(r)\bar{P}_p(r)rdr \cdot \int_0^{2\pi} E_{q'}(\phi)E_q^*(\phi)d\phi \right)$$

Innen (2.1) és (2.3), valamint (6.1) és (6.6) ortogonalitásokat felhasználva, (6.4) levezetéshez hasonlóan:

$$\begin{aligned} M_{pq}^{(L)} &\approx \frac{2p+1}{\pi} \sum_{p'=0}^{p_0-1} \sum_{q'=-q_0+1}^{q_0-1} \left(M_{p'q'}^{(L)} \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{N_R-1} \bar{P}_{p'}(r_i^{(L)})\bar{P}_p(r_i^{(L)}) \cdot \frac{2\pi}{N_A} \sum_{j=0}^{N_A-1} E_{q'}(\phi_j)E_q^*(\phi_j) \right) \\ &= \frac{2p+1}{2N_A} \sum_{i=0}^{N_R-1} \sum_{j=0}^{N_A-1} f_{p_0q_0}^{(L)}(r_i^{(L)}, \phi_j) L_{pq}^*(r_i^{(L)}, \phi_j) w_i \end{aligned}$$

Tehát az általunk bevezett pontrendszer segítségével a következőképpen határozhatjuk meg a momentumokat:

$$M_{pq}^{(L)} \approx \frac{2p+1}{2N_A} \sum_{i=0}^{N_R-1} \sum_{j=0}^{N_A-1} f(r_i^{(L)}, \phi_j) L_{pq}^*(r_i^{(L)}, \phi_j) w_i$$

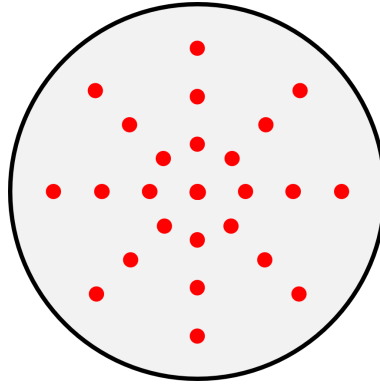
6.1.3. RadialHarmonic–Fourier momentumok meghatározása

[9] leírása alapján megadjuk hogyan számíthatóak ki a RadialHarmonic–Fourier momentumok.

Legyen a pontrendszerünk a következő alakú:

$$\left\{ (r_i^{(H)}, \phi_j) = \left(\frac{i}{N_R}, \frac{j2\pi}{N_A} \right) \mid i < N_R; j < N_A; i, j \in \mathbb{N} \right\}$$

Tehát osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot is egyenletesen. Az alábbi ábrán látható ezen polárpontok elhelyezkedése:



6.3. ábra. RadialHarmonic–Fourier Diszkrét pontrendszer ($N_R = 4, N_A = 8$)

Ekkor az ortogonalitást kifejező integrált alsó Riemann közelítőösszeggel diszkretizáljuk:

$$\int_0^1 R_{p'}(r) R_p(r) r dr \approx \sum_{i=0}^{N_R-1} R_{p'}(r_i^{(H)}) R_p(r_i^{(H)}) r_i^{(H)} \quad (6.7)$$

A (6.3) levezetéshez hasonlóan azt kapjuk (3.4)-ből, hogy

$$M_{pq}^{(H)} \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p'=0}^{p_0-1} \sum_{q'=-q_0+1}^{q_0-1} \left(M_{p'q'}^{(H)} \int_0^1 R_{p'}(r) R_p(r) r dr \cdot \int_0^{2\pi} E_{q'}(\phi) E_q^*(\phi) d\phi \right)$$

Innen (2.1) és (2.4), valamint (6.1) és (6.7) ortogonalitásokat felhasználva, (6.4) levezetéshez hasonlóan:

$$\begin{aligned} M_{pq}^{(H)} &\approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p'=0}^{p_0-1} \sum_{q'=-q_0+1}^{q_0-1} \left(M_{p'q'}^{(H)} \frac{1}{N_R} \sum_{i=0}^{N_R-1} R_{p'}(r_i^{(H)}) R_p(r_i^{(H)}) r_i^{(H)} \frac{2\pi}{N_A} \sum_{j=0}^{N_A-1} E_{q'}(\phi_j) E_q^*(\phi_j) \right) \\ &= \frac{1}{N_R N_A} \sum_{i=0}^{N_R-1} \sum_{j=0}^{N_A-1} f_{p_0 q_0}^{(H)}(r_i^{(H)}, \phi_j) H_{pq}^*(r_i^{(H)}, \phi_j) r_i^{(H)} \end{aligned}$$

Tehát a bevezetett pontrendszer segítségével a következőképpen határozhatjuk meg a momentumokat:

$$M_{pq}^{(H)} \approx \frac{1}{N_R N_A} \sum_{i=0}^{N_R-1} \sum_{j=0}^{N_A-1} f(r_i^{(H)}, \phi_j) H_{pq}^*(r_i^{(H)}, \phi_j) r_i^{(H)}$$

6.1.4. Momentumszámítás gyorsítása I.

Az előbbiekben láthattuk, hogy egy momentum kiszámolása a kettős szumma miatt $O(N_R N_A)$ időbe telik, így az összes momentum kiszámolása $O(p_0 q_0 N_R N_A)$ ideig tartana.

Megmutatjuk, hogy ez hogyan gyorsítható a Chebyshev–Fourier momentumoknál (a többi polár–Fourier momentumtípusnál ez hasonlóan megtehető).

(6.5) képletből kiindulva ($p \neq 0$ esetet tekintve):

$$\begin{aligned} M_{pq}^{(C)} &\approx \frac{1}{2N_R N_A} \sum_{i=0}^{N_R-1} \sum_{j=0}^{N_A-1} f(r_i^{(C)}, \phi_j) \bar{T}_p(r_i^{(C)}) E_q^*(\phi_j) \\ &= \frac{1}{2N_R N_A} \sum_{j=0}^{N_A-1} \left(E_q^*(\phi_j) \sum_{i=0}^{N_R-1} f(r_i^{(C)}, \phi_j) \bar{T}_p(r_i^{(C)}) \right) \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy a belső szumma értéke nem függ q -tól, az összes lehetséges értékének kiszámítása $O(p_0 N_R N_A)$ ideig tart. Ha ezeket az értékeket már ismerjük, akkor egy momentum kiszámolása csak $O(N_A)$ ideig tart a külső szumma miatt. Tehát az összes momentum kiszámítása (a belső szummák előkalkulációjával együtt) $O(p_0 q_0 N_A + p_0 N_R N_A)$ ideig tart.

Megjegyzendő, hogy a szummák sorrendjének megcserélésével egy hasonló módszer adható, melynek futási ideje $O(p_0 q_0 N_R + q_0 N_R N_A)$.

6.1.5. Momentumszámítás gyorsítása II.

Lehetőségünk van a Chebyshev–Fourier momentumok kiszámolását FFT-vel még jobban gyorsítani. Ez hasonlóan megtehető a RadialHarmonic–Fourier momentumokkal is [9] alapján.

Rögzítsük a mintavételezési nagyságokat p_0, q_0 értékek alapján: $N_R := p_0, N_A := 2q_0 - 1$. Ekkor a (6.5) képletből adódik, hogy:

$$\begin{aligned} M_{pq}^{(C)} &\approx \frac{1}{2p_0(2q_0 - 1)} \sum_{j=0}^{2q_0-2} \left(E_q^*(\phi_j) \sum_{i=0}^{p_0-1} f(r_i^{(C)}, \phi_j) \bar{T}_p(r_i^{(C)}) \right) \\ &= \frac{1}{2p_0(2q_0 - 1)} \sum_{j=0}^{2q_0-2} \left(E_q^*(\phi_j) \sum_{i=0}^{p_0-1} f(r_i^{(C)}, \phi_j) T_p(x_i^{(C)}) \right) \end{aligned}$$

Ekkor észrevehetjük, hogy $x_i^{(C)} = \cos\left(\frac{(i+0.5)\pi}{N_R}\right)$ miatt [19] alapján a belső szumma felírható egy II-es típusú DCT-ként (Discrete Cosine Transform, FFT speciális esete). Emiatt az összes lehetséges belső szumma kiszámítása nem $O(p_0 N_R N_A) = O(p_0^2 q_0)$, hanem $O(p_0 \log(p_0) q_0)$ ideig tart.

A külső szumma pedig $\phi_j = \frac{j2\pi}{N_A}$ miatt [19] alapján egy FFT-ként írható fel. Emiatt ha a belső szummák értékét már ismerjük, az összes momentum kiszámítása $O(p_0 q_0 N_A) = O(p_0 q_0^2)$ helyett $O(p_0 q_0 \log(q_0))$ időben elvégezhető.

Tehát az összes momentum kiszámolása a belső szummák előkalkulációjával együtt $O(p_0 q_0 (\log(p_0) + \log(q_0)))$ ideig tart, ami jelentősen gyorsabb mint az eddig mutatott módszerek.

6.2. Rekonstrukció gyorsítása I.

Ebben a szekcióban bemutatunk egy új, gyorsabb rekonstrukciót a Diszkrét pontrendszer felhasználásával. Az 3.4-ban leírt rekonstrukcióval ellentétben, a 5.2-ban leírthoz hasonló módon most nem az eredeti pixelpontokban, hanem a Diszkrét pontrendszerben állítjuk elő az f színértékeket.

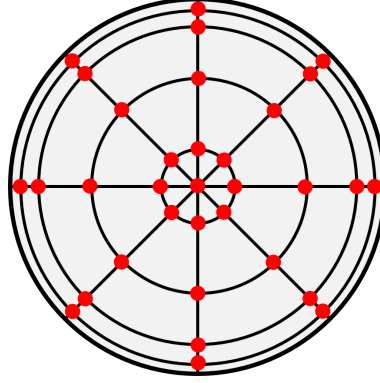
A következőkben a Chebyshev–Fourier momentum módszeren fogjuk demonstrálni az eljárást, de ez könnyedén átültethető a többi polár–Fourier momentum módszerre is. A (3.2) rekonstrukciós képletet felhasználva a Diszkrét pontrendszeren:

$$f(r_i^{(C)}, \phi_j) \approx \sum_{p=0}^{p_0-1} \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} M_{pq}^{(C)} C_{pq}(r_i^{(C)}, \phi_j) = \sum_{p=0}^{p_0-1} \left(\bar{T}_p(r_i^{(C)}) \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} M_{pq}^{(C)} E_q(\phi_j) \right) \quad (6.8)$$

Láthatjuk, hogy a belső szumma értéke nem függ i -től, az összes lehetséges értékének kiszámítása $O(p_0 q_0 N_A)$ ideig tart. Ha ezeket az értékeket már ismerjük, akkor egy

Diszkrét pontrendszerbeli színérték kiszámolása csak $O(p_0)$ ideig tart a külső szumma miatt. Tehát az összes f érték kiszámolása (a belső szummák előkalkulációjával együtt) $O(p_0 q_0 N_A + p_0 N_R N_A)$ ideig tart.

Osszuk fel a pontrendszerünket polártartományokra az alábbi ábrán látható módon.



6.4. ábra. Chebyshev–Fourier Diszkrét pontrendszer tartományokra osztása

Az eredeti pixelpontokban megkaphatjuk f egy megközelítő értékét, ha a megfelelő polártartományban bilineárisan interpolálunk [15].

A rekonstrukció futási ideje az interpolációkkal együtt $O(p_0 q_0 N_A + p_0 N_R N_A + M^2)$. Megjegyzendő, hogy a szummák sorrendjének megcserélésével egy hasonló módszer adható, melynek futási ideje $O(p_0 q_0 N_R + q_0 N_R N_A + M^2)$.

Megemlítendő továbbá, hogy Legendre–Fourier esetben annak a meghatározására, hogy egy kép pixelpontját melyik polártartományban kell interpolálni csak $O(\log(N_R))$ futásidejű algoritmust adtunk, így itt a rekonstrukció futási ideje $O(p_0 q_0 N_A + p_0 N_R N_A + M^2 \log(N_R))$, vagy $O(p_0 q_0 N_R + q_0 N_R N_A + M^2 \log(N_R))$.

6.3. Rekonstrukció gyorsítása II.

Lehetőségünk van Chebyshev–Fourier esetben a rekonstrukciót FFT-vel még jobban gyorsítani. Ez hasonlóan megtehető a RadialHarmonic–Fourier esetben is.

Rögzítsük a mintavételezési nagyságokat p_0, q_0 értékek alapján: $N_R := p_0, N_A := 2q_0 - 1$. Ekkor a (6.8) képletből adódik, hogy:

$$M_{pq}^{(C)} \approx \sum_{p=0}^{p_0-1} \left(\bar{T}_p(r_i^{(C)}) \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} M_{pq}^{(C)} E_q(\phi_j) \right) = \sum_{p=0}^{p_0-1} \left(T_p(x_i^{(C)}) \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} M_{pq}^{(C)} E_q(\phi_j) \right)$$

Ekkor észrevehetjük, hogy $\phi_j = \frac{j2\pi}{N_A}$ miatt [19] alapján a belső szumma felírható egy IFFT-ként (Inverse Fast Fourier Transform). Emiatt az összes lehetséges belső szumma kiszámítása nem $O(p_0 q_0 N_A) = O(p_0 q_0^2)$, hanem $O(p_0 q_0 \log(q_0))$ ideig tart. A külső szumma pedig $x_i^{(C)} = \cos\left(\frac{(i+0.5)\pi}{N_R}\right)$ miatt [19] alapján egy III-as típusú DCT-ként írható fel. Emiatt ha a belső szummák értékét már ismerjük, az összes f színérték kiszámítása $O(p_0 N_R N_A) = O(p_0^2 q_0)$ helyett $O(p_0 \log(p_0) q_0)$ időben elvégezhető.

Tehát az összes pixelérték kiszámolása a belső szummák előkalkulációjával és interpolációval együtt $O(p_0 q_0 (\log(p_0) + \log(q_0)) + M^2)$ ideig tart. Ez a módszer aszimptotikusan gyorsabb az eddig mutatottaknál, mely nagy felbontású képeknél, nagy momentumindexek esetén mutatkozik meg. Kisebb méretű bemenet esetén látni fogjuk, hogy hatékonyabbak az FFT-t nem használó megoldások.

7. fejezet

Momentumszámítási módszerek numerikus összehasonlítása

A tesztek elvégzéséhez négyféle képet használtunk, ezek a következők:



(a) Léna

(b) Paprika

(c) Főka

(d) Kikötő

7.1. ábra. Felhasznált képek

A képeknek használtuk a 128x128, 256x256, 512x512 és 1024x1024 pixel felbontású változatát is. Megmértük a rekonstruált kép pontosságát, valamint azt, hogy a momentumokat illetve a rekonstruált képet milyen gyorsan állítottuk elő. A tesztelés során a $p_0 = q_0$ egyenlőséggel éltünk.

A teszteket AMD Ryzen 5 5600X processzorral és 32 GB-os Kingston FURY DDR4 3600MHz CL17 Beast Black memóriával felszerelt asztali gépen végeztük, egy processzoros végrehajtással, SIMD utasítások használata nélkül.

7.1. Mérési eszközök

Rekonstruált kép

Amikor (például Chebyshev–Fourier esetben) a rekonstrukció során kiszámoljuk $\hat{f}_{p_0q_0}^{(C)}$ értékét a pixelpontokban, a pixelértékek még lebegőpontos számok. A végleges $\hat{f}_{rec}^{(C)}$ rekonstruált kép elkészítéséhez még szükséges, hogy ezeket a lebegőpontosakat kvantáljuk a $\{0, 1, 2, \dots, 255\}$ halmazra, hiszen a pixel egy színtonponense ilyen értékeket vehet fel egy kimentett képnél.

Hibakép

Hogy vizuálisan is megjeleníthessük a rekonstrukció pontatlanságait, hibaképeket készítünk. Például Chebyshev–Fourier esetben ennek az $\hat{f}_{diff}^{(C)}$ képnek az előállítását úgy zajlik, hogy pixelenként kivonjuk az eredeti f és a rekonstruált $\hat{f}_{p_0q_0}^{(C)}$ képet (majd abszolút értéket veszünk, hogy a kapott pixelértékek ne legyenek negatívak). A hibaképet tetszőleges konstanssal felszorozhatjuk, hogy a hiba láthatóbb legyen. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a hibaképeken főleg a képen található élek rajzolódnak ki, hisz ott a szomszédos pixelek közti gyors színintenzitás reprezentálása csak magas rendű momentumokkal lehetséges.

Rekonstrukciós hiba

MSE, avagy átlagos négyzetes hiba megmutatja, hogy milyen mértékű az eltérés az eredeti és a rekonstruált kép közt. Értéke minél kisebb, annál pontosabb a rekonstrukció. Kiszámolása a következő képlet alapján történik:

$$MSE = \sum_{p \text{ kép pixel}} \left| \hat{f}(p) - \hat{f}_{p_0q_0}(p) \right|^2$$

ahol $|\cdot|$ a kvaterniós abszolútértéket jelöli.

Részleges 3.1.1 rekonstrukciókor csak a kép egységkörbe eső pixeleit vesszük figyelembe, hiszen csak ott történik rekonstrukció.

Egy hasonló mérőszám az NIRE, avagy normált rekonstrukciós hiba. Értéke az MSE-ből számolható normálással:

$$NIRE = \frac{MSE}{\sum_{p \text{ kép pixel}} \left| \hat{f}(p) \right|^2}$$

Futási idők

A momentumok előállításának idejét a továbbiakban T_1 -gyel, a rekonstrukció futási idejét T_2 -vel jelöljük. Értékük másodpercben értendő.

7.2. Általános összehasonlítás

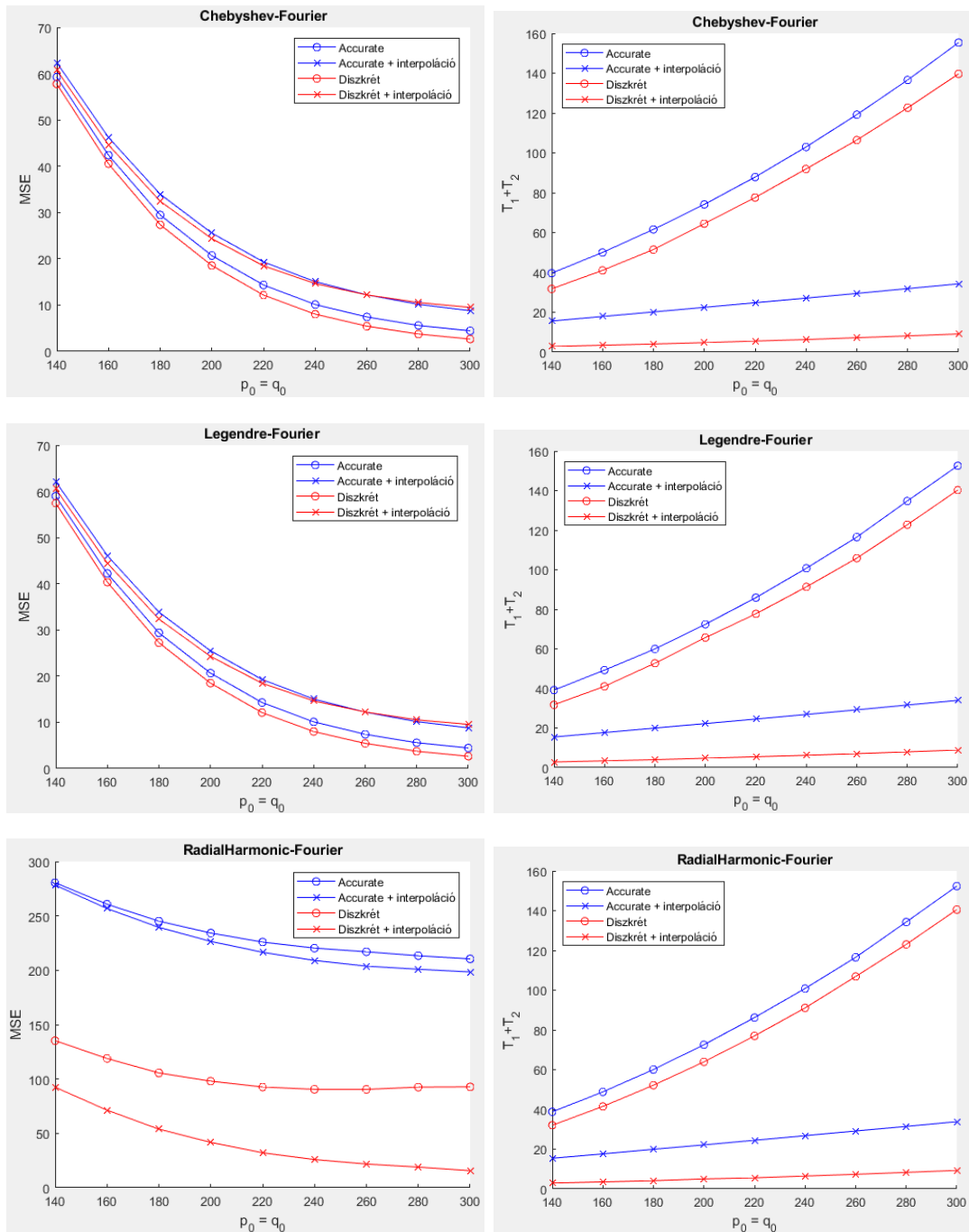
Először adunk egy átfogóbb képet a különböző módszerek, különböző polár–Fourier momentumtípusok rekonstrukciós hibájáról és futásidejéről. A Basic módszer a tapasztalat szerint pontosságban és futásidőben is jelentősen lemarad a többi módszertől, ezért azt itt nem reprezentáltuk.

A következő diagramok elkészítéséhez a 256x256 pixeles Fóka képet használtuk, részleges 3.1.1 módon, $p_0 = q_0$ azonossággal élve. Accurate módszernél $N := 256$, Diszkrét módszernél $N_R := 362, N_A := 724$ mintavételezési paramétereket használtunk, hisz ekkor a mintavételezések nagysága közel egyenlő ($4N^2 = 262144 \approx 262088 = N_R N_A$) és a tapasztalat szerint egyenlő $p_0 = q_0$ paraméterek mellett érdemes a $2N_R \approx N_A$ közelítéssel élni.

Magas rendű momentumok esete

Az alábbi diagramok megmutatják az egyes polár–Fourier momentumtípusok esetén, hogy a rájuk adott különböző módszerek milyen rekonstrukciós pontosságot érnek el nagy $p_0 = q_0$ értékek esetén, és hogy milyen a futásidejük.

Minden diagram négy különböző módszert mutat egy adott polár–Fourier momentumtípusnál: az Accurate módszert és a (Chebyshev és Legendre esetben) általunk kidolgozott Diszkrét módszert, mindkét esetben mutatjuk az eddig használt 3.4 és az általunk kidolgozott interpolációs (5.2 és 6.2) rekonstrukciót is. A bal oldali diagramok az MSE értékeket mutatják, a jobb oldaliak a teljes futási idő alakulását ($T_1 + T_2$) másodpercben.

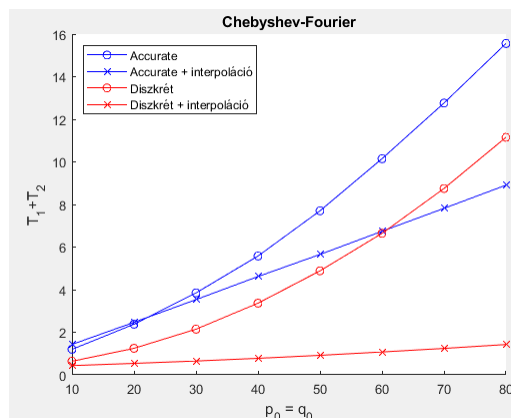


7.2. ábra. MSE és futásidő alakulása magas rendű momentumok esetén

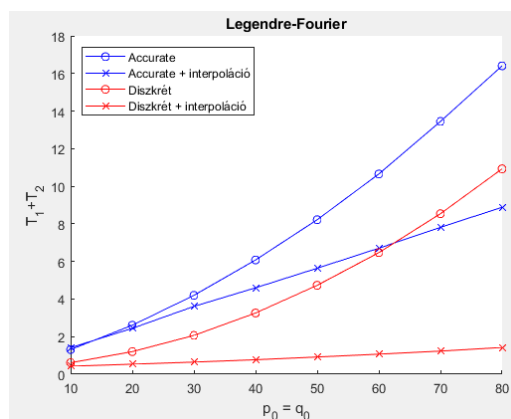
Alacsony rendű momentumok esete

Sok alkalmazásnál (invariánsok meghatározása, objektumfelismerés) csak a kis rendű momentumok kiszámolására van szükség, ezért kiemelten vizsgáljuk ezt az esetet is. Az alábbi táblázatok, diagramok elkészítéséhez az előző paramétereket használtuk. A bal oldal (ezúttal táblázat formájában) mutatja az MSE értékeket, míg a jobb oldali diagramok a teljes futásidő alakulását ($T_1 + T_2$) másodpercben.

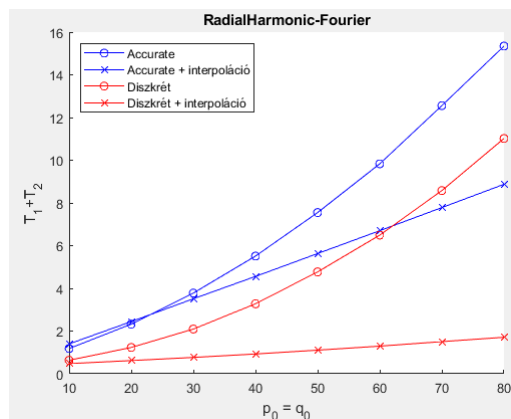
p_0	Accur.	Accur.	Diszk.	Diszk.
q_0		interp.		interp.
10	1346.3	1346.2	1346.3	1346.2
20	668.2	668.2	668.2	668.2
30	453.8	453.7	453.8	453.8
40	351.8	351.8	351.8	351.8
50	278.5	278.7	278.4	278.4
60	231.2	231.5	231.1	231.2
70	192.4	192.9	192.2	192.4
80	161.7	162.5	161.4	161.9



p_0	Accur.	Accur.	Diszk.	Diszk.
q_0		interp.		interp.
10	1301	1300.8	1301	1301
20	654.3	653.8	654.3	654.3
30	447.2	447.1	447.1	447.2
40	349.4	349.4	349.4	349.4
50	276.5	276.7	276.4	276.5
60	229.6	229.8	229.4	229.6
70	190.9	191.4	190.6	190.9
80	160.7	161.4	160.3	160.8



p_0	Accur.	Accur.	Diszk.	Diszk.
q_0		interp.		interp.
10	2169.1	2170	1880	1876
20	1131.8	1133.2	921.2	914.2
30	832.6	833.5	641.6	631.1
40	678.3	679	495	481
50	576	577.1	401.9	384.5
60	504.6	507.1	337.7	317.3
70	445.4	447.6	282.3	258.8
80	402	403.3	243	216.7



7.3. ábra. MSE és futásidő alakulása alacsony rendű momentumok esetén

7.2.1. FFT használata

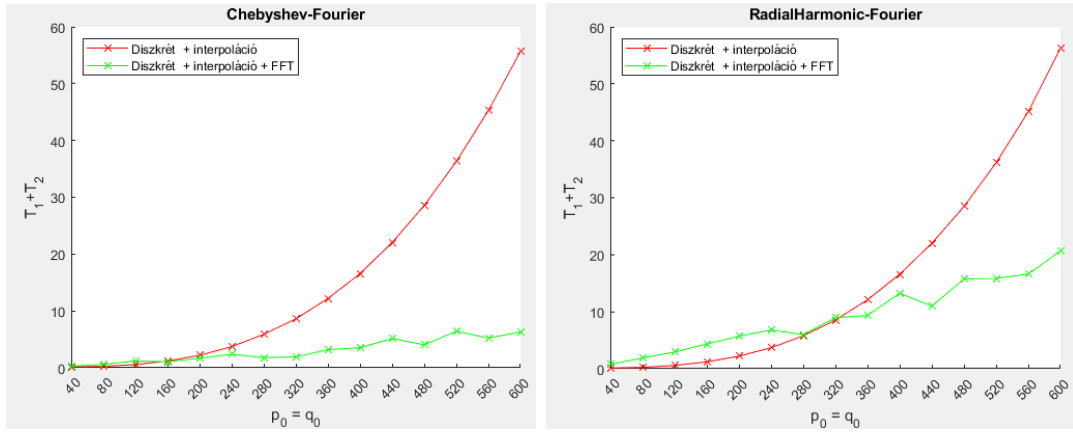
Érdemes megvizsgálni, hogy Chebyshev–Fourier és RadialHarmonic–Fourier esetben milyen hatással bír a Diszkrét módszerre az FFT használata. Azt találtuk, hogy a rekonstrukciós pontosságra nincs (jelentős) hatással az FFT használata, ezért az alábbiakban csak a futási időket hasonlítjuk össze.

A következő diagramok elkészítéséhez a Fóka képet használtuk, részleges 3.1.1 módon, $p_0 = q_0$ azonossággal élve. És a mintavételezési paramétereket az FFT használata miatt $N_R = p_0, N_A = 2q_0 - 1$ módon állítjuk be.

A diagramok két különböző módszert mutatnak egy adott polár–Fourier momentumtípusnál: a Diszkrét módszert interpolációs rekonstrukcióval, de FFT nélkül, illetve FFT-vel. A diagramok a teljes futási idő alakulását ($T_1 + T_2$) mutatják másodpercben.

Magas rendű momentumok esete

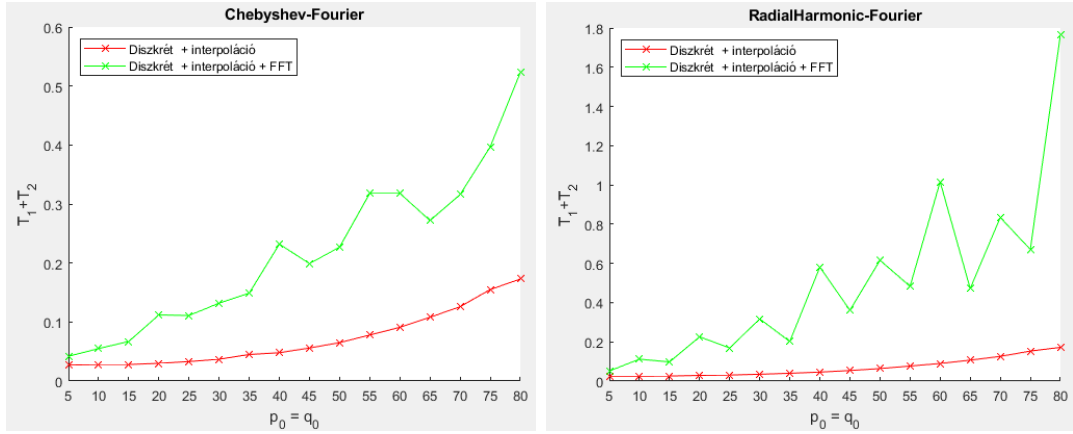
Az 512x512 pixeles Fóka kép esetén:



7.4. ábra. FFT hatása $T_1 + T_2$ -re magas rendű momentumok esetén

Alacsony rendű momentumok esete

A 256x256 pixeles Fóka kép esetén:



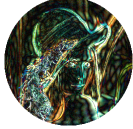
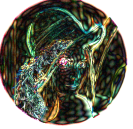
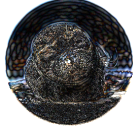
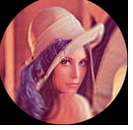
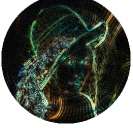
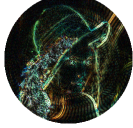
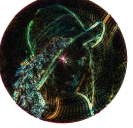
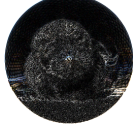
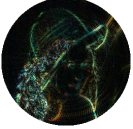
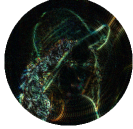
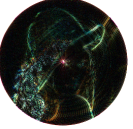
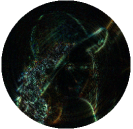
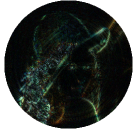
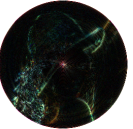
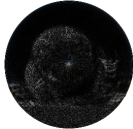
7.5. ábra. FFT hatása $T_1 + T_2$ -re alacsony rendű momentumok esetén

7.3. Rekonstrukciós hiba vizsgálata

7.3.1. Polár–Fourier momentumtípusok összehasonlítása

Ahogy azt a 7.2 diagramokról és 7.3 táblázatokról kiolvashatjuk, adott módszer esetén nem találunk jelentős különbséget Chebyshev–Fourier és Legendre–Fourier típusok között, de a RadialHarmonic–Fourier típus jelentősen lemarad tőlük. Ennek fő oka a RadialHarmonic–Fourier függvényrendszer origóbeli szingularitása, melynek következtében numerikus pontatlanságot tapasztalunk az origó környezetében.

Az alábbi táblázatban megmutatunk pár rekonstruált $\hat{f}_{rec}$ képet és $\hat{f}_{diff}$ hibaképet (ötszörös színintenzitással), csatolva a NIRE rekonstrukciós hibákat. A táblázat elkészítéséhez a 256x256 pixeles Léna és Fóka képeket használtuk részleges 3.1.1 módon, Diszkrét kiszámítási móddal $N_R := 362$, $N_A := 724$ mintavételezési paraméterek mellett, eredeti pixelpontokban történő rekonstrukcióval. Észrevehetjük, hogy a hibaképeken az élek rajzolódnak ki, hiszen a magas rendű momentumok (amiket már nem használtunk a rekonstrukcióra) tudják kezelni a hirtelen színintenzitás ugrásokat, amik az éleket jellemzik.

p_0	Chebyshev	Legendre	R.Harm.	Chebyshev	Legendre	R.Harm.
q_0						
20						
						
	0.01971	0.01949	0.02416	0.01577	0.01544	0.02175
50						
						
	0.00797	0.00793	0.01013	0.00657	0.00652	0.00949
80						
						
	0.00405	0.004036	0.00558	0.00381	0.00379	0.00574
110						
						
	0.00218	0.00217	0.0036	0.00232	0.00231	0.00407

7.6. ábra. NIRE értékei különböző polár–Fourier momentumtípusok esetén

7.3.2. Accurate és Diszkrét módszer összehasonlítása

Ahogy azt a 7.2 diagramokról és 7.3 táblázatokról kiolvashatjuk, mindegyik polár–Fourier momentumtípus esetén pontosabb rekonstruált képet kapunk a Diszkrét módszer használatával. Az eltérés főleg nagy rendű momentumok esetén figyelhető meg.

Interpolációs rekonstrukció használata

A 7.2 diagramok és 7.3 táblázatok szerint megfigyelhetjük azt is, hogy az általunk készített interpolációs rekonstrukciós eljárások valamivel pontatlanabbak Accurate és Diszkrét esetben is, de ezt a hátrányt ellensúlyozni tudja a módszerek gyorsasága. A rekonstrukció enyhe romlása főleg nagy rendű momentumok esetén figyelhető meg.

FFT használata

Tapasztalataink szerint FFT használata nem ront, vagy javít a rekonstrukció pontosságán (amire lehetett számítani, mivel ugyanazt a mátrixszorzást számolja ki, csak más algoritmussal), a futási időben fog csak jelentős javulást okozni nagy méretű bemenet esetén.

7.4. Futási idő vizsgálata

7.4.1. Teoretikus futási idő

Momentumszámítási idő

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk a momentumszámítás elméleti futási idejét különböző módszerek esetén.

Basic	$O(p_0 q_0 M^2)$
Accurate	$O(p_0 q_0 N + q_0 N^2 + M^2)$
Diszkrét	$O(p_0 q_0 N_A + p_0 N_R N_A + M^2)$ vagy $O(p_0 q_0 N_R + q_0 N_R N_A + M^2)$
Discrete + FFT	$O(p_0 q_0 (\log(p_0) + \log(q_0) + M^2))$ ahol $N_R = p_0, N_A = 2q_0 - 1$

7.7. ábra. Teoretikus T_1 idők

Természetesen 6.1.5 alapján a Discrete + FFT eset csak Chebyshev–Fourier és RadialHarmonic–Fourier momentumtípusokra vonatkozik, Legendre–Fourierre nem.

Rekonstrukciós idő

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk a rekonstrukció elméleti futási idejét különböző módszerek esetén.

Közvetlenül eredeti pixelpontokban	$O(p_0 q_0 M^2)$
Accurate pontrendszeren + interpoláció	$O(p_0 q_0 N + q_0 N^2 + M^2)$
Diszkrét pontrendszeren + interpoláció	$O(p_0 q_0 N_A + p_0 N_R N_A + M^2)$ vagy $O(p_0 q_0 N_R + q_0 N_R N_A + M^2)$
Diszkrét pontrendszeren + interpoláció + FFT	$O(p_0 q_0 (\log(p_0) + \log(q_0) + M^2))$ ahol $N_R = p_0, N_A = 2q_0 - 1$

7.8. ábra. Teoretikus T_2 idők

Természetesen 6.3 alapján az FFT-t használó rekonstrukció csak Chebyshev–Fourier és RadialHarmonic–Fourier momentumtípusokra vonatkozik, Legendre–Fourierre nem. Továbbá 6.2 alapján Legendre–Fourier esetben esetben a Diszkrét pontrendszert használó rekonstrukció futásideje valamivel nagyobb (a tapasztalat szerint elhanyagolható mértékkel) $O(p_0 q_0 N_A + p_0 N_R N_A + M^2 \log(N_R))$, vagy $O(p_0 q_0 N_R + q_0 N_R N_A + M^2 \log(N_R))$

7.4.2. Accurate és Diszkrét módszer összehasonlítása

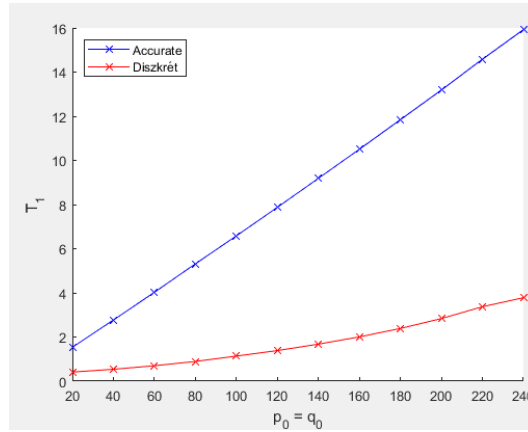
Az alábbiakban megmutatjuk milyen hatása van T_1 -re és T_2 -re a p_0, q_0 értékek megválasztása különböző módszerek esetén. A tapasztalat alapján a Basic módszer jelentősen lemarad a többi módszertől, így azt itt nem preneztáljuk.

A 7.2 és 7.3 diagramok alapján általánosságban elmondható, hogy a momentumtípus nincs jelentős kihatással a futásidőre (ha nem használunk FFT-t). Továbbá az is leolvasható, hogy az általunk bemutatott interpolációs rekonstrukciót használó algoritmusok jelentősen gyorsabbak az eddig használt rekonstrukciókhoz képest. Azt is láthatjuk, hogy a (Chebyshev és Legendre esetben) általunk készített Diszkrét módszer gyorsabb az Accurate módszernél.

Vizsgáljuk meg részletesebben külön a momentumszámítási (T_1) és rekonstrukciós (T_2) időket.

Momentumszámítási idő

Az alábbi diagram elkészítéséhez a 256x256 pixeles Peppers képet használtuk, rögzített $N := 256, N_R := 362, N_A := 724$ paraméterekkel, részleges 3.1.1 esetben, Chebyshev–Fourier momentumokkal. A diagram T_1 -et másodpercben mutatja.

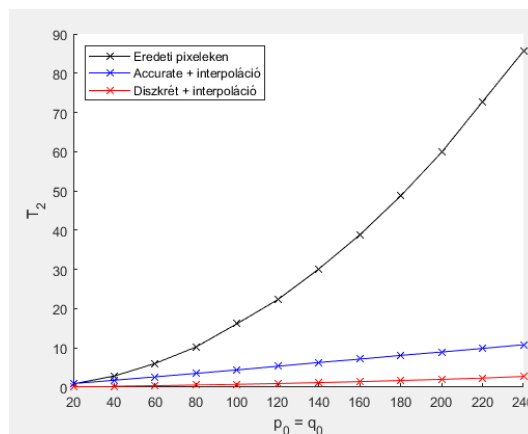


7.9. ábra. Kiválasztott módszer hatása T_1 -re

Láthatjuk, hogy a (Chebyshev és Legendre esetben) általunk készített Diszkrét módszer jóval gyorsabban számolja ki a momentumokat.

Rekonstrukciós idő

Ugyanezen paraméterek mellett a T_2 futásidők a következőképpen alakulnak:



7.10. ábra. Kiválasztott módszer hatása T_2 -re

Láthatjuk, hogy az általunk alkotott interpolációs rekonstrukciós eljárások jóval gyorsabbak, mint az eddig használt, eredeti pixelpontokban rekonstruáló módszer.

Leggyorsabb pedig a Diszkrét, interpolációt használó rekonstrukciós módszerünk.

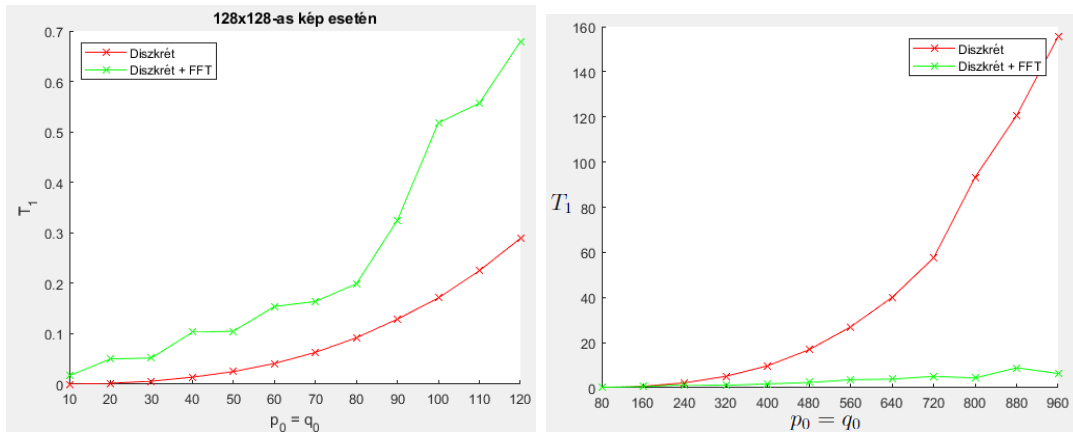
7.4.3. FFT használata

A 7.2.1. szekcióban már láthattuk, hogy a Diszkrét módszer teljes futási időben jelentős javulást ér el (nagy paraméterek esetén), ha FFT-t használunk.

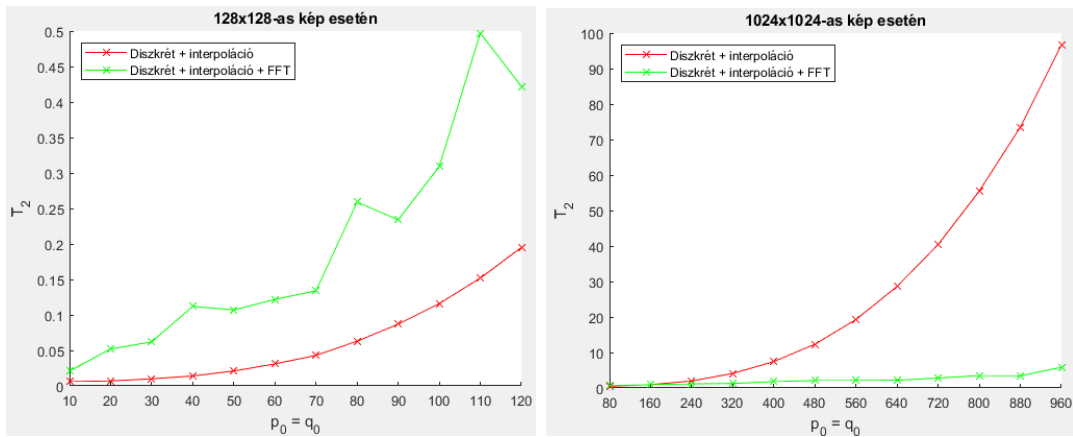
Vizsgáljuk meg részletesebben külön a momentumszámítási (T_1) és rekonstrukciós (T_2) időket.

Momentumszámítási és rekonstrukciós idő

Az alábbi diagramok elkészítéséhez a 128x128 illetve 1024x1024 Kikötő képeket használtuk, $N_R := p_0$, $N_A := 2q_0 - 1$ paraméterekkel, részleges 3.1.1 esetben, Chebyshev–Fourier momentumokat számolva. A diagramok T_1 -et és T_2 -őt másodpercben mutatják.



7.11. ábra. FFT hatása T_1 -re



7.12. ábra. FFT hatása T_2 -re

Láthatjuk, hogy kis kép esetén az FFT használata valamivel lassabbá teszi a momentumszámítást és rekonstrukciót, nagy felbontású kép esetén azonban jelentős gyorsulást ér el.

8. fejezet

Transzformáció-invariáns mennyiségek

Az eltolás, forgatás és skálázás invariánsok rendkívül fontosak például objektumfelismerési feladatok megoldásában. Pontos invariáns értékek kiszámolása tehát nélkülözhetetlen. További elvárás az invariánsokkal szemben, hogy legyenek minél robusztusabbak a zajjal, képminőség romlásával szemben.

Ebben a fejezetben megadunk az általunk definiált Chebyshev–Fourier momentum-módszerhez eltolás, forgatás és skálázás invarianciákat, majd összehasonlítjuk ezeket a Legendre–Fourier, valamint a RadialHarmonic–Fourier momentummódszerek invariánsaival.

Láthatjuk majd, hogy az általunk definiált Chebyshev–Fourier invariánsok is hasonlóan megbízhatóak a többi polár–Fourier invariánshoz.

8.1. Eltolás invariancia

Más momentummódszerekhez ([8], [9]) hasonlóan a Chebyshev–Fourier momentum-módszernél is skálázás invariánsokat kapunk, hogyha a képet eltoljuk úgy, hogy a súlypontja az origóba kerüljön.

Suk és Flusser [20] az alábbiak szerint definiálja egy kép (x_c, y_c) súlypontját:

$$x_c = (m_{10}(f_R) + m_{10}(f_G) + m_{10}(f_B))/m_{00}$$

$$y_c = (m_{01}(f_R) + m_{01}(f_G) + m_{01}(f_B))/m_{00}$$

ahol

$$m_{00} = m_{00}(f_R) + m_{00}(f_G) + m_{00}(f_B).$$

Az $m_{00}(f_A)$, $m_{01}(f_A)$, $m_{10}(f_A)$ értékek az adott $A \in \{R, G, B\}$ színcsatornához tartozó elsőrendű geometriai momentumok, vagyis (az argumentumok ezúttal Descartes-féle koordináta-rendszerben értendők):

$$m_{jk}(f_A) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k f_A(x, y) dx dy$$

A súlypont a választott momentummódszertől függetlenül a fenti képlet alapján könnyen meghatározható.

Jelöljük $\vec{f}$ -fel $\hat{f}$ -nek azon eltolóját, amelyre teljesül, hogy a súlypontja az origóba esik. Az előbbieket alapján tehát (az argumentumok ezúttal Descartes-féle koordináta-rendszerben értendők):

$$\vec{f}(x, y) = \hat{f}(x - x_c, y - y_c)$$

Az (x_c, y_c) súlypont meghatározása után, a fenti képlet alapján $\vec{f}$ már meghatározható, aminek a Chebyshev–Fourier momentumai eltolás invariánsok:

$$\hat{M}_{pq}^{(C)}(\vec{f}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2} \langle \vec{f}, \hat{C}_{0q} \rangle = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \vec{f}(r, \phi) \hat{C}_{0q}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi, & \text{ha } p = 0 \\ \frac{2}{\pi^2} \langle \vec{f}, \hat{C}_{pq} \rangle = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \vec{f}(r, \phi) \hat{C}_{pq}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi, & \text{ha } p \neq 0 \end{cases}$$

8.2. Forgatás invariancia

Más polár–Fourier momentummódszerekhez hasonlóan ([8], [9]), a forgatás invariancia a Chebyshev–Fourier momentummódszernél is természetesen adódik.

Egy $\hat{f}(r, \phi)$ színeskép α szöggel való elforgatottját jelölje $\hat{f}^{rot}(r, \phi) = \hat{f}(r, \phi - \alpha)$.

Ekkor az elforgatott kép Chebyshev–Fourier momentumaira ($p \neq 0$ esetet tekintve, a $p = 0$ eset hasonlóan adódik):

$$\begin{aligned} \hat{M}_{pq}^{(C)}(\hat{f}^{rot}) &= \frac{2}{\pi^2} \langle \hat{f}^{rot}, \hat{C}_{pq} \rangle = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{f}^{rot}(r, \phi) \hat{C}_{pq}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{f}(r, \phi - \alpha) \hat{C}_{pq}^*(r, \phi) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\phi \end{aligned}$$

ahonnan $\omega = \phi - \alpha$, $\phi = \omega + \alpha$ integráltranszformációval:

$$\begin{aligned}\hat{M}_{pq}^{(C)}(\hat{f}^{rot}) &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{f}(r, \omega) \hat{C}_{pq}^*(r, \omega + \alpha) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\omega \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{f}(r, \omega) \bar{T}_p(r) E_q^*(\omega + \alpha) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\omega \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{f}(r, \omega) \bar{T}_p(r) E_q^*(\omega) E_q^*(\alpha) \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} d\omega \\ &= \hat{M}_{pq}^{(C)}(\hat{f}) E_q^*(\alpha)\end{aligned}$$

Valós értékű invariánsok

Ekkor $\left| \hat{M}_{pq}^{(C)}(\hat{f}^{rot}) \right| = \left| \hat{M}_{pq}^{(C)}(\hat{f}) E_q^*(\alpha) \right| = \left| \hat{M}_{pq}^{(C)}(\hat{f}) \right|$, tehát a Chebyshev–Fourier momentumok abszolút értéke forgatás invariáns (hasonlóan a többi polár–Fourier momentuméhoz).

Kvaternió értékű invariánsok

Adhatóak kvaternió értékű invariánsok is, hiszen az előzőek alapján tetszőleges p, p' indexekre:

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{pp'}^q(\hat{f}^{rot}) &= \hat{M}_{pq}^{(C)}(\hat{f}^{rot}) \left(\hat{M}_{p'q}^{(C)}(\hat{f}^{rot}) \right)^* = \hat{M}_{pq}^{(C)}(\hat{f}) E_q^*(\alpha) \left(\hat{M}_{p'q}^{(C)}(\hat{f}) E_q^*(\alpha) \right)^* \\ &= \hat{M}_{pq}^{(C)}(\hat{f}) E_q^*(\alpha) E_q(\alpha) \left(\hat{M}_{p'q}^{(C)}(\hat{f}) \right)^* = \hat{M}_{pq}^{(C)}(\hat{f}) \left(\hat{M}_{p'q}^{(C)}(\hat{f}) \right)^* = \hat{\Gamma}_{pp'}^q(\hat{f})\end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy ezzel egy általánosabb definíciót adtunk a forgatás invariánsokra, hiszen a $p = p'$ azonossággal élve visszakapjuk a valós értékű forgatás invariánsok négyzetét:

$$\hat{\Gamma}_{pp}^q(\hat{f}^{rot}) = \left| \hat{M}_{pq}^{(C)}(\hat{f}^{rot}) \right|^2$$

A továbbiakban ezeket a kvaternió értékű $\hat{\Gamma}_{pp'}^q(\hat{f})$ forgatás invariánsokat fogjuk használni. A többi polár–Fourier forgatás invariáns is hasonlóan számolható, csak a megfelelő típusú momentumot kell a képletekbe helyettesíteni.

8.3. Skálázás invariancia

Skálázás invariancia számításához feltételezzük, hogy az objektum a kép egészéhez viszonyított aránya állandó, csak a kép felbontása skálázódik. Mivel a momentumszámítás során a képteret áttranszformáljuk az egységkörlemezre a 3.1. szekcióban leírt módok valamelyikén, ezért a $\hat{M}_{pq}^{(C)}$ momentumok invariánsak a skálázásra. Hasonlóan, a $\hat{M}_{pq}^{(L)}$, $\hat{M}_{pq}^{(H)}$ momentumok is skálázás invariánsok.

8.4. RST invariancia

A gyakorlati alkalmazások során szükség van RST invariánsokra, vagyis olyan értékekre, amik egyszerre invariánsak az eltolásra, forgatásra és skálázásra is. A 8.1. szekcióban láthattuk, hogy ha az eredeti $\hat{f}$ képet eltoljuk úgy, hogy a súlypontja egybeessen az origóval, akkor az eltolt $\vec{f}$ képből számolt momentumok invariánsak az eltolásra. 8.3. szekció alapján ezek a momentumok invariánsak a skálázásra is. Ekkor 8.2. szekció alapján megkaphatjuk a $\hat{\Psi}_{pp'}^q$ RST invariánsokat:

$$\hat{\Psi}_{pp'}^q = \hat{\Psi}_{pp'}^q(\hat{f}) = \hat{\Gamma}_{pp'}^q(\vec{f})$$

Hasonlóan kapható meg a többi polár–Fourier RST invariáns is.

8.5. Mérési eredmények

Tesztelésre használt képek

A Columbia Object Image Library (COIL-100) [21] adatbázisából választottuk ki az alábbi 10 képet a teszteléshez:

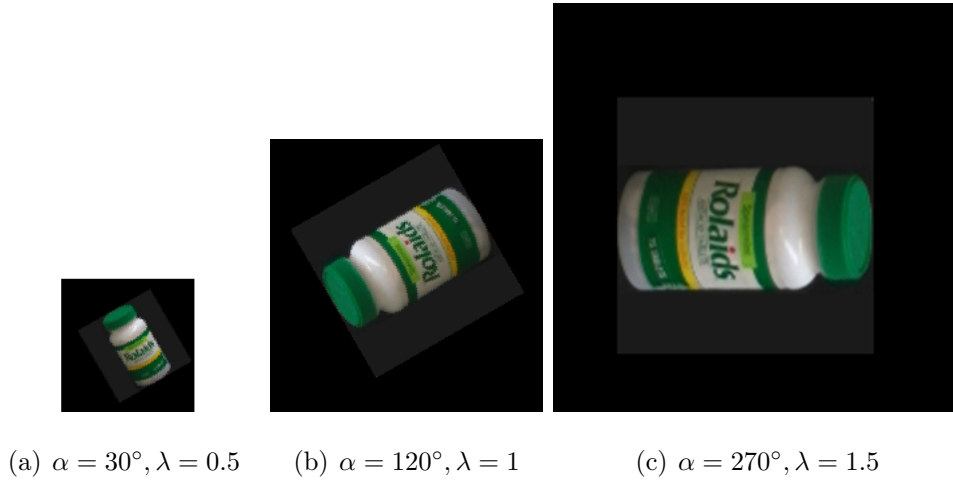


8.1. ábra. Felhasznált képek a COIL-100 könyvtárból

Ezek a képek mind 128x128 pixel felbontásúak. A teszteléshez a képeket egy 204x204 pixeles fekete háttérre helyeztük, hogy az elforgatottjuk, eltoltjuk is teljes mértékben a fekete háttéren belül maradjon. Ezt követően az objektumokat eltoltuk Δx pixellel

az x , Δy pixellel az y tengely mentén, majd elforgattuk a képeket különböző α szögekkel. Végül skáláztuk a képeket λ -szorosukra. Ezeket a kép transzformációkat a matlab *imtranslate*, *imrotate*, *imresize* függvényeivel végeztük (ahol a forgatás nearest, a skálázás bicubic interpolációt használó újramintavételezésen alapul).

Az alábbiakban az így készült képekből láthatunk pár példát:



8.2. ábra. Transzformált képek, mindegyik el van tolva $\Delta x = 9, \Delta y = -6$ pixellel.

Relatív szórás

Azt, hogy az invariánsok milyen mértékben változnak egy kép különböző transzformált változatai esetében, a relatív szórással tudjuk mérni. Értéke minél kisebb, annál kevésbé változnak a momentumok abszolút értékei, vagyis annál robusztusabbak a transzformációkra.

Feltéve tehát, hogy a méréseket az $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_K$ képeken végeztük (ahol ezek a képek egy adott objektum transzformált változatai), a relatív szórás kiszámítása adott rendű (például RST) invariánsra a következő képlet alapján történik:

$$v = \frac{\sigma}{\mu}$$

ahol σ az $\left| \hat{\Psi}_{pp'}^q(\vec{f}_k) \right|$ invariánsok szórása, μ pedig az átlaga.

Tesztelési paraméterek

Az invariánsoknak a kisebb rendű momentumok jobban megfelelnek (mert kevésbé érzékenyek a képen végbemenő változásokra), ezért a tesztelés során $p_0 := q_0 := 4$ paraméterekkel éltünk.

A momentumszámítási algoritmusnak minden esetben az általunk kidolgozott Diszkrét módszert választottuk $N_R := \lfloor \sqrt{2}M \rfloor$, $N_A := 2N_R$ mintavételezési paraméterekkel. Azért, hogy az objektum egésze az egységkörlemezre essen, a 3.1.2. szekcióban leírt, teljes módon reprezentáltuk a képeket.

8.5.1. Eltolás invariancia eredmények

Mivel $\vec{f}$ pontosan meghatározható $\hat{f}$ tetszőleges eltolása esetén, ezért az $\hat{M}_{pq}(\vec{f})$ eltolás invariánsok relatív szórása 0 (vagyis az invariánsok értéke nem változik, ha tetszőleges eltolt képet tekintünk), amit a méréseink is igazolnak.

8.5.2. Forgatás invariancia eredmények

A teszteléshez a képeket $\alpha \in \{0, 15, \dots, 330, 345\}$ fokkal forgattuk el, tehát a tesztelést 240 képen végeztük.

Az alábbi táblázatokon a forgatás invariánsok abszolút értékének relatív szórása látható Chebyshev-, Legendre-, illetve RadialHarmonic-Fourier momentum módszer esetében (átlagolva a 10 felhasznált COIL-100 objektumra nézve).

A táblázatokból kiolvashatjuk, hogy a relatív szórások nagyságrendileg azonosak a különböző polár-Fourier momentum módszerekre, bár a Chebyshev-Fourier forgatás invariánsok kissé lemaradnak a másik kettő félétől.

	$p = 0$	$p = 1$		$p = 2$			$p = 3$			
q	$p' = 0$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 2$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 2$	$p' = 3$
0	0.12%	0.13%	0.14%	0.18%	0.19%	0.25%	0.53%	0.54%	0.59%	0.97%
1	1.05%	1.22%	1.39%	1.23%	1.4%	1.48%	0.84%	1%	1.08%	1.04%
2	1.2%	1.36%	1.52%	1.99%	1.96%	4.29%	0.66%	0.77%	2.61%	1.85%
3	1.54%	1.59%	1.66%	1.59%	1.69%	1.92%	1.9%	1.97%	2.13%	3.08%

(a) Chebyshev–Fourier

	$p = 0$	$p = 1$		$p = 2$			$p = 3$			
q	$p' = 0$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 2$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 2$	$p' = 3$
0	0.06%	0.06%	0.07%	0.07%	0.07%	0.09%	0.16%	0.17%	0.19%	0.31%
1	0.35%	0.35%	0.35%	0.40%	0.42%	0.52%	0.42%	0.44%	0.52%	0.71%
2	0.41%	0.42%	0.44%	0.47%	0.49%	0.59%	0.47%	0.48%	0.53%	0.95%
3	0.66%	0.67%	0.72%	0.62%	0.7%	0.77%	0.78%	0.83%	0.91%	1.14%

(b) Legendre–Fourier

	$p = 0$	$p = 1$		$p = 2$			$p = 3$			
q	$p' = 0$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 2$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 2$	$p' = 3$
0	0.07%	0.07%	0.08%	0.37%	0.37%	0.75%	0.4%	0.4%	0.77%	0.82%
1	0.39%	0.37%	0.38%	0.37%	0.35%	0.62%	0.36%	0.33%	0.51%	0.54%
2	0.55%	0.52%	0.51%	0.39%	0.46%	0.81%	0.33%	0.36%	0.71%	0.65%
3	0.88%	0.75%	0.69%	0.93%	0.89%	1.51%	0.78%	0.78%	1.34%	1.28%

(c) RadialHarmonic–Fourier

8.3. ábra. Polár–Fourier forgatás invariánsok relatív szórása

8.5.3. Skálázás invariancia eredmények

A teszteléshez a képeket $\lambda \in \{0.5, 0.625, \dots, 1.875, 2\}$ -szeresére skáláztuk, tehát a tesztelést 130 képen végeztük.

Az alábbi táblázatokon a skálázás invariánsok (vagyis az $\hat{M}_{pq}$ momentumok) abszolút értékének relatív szórása látható Chebyshev–, Legendre–, illetve RadialHarmonic–Fourier momentummódszer esetében (átlagolva a 10 felhasznált COIL-100 objektumra nézve):

	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$		$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$
$p = 0$	0.24%	0.95%	0.86%	1.47%	$p = 0$	0.47%	1.33%	0.59%	0.96%
$p = 1$	0.17%	1.07%	1.12%	1.43%	$p = 1$	0.35%	1.09%	0.53%	1.03%
$p = 2$	0.22%	1.39%	1.87%	2.57%	$p = 2$	0.09%	0.86%	0.76%	1.25%
$p = 3$	1.49%	1.67%	1.45%	1.79%	$p = 3$	1%	2.78%	1.87%	2.15%

(a) Chebyshev–Fourier

(b) Legendre–Fourier

	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$
$p = 0$	0.34%	0.85%	0.56%	0.79%
$p = 1$	0.17%	0.68%	0.62%	0.63%
$p = 2$	3%	2.22%	1.4%	1.04%
$p = 3$	1.39%	1.08%	1.17%	0.93%

(c) RadialHarmonic–Fourier

8.4. ábra. Polár–Fourier skálázás invariánsok relatív szórása

A táblázatokból kiolvashatjuk, hogy a relatív szórások nagyságrendileg azonosak a különböző polár–Fourier momentummódzerekre. Azt is megfigyelhetjük, hogy kisebb p rend esetén a relatív szórás is kisebb. Megfigyelhetjük továbbá, hogy a rend növelésével az invariánsok szórása is növekszik.

8.5.4. RST invariancia eredmények

A teszteléshez $\alpha \in \{0, 30, \dots, 300, 330\}$ forgatást és $\lambda \in \{0.5, 0.75, \dots, 1.75, 2\}$ skálázást használtunk, tehát a tesztelést 840 képen végeztük.

Az alábbi táblázatokon a forgatás invariánsok relatív szórása látható Chebyshev–, Legendre–, illetve RadialHarmonic–Fourier momentummódzerek esetében (átlagolva a 10 felhasznált COIL-100 objektumra nézve).

A táblázatokból kiolvashatjuk, hogy a relatív szórások nagyságrendileg azonosak a különböző polár–Fourier momentummódzerekre, bár a Chebyshev–Fourier invariánsok kissé lemaradnak a másik kettő félétől.

	$p = 0$	$p = 1$		$p = 2$			$p = 3$			
q	$p' = 0$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 2$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 2$	$p' = 3$
0	0.54%	0.46%	0.39%	0.23%	0.21%	0.37%	1.38%	1.45%	1.73%	3.1%
1	1.34%	1.57%	1.81%	1.34%	1.57%	1.37%	1.27%	1.5%	1.33%	1.39%
2	1.15%	1.3%	1.48%	1.12%	1.14%	2.14%	1.05%	1.14%	1.79%	2.18%
3	1.75%	1.9%	2.08%	2.41%	2.53%	3.86%	1.78%	1.84%	3.15%	3.04%

(a) Chebyshev–Fourier

	$p = 0$	$p = 1$		$p = 2$			$p = 3$			
q	$p' = 0$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 2$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 2$	$p' = 3$
0	0.97%	0.84%	0.71%	0.52%	0.4%	0.17%	0.45%	0.54%	0.8%	1.62%
1	1.03%	1.04%	1.06%	1.07%	1.1%	1.18%	1%	1.02%	1.06%	1.09%
2	1.04%	0.9%	0.79%	0.77%	0.77%	1.03%	1.88%	1.78%	1.64%	3.39%
3	1.19%	1.09%	1.01%	1.08%	1.06%	1.4%	1.24%	1.18%	1.32%	1.84%

(b) Legendre–Fourier

	$p = 0$	$p = 1$		$p = 2$			$p = 3$			
q	$p' = 0$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 2$	$p' = 0$	$p' = 1$	$p' = 2$	$p' = 3$
0	0.69%	0.51%	0.33%	3.41%	3.29%	6.57%	2.45%	2.34%	4.9%	4.58%
1	0.94%	0.97%	1.15%	0.87%	0.8%	1.11%	1.17%	1.09%	1.27%	1.96%
2	0.87%	0.81%	0.9%	1.19%	0.98%	2.01%	0.66%	0.65%	1.25%	0.92%
3	1.17%	0.97%	0.96%	1.35%	1.18%	1.96%	1.09%	1.06%	1.59%	1.79%

(c) RadialHarmonic–Fourier

8.5. ábra. Polár–Fourier RST invariánsok relatív szórása

9. fejezet

Objektum felismerés

Objektum felismerés során a célunk az, hogy a 8. fejezetben definiált invariánsok segítségével azonosítsuk egy objektum eredeti (nem transzformált) képét, miután az átesett eltoláson, forgatáson, skálázáson, zajosításon.

Tesztelésre használt képek

Tesztelésre a Columbia Object Image Library (COIL-100) [21] adatbázisának egészét, mind a 100 képét használtuk. A 8.5. szekcióban leírt módon ezeket a 128x128 pixel felbontású képeket ráhelyeztük 204x204 pixel felbontású fekete hátterekre.

A képeket a tesztelés során gyakran Gauss, vagy só–bors zajjal torzítottuk. Az alábbiakban ilyen képekre láthatunk pár példát.



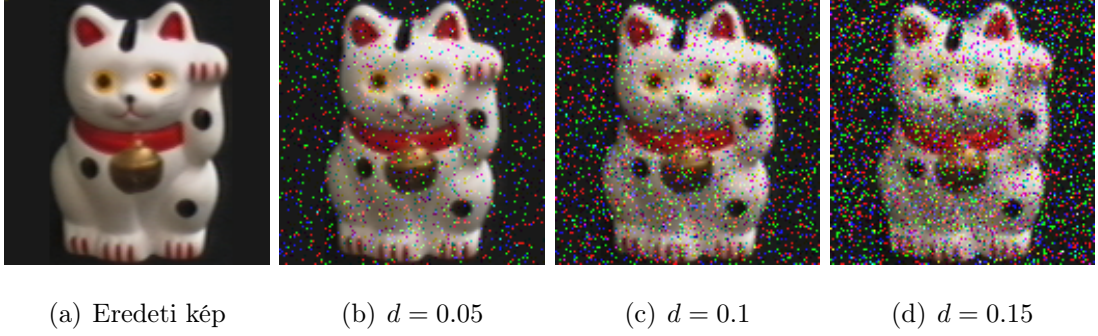
(a) Eredeti kép

(b) $\sigma^2 = 0.01$

(c) $\sigma^2 = 0.02$

(d) $\sigma^2 = 0.03$

9.1. ábra. σ^2 szórású Gauss zajjal torzított képek



9.2. ábra. d valószínűségű só-bors zajjal torzított képek

Tesztelési paraméterek

Momentumszámítási algoritmusnak minden esetben az általunk kidolgozott Diszkrét módszert választottuk $N_R := \lfloor \sqrt{2}M \rfloor$, $N_A := 2N_R$ mintavételezési paraméterekkel. Azért, hogy az objektum egésze az egységkörlemezre essen, a 3.1.2 szekcióban leírt módon reprezentáltuk a képet.

9.1. Invariáns vektor

Az objektum felismeréshez, az eredeti és a transzformált képekre is kiszámolunk egy-egy valós elemekből álló $I = [I_1, I_2, \dots, I_L]$ invariáns vektort. A vektorok I_k elemei az egyes kvaternió értékű invariánsok koordinátái (figyelve arra, hogy előfordulnak olyan invariánsok, melyeknek bizonyos koordinátái nem hordoznak információt). Ezt a vektort Suk és Flusser [20] leírása alapján a következő módon normalizáljuk:

$$J_k := \text{sign}(I_k) |I_k|^{\frac{1}{r}}$$

ahol r az egy darab invariánshoz használt momentumok száma. Az eltolás és skálázás invariánsok esetén $r = 1$, a forgatás és RST invariánsok esetén $r = 2$.

Ekkor egy transzformált objektumot akként az eredeti objektumként fogunk klasszifikálni, amelyikhez a legjobban "hasonlít" a J invariáns vektora. Erre bevett gyakorlat, hogy a J invariáns vektorok Euklideszi távolságát vesszük figyelembe.

Invariáns vektor elkészítése

Az invariáns vektorokat érdemes az alacsony rendű momentumok felhasználásával elkészíteni, hiszen azok általánosabb leíró információkat tartalmaznak a képről.

Hogy hány darab kvaternió értékű invariánst használunk az invariáns vektor elkészítéséhez, nem magától értetődő, és nagyban befolyásolja az objektum felismerés pontosságát, sebességét. Hogyha túl kevés elemű invariáns vektort használunk, akkor túl kevés információnk lesz a pontos klasszifikáláshoz. Hogyha túl sok elemű invariáns vektort használunk, akkor az objektum felismerés feleslegesen lassú lesz (és nem garantált, hogy a hosszabb invariáns vektor pontosabb felismerést eredményez).

9.2. Tesztelési eredmények**9.2.1. Objektum felismerés skálázott képek esetén**

A 8.3. szekcióban láthattuk, hogy a $\hat{M}_{pq}$ momentumok skálázás invariánsok. Az I invariáns vektor elkészítéséhez rögzítjük a p_0, q_0 paramétereket és az összes $\hat{M}_{pq}$ invariáns koordinátáját felhasználjuk, amire $p < p_0$ és $0 \leq q < q_0$. A $p = q$ esetben a $\hat{M}_{pq}$ invariáns tisztán képzetes, ezért a valós részét nem használjuk fel az invariáns vektor elkészítéséhez.

Ekkor az I invariáns vektor L hossza a következő képlet alapján adódik:

$$L = 4p_0q_0 - p_0$$

Az alábbi táblázatok és grafikonok elkészítéséhez minden képet skáláztuk $\lambda \in \{0.5, 0.75, \dots, 2\}$ szorosára, és az így készített 700 darab képet klasszifikáltuk (ezúttal a képeket nem helyeztük rá a nagyobb, fekete háttérre). A képekre különböző mértékű Gauss vagy só-bors zajt helyeztünk.

Gauss zaj hatásának vizsgálata

Az alábbi táblázatban láthatjuk a felismerés százalékos pontosságát különböző σ^2 szórású Gauss zaj esetén. Zajmentes képek esetén a felismerés minden momentum-módszernél tökéletes volt, így a táblázat csak a zajjal terhelt eseteket mutatja.

		Chebyshev			Legendre			R.Harmonic		
σ^2	$p_0 \setminus q_0$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0.02	0	80.3	99	100	65	97	100	79.1	99	100
	1	93.3	100	100	96	100	100	97.6	100	100
	2	99.9	100	100	100	100	100	100	100	100
	3	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0.04	0	33.6	79.4	97	20	66.9	90.1	30.3	80.6	97
	1	84.9	97.4	97	66.6	93.4	100	63.1	99	100
	2	89.1	99	100	83.9	99.9	100	83.1	98.6	100
	3	96.3	100	100	93.7	100	100	92.3	100	100
0.06	0	18.3	53.6	84.6	13.6	45.9	72.7	15.3	52.9	83
	1	50.4	89.4	96.7	43.1	82.7	97.4	39.4	78.4	99.1
	2	71.6	97.4	99	60.9	96.9	100	58.1	89.4	100
	3	87.6	98.4	100	78.7	97.4	100	71.3	93.9	100

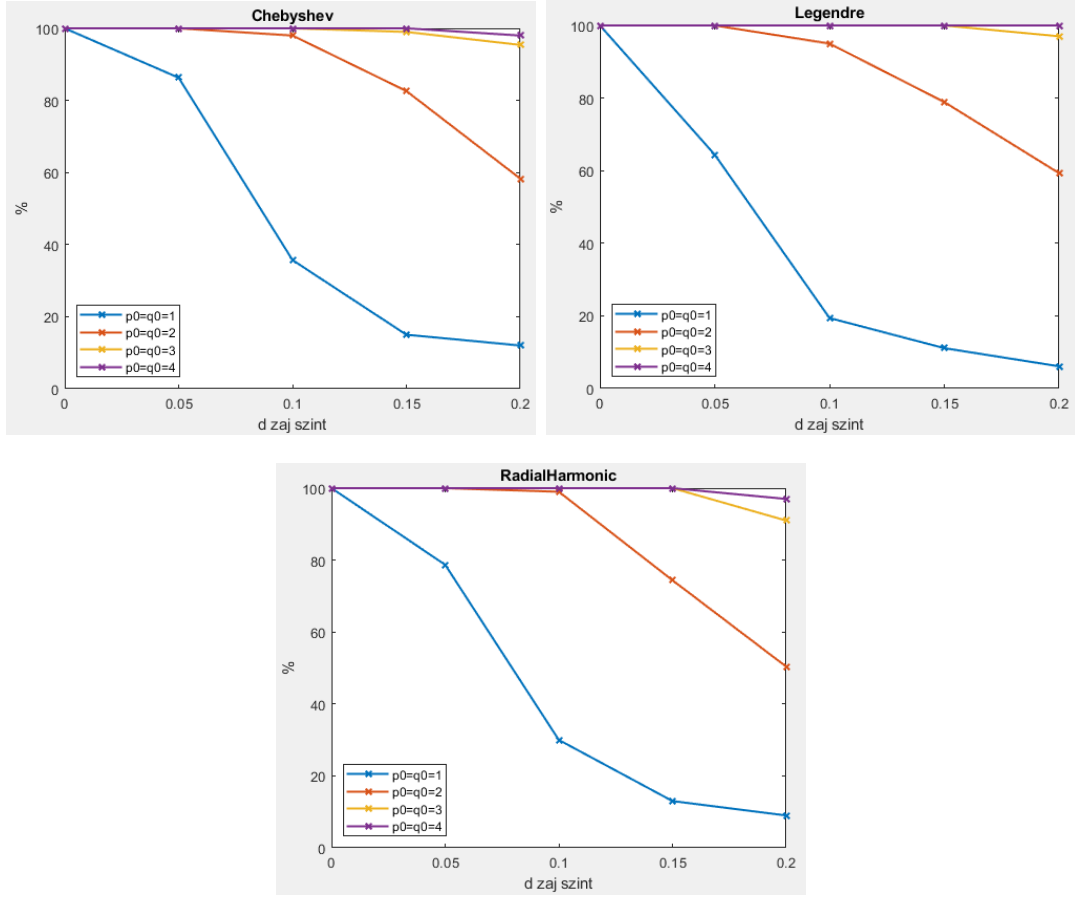
9.3. ábra. Objektum felismerés %-os pontossága Gauss zaj esetén

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy a momentummódszerek nagyságrendileg hasonló pontossággal végzik az objektumfelismerést, ugyanakkor nagyobb zaj esetén az általunk kidolgozott Chebyshev–Fourier invariánsok adják a legjobb eredményt. Megfigyelhetjük továbbá, hogy nagyobb zaj esetén a módszerek pontossága csökken, viszont a p_0, q_0 értékek növelésével javítható az eredmény.

Só–bors zaj hatásának vizsgálata

Az alábbi grafikonokon láthatjuk az objektum felismerés százalékos pontosságát különböző nagyságú só–bors zaj esetén. Minden pixelt d valószínűséggel módosít a zaj. A grafikonok elkészítéséhez csak a $p_0 = q_0$ eseteket tekintettük.

Méréseink alapján, hasonlóan a Gauss zaj esetéhez, a különböző típusú invariánsok nagyságrendileg hasonló eredményt adnak.



9.4. ábra. Objektum felismerés %-os pontossága só-bors zaj esetén

9.2.2. Objektum felismerés elforgatott képek esetén

Az I invariáns vektor elkészítéséhez rögzítjük a p_0, q_0 paramétereket és az összes $\hat{\Gamma}_{pp'}^q$ invariáns koordinátáját felhasználjuk, amire $p' \leq p < p_0$ és $0 \leq q < q_0$. A $p = p'$ esetben a $\hat{\Gamma}_{pp'}^q$ invariáns valós, ezért a képzetes részeket nem használjuk fel az invariáns vektor elkészítéséhez.

Ekkor az I invariáns vektor L hossza a következő képlet alapján adódik:

$$L = 2q_0p_0(p_0 + 1) - 3p_0q_0$$

Az alábbi táblázatok és grafikonok elkészítéséhez minden képet elforgattunk $\alpha \in \{0, 15, \dots, 90\}$ fokkal, és az így készített 700 darab képet klasszifikáltuk. A képekre különböző mértékű Gauss vagy só-bors zajt helyeztünk.

Gauss zaj hatásának vizsgálata

Az alábbi táblázatban láthatjuk a felismerés százalékos pontosságát különböző σ^2 szórású Gauss zaj esetén. Zajmentes képek esetén a felismerés minden momentum-módszernél szinte tökéletes volt, így a táblázat csak a zajjal terhelt eseteket mutatja.

		Chebyshev			Legendre			R.Harmonic		
σ^2	$p_0 \setminus q_0$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0.01	0	20	67.9	96	8.3	57.6	89.1	15.1	67.7	97
	1	95.4	100	100	88	99	99.9	96.9	100	100
	2	99.9	100	100	99.1	100	100	100	100	100
0.02	0	5	40.3	73.1	4	18.6	47.4	5.4	25.1	63.4
	1	72.3	96.4	99.6	42.6	76.9	91.7	67.4	93.7	97.7
	2	95.7	100	100	85.6	99	100	92.4	98.9	100
0.03	0	4	23	53.6	3	14.1	28.3	3	15.3	34.9
	1	45.4	78.4	94.3	24.9	52.3	72.1	46.1	77	93.3
	2	83.6	100	100	62.3	92.1	98.1	79.1	93.3	98.1
0.04	0	4	14.4	30.7	3	11	18.1	3	11.4	22.4
	1	28.3	55.7	81.6	13.1	33.1	57.7	31.4	61.6	77
	2	67	95.4	99.7	44.3	77.3	89.1	59	84	89.3

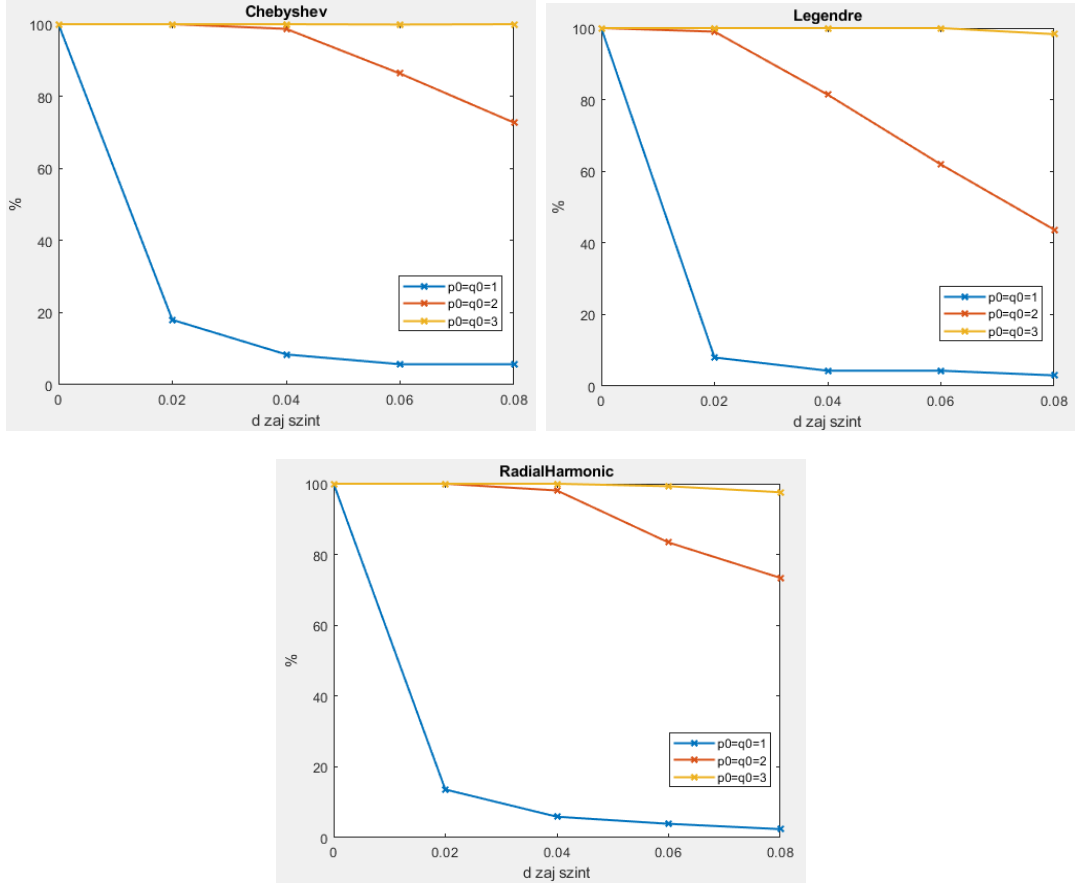
9.5. ábra. Objektum felismerés %-os pontossága Gauss zaj esetén

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy az általunk kidolgozott Chebyshev–Fourier invariánsok adják a legjobb eredményeket, de a különböző módszerek hasonlóan teljesítenek.

Só–bors zaj hatásának vizsgálata

Az alábbi grafikonokon láthatjuk az objektum felismerés százalékos pontosságát különböző nagyságú só–bors zaj esetén. Minden pixelt d valószínűséggel módosít a zaj. A grafikonok elkészítéséhez csak a $p_0 = q_0$ eseteket tekintettük.

Méréseink alapján a különböző típusú invariánsok nagyságrendileg hasonló eredményt adnak, de legjobban a Chebyshev–Fourier invariánsok teljesítenek.



9.6. ábra. Objektum felismerés %-os pontossága só-bors zaj esetén

9.2.3. Objektum felismerés RST transzformáció után

Az I invariáns vektor elkészítéséhez rögzítjük a p_0, q_0 paramétereket és az összes $\hat{\Psi}_{pp'}^q$ invariáns koordinátáját felhasználjuk, amire $p' \leq p < p_0$ és $0 \leq q < q_0$. A $p = p'$ esetben a $\hat{\Psi}_{pp'}^q$ invariáns valós, ezért a képzetes részeket nem használjuk fel az invariáns vektor elkészítéséhez.

Ekkor az I invariáns vektor L hossza a következő képlet alapján adódik (a 9.2.2. szekcióban leírtakhoz hasonlóan):

$$L = 2q_0p_0(p_0 + 1) - 3p_0q_0$$

Az alábbi táblázatok és grafikonok elkészítéséhez minden képet eltolunk $\Delta x = 9, \Delta y = -6$ pixellel, elforgattunk $\alpha \in \{0, 25, 50, 75\}$ fokkal, végül skáláztunk $\lambda \in \{0.5, 1, 1.5, 2\}$ -szorosára. Az így készített 1600 képet klasszifikáltuk. A képekre különböző mértékű Gauss vagy só-bors zajt helyeztünk.

Gauss zaj hatásának vizsgálata

Az alábbi táblázatban láthatjuk a felismerés százalékos pontosságát különböző σ^2 szórású Gauss zaj esetén.

		Chebyshev			Legendre			R.Harmonic		
σ^2	$p_0 \setminus q_0$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0.00	0	61.8	96	100	54.8	90.4	99.1	62.9	95.5	99.8
	1	100	100	100	99.8	100	100	100	100	100
	2	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0.01	0	20.4	62.9	95.5	9.4	33.5	73.8	14.1	52.3	90.6
	1	94.3	99.9	100	83.9	97.9	99	96.5	100	100
	2	98.4	100	100	98.6	100	100	99.9	100	100
0.02	0	7.8	31.6	64.8	4.5	14.7	33.1	6.3	19.3	47.3
	1	70.8	87.5	99.4	41.4	69.1	88.2	72.1	91.1	97.8
	2	90.4	97.9	100	82.8	97.6	100	88.1	96.6	99.9
0.03	0	3.6	20.6	47.1	4.1	9.1	15.7	3.9	13.3	27.8
	1	41.9	62.8	88.3	19.4	37.2	66.6	42.1	74.3	91.4
	2	78	91	98.6	56.1	82.3	96.3	73.9	86.4	95
0.04	0	3.9	13.1	31.4	3	7.1	12.3	3	8.4	18.9
	1	32.4	52.8	74.6	13.6	21.4	43.9	30	59.6	78.4
	2	61.8	86.6	98	40.9	66.9	88.3	51.9	69.1	82.8

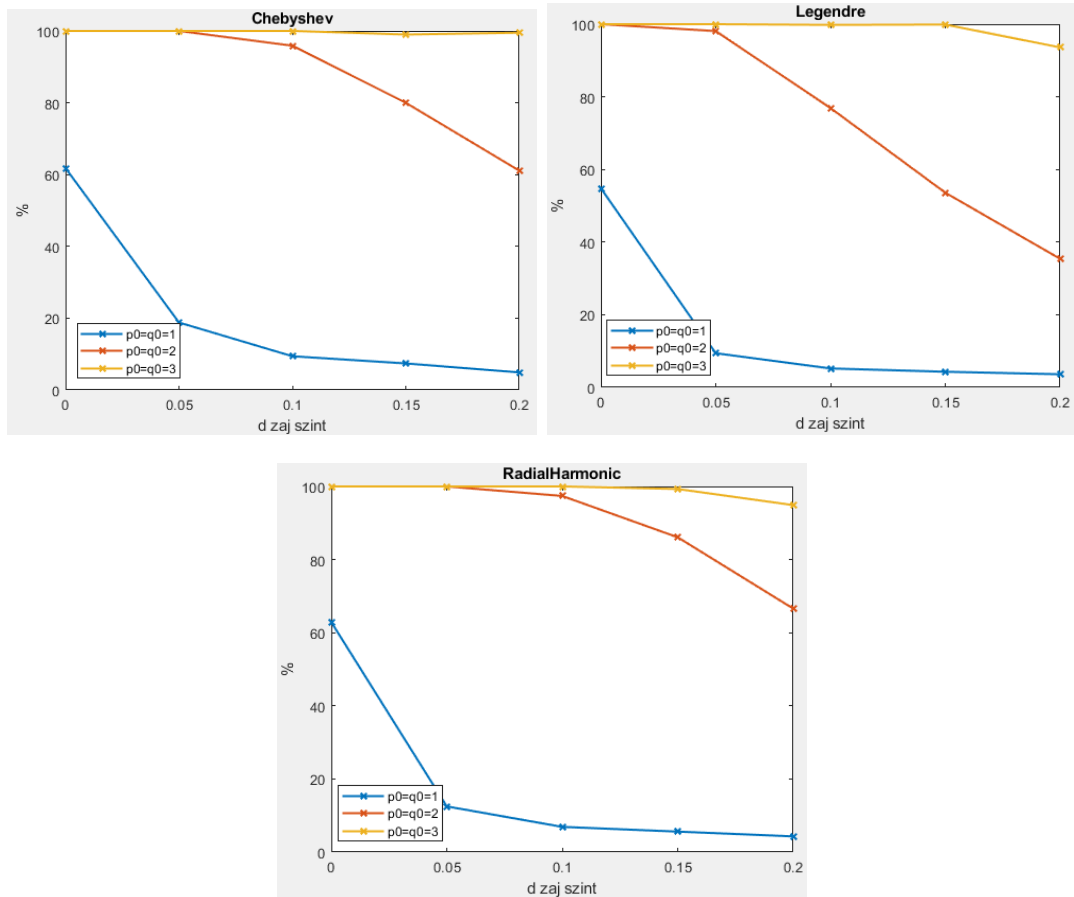
9.7. ábra. Objektum felismerés %-os pontossága Gauss zaj esetén

A táblázatból kiolvashatjuk, hogy a különböző típusú polár–Fourier invariánsok nagyságrendileg azonos eredményeket adnak, de a Chebyshev–Fourier momentum-módszer adja a legjobb eredményt.

Só–bors zaj hatásának vizsgálata

Az alábbi grafikonokon láthatjuk az objektum felismerés százalékos pontosságát különböző nagyságú só–bors zaj esetén. Minden pixelt d valószínűséggel módosít a zaj. A grafikonok elkészítéséhez csak a $p_0 = q_0$ eseteket tekintettük.

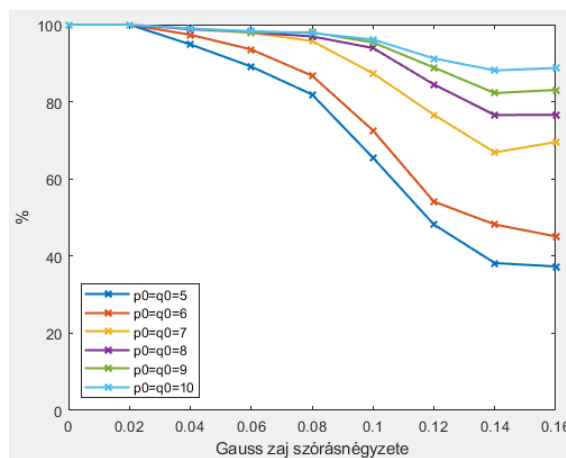
Méréseink alapján a különböző típusú invariánsok nagyságrendileg hasonló eredményt adnak.



9.8. ábra. Objektum felismerés %-os pontossága só-bors zaj esetén

Objektum felismerés magasabb rendű momentumokkal

Az alábbi grafikonon a Chebyshev–Fourier momentum módszer eredményeit láthatjuk erősen zajos képek esetén, ha magas rendű momentumokat is használunk az invariáns vektor elkészítéséhez.



9.9. ábra. Objektum felismerés pontossága extrém mértékű Gauss zaj esetén

10. fejezet

Képek vízjelezése

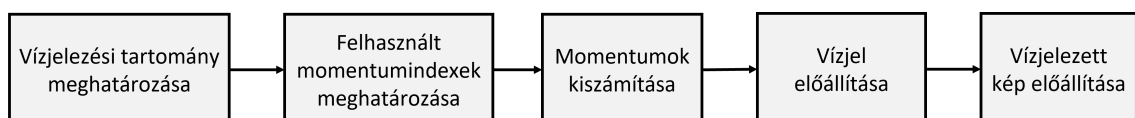
Ebben a fejezetben bemutatjuk a polár–Fourier momentumok egyik lehetséges felhasználási területét, a képek vízjelezését (lásd például [22, 23]).

Klasszikus vízjelezésnél a vízjel szabad szemmel jól látható (ezzel is akadályozva a kép illetéktelen felhasználását), azonban a vízjel gyakran eltávolítható különböző képszerkesztő programokkal. A vízjelezés egy másik típusa, amikor szabad szemmel nem látható, rejtett vízjelet helyezünk el a képen, mely ellenálló a képfeldolgozásban gyakran használt transzformációkkal valamint zajhatásokkal szemben. Így a kép tulajdoni, szerzői jogai kimutathatók, védhetőek maradnak. A dolgozatban bemutatott momentum típusok utóbbihoz adnak eszközöket.

10.1. Vízjel beágyazásának folyamata

Jelölje L a beágyazni kívánt bitsorozat hosszát, az i . bitet pedig b_i . Lehetőségünk van kis bináris (fekete-fehér) képek (például cégek logója) beágyazására is, ehhez a kép pixeleit sorfolytonosan tekintjük a beágyazni kívánt bitsorozatnak.

Az alábbi ábrán látható az általunk végzett vízjelbeágyazás főbb lépései, melyeken a következőkben részletesen beszélni fogunk.



10.1. ábra. Vízjel beágyazása

10.1.1. Vízjelezési tartomány meghatározása

Eddig kétféle módot adtunk meg egy kép egységkörben való ábrázolására a 3.1. szekcióban, ezekből azonban csak a 3.1.1 részleges eset használható vízjelezésre, hiszen szeretnénk ha az egész vízjel a képen belülre essen.

Lehetőség van azonban a vízjel lokációját is elrejtetni a képen, és ekkor a lokációt is egyféle titkos kulcsként kezelhetjük. Ehhez csak ki kell választanunk egy tetszőleges körlemez a képen ami alapján dolgozni fogunk.

Az egyszerűség kedvéért mi a 3.1.1. szekcióban leírt részleges módot használjuk.

10.1.2. Felhasznált momentumindexek meghatározása

Tehát szükségünk van $I = \{(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_L, q_L)\}$ momentumindex meghatározására, melyek által meghatározott momentumokba fogjuk beágyazni az egyes biteket.

[23] megfontolásai alapján érdemes olyan $\hat{M}_{pq}$ momentumokat használni vízjelezésre (mindhárom polár–Fourier momentumtípusnál), ahol $0 < q$. Ezek közül is elsősorban a kis p indexű momentumokat használtuk. Ekkor mindenképpen úgy kell megválasztanunk p_0, q_0 paramétereket, hogy $L \leq p_0(q_0 - 1)$ teljesüljön, hisz csak így lesz elég momentumunk a vízjelezésre.

Egy $\hat{M}_{pq}$ momentumot vízjelezésnél előnyben részesítünk egy $\hat{M}_{p'q'}$ momentummal szemben, hogyha $p < p'$, vagy $p = p'$ és $q < q'$.

Az alábbi ábrán láthatóak a vízjelezésre kiválasztott momentumok (és a sorrendjük) $p_0 = q_0 = 4$ esetén:

p \ q	-3	-2	-1	0	1	2	3
0					1.	2.	3.
1					4.	5.	6.
2					7.	8.	9.
3					10.	11.	12.

10.2. ábra. Vízjelezésre használt indexek

10.1.3. Momentumok kiszámítása

Választhatunk tetszőleges polár–Fourier momentumtípust és tetszőleges számítási módot. Ugyanakkor a kiszámolt momentumok pontossága nagyban befolyásolja a vízjelbeágyazás és kiolvasás pontosságát. Törekedjünk tehát olyan módszert alkalmazni, ami pontosan, és kis p_0, q_0 értékek mellett gyorsan számolja ki a momentumokat.

10.1.4. Vízjel előállítása

Szeretnénk a $b_1, b_2, \dots, b_L$ biteket belekódolni az $\hat{M}_{p_1q_1}, \hat{M}_{p_2q_2}, \dots, \hat{M}_{p_Lq_L}$ momentumokba.

Erre egy gyakran használt módszer a bináris kvantált dither moduláció [23]. Ehhez generáljunk (titkos kulcs alapján) egy $(d_1, d_2, \dots, d_L)$ pseudorandom egyenletes eloszlású vektort a $[0, \Delta]$ intervallumon, ahol Δ a kvantálási lépésköz.

Ekkor a következő módon határozzuk meg a régi i . vízjelezésre szánt $\hat{M}_{p_iq_i}$ momentumból az új $\hat{M}'_{p_iq_i}$ momentum abszolút értékét, majd magát a momentumot:

$$\left| \hat{M}'_{p_iq_i} \right| = \begin{cases} \left\lceil \frac{\left| \hat{M}_{p_iq_i} \right| - d_i}{\Delta} \right\rceil \Delta + d_i, & \text{ha } b_i = 0 \\ \left\lceil \frac{\left| \hat{M}_{p_iq_i} \right| - (d_i + \Delta/2)}{\Delta} \right\rceil \Delta + d_i + \Delta/2, & \text{ha } b_i = 1 \end{cases}$$

ahol $\lceil \cdot \rceil$ a kerekítő operátor. Ekkor a momentumot a következő képlet alapján számoljuk:

$$\hat{M}'_{p_iq_i} = \frac{\left| \hat{M}'_{p_iq_i} \right|}{\left| \hat{M}_{p_iq_i} \right|} \hat{M}_{p_iq_i}$$

Fontos megjegyezni, hogy egy $\hat{M}_{p_iq_i}$ momentum módosításakor szükséges a konjugált párját ($\hat{M}_{p_i, -q_i}$) is ugyanígy módosítani.

10.1.5. Vízjelezett kép előállítása

Ha $\hat{f}$ képet szeretnénk vízjelezni (például Chebyshev–Fourier esetben), ahol

$$\hat{f} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \hat{M}_{pq}^{(C)} \hat{C}_{pq}$$

akkor a vízjelezett $\hat{f}_{marked}^{(C)}$ kép a következőképpen írható fel:

$$\hat{f}_{marked}^{(C)} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \hat{M}_{pq}^{(C)''} \hat{C}_{pq}$$

ahol az előzőek (10.1.4) alapján

$$\hat{M}_{pq}^{(C)''} = \begin{cases} \hat{M}_{pq}^{(C)'}, & \text{ha } (p, q) \in I \text{ vagy } (p, -q) \in I \\ \hat{M}_{pq}^{(C)}, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor a vízjelezett képet a következő képlet alapján tudjuk előállítani a gyakorlatban:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{marked}^{(C)} &= \hat{f} + \sum_{i=1}^L \left(\left(\hat{M}_{p_i q_i}^{(C)'} - \hat{M}_{p_i q_i}^{(C)} \right) \hat{C}_{p_i q_i} + \left(\hat{M}_{p_i, -q_i}^{(C)'} - \hat{M}_{p_i, -q_i}^{(C)} \right) \hat{C}_{p_i, -q_i} \right) = \\ &=: \hat{f} + \hat{f}_{mark}^{(C)} \end{aligned}$$

ahol

$$\hat{f}_{mark}^{(C)} = \sum_{p=0}^{p_0-1} \sum_{q=-q_0+1}^{q_0-1} \hat{D}_{pq}^{(C)} \hat{C}_{pq}$$

és

$$\hat{D}_{pq}^{(C)} = \begin{cases} \hat{M}_{pq}^{(C)'} - \hat{M}_{pq}^{(C)}, & \text{ha } (p, q) \in I \text{ vagy } (p, -q) \in I \\ \hat{0}, & \text{egyébként} \end{cases}$$

A 10.1.4. rész alapján ha a szükséges $\hat{M}_{pq}^{(C)}, \hat{M}_{pq}^{(C)'}$ értékeket már ismerjük, akkor tetszőleges rekonstrukciós eljárással megkaphatjuk $\hat{f}_{mark}^{(C)}$ -t, és így $\hat{f}_{marked}^{(C)}$ -ot.

10.2. Vízjel kiolvasásának folyamata

A vízjel visszanyeréséhez először is szükségünk van a 10.1.2. szekcióban meghatározott I és a 10.1.4. szekcióban előállított $(d_1, d_2, \dots, d_L)$ értékekre (melyeket a titkos kulcs alapján megkaphatunk).

A következőkben a Chebyshev–Fourier esetet tekintjük, de a módszer könnyen átültethető más polár–Fourier momentumtípusokra.

Határozzuk meg $\hat{f}_{marked}^{(C)}$ -nek I által meghatározott $\hat{M}_{p_i q_i}^{(C)''}$ momentumait egy tetszőleges, de minél pontosabb módszerrel.

Ekkor a kiolvasandó $\tilde{B}$ bitsorozat $\tilde{b}_i$ bitjének meghatározásához számoljuk ki

$$v_i^{(0)} = \left\lfloor \frac{|\hat{M}_{p_i q_i}^{(C)''}| - d_i}{\Delta} \right\rfloor \Delta + d_i$$

$$v_i^{(1)} = \left\lfloor \frac{|\hat{M}_{p_i q_i}^{(C)''}| - (d_i + \Delta/2)}{\Delta} \right\rfloor \Delta + d_i + \Delta/2$$

értékeket, és ekkor

$$\tilde{b}_i = \begin{cases} 0, & \text{ha } |\hat{M}_{p_i q_i}^{(C)''} - v_i^{(0)}| \leq |\hat{M}_{p_i q_i}^{(C)''} - v_i^{(1)}| \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$$

10.3. Vízjelezési eredmények

A vízjelezési algoritmusunk jellemzéséhez a következő számszerű leírókat használjuk:

Maximum jel–zaj arány

Az eredeti és vízjelzett képek közti eltérést ezúttal a PSNR-rel, avagy a maximum jel–zaj aránnyal mértük. Értéke közvetlenül számolható az eredeti és a vízjellel rekonstruált kép közti MSE értékből:

$$PSNR \approx 10 \log_{10} \left(\frac{255^2}{MSE} \right)$$

Értéke minél magasabb, annál kevésbé zajosítja a hozzáadott vízjel az eredeti képet.

Bit hiba arány

A visszanyert bitsorozat pontosságát a BER, avagy bit hiba arány méri. Az értékéből megtudhatjuk, hogy a bitsorozat L hosszához arányosan hány bitet kaptunk vissza hibásan a vízjel kiolvasásakor. Értéke könnyen számolható:

$$BER = \frac{HIBA}{L}$$

ahol HIBA azon $1 \leq i \leq L$ indexek számossága, amire $b_i \neq \tilde{b}_i$.

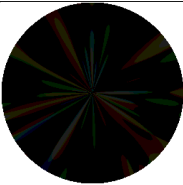
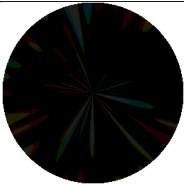
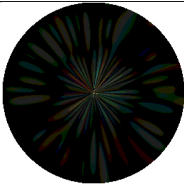
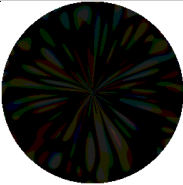
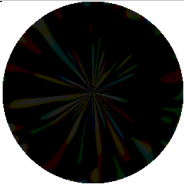
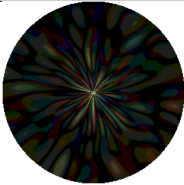
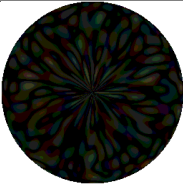
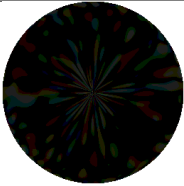
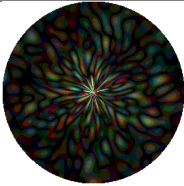
Vízjel láthatósága

Az alábbiakban a 256x256 pixeles Léna képbe beágyaztunk $L := 128$ hosszúságú véletlenszerű bitekből álló vízjelet, $N_R := 362$, $N_A := 724$, $p_0 := 9$, $q_0 := 30$, $\Delta := 0.2$ paraméterek mellett. A vízjelezéshez a Diszkrét módszert használtuk, Chebyshev–Fourier momentumokkal, interpolációs rekonstrukcióval.



10.3.1. Vízjelezett képek összehasonlítása

Az alábbi táblázat elkészítéséhez a 256x256 pixeles Léna képet használtuk, Diszkrét módszerrel, interpolációs rekonstrukcióval, $N_R := 362$, $N_A := 724$ mintavételezési paraméterekkel, $\Delta := 0.2$ esetben. Véletlenszerű bitekből álló, $L := 64, 128, 256$ hosszúságú vízjeleket helyeztünk el a képen. Ehhez a $p_0 := 9$, $q_0 := 30$ paraméterválasztással éltünk (tapasztalatunk szerint érdemes p_0 értékét q_0 -nál kisebbre venni). Az alábbi táblázat tartalmazza a vízjelezett képek PSNR értékeit, valamint magukat a vízjeleket (30-szoros pixelintenzitással).

L	Chebyshev	Legendre	R.Harmonic
64	 52.4619	 54.0259	 48.7849
128	 50.0294	 52.1797	 44.9129
256	 47.2603	 51.1501	 42.061

10.3. ábra. PSNR értékek és vízjelek

A tesztek során nem tapasztaltunk bithibát, a BER értékek nullák voltak. A táblázatból kiolvashatjuk, hogy a fent rögzített paraméterek mellett a Legendre–Fourier momentumok adják a legjobb, a RadialHarmonic–Fourier momentumok a legrosszabb eredményt. Azt is láthatjuk, hogy a Radial–Harmonic módszer az origó környezetében erősebb színtorzulást okoz, ezért ott láthatóbb a vízjel. A gyakorlatban azonos paraméterek mellett a magasabb PSNR értékeket produkáló módszereket részesítjük előnyben, mert jellemzően hosszabb bitsorozatok kódolására alkalmasak.

10.3.2. A kvantálási lépésköz nagyságának hatása

A Δ kvantálási lépésköz nagysága erősen befolyásolja a vízjel visszanyerésének robusztusságát/kiolvashatóságát (BER értéket), illetve az eredeti és vízjelezett kép eltérésének nagyságát (PSNR értéket). A kvantálási lépésköz minél nagyobb, a vízjel kiolvasása annál pontosabb (kisebb BER érték), de a vízjelezett kép is jobban eltér az eredetitől (kisebb PSNR érték).

Ezt a méréseink is igazolják, az alábbi táblázat elkészítéséhez a 512x512 pixeles Léna képet használtuk, Diszkrét módszerrel, interpolációs rekonstrukcióval, $N_R := 724$, $N_A := 1448$ mintavételezési paraméterekkel, Chebyshev–Fourier momentum-módszerrel. $L := 64$ hosszúságú vízjeleket ágyasztunk be a képekbe $p_0 := 9$, $q_0 := 15$ paraméterekkel élve.

Előre meghatároztunk 30 különböző véletlenszerű bitsorozatot (vízjelet), melyeket a teszteléshez használtunk, így a táblázat egy adott mezője 30 vízjel beágyazás–kiolvasás BER vagy PSNR átlagát mutatja. A vízjel beágyazása után, de a vízjel visszanyerése előtt $\sigma^2 = 0.005$ szórásnégyzetű Gauss zajjal terheltük a képeket.

	$\Delta = 0.1$	$\Delta = 0.3$	$\Delta = 0.5$	$\Delta = 0.7$	$\Delta = 0.9$
BER	0.4964	0.2854	0.1016	0.0286	0.0073
PSNR	74.596	49.944	45.751	43.076	40.856

(a) Chebyshev–Fourier

	$\Delta = 0.1$	$\Delta = 0.3$	$\Delta = 0.5$	$\Delta = 0.7$	$\Delta = 0.9$
BER	0.501	0.3578	0.1453	0.0573	0.0198
PSNR	80.138	51.727	46.952	44.52	42.409

(b) Legendre–Fourier

	$\Delta = 0.1$	$\Delta = 0.3$	$\Delta = 0.5$	$\Delta = 0.7$	$\Delta = 0.9$
BER	0.374	0.0057	0	0	0
PSNR	55.352	44.722	40.596	37.912	35.752

(c) RadialHarmonic–Fourier

10.4. ábra. BER és PSNR értékek különböző Δ esetén

Láthatjuk, hogy kisebb PSNR értékek esetén kisebb a BER is, hiszen ha láthatóbb a vízjel, akkor biztosabban vissza is nyerhető a képből. Mivel a RadialHarmonic–Fourier momentum módszer már kis Δ kvantálási lépésközzre is jelentősen kisebb PSNR értékeket ad, mint a másik két polár–Fourier módszer, ezért a továbbiakban kizárólag a Chebyshev–Fourier és Legendre–Fourier módszerek összehasonlítását tárgyaljuk.

10.3.3. Vízjel visszanyerése zajos kép esetén

Az alábbi táblázat elkészítéséhez a 512x512 pixeles Léna, Fóka, illetve Paprika képeket használtuk, Diszkrét módszerrel, interpolációs rekonstrukcióval, $N_R := 724$, $N_A := 1448$ mintavételezési paraméterekkel, $\Delta := 0.5$ esetben. $L := 64$ hosszúságú vízjeleket ágyaztunk be a képekbe $p_0 := 9$, $q_0 := 15$ paraméterekkel élve. Előre meghatároztunk 30 különböző véletlenszerű bitsorozatot (vízjelet), melyeket a teszteléshez használtunk, így a táblázat egy adott mezője 30 vízjel beágyazás–kiolvasás BER átlagát mutatja. A vízjel beágyazása után, de a vízjel visszanyerése előtt különböző féle zajjal terheltük a képeket.

		zajmentes	Gauss		Só-bors	
			$\sigma^2 = 0.005$	$\sigma^2 = 0.01$	$d = 0.01$	$d = 0.02$
Cheb.	Léna	0	0.0948	0.3052	0.1016	0.3479
	Fóka	0	0.1104	0.2578	0.1089	0.2531
	Paprika	0	0.35	0.4771	0.2031	0.4266
Leg.	Léna	0	0.1375	0.3568	0.2526	0.4823
	Fóka	0	0.1729	0.3313	0.1641	0.3302
	Paprika	0	0.4526	0.4875	0.3271	0.5333

10.5. ábra. BER értékek zajos képekre

Zajmentes képek esetén mindenkettő polár–Fourier momentumtípusnál hibátlan volt a vízjel visszanyerése. A táblázatból azt is kiolvashatjuk, hogy BER értékek a homogénebb színvilágú Paprika kép esetén voltak a legrosszabbak.

10.3.4. Vízjel visszanyerése képtranszformáció után

Vízjel beágyazáshoz és kiolvasáshoz 10.1.4., 10.2. szekciók alapján a momentumok abszolút értékére van szükség, ami a 8.1., 8.2. és 8.3. szekciók alapján RST invariánsak. A vízjel tehát kinyerhető a vízjelezett kép transzformálása után is.

	Chebyshev	Legendre
Léna	0.00104	0.00052
Fóka	0.00208	0.00156
Paprika	0.00417	0.01354

10.6. ábra. BER értékek transzformált képekre

A 10.6 táblázat elkészítéséhez a 512x512 pixeles Léna, Fóka, illetve Paprika képeket használtuk, Diszkrét módszerrel, interpolációs rekonstrukcióval, $N_R := \lfloor \sqrt{2}M \rfloor$, $N_A := 2N_R$ mintavételezési paraméterekkel, $\Delta := 0.5$ esetben. $L := 64$ hosszúságú vízjeleket ágyaztunk be a képekbe $p_0 := 9$, $q_0 := 15$ paraméterekkel élve. Előre meghatároztunk 30 különböző véletlenszerű bitsorozatot (vízjelet), melyeket a teszteléshez használtunk, így a táblázat egy adott mezője 30 vízjel beágyazás–kiolvasás BER átlagát mutatja. A táblázat elkészítéséhez a vízjel beágyazása után,

de a vízjel visszanyerése előtt skáláztuk a képeket $\lambda \in \{0.75, 1, 1.25\}$ -szorosára, és elforgattuk őket $\alpha \in \{0, 10, \dots, 90\}$ fokkal.

Láthatjuk, hogy a BER értékek minden esetben elenyészőek.

11. fejezet

Összegzés

A dolgozatban prezentált eredményeink többértékűek. A dolgozat egyik fő eredménye a közelmúltban bevezetett, polár–Fourier típusú Legendre–Fourier függvényrendszer momentumaival történő számítások hatékony algoritmusainak megalkotása volt: sikerült az eddig használt Basic és Accurate módszereknél pontosabb és gyorsabb eljárást kidolgoznunk, a diszkrét integráláson alapuló Diszkrét módszert.

Következő főbb eredményként definiáltunk egy új momentumtípust, a Chebyshev–Fourier momentumokat, melyekre az eddig ismert számítási módszerek mellett a saját Diszkrét módszerünk is hatékonyan alkalmazható. A kapott momentumok a Legendre–Fourier momentumokhoz geometriailag hasonlóak, azonban értékeik a Diszkrét módszerrel történő számolás esetén aszimptotikusan alacsonyabb komplexitással is megkaphatóak, gyors Fourier-transzformáció (FFT) alkalmazásával.

Harmadik fő eredményként az Accurate és a Diszkrét módszerhez is kidolgoztunk egy új, a korábban használtaknál gyorsabb rekonstrukciós eljárást, mely minimális rekonstrukciós hibanövekedés mellett jelentősen csökkenti a futásidőt. Ezt a módszert még gyorsabbá tettük a Chebyshev–Fourier típus esetében FFT használatával. A Chebyshev–Fourier momentumok megalkotásának másik motivációja egy közelmúltban publikált harmadik függvényrendszer, a RadialHarmonic–Fourier szerinti momentumok előnytelen tulajdonságainak kimutatása állt: ezek a momentumok a Diszkrét módszerünkhöz hasonlóan számolhatók FFT segítségével, viszont a függvények origóbeli szingularitásai sejtésünk szerint rosszabb eredményeket okoznak a pontosság szempontjából a gyakorlati alkalmazásokban. Ezért eredményeinket erre a momentumtípusra is levezettük, hogy összehasonlításokat végezhesünk mindhá-

rom momentumtípus között, mind az Accurate mind a Diszkrét számítási módszerek alkalmazása mellett.

Mindhárom momentumtípus számítási algoritmusait implementáltuk és gyakorlati tesztek során összehasonlítottuk őket. Tapasztalataink alapján a számítási stratégiák közül a mi Diszkrét módszerünk adja a legpontosabb eredményt, és ezt a leggyorsabban teszi. A függvényrendszerek vonatkozásában a Chebyshev–Fourier momentumainkkal kapott rekonstrukció közel megegyező eredményt ad a Legendre–Fourier momentumokat használó rekonstrukcióval, azonban nagyobb méretű bemenet esetén az FFT-n alapuló számolások jelentősen gyorsabbá teszik. Ugyanakkor a RadialHarmonic–Fourier rendszerrel összehasonlítva a Chebyshev–Fourier momentumokat a számítási időeredmények hasonlóak, viszont pontosságban (különösen a gyakorlati alkalmazásokban kritikus alacsony indexű momentumok vonatkozásában) a mi függvényrendszerünk kimutathatóan jobban teljesített.

Definiáltunk a Chebyshev–Fourier momentummódszerhez eltolás, forgatás, skálázás és RST invariánsokat. Ezen invariánsok robusztusságát vizsgáltuk különböző transzformációkon átesett, zajosított képek esetén, majd a kapott eredményeket összehasonlítottuk a többi polár–Fourier momentummódszer invariánsai által adott eredményekkel. Méréseink alapján nagyságrendileg azonos módon teljesítettek a különböző polár–Fourier momentummódszerek, ezért érdemes vizsgálni a Chebyshev–Fourier invariánsok használhatóságát különböző alkalmazások esetén is.

Az invariánsok egy lehetséges alkalmazásaként objektumfelismerési algoritmust implementáltunk. A tesztelés során a cél egy transzformáción, zajhatáson átesett objektum eredeti (nem transzformált) képének azonosítása volt. Méréseink alapján a Chebyshev–Fourier momentummódszer hasonló eredményeket ad, mint a többi polár–Fourier momentummódszer.

Egy további alkalmazásként szabad szemmel nem látható, rejtett vízjeleket helyeztünk el képeken, melyek ellenállnak a zajhatásokkal szemben, és az invarianciáknak hála a transzformációkkal szemben is. Vizsgáltuk a különböző polár–Fourier momentummódszerek által generált vízjelek láthatóságát a vízjelezett képen, valamint a robusztusságokat különböző transzformációk, zajhatás esetén. Méréseink során azt tapasztaltuk, hogy a Chebyshev–Fourier momentummódszer hasonló eredményeket produkál a Legendre–Fourier módszerhez.

11.1. Szempontok konkrét feladathoz illő módszer kiválasztásához

Ha csak alacsony rendű momentumok számolására van szükség, alacsony felbontású képeken, akkor érdemes olyan módszert választani, ami minél pontosabb eredményt ad, kevésbé foglalkozva a futásidővel. Erre a legalkalmasabb lehet az általunk kidolgozott Diszkrét módszer Legendre–Fourier vagy Chebyshev–Fourier momentumtípusokkal, eredeti pixelpontokban történő rekonstrukcióval.

Hogyha nagy felbontású képeken dolgozunk, magas rendű momentumok mellett, akkor a legjobb eredményt szintén az általunk kidolgozott Diszkrét módszer adja Legendre–Fourier vagy Chebyshev–Fourier momentumtípusokkal, az általunk kidolgozott interpolációs rekonstrukcióval. Még gyorsabb eredményt kaphatunk, hogyha Chebyshev–Fourier esetben FFT-t használunk (ez nagy felbontású képek esetén mindig megéri, hisz nem jár pontosság csökkenéssel). RadialHarmonic–Fourier momentumtípus is adhat gyors eredményt FFT-vel, de láthattuk, hogy hátrányos tulajdonságai miatt érdemesebb Chebyshev–Fourier momentumtípust használni.

Objektumfelismerés és vízjelezés céljából a módszerek nagyságrendileg hasonló eredményt adnak, de a RadialHarmonic–Fourier origóbeli szingularitása miatt inkább a másik két momentummódszer használatát javasoljuk.

11.2. További kutatási és fejlesztési lehetőségek

Más függvényrendszerek

Dolgozatunkban három különböző polár–Fourier momentumtípust vizsgáltunk, de a kódunk lehetőséget ad további módszerek könnyed implementálására.

További módszerekkel való összehasonlítás még jobban elhelyezheti módszerünket pontosság és gyorsaság terén a képfeldolgozás területén.

Éldetektálás

A hibaképeken megfigyelhetjük, hogy hiba főleg az élek mentén jelenik meg, ahol erős a színeltérés. Ezt kihasználva akár a programunk alkalmas lehet az élek detektálására.

Zernike momentummódszer gyorsítása

Érdemes lehet megvizsgálni, hogy az általunk alkotott gyors rekonstrukciós eljárások milyen módon ültethetők át (ha ez egyáltalán lehetséges) más típusú momentum-módszerekbe, például Zernike momentumokba, melyek hatékony kiszámítása alapvetően nyitott probléma.

Hosszú bitsorozat (vízjel) kódolása

Vízjelezés során érdemes lehet megvizsgálni a különböző módszerek viselkedését nagy méretű vízjel beágyazásakor. Hosszú beágyazandó bitsorozat esetén szükség van a magasabb rendű momentumokra is, melyek érzékenyebbek a vízjelezett képet érő hatásokra.

Összetettebb objektumfelismerési algoritmusok implementálása

Gyakorlati alkalmazásokban előforduló objektumfelismerési feladatok megoldásához az alábbi szempontok szerint érdemes fejleszteni a dolgozatban bemutatott módszert:

- invariáns vektorok Euklideszi távolsága helyett neuronháló vagy SVM klasszifikáció alkalmazása;
- egyetlen momentumtípus néhány együtthatója helyett változatosabb feature vektorok használata;
- nagyobb és komplexebb objektumhalmaz vizsgálata.

Köszönetnyilvánítás

A Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-2 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.



NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI
ÉS INNOVÁCIÓS HIVATAL

Irodalomjegyzék

- [1] Hamid Shojanazeri és tsai. “Authentication of Images Using Zernike Moment Watermarking”. 76.1 (2017), 577–606. ISSN: 1380-7501. DOI: 10.1007/s11042-015-3018-2. URL: <https://doi.org/10.1007/s11042-015-3018-2>.
- [2] Shabir Parah és tsai. “Information hiding in medical images: a robust medical image watermarking system for E-healthcare”. *Multimedia Tools and Applications* 76 (2017. ápr.). DOI: 10.1007/s11042-015-3127-y.
- [3] S.O. Belkasim, M. Shridhar és M. Ahmadi. “Pattern recognition with moment invariants: A comparative study and new results”. *Pattern Recognition* 24.12 (1991), 1117–1138. old. ISSN: 0031-3203. DOI: [https://doi.org/10.1016/0031-3203\(91\)90140-Z](https://doi.org/10.1016/0031-3203(91)90140-Z). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/003132039190140Z>.
- [4] William Rowan Hamilton. *Elements of Quaternions*. eng. London: Longmans, Green, 1866. URL: <http://eudml.org/doc/203504>.
- [5] Li-Qiang Guo és Ming Zhu. “Quaternion Fourier-Mellin Moments for Color Images”. *Pattern Recogn.* 44.2 (2011), 187–195. ISSN: 0031-3203. DOI: 10.1016/j.patcog.2010.08.017. URL: <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2010.08.017>.
- [6] B.J. Chen és tsai. “Quaternion Zernike moments and their invariants for color image analysis and object recognition”. *Signal Processing* 92.2 (2012), 308–318. old. ISSN: 0165-1684. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2011.07.018>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168411002520>.
- [7] Xiang yang Wang és tsai. “Quaternion polar complex exponential transform for invariant color image description”. *Applied Mathematics and Computation*

- 256 (2015), 951–967. old. ISSN: 0096-3003. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.01.075>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300315001071>.
- [8] K.M. Hosny és M.M. Darwish. “Invariant color images representation using accurate quaternion Legendre–Fourier moments”. *Pattern Anal Applic* 22 (2019), 1105–1122. old. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10044-018-0740-1>.
- [9] Yunan Liu és tsai. “Accurate quaternion radial harmonic Fourier moments for color image reconstruction and object recognition”. *Pattern Analysis and Applications* 23 (2020. nov.). DOI: [10.1007/s10044-020-00877-6](https://doi.org/10.1007/s10044-020-00877-6).
- [10] G. Szegő. *Orthogonal Polynomials*. American Math. Soc: Colloquium publ. American Mathematical Society, 1939. ISBN: 9780821810231. URL: <https://books.google.hu/books?id=Z0hmnsXlcY0C>.
- [11] M. Pawlak és S.X. Liao. “On the recovery of a function on a circular domain”. *IEEE Transactions on Information Theory* 48.10 (2002), 2736–2753. old. DOI: [10.1109/TIT.2002.802627](https://doi.org/10.1109/TIT.2002.802627).
- [12] Yongqing Xin, Mirosław Pawlak és Simon Liao. “Accurate Computation of Zernike Moments in Polar Coordinates”. *IEEE Transactions on Image Processing* 16.2 (2007), 581–587. old. DOI: [10.1109/TIP.2006.888346](https://doi.org/10.1109/TIP.2006.888346).
- [13] URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Bicubic_interpolation.
- [14] Klaus Mielenz. “Computation of Fresnel Integrals”. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology* 102 (1997. máj.). DOI: [10.6028/jres.102.025](https://doi.org/10.6028/jres.102.025).
- [15] URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Barycentric_coordinate_system.
- [16] C. Gasquet, R. Ryan és P. Witomski. *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2014. ISBN: 9781461215998. URL: <https://books.google.hu/books?id=ZZkWswEACAAJ>.
- [17] Handscomb Mason J.C. *Chebyshev Polynomials*. 2002. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781420036114>.

- [18] Ignace Bogaert. “Iteration-Free Computation of Gauss-Legendre Quadrature Nodes and Weights”. *SIAM Journal on Scientific Computing* 36 (2014. máj.). DOI: 10.1137/140954969.
- [19] URL: <https://fftw.org>.
- [20] Tomáš Suk. “Affine Moment Invariants of Color Images”. 2009. aug., 334–341. old. ISBN: 978-3-642-03766-5. DOI: 10.1007/978-3-642-03767-2_41.
- [21] Nayar és H. Murase. *Columbia Object Image Library: COIL-100*. Techn. jel. Department of Computer Science, Columbia University, 1996.
- [22] Khalid Hosny és Mohamed Darwish. “Robust color image watermarking using invariant quaternion Legendre-Fourier moments”. *Multimedia Tools and Applications* 77 (2018. okt.). DOI: 10.1007/s11042-018-5670-9.
- [23] Yongqing Xin, Simon Liao és Mirosław Pawlak. “Circularly orthogonal moments for geometrically robust image watermarking”. *Pattern Recognition* 40.12 (2007), 3740–3752. old. ISSN: 0031-3203. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2007.05.004>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320307002130>.