

A Hold gravitációs terének ellipszoidi közelítése: a legjobban illeszkedő forgási ellipszoid paramétereinek geofizikai megbecslése

Tudományos diákköri dolgozat

Cziráki Kamilla

II. évf. földtudományi alapszakos (geofizikus specializáció) hallgató

Témavezető: Dr. Timár Gábor tanszékvezető egyetemi tanár



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM



ELTE Geofizikai és Űrtudományi Tanszék

2023

A Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-6 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Tartalomjegyzék

1. Összefoglalók.....	3
1.1. Kivonat	3
1.2. Abstract	4
2. Bevezetés.....	5
3. Adatok	11
4. Módszerek	12
4.1. A szelenoid-modell mintavételezése	12
4.2. A probléma megoldása Python program segítségével	13
5. Eredmények	16
6. Diskusszió	17
6.1. A legnagyobb pontosságú eredmény összehasonlítása más referenciafelületekkel.....	17
6.2. Az eredmények változása különböző számú ponttal rendelkező Fibonacci-gömbök függvényében.....	18
6.3 A Fibonacci-gömb elforgatásának hatása az eredményekre	20
6.4. A kapott ellipszoidon vett szelenoid-undulációk hisztogramja.....	21
6.5. A szelenoid-undulációk ábrázolása térképen.....	23
6.6. A szelenoid-undulációk összevetése a földi adatokkal	24
6.7. Az ideális ellipszoid meghatározása a Földön.....	25
7. Konklúzió	27
8. Felhasznált irodalom jegyzéke	28
9. Képek és ábrák jegyzéke.....	31
10. Függelék.....	32
10.1. Az N pontos Fibonacci-gömb meghatározásának kódja Pythonban	32
10.2. A Fibonacci-gömb pontjai QGIS-ben különböző pontszámok mellett, egyenközü szélesség-hosszúsági koordináta-rendszerben	32
10.3. A félnagytekelyek és félkistengelyek kiszámításához használt legkisebb négyzetes közelítés Python-kódja, 100 méteres lépésközzel	34

1. Összefoglalók

1.1. Kivonat

A Hold gravitációs teréről már régóta rendelkezünk információval, annak anomáliáiról, jellemzőiről a '60-as évek óta zajlanak kutatások. Itt fedeztek fel először masconokat, olyan tömegtöbbleteket, melyek jelentős globális anomáliákat okoznak a gravitációs térben. A Hold elméleti alakja, a szelenoid is magas fokig ismert, és nagy felbontásban bárki számára elérhető az interneten.

Kutatásom során a holdi gravitációs tér ellipszoidi közelítését végeztem el, vagyis kerestem azt a forgási ellipszoidot, mely a legkevésbé tér el a Hold kitüntetett potenciálfelületétől, amely a szelenoidot definiálja. Ennek során a GRGM1200A szelenoidmodellt mintavételeztem egyenlő területet reprezentáló pontok segítségével, majd ez alapján becsültem meg az ellipszoid paramétereit, mely a szelenoidundulációk legkisebb négyzetes közelítésén alapult.

Az eredményül kapott ellipszoid középpontja a Hold tömegközéppontja, félnagy tengelye 1 737 576.6 méter, félkistengelye 1 737 046.8 méter, lapultsága pedig 0.000305. Az ellipszoid paramétereit 10 cm-es pontossáig határoztam meg, a 100 000 pontos minta esetén a mintavételezés felbontása nagyságrendileg megegyezett a szelenoidmodell felbontásával.

Az általam így meghatározott ellipszoid pontosságot tekintve felülmúlja az általánosan használt, 1737.4 km sugarú gömböt, hiszen a Hold lapultságát is figyelembe veszi. Érdekes azonban, hogy a szelenoidundulációk az ellipszoid felett nézve is jelentős szélsőségeket, és általánosan nézve is nagy értékeket produkálnak. Ennek oka, hogy a Holdon nincs olyan folyamat, mely a keletkezett tömegtöbbleteket homogenizálná, nincs lemeztektonika vagy izosztázia.

Kutatásom során elvégeztem a számítást a földi geoidra is, olyan céllal, hogy megmutassam, ez a módszer egy jó becslést képes adni az ideálisan illeszkedő ellipszoidra. Mivel a földön ennek a paramétere ismertek, ezzel vettem össze az eredményeimet, amik jól közelítették azt, 60 cm-es eltérést mutattak csak.

1.2. Abstract

Because the Moon is much less flattened than the Earth, most lunar GIS applications use a spherical datum. However, nowadays, with the renaissance of lunar missions approaching, it seems worthwhile to define an ellipsoid of revolution that better fits the lunar gravity potential surface. The main long-term benefit of this might be to make the lunar adaptation of methods already implemented in terrestrial GNSS, gravimetry and GPS applications easier and somewhat more accurate.

In our work, we used a 660th degree and order potential surface called GRGM 1200A Lunar Geoid, developed in the frame of the GRAIL project. Samples were taken from the potential surface along a mesh that represents equal area pieces of the surface. The method of point grid selection was provided by a relatively simple Fibonacci sphere. We tried Fibonacci spheres with 100, 1000, 3000, 5000, 10000 and 100000 points and also separately examined the effect of rotating the network by length for a given number of points on the estimated parameters, but these differences were only noticeable for the lower resolution networks.

We estimated the best-fitting rotation ellipsoid semi-major axis and flatness data for the selenoid undulation values at the network points, which were obtained for $a=1,737,576.6$ m and $f=0.000305$. This parameter pair is already obtained for a 10000 point grid, while the case of reducing the points of the equidistant grid to 3000 does not cause a deviation in the axis data of more than 10 centimetres. As expected, the absolute value of the selenoid undulations has decreased compared to the values taken with respect to the spherical basal surface, with maxima exceeding +400 m still being found for Mare Serenitatis and Mare Imbrium, and the largest negative values for South Pole Aitken and Mare Orientale.

(Published in Cziráki & Timár 2023)

2. Bevezetés

A Föld egyetlen égi kísérője a Hold, mely attól átlagosan 384 402 kilométerre kering. Keringése kötött: nagyon kis változással gyakorlatilag mindig ugyanazzal az oldalával fordul a Föld felé. A Hold az egyetlen olyan égitest, melyre ember a Földön kívül lépett, épp ezért a Naprendszer más objektumaihoz képest példátlanul sok információnk van annak összetételéről, kialakulásáról és a gravitációs teréről is.

Kialakulását tekintve a legvalószínűbb elmélet, a „Giant Impact Theory”, mely szerint a fiatal Föld ütközött a Theia nevű protobolygóval kb. 4-4,5 milliárd évvel ezelőtt (Asphaug 2014). Az ütközés során a Hold későbbi anyaga Föld körüli pályára került. A Hold ebből a keverékből: a Theia anyagából és az általa a Földből, gyakorlatilag annak köpenyéből kiszakított törmelékből állt össze. Ez a szilikátokban gazdag anyag az ütközést követően a Roche-határon túlra sodródott (Barr 2016), vagyis az árapálysúrlódás mértéke nem lehetetlenítette el, hogy összeálljon, ennek köszönhetően a törmelék égitestté, a Holddá formálódott. Ez a Hold kialakulására a legszélesebb körben elfogadott elmélet, vitatott azonban, hogy az ütközés során milyen arányban került a leendő égitest anyagába a Theia eredeti anyaga és az ütközés során a Föld köpenyéből vett „minta” (Barr 2016).

A Föld után a Hold gravitációs teréről van a legtöbb ismeretünk. Már az 1960-as évektől kezdve történtek mérések ennek megismerésére, hiszen kulcsfontosságú szerepe volt abban, hogy az ember Holdra lépése meg tudjon valósulni. Mindennek első fázisában az 1966-67-ben Hold körüli pályára állított űrszondák, a Lunar Orbiter missziók műszerei játszottak szerepet.

Az űrszondák Földről sugárzott, fix frekvenciájú hullám Doppler-torzulását használták fel, melyből a műszer, és így a szonda gyorsulását, illetve lassulását regisztrálták a követőállomáshoz képest. Ebből számították ki, hogy a szonda pályája mentén milyen a gravitációs gyorsulás eloszlása. A szondák megtett 80 köre során csak a Hold felszínének csak egy részét, a látható oldal $\pm 70^\circ$ holdi szélessége közötti részt (Muller & Sjorgen 1968) vizsgálták. Ennek a mérésnek nem a precíz, nagy felbontású analízis volt a célja, hanem az, hogy egy általános kép alakuljon ki a Hold gravitációs teréről.

A mérések alapján egészen meglepő eredményekre jutottak. Azt találták, hogy a Földhöz hasonlóan a Holdon is jelentős eltérések vannak a gravitációs gyorsulás értékében. Ennek eloszlása azonban jelentősen eltért a földi erőterétől: a legjellemzőbb változás nem az Egyenlítő

és a pólusok között a szélességhez kötötten jelenik meg, hanem korábban ismeretlen, nagy gravitációs anomáliák jelentkeznek, leginkább a holdi „tengerek”, bazaltsíkságok térségében. Ezeket az úgynevezett *mass concentration*-öket (röviden *mascon*okat) a Lunar Orbiterek egyértelműen 5 holdi bazaltsíkság alatt mutattak ki, ezek a Imbrium, Serenitatis, Crisium, Humorum és a Nectaris „tengerek”, és több további lehetséges *mascon* is találtak (Muller & Sjorgen 1968). A *mascon*okhoz kapcsolódó pozitív nehézségi anomáliáknak a teljes nehézségi erőterhez viszonyított aránya jelentősen nagyobb a földi anomáliáknál, ami az emberes holdi leszállások tervezésénél igen fontosnak bizonyult.

A Lunar Orbiter programot követően sem álltak le a Hold gravitációs terének mérései. Az Apollo-program során is folytak mérések, ezek a missziók CSM-jeihez, vagyis Command and Service Module-jaihoz kapcsolódóan történtek, melyek vagy a CSM-konfiguráció kipróbálásakor (Apollo-8 és -10), vagy a holdkompok leszállása közben (Apollo-11, -12, -14, -15, -16 és -17) Hold körüli pályára álltak. Ezenél a gravitációs tér vizsgálata a Kepler-pályaelemeknek a CSM által kibocsátott stabil frekvenciájú jel Doppler-torzulásából számított változásain alapult. A mérések során egyrészt további *mascon*okat találtak, valamint emellett arra vonatkozólag készültek kutatások, hogy ezen tömegtöbbletek mekkorák, milyen alakúak lehetnek, és hogyan keletkeztek. Például az Apollo 8 által mért adatok alapján a (10, -8) koordinátájú, Sinus Aetuum mellett lévő *mascon* mélysége nagyjából 100 km, tömege pedig $3,8 \cdot 10^{20}$ g lehet (Murphy et Siry 1970). Az Apollo-8 gravitációs méréseinek figyelembevételével az Apollo-11 leszállási zónáját is a Mare Tranquilitatis középső régiója helyett a szélére helyezték.

Az Apollo-programok másik fontos eredménye a holdi nehézségi erőter felszíni mérése. Erre egyszer, 1973-ban, az Apollo 17 felszíni mérési programjában került sor; a Taurus Littrow leszállási helyen a holdi nehézségi gyorsulás $162\,694,5 \pm 5$ mGal értékűnek adódott (Talwani 2003).

Az Apollo-program befejeztével a Hold nehézségi erőterének kutatása háttérbe szorult. Az újabb holdi expedíciók lehetőségének felmerülésével a 90-es évektől kezdődően újabb missziók eredményei alapján készültek tanulmányok. 1998-ban a Clementine űrszonda áttörést hozott a kérdéskör kutatásában. Az ebből származó adatbázis már nagyobb felbontású, és a *mascon*ok szerkezetébe is jobb bepillantást enged: a „free air” anomáliakép a *mascon* középső részének pozitív anomáliáját körülvéő negatív zónájú gyűrűt mutat, ami tömeghiányra utal (Arkani-Ahmed 1998). Ehhez kapcsolódóan új következtetések vonhatók le a *mascon*ok

kialakulásának mechanizmusáról, valamint a sötét, bazaltos réteg létrejöttéről, mely már régóta felmerülő problémakör volt. Miközben a *masconokat* a Hold kialakulásának korai szakaszában becsapódott vas-domináns anyagú aszteroidák maradványainak tartották, a Clementine adatai alapján arra lehet következtetni, hogy a bazalt a *masconokat* övező magasabb régiókból került a becsapódás hatásának következtében a *masconok* felszínének közepébe (Arkani-Ahmed 1998).

Az így elkezdődött gravitációs és topográfiai mérések sorának köszönhetően 2012-ben megszületett az eddigi legnagyobb, 1,5 kilométer vízszintes felbontású, a Hold teljes felszínét bemutató gravitációs térképe. Adatai egyrészt a japán SELENE misszió, másrészt a LOLA (Lunar Orbiting Laser Altimeter) magasságmodell eredményei. A modell alapján az átlagos gravitációs gyorsulás $1,62486 \text{ m/s}^2$, a minimum és a maximum érdekessége, hogy mindkettő a Hold Földről nem látható oldalán található (Hirt & Featherstone 2012).

A holdi nehézségi erőter alapján földi mintára meghatározhatjuk a Hold alakját. A Földön ez a geoid, a Hold potenciálméleti alakját pedig szelenoidnak nevezzük. Mindkét esetben a nehézségi erőter egy konkrét potenciálértékéhez tartozó szintfelületről beszélünk, amely Gauss (1828) javaslata alapján az égitest elméleti alakja. A Földön ez a potenciálfelület a középengerszinthez van igazítva, attól csak minimálisan tér el. A Holdon ugyanennek a kiválasztása tenger hiányában nem így történt, hanem olyan potenciálértéket választottak, melynél a Hold felszínének körülbelül a fele található magasabban, fele pedig alacsonyabban. Az így kapott $W = 2\,821\,713,3 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ (Martinec & Pěč 1988) lett a holdi szelenoidfelülethez tartozó potenciálérték. Ennek a felületnek a minél pontosabb meghatározásához szükség van a holdi gömbi harmonikus együtthatókra, melyek segítségével a tömegvonzási potenciál középponttól való távolsága kiszámítható aztán.

Érdekes, hogy a Föld és a Hold alakja merőben eltér egymástól a nehézségi erőkerek különbségéből fakadóan. A Földön a centrifugális hatás sokkal erőteljesebb (hiszen jóval gyorsabb a tengely körüli forgása), ami mind a Hold lényegesen kevésbé lapult alakjában, mind a holdi nehézségi gyorsulás eloszlásában megmutatkozik. A Holdon is jelen van ugyanez a hatás, ugyanakkor a korábban már említett *masconok* miatt sokkal változatosabb képet mutat mindez, hiszen ezek a szelenoid-felület kidudorodásait eredményezik. A Földön *masconok* az aktív lemeztectonika következményében nincsenek: a korai vasmeteoritok anyagát a köpenykonvekció már a magba juttatta, a többi anomáliát pedig az izosztázia tompítja, így a geoid sokkal „simább” a szelenoidnál. Egy másik érdekes eltérés a Hold kötött keringésének

és a Föld hatásának a következménye. A Hold felénk eső oldala a Föld vonzó hatása miatt kicsit sűrűbb, ezért a Hold túloldalán a geometriai felszínhez képest átlagosan lejjebb van a potenciálfelület (Arkani-Ahmed 1998). Ennek a hatásnak köszönhető az is, hogy a Hold tömegközéppontja a geometriai középpontjától néhány km-rel a Föld felé van eltolódva.

A szelenoid a korábban említett gömbi harmonikus együtthatók segítségével írható le (Kis, 2002), melyeknek ismerete egyrészt a '60-as és '70-es évek űrszondáihoz és Apollo CSM-jeihez kötődik, másrészt a '90-es évektől kezdődően vannak pontosabb, nagyobb felbontású adatok is, melyek lehetővé tették mindezt. A Clementine űrszonda fent említett adatai mögött 70. fokú és rendű gömbfüggvény-sor adja a szelenoid-modellt (Lemoine et al. 1997).

A Clementine missziót követően aztán nem sokkal később újabb űrszonda, a Lunar Prospector állt Hold körüli pályára, ez újabb adatokat szolgáltatott, mely alapján még nagyobb felbontású szelenoid készülhetett. Ennek nagy eredménye, hogy az egész látható oldalra vonatkozóan tudott adatot szolgáltatni, így még pontosabb az adatai alapján készült modell. Ez már közel 180. fokig és rendig képes volt modellezni a szelenoidot (Konopliv et al. 2001). Fontos megjegyezni, hogy sem a Lunar Prospector, sem a Clementine nem tudott a Földtől távolabbi oldalról direkt adatot közölni, ami mindkét modell hiányossága.

A 2000-es években már a kínaiak is beléptek a Hold kutatásába. Űrszondáik, a Chang'e missziók alapján általuk is készültek szelenoid-modellek. A Chang'e 5T1 misszió alapján 100. fokig és rendig készült el a modelljük (Yan et al. 2020).

A napjainkban elérhető legnagyobb felbontású és legpontosabb modellek a 2011-ben fellőtt GRAIL, vagyis Gravity Recovery and Interior Laboratory eredményeiből készültek. A GRAIL misszió valójában nem is egy, hanem két, azonos pályán lévő űrszondából állt, így a két eszköz egymáshoz viszonyított távolságából is keletkeztek adatok. Ráadásul mindezzel mérhetővé és megfigyelhetővé vált a Hold Földtől távolabbi oldala is, ami eddig nem volt közvetlenül elérhető. Az elsődleges cél az volt, hogy egy 180. fokú és rendű szelenoid-modell készülhessen a GRAIL adataiból, azonban napjainkra ez jelentősen túlteljesült, a GRGM1200A szelenoid-modell 1200. fokig és rendig készült el (Goossens et al. 2016, Lemoine et al. 2014).

A Hold alakjának elméleti meghatározása mellett lényeges, hogy legyen egy referenciafelület, ami aztán a helymeghatározás alapja, és a térinformatikai műveletek elengedhetetlen része. A Földön is létezik ilyen, például a WGS84 forgási ellipszoid, mely a leggyakrabban használt globális alapfelület. Ezt a geoidhoz illesztették, úgy, hogy a geoid és

az ellipszoid közötti eltérés a lehető legkisebb legyen, a függőleges eltérés a Föld felszínén mindenütt ± 120 méter alatt marad. Egy ilyen ellipszoid középpontja ideálisan az égitest tömegközéppontjában van, és két paraméterével írható le (félnagy tengely és a félkistengely, geometriai lapultság vagy az excentricitás közül bármelyik).

A Holdon is létezik ilyen referenciafelület, és a rendelkezésre álló adatok növekedésével egyre jobb és pontosabb lehet mindez. A legáltalánosabban használt ma az ESRI:104903 GCS_Moon_2000 koordináta-rendszer, egy 1737,4 km sugarú gömbfelület. Elmondható, hogy ezt könnyű leírni, viszont a pontosság szempontjában elmarad az ellipszoidi közelítésektől, bár a Hold lényegesen kisebb lapultsága miatt a pontosságkülönbség kisebb, mint például a Föld esetében.

Ezen kívül, a különböző szelenoid-modellek alapján készültek ellipszoidi közelítések is, hiszen ezekkel csökkenthető az adott felület és a szelenoid közötti (átlagos) távolság, vagyis a szelenoid-unduláció. A Chang'e 1 és a Lunar Prospector adatai alapján készült a CE-1-LAM-LEVEL, mely egy háromtengelyű ellipszoid (Wang et al. 2010). Ez, illetve az általam kiszámított paraméterű ellipszoidok összehasonlítására alább kerül sor a diszkusszióban.

A Holdon (és egyébként a Földön is) igaz az, hogy a tömegközéppont nem esik egybe az égitest geometriai középpontjával, hanem körülbelül 1,91 km-el eltér attól (Wang et al. 2010), nagyjából a Föld irányába. Mivel a holdi topográfiához közelebb áll egy olyan ellipszoid, amelynek középpontja nem a Hold tömegközéppontja, hanem a geometriai középpontja, ezért ilyen modellek is készültek, melyek ezért nem ekvivalensek a tömegközéppontú megoldásokkal, viszont jobban illeszkednek a felszínhez. Ilyen például a CE-1-LAM-GEO (Wang et al. 2010), mely szintén a Chang'e 1 és a Lunar Prospector adatai alapján készült, illetve az ULCN2005 is, mely a Clementine adataiból került megalkotásra, és tartalmaz háromtengelyű és forgási ellipszoidmodell is (Iz 2009).

Munkám során én is egy forgási ellipszoidot készítettem, a fenti elvek betartásával, vagyis a középpontja a Hold tömegközéppontja lett, illetve feltétel volt, hogy a lehető legkevésbé térjen el az általam használt szelenoid-modelltől. Ehhez kutatásom során mintavételeztem a szelenoidot, majd pedig egy általam készített program segítségével kerestem azt a félnagy tengely-félkistengely párost, amely a legjobb illeszkedést adja.

Egy ilyen, tömegközéppontú forgási ellipszoid jelentős gyakorlati haszonnal is bír. Mivel ez a gömbnél jobb illeszkedést biztosít az adott égitest elméleti alakjához, viszont csak eggyel

több paraméter szükséges leírásához, jól használható, mint geodéziai dátum. Épp ezért használatos ilyen a Föld esetében a különböző helymeghatározások alapfelületeként, így például a GNSS hálózat is a geoid forgási ellipszoidi közelítésére, a WGS 84-re épül.

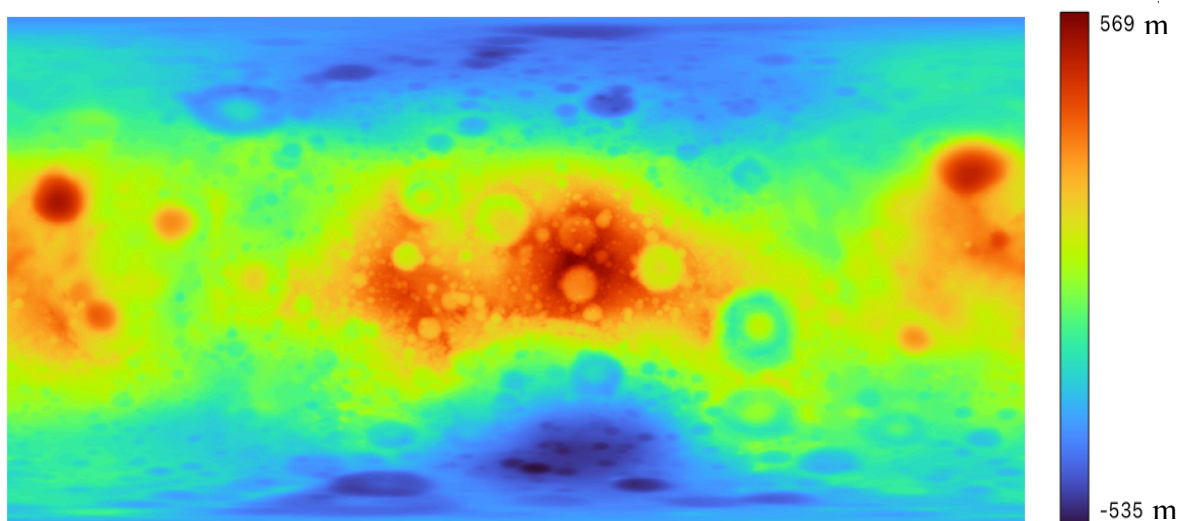
Ezért teszi aktuálissá a problémát a tény, hogy a Hold kutatása ismét reneszánszát éli, és nem csak az USA, hanem az EU (az USA-val együttműködve) és Kína is űrszondák és leszállóegységek sorát tervezi a Holdra küldeni. A NASA Artemisz programja idén kezdődött, és célja újra leszállni a Holdra, és újabb kutatásokat végezni rajta. A kínai Chang'e program már több, mint egy évtizede tart, végső célja pedig emberrel leszállni a Hold túlsó oldalára. Ezen missziók során minden eddiginél nagyobb szerep hárul az in situ kutatásokra és mérésekre, melyekhez tájékozódni és mozogni kell a felszínen, ehhez pedig a GNSS holdi megfelelője kulcsfontosságú. Kína idén áprilisban jelentette be egy navigációs és kommunikációs rendszer, a Wu Yanhua kiépítését (Jones 2022), mely 2023-24 körül lehet kész. A NASA, valamint az ESA pedig a LunaNet kiépítését tervezi (NASA 2022), mely hasonló funkciókat tölthet majd be.

A navigációhoz pedig elengedhetetlen az alapfelület, a szelenodéziai dátum. A LunaNet esetén ez a jelenlegi tervek szerint a Lunar Reference Frame Standard, vagyis az 1737,4 km sugarú gömb (NASA 2008) lesz. A jövőben azonban, elsősorban a Földön kifejlesztett gravimetriai alkalmazások holdi migrációja során, illetve a földi GNSS egyenleteinek használatához elképzelhető, hogy egy forgási ellipszoid váltja majd fel ezt.

3. Adatok

Munkámhoz szükség volt egy szelenoid-modellre, amely aztán a számítások alapját képezte. Ehhez a legújabb és legnagyobb felbontású modellt, a GRAIL alapján készült „GRGM 1200A Lunar Geoid” modellt választottam. Ez 660. fokig és rendig tartalmazza a gömbfüggvénysorok együtthatóit (Goossens et al. 2016, Lemoine et al. 2014). Az eredmények korábbi ellipszoidokkal való összevetésekor érdekes, hogy a GRGM 1200A egyrészt az összesnél pontosabb adatot tartalmaz, másrészt pedig, hogy az első, amely már a Földtől távoli oldalról is direkt mérések alapján tud információt szolgáltatni.

A modell a <https://pgda.gsfc.nasa.gov/products/50> honlapról származik. Az adat sajnos GeoTIFF formátumban nem volt elérhető, csak PDS/LBL formátumhoz tartozott működő letöltési link. Az innen letöltött adatokat a témavezetőm GlobalMapperben átalakította számomra GeoTIFF-é, ami már az általam használt nyílt forráskódú programokban is kezelhetővé vált.



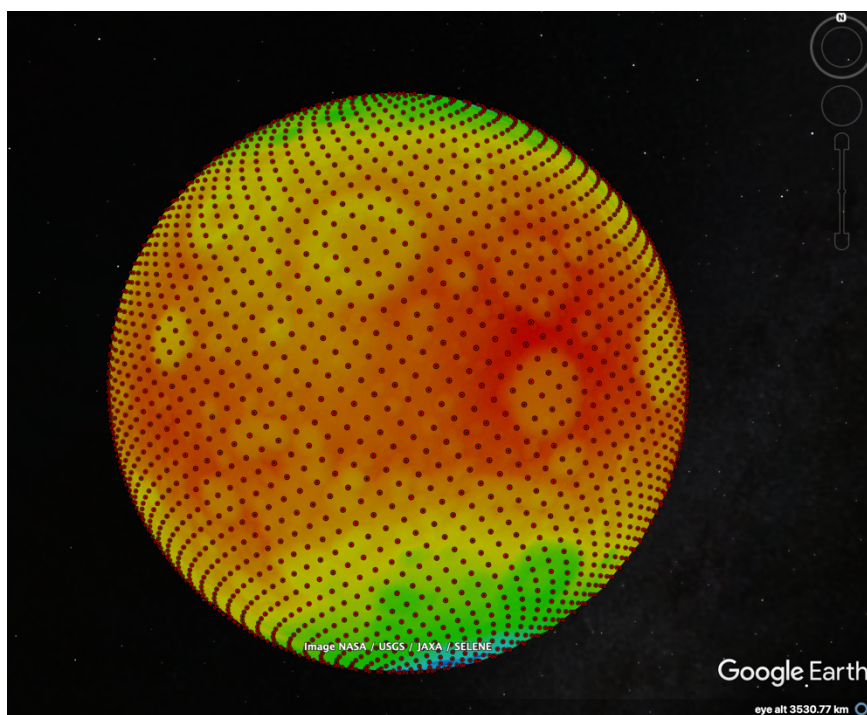
*1. kép: A GRGM 1200A QGIS-ben megjelenítve
Forrás: Goossens et al. 2016, Lemoine et al. 2014, QGIS*

4. Módszerek

4.1. A szelenoid-modell mintavételezése

A szelenoid-modellen kívül szükség van mintavételi pontokra is a becslés elvégzéséhez. A cél az, hogy olyan pontok legyenek meghatározva, melyekre igaz az, hogy egy gömbfelületen egyenlő területeket reprezentálnak. Például egy szélességi és hosszúsági körök metszéspontjaiból álló halmaz nem lett volna megfelelő erre a célra, hiszen a sarkok közelében sokkal kisebb területre jut egy pont, mint az egyenlítőnél.

A pontok meghatározása az úgynevezett Fibonacci-gömbbel történt. Ez egy olyan pontthalmaz, amely tulajdonképpen a Fibonacci-spirált helyezi egy gömbre. Ennek elkészítéséhez először a z-tengelyt annyi részre kell osztani, ahány mintavételi pontot szeretnék definiálni. Ez megadja a szélességeket, a hosszúságokat pedig a Fibonacci-számmal kiszámított fordulatokkal lehet meghatározni. Az így elkészült gömbi polárkoordinátákkal kifejezett pontokra igaz az, hogy egyenlő felületeket reprezentálnak a gömbön. Az ezt megvalósító Python kód a Függelékben (9.1.) tekinthető meg.

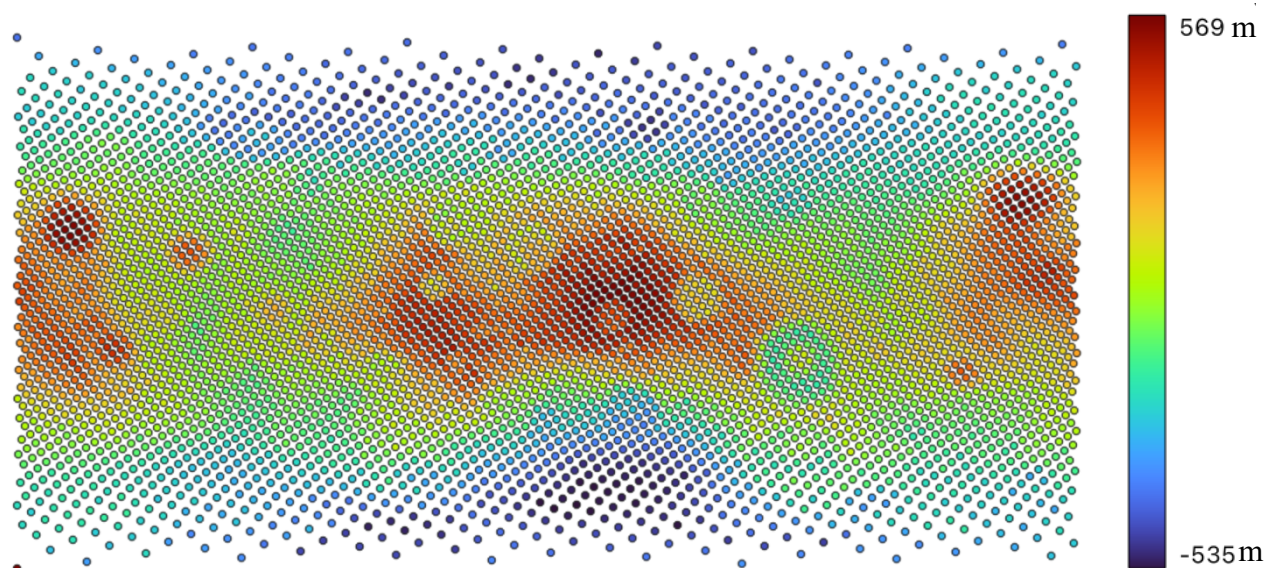


2. kép: 5000 pontból álló Fibonacci-gömb a Hold földtávolsági oldalán a szelenoid-modell felett Google Holdon

Forrás: Goossens et al. 2016, Lemoine et al. 2014, Google Earth

Mindez egy Excel-munkafüzetben készült el, olyan további változtatással, hogy a gömbi hosszúságok a holdi koordináta-rendszereknek megfelelően 0-360 fokig terjedjenek, mely eltér a földi -180-+180 fokig tartó rendszertől.

Az elkészült ponthálót aztán az Excelből .csv formátumban exportálva vektoros réteggé alakítottam a QGIS-ben. Itt is fontos volt figyelni a koordináta-rendszerek megfelelő használatára. A projekt (a szelenoid és a pontok is) az ESRI:104903 GCS_Moon_2000 koordináta-rendszerében készült el, mely egy 1737,4 km sugarú gömb, ahol a hosszúságok 0-360 fokig vannak értelmezve, ebben lehet aztán megnyitni a mintavételezendő raszteres szelenoidot és a mintavételi pontokat tartalmazó vektoros réteget is. Magát a mintavételezést a „Point Sampling Tool” plugin használatával készítettem, amellyel a pontokban egy új vektoros réteg létrehozásával kinyerhetőek az adott magasságok a szelenoid gridjéből.



3. kép: A mintavételezést követően elkészült 5000 pontos adatbázis, a pontokban vett referenciagömbtől való távolság szerinti színezéssel QGIS-ben

Forrás: Goossens et al. 2016, Lemoine et al. 2014, QGIS

4.2. A probléma megoldása Python program segítségével

Az így elkészült adatbázis tartalmazza tehát a pontok koordinátáit, valamint a szelenoid egy referenciafelület (1737,4 km sugarú gömb) feletti magasságát. Ebből pedig egy Python programban készítettem az ellipszoidi közelítést. Ennek lényege az, hogy olyan félnagy tengely-félkistengely párost találjak, mely esetén minimális a mintavételi pontokban vett szelenoid-undulációk négyzetösszege.

Ennek a megvalósításához egyrészt szükséges egy olyan függvény $(t=((a*\cos(fi))^2+(b*\sin(fi))^2)^{1/2}$, ahol „a” az ellipszoid fél nagytengelye, „b” a fél kistengelye, és „fi” az x tengellyel bezárt szög, a szélesség), amely segítségével megadható, hogy a forgási ellipszoid egy adott pontján mekkora a távolság a középponttól. Ehhez szükséges ismerni egyrészt az ellipszoid paramétereit, másrészt pedig azt, hogy mely szélességen van a pont, hiszen forgási ellipszoid esetén mindez nem függ a hosszúságtól.

Ezt követően aztán ciklusok használatával próbáltam végig a programban félnagytengely-félkistengely párokat. Ennek során a pontokban vett szelenoid-undulációk négyzetösszegének minimumát kerestem. Ez az 1. egyenlet szerint történt, melybe helyettesítettem a Fibonacci-gömb polárkoordinátákkal megadott pontjait, valamint az aktuális félnagytengely-félkistengely távolságot. Az ehhez használt Python program részlete a Függelékben (9.3.) olvasható. Ez a minimális négyzetösszeg például egy 5000 pontos minta esetén 60 722 735,71532023-nek adódott.

$$\sum_{i=1}^N (R(\phi(\text{Fibonacci}(N)), \lambda(\text{Fibonacci}(N)))_{\text{szelenoid}} - R(\phi(\text{Fibonacci}(N)), \lambda(\text{Fibonacci}(N)))_{\text{ellipszoid}(a,b)})^2 = \min$$

1. egyenlet: A legjobban illeszkedő ellipszoid kiszámításának módszere N pontos Fibonacci gömb esetén

Könnyen látható, hogy egy ilyen, három egymásba ágyazott ciklusból (egyikkel változik a félnagytengely, egy másikkal a félkistengely, a legbelső pedig a pontok listáján halad) álló program lefutása nem kevés idő, hiszen nagyon sokszor kell lefutnia a számításnak. Alapvetően a négyzetösszeg számításának, ami minden félnagytengely-félkistengely párosra megtörténik, a pontok számának megfelelően kell lefutnia, ami 1000-100 000 számítás (a pontszámtól függően), és ez szorozódik még a tengelyek hosszának változtatásaival.

Természetesen a félnagytengely-félkistengely pár nem vehet fel bármilyen értéket, mindkettő a holdi referenciagömb környezetében kell, hogy legyen, nem térhet el attól bármekkora mértékben. Ilyen megfontolásból minden számítást csak 1734-39 km között végeztem el a programban, hiszen ezeken kívül nem lehet a tengelyek hossza. Azonban még ilyen keretek mellett is rengeteg idő, hogy a program lefusson az elérni kívánt 10 cm-es pontossáig, hiszen ez például 60 000 lehetséges félnagytengely lenne. Ezért több közelítő (iteratív) lépést alkalmaztam, és először csak kisebb felbontásban határoztam meg a

minimumot, elsőként 100 m-es közökkel vizsgáltam a négyzetösszegeket, majd az így kapott minimum ± 100 m-es környezetében futtattam csak le nagyobb felbontásban, ezzel rengeteg időt megspórolva, és a végén egészen 10 cm-es felbontásig eljutva.

Ezzel megkaptam az eredményeket 10 cm-es pontossággal. Ezt a programot nem csak egyszer, egyféle ponthálóra futtattam le, hanem kipróbáltam azt is, hogy a Fibonacci-gömb pontjainak száma hogy befolyásolja az eredményeket, 100, 300, 1000, 3000, 5000, 10 000 és 100 000 pontos gömbbel is elvégezve a fent leírt számítás lépéseit. Ezeket a különböző mintavételi pontszámú gömböket a Függelékben (9.2.) lehet megtekinteni.

5. Eredmények

Az így elkészült ellipszoidoknak a félkistengelyei, és félnagy tengelyei, és lapultságai, (vagyis a két tengely különbségének aránya a félnagy tengelyhez) az alábbi táblázatban olvashatóak. A hétféle eredmény a 100, 300, 1000, 3000, 5000, 10 000 és a 100 000 pontos minták alapján, 10 cm-es pontossággal értendő.

	Félnagy tengely (m)	Félkistengely (m)	Lapultság
100 pont	1 737 576,5	1 737 047,6	0,000304
300 pont	1 737 577,3	1 737 046,4	0,000305
1000 pont	1 737 574,7	1 737 049,4	0,000302
3000 pont	1 737 576,7	1 737 047,0	0,000305
5000 pont	1 737 576,7	1 737 046,8	0,000305
10 000 pont	1 737 576,6	1 737 046,8	0,000305
100 000 pont	1 737 576,6	1 737 046,8	0,000305

1. táblázat: Az eredményül kapott félnagy tengelyek, félkistengelyek és lapultságok a mintavételezési pontok száma alapján

Mint látható, az értékek nagyon hasonlóak, nagyobb eltérések a kevesebb mintavételezett pontok esetén tapasztalhatók, ezek akár méteres nagyságrendűek is lehetnek. 1000 pontnál nagyobb minta esetén már csak maximum 20 cm-es eltérések vannak, sőt a két legtöbb ponttal rendelkező minta esetében ugyanaz az eredmény született. Mivel a tengelyek hosszánál tapasztalt eltérések mértéke nem nagy, a lapultságértékek is hasonlóak, és csak egymilliomodokkal térnek el egymástól.

Legnagyobb pontossággal az 100 000 mintavételezett pont alapján megbecsült paraméterek rendelkeznek (ez az eredmény pedig megegyezik a 10 000 pont esetén kapott paraméterekkel), így ez alapján az én modellemben a Holdhoz optimálisan illeszkedő forgási ellipszoid fél nagy tengelye 1 737 576,6 m, fél kistengelye pedig 1 737 046,8 méter, lapultsága pedig $3,05 \cdot 10^{-4}$ (Cziráki & Timár 2023).

6. Diszkusszió

6.1. A legnagyobb pontosságú eredmény összehasonlítása más referenciafelületekkel

	Gömb	CE-1-LAM-LEVEL	Általam meghatározott ellipszoid
a (m)	1 737 400	1 737 702,5	1 737 576,6
b (m)	1 737 400	1 737 563,8	1 737 576,6
c (m)	1 737 400	1 736 934	1 737 046,8

2. táblázat: Az eredményül kapott forgási ellipszoid összehasonlítása a gömbi, valamint a CE-1-LAM-LEVEL (Wang et al. 2010) referenciafelülettel

Ahogy a 2. ábrából is látható, a gömbhöz képest 176,6, illetve 353,2 m-el térnek el a forgási ellipszoid paraméterei. A lapultsága 3 tízezred, ami meglehetősen kicsi, a Földön ugyanez az érték nagyjából 33 tízezred (WGS84), ezért az jelentősen nagyobb eltérést mutat a gömbhöz képest.

Annak, hogy a Föld sokkal lapultabb, és ennél fogva kevésbé hasonlít egy gömbre, az oka, hogy a tengely körüli forgása lényegesen gyorsabb, mint a Holdnak, ami nemcsak a nehézségi erőterre hat közvetlenül, de a Föld fizikai alakját is jobban torzítja.

A Hold azonban a hosszú ideje tartó árapály-súrlódás és a kisebb tömeg miatt kötött keringéssel forog, aminek köszönhetően a tengelyforgásának ideje megegyezik (sziderikus) keringési idejével. Mindennek következményeképpen jelentősen lassabb a forgása, emiatt a lapultsága is lényegesen kisebb, alakja jobban közelít a gömbhöz.

Eredményeimet nem csak a gömbhöz, hanem a 2010-ben megalkotott háromtengelyű ellipszoidhoz is lehet hasonlítani. Ez a Chang'e 1 és a Lunar Prospector adatai alapján készült CE-1-LAM-LEVEL (Wang et al. 2010), és a gömbi harmonikus függvények koefficienseinek felhasználásával számította a három tengely hosszát.

A 2. ábra alapján látható, hogy az eltérések rendre 125,9, -12,8 és -112,8 m. Ezek jelentős eltérések, melyeknek oka több tényezőtől függhet. Egyrészt alapvetően a két modell különböző geometriai test paramétereit tartalmazza, így nem feleltethetőek meg egymásnak

teljes egészében, azonban például a c tengely mindkét esetben ugyanazt reprezentálja, és mégis hasonló eltérés tapasztalható, mint a másik két esetben.

A fentiek mellett az is fontos különbség, hogy nem ugyanaz a két ellipszoid paramétereinek kiszámításához használt szelenoid-modell. A CE-1-LAM-LEVEL esetében a szelenoid-modell elsődleges forrása a Lunar Prospector adatai (Wang et al. 2010), mely 180. fokig és rendig tartalmazza a koefficienseket, míg az általam készített ellipszoid a GRGM 1200A szelenoid-modell alapján (Goossens et al. 2016, Lemoine et al. 2014) készült, amely 660. fokig és rendig tart. Ez alapvetően egy különbség, hiszen a GRAIL modellje jóval nagyobb felbontású. Ezen kívül további eltérés, hogy míg a Lunar Prospector a Hold földtávoli oldaláról nem rendelkezett direkt adattal, a GRAIL viszont ugyanolyan felbontással szolgáltatott adatot a távoli oldalról, mint a közeli oldalról. A két ellipszoid közötti különbségek oka tehát akár ezekből a tényezőkből is fakadhat.

6.2. Az eredmények változása különböző számú ponttal rendelkező Fibonacci-gömbök függvényében

A fentiekben a legnagyobb pontosságú, 100 000 (és 10 000, mert arra is ugyanaz az eredmény született) pontos Fibonacci-gömb szerint készült eredmények kerültek részletes összehasonlításra korábbi referenciafelületekkel. Azonban kutatásomnak nem csak ez az egy eredménye született, hanem a különböző méretű ponthalmazzal elvégzett számítások is fontos információkkal szolgálnak.

A GRGM 1200A szelenoid-modell felbontása nagyjából 16,54 km (660. fokig és rendig tartalmaz együtthatókat, a Hold kerülete pedig nagyjából 10 918,29 km), így a cél is az volt, hogy akár hasonló felbontású Fibonacci-gömbbel is elvégezzem a számítást. Természetesen a két felbontás nem teljesen ugyanazt jelenti, hiszen a szelenoid-modell nem egyenlő területenként szolgáltat adatokat, azonban mégis nagyságrendileg lehet tartani hozzá.

A Fibonacci-gömbön vett pontok száma	Egy pont által reprezentált terület (km ²)
100 pont	379 323
1000 pont	37 932
3000 pont	12 644
5000 pont	7586
10 000 pont	3793
100 000 pont	379

3. táblázat: Egy pont által reprezentált terület a pontok számának megfelelően

A legkisebb minták elsősorban azért készültek, hogy megfigyelhető legyen, mennyiben változik ilyen kis felbontásban az eredmény, illetve, hogy milyen pontszámnál áll be a két paraméter értéke egy konstansra. Ahogyan az 1. ábrán látható, méteres nagyságrendnél nagyobb eltérés még a 100 darab pont esetén sem volt tapasztalható. Ez a minta 379 323 m²-es területekhez rendelt hozzá egy adatot, ami óriási ugyan, viszont érdekes, hogy a végeredményt mindez mégsem befolyásolta nagy mértékben.

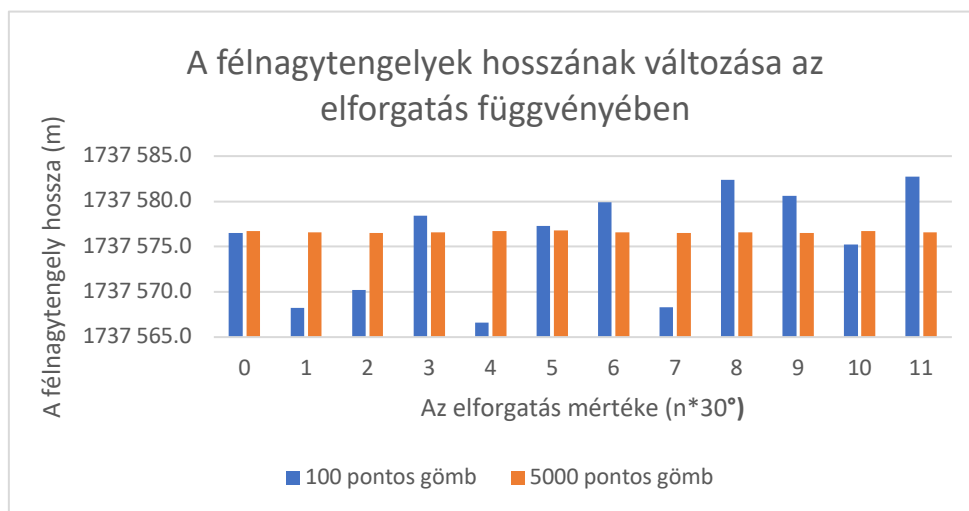
A legkiugróbb eltérés érdekes módon nem a legkisebb minta, hanem 1000 pont esetén tapasztalható. A félnagy tengely 1,9 m-el kisebb, a félkistengely 2,6 m-el nagyobb, mint 10 000, valamint 100 000 pont esetén. Ez nem jelenti azt, hogy a pontosság csökkent, hiszen mindez a minta pontjainak elhelyezésétől is függ, különösen a kevesebb ponttal rendelkező gömbök esetében. 3000 ponttól kezdődően viszont már csak 10 cm-es eltérések tapasztalhatóak, és 10 000 pont esetén pedig beálltak az értékek a nagyobb mintára jellemző eredményekhez.

A szelenoid-modell felbontásához a legközelebb természetesen a legnagyobb minta, a 100 000 pontos Fibonacci-gömb áll, melynél az egy pont által reprezentált terület 379 km², amit hogyha négyzetnek vennénk (nem az természetesen, csak a közelítés megkönnyítéséhez), akkor 19,48 km-es lenne egy oldala, vagyis nagyságrendileg jól hasonlítható a GRGM 1200A méreteihez.

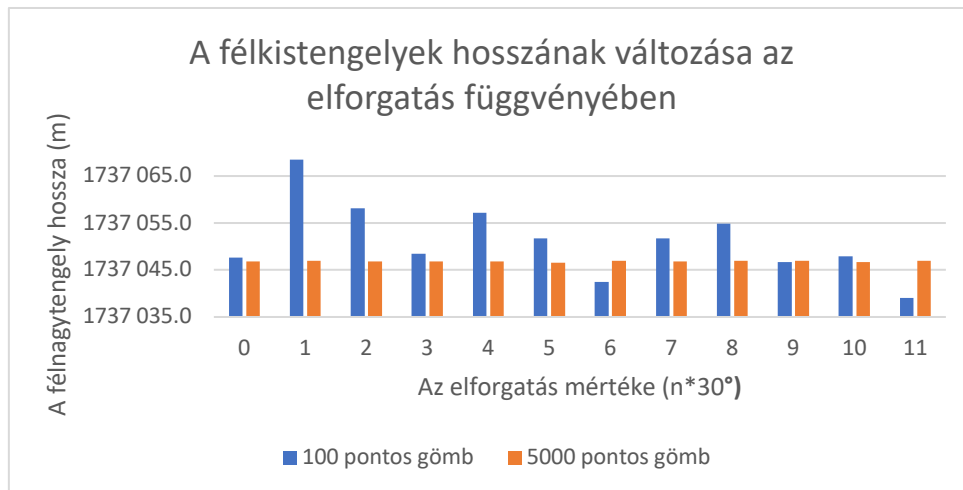
A közelítés pontosságának maximalizálásához azonban az elkészült modellek alapján nem feltétlenül szükséges ekkora felbontású gömböt készíteni, hiszen már a tizedesnyi ponttal rendelkező minta is ugyanazt a megoldást hozta.

6.3 A Fibonacci-gömb elforgatásának hatása az eredményekre

A kapott eredményeket befolyásolja természetesen, hogy a mintavételi pontok hol helyezkednek el, vagyis az, hogy a Fibonacci-gömb hogy van forgatva a szelenoid-modellhez képest. Azzal a céllal, hogy ezt a hatást számszerűsítsem, a 100, valamint az 5000 pontos Fibonacci-gömböket 30 fokonként végigforgattam a szelenoid felett, és az így elkészült 11-11 mintával is elvégeztem a közelítést.



1. ábra: Az illesztett ellipszoid félnagy tengelyének hossza a különböző pozíciójú gömbök esetén



2. ábra: Az illesztett ellipszoid félkistengelyének hossza a különböző pozíciójú gömbök esetén

Ahogy az 1. és a 2. ábrán látható, különbségek főképp a 100 pontos mintánál tapasztalhatóak, itt azonban nagy ingadozások jellemzőek. Ez várható is volt, hiszen ebben az esetben egyértelműen túl kevés a pontok száma, így azok elhelyezkedése jelentősen befolyásolja az eredményt. Ezt mutatja az is, hogy a félnagy tengelyek esetében 5,56 m-es, míg a félkistengelyek esetén 7,54 m-es a szórás, a terjedelem pedig 16,1 m, valamint 29,4 m. Ezek igen jelentős különbségek az eredményekben, és mindez azt is jelenti, hogy az 1 m-en belüli

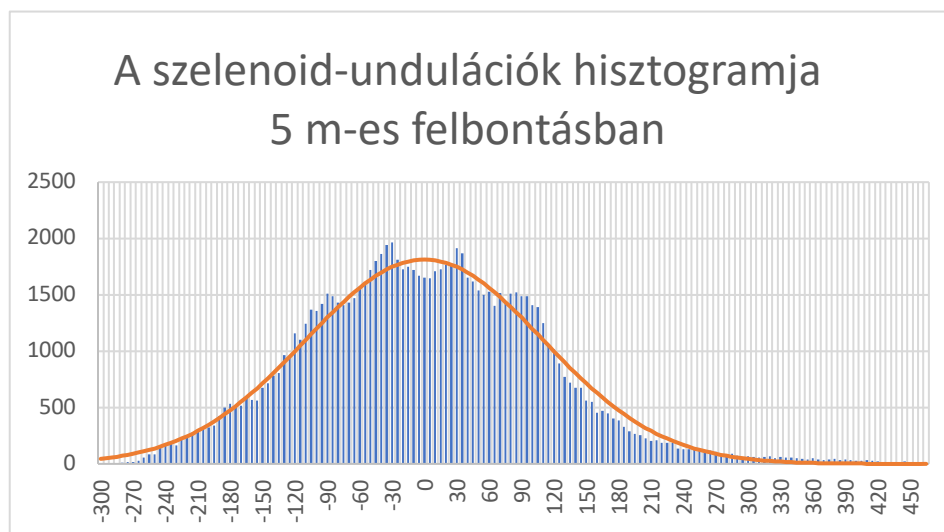
eltérések az első, „alapértelmezett” 100 pontos és a 100 000 pontos Fibonacci-gömb között jórészt a pontok szerencsés elhelyezésének köszönhetőek.

Az 5000 pontos minta esetén azonban a különbségek szinte elhanyagolhatóak, a szórás a félnagy tengelyek esetén 0,09 m-es, a félkistengelyek esetén pedig 0,14 m-es, a terjedelem 0,3 m, valamint 0,5 m. Ez azt mutatja, hogy ennyi pont esetén már csak igen kis szerepe van annak, hogy a szelenoid-modellhez képest milyen helyzetben van a Fibonacci-gömb.

A különböző mértékben elforgatott Fibonacci-gömbök alapján készült közelítéseknek nem csak a változékonysága érdekes, hanem az is, hogy átlaguk mekkora, és az mennyiben közelíti a több ponttal rendelkező minta alapján számított eredményeket. 5000 pont esetén az eredeti (nem elforgatott) közelítés félnagy tengelye is csak 0,1 m-el tért el a legnagyobb pontosságú hosszától, a félkistengely pedig meg is egyezett azzal, a forgatások átlaga pedig már teljesen egybeesett vele. A 100 pontos minta esetén azonban jóval nagyobb az eltérés, a félnagy tengely esetén 1, a félkistengely esetén 4 m, ez is azt mutatja, hogy ebben az esetben jóval nagyobb a bizonytalanság.

6.4. A kapott ellipszoidon vett szelenoid-undulációk hisztogramja

Az eredményül kapott ellipszoid egyik fő jellemzője, hogy milyen a hozzá képest kiszámított szelenoid-undulációk hisztogramja, vagyis az, hogy a szelenoidon vett magasság eltérése az ellipszoidon milyen értékek közt mozog, és azok közt mi mennyire gyakori. Ez természetesen nem csak annak függvénye, hogy mennyire jól illeszkedik az ellipszoid, hanem attól is nagyban függ, hogy milyen a szelenoid potenciálfelülete, hiszen annak anomáliái is megjelennek a hisztogramon.



3. ábra: A 100 000 pontból álló Fibonacci-gömb pontjaiban vett szelenoid-undulációk hisztogramja, és az arra illesztett normáeloszlás sűrűségfüggvénye

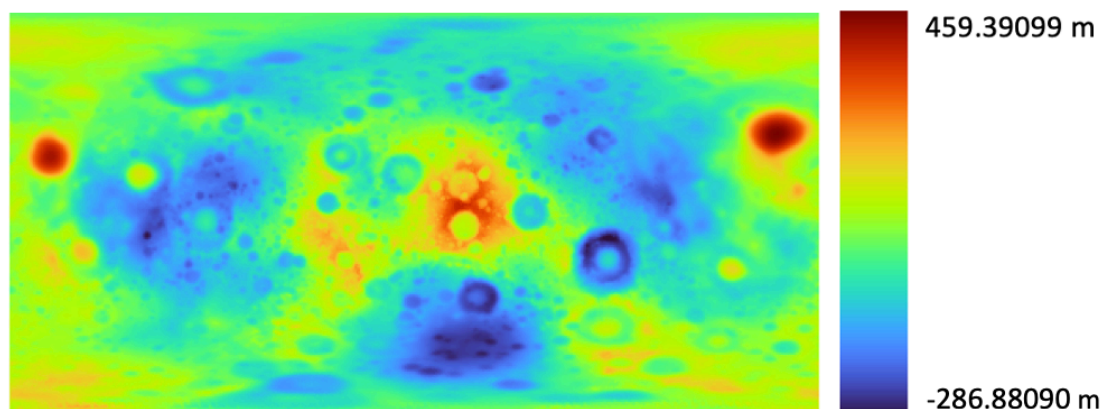
Mint ahogy a 3. ábrán is látható, melyen 5 m-es intervallumokban szerepel a szelenoid-undulációk értéke, a hisztogram, és a trendvonal is jó közelítéssel normáeloszlást mutat, 0 m várható értékkel, 110 m-es szórással. Érdekes azonban, hogy nem a 0 a leggyakoribb érték, hanem két kiugrás is tapasztalható, + illetve – 30 m esetén. Emellett + illetve – 90 m-nél is tapasztalható egy, az előzőnél kisebb, de mégis látható pozitív többlet. A modell szempontjából viszont az mindenképp pozitív, hogy a szimmetria középpontja, és így a várható érték is 0.

A kiugrások oka nem a modell paramétereiben, sokkal inkább a szelenoid potenciálfelületének jellemzőiben keresendő. Ilyen akkor jellemző, hogyha a nehézségi erőter olyan sok helyen tér el viszonylag nagy mértékben, hogy már nem a leggyakoribb magasság lesz a legközelebb az ellipszoid paramétereikhez, hanem egy köztes magasság. A szelenoid korábban ismertetett okokból mutat ilyen méretű egyenlőtlenségeket, és ebből kifolyólag nem is az volt a várható, hogy a hisztogramon a 0 lesz a leggyakoribb, sokkal inkább az, hogy szimmetrikusak legyenek a maximumok rá nézve.

A szelenoid leírása szempontjából nem csak a maximumok és a kiugró értékek rendelkeznek hasznos információkkal. A hisztogram terjedelme is jellemzi a Hold nehézségi erőterét, vagyis az, hogy mi a legnagyobb és a legkisebb eltérés. Ez az ablak minél nagyobb, annál nagyobb anomáliákat, „egyenetlenségeket” mutat a potenciálfelület.

Ahogy a 4. ábrán is látható, a hisztogram terjedelme -300-tól +450 m-ig tart. Ez már önmagában sokat jelez, hiszen ezek a Hold méreteihez képest jelentős eltérések, ami szintén mutatja, milyen nagy ugrások jellemzőek a Hold nehézségi erőterére. Szintén sok információt szolgáltat az is, hogy mely értékekhez esik az a határ, melynél az adatok 5%-a kisebb, illetve az is, melynél az adatok 5%-a nagyobb. Ezek -170, illetve 185 m-re estek a modellben, ami azt mutatja, hogy széles ablakban találhatók az értékek, és nagy a szórása az eltéréseknek. Mindezekből az is következik, hogy míg az anomáliák 90%-a viszonylag szimmetrikus határok közé esik, a kis gyakoriságú, de nagy eltérést tartalmazó adatok sokkal több esetben pozitív értékek, mint negatívak.

6.5. A szelenoid-undulációk ábrázolása térképen



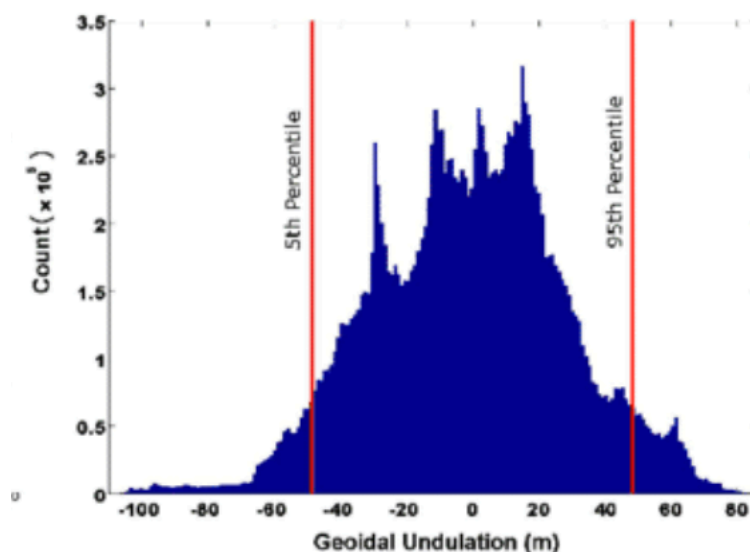
4. kép: A szelenoid-undulációk QGIS-ben megjelenítve

A kapott szelenoid-undulációk nem csak eloszlásukkal jellemzik az ellipszoidot, valamint magát a szelenoidmodellt, hanem térképen megjelenítve is, ezáltal az anomáliák térbeli elrendezéséről kaphatunk információt.

Ahogy a 4. képen látható, a kiugró értékek lokalizáltak, bizonyos krátereknél jellemzőek elsősorban. A pozitív anomáliák főleg a Hold felénk eső oldalának két kráterére, a Mare Serenitatisra (25; 20) és a Mare Imbriumra (30; 20) esnek. A legnagyobb negatív anomáliák pedig a South Pole Aitkennél (-50; 370), valamint a Mare Orientale kráternél (-20; 270) találhatók.

Az undulációk térképi ábrázolásánál a kiugró értékek a szelenoid-modellt, nem pedig az ellipszoidot jellemzik, hiszen a lokalizált, nagy anomáliákat a plusz egy paraméter nem csökkenti jelentősen. Utóbbiról akkor kaphatunk több információt, ha összehasonlítjuk a 4. képet az 1. képpel, ami tulajdonképpen a szelenoid-undulációk térképe a referenciagömbhöz képest. Ebből egyrészt jól látszik, hogy az ellipszoid általánosan is csökkentette az undulációkat valamennyivel, de ami a legszembetűnőbb, hogy a sarkoknál jellemző anomáliákat szinte teljesen megszüntette. Ez várható is volt, hiszen a forgási ellipszoid ezen a területen kell, hogy mutassa a legnagyobb javulást a gömbhöz képest.

6.6. A szelenoid-undulációk összevetése a földi adatokkal



5. kép: A geoid-undulációk histogramja az EGM08 geoid és a WGS84 ellipszoid alapján

Forrás: Goulden et al. 2013

Mint azt a korábbiakban már bemutattam, az undulációk histogramja sokat elárul egy égitest nehézségi erőteréről. Éppen ezért érdekes nem csak a szelenoid-modell önmagában értékelt histogramja, hanem az is, hogy az hogyan aránylik egy másik, jobban ismert égitest (a Föld) geoidjának histogramjához.

A geoid histogramján is látható, hogy akár jelentős eltérések is előfordulnak, így maga a felület közel sem sima. Ami szembetűnő viszont, hogy a nagy léptékű kiugrások sokkal nagyobb relatív gyakorisággal rendelkeznek, mint a Hold esetében, ahol mindezeknek a relatív gyakorisága sokkal kisebb. Ezzel szemben viszont a terjedelem, és így a szélsőségek értéke is jelentősen nagyobb a Hold esetében. A Földön a legnagyobb eltérés nem haladja meg a 110 m-t, a Holdon pedig, ahogy láthattuk, akár a 450 m-t is elérheti a szelenoid-unduláció. Ráadásul mivel a Hold mérete jóval kisebb, mint a Földé, arányosan még nagyobb eltérésről beszélhetünk. A terjedelemhez hasonlóan a szórás is jóval kisebb a Föld esetében, az adatok 90%-a a +/- 50 m tartományba esik.

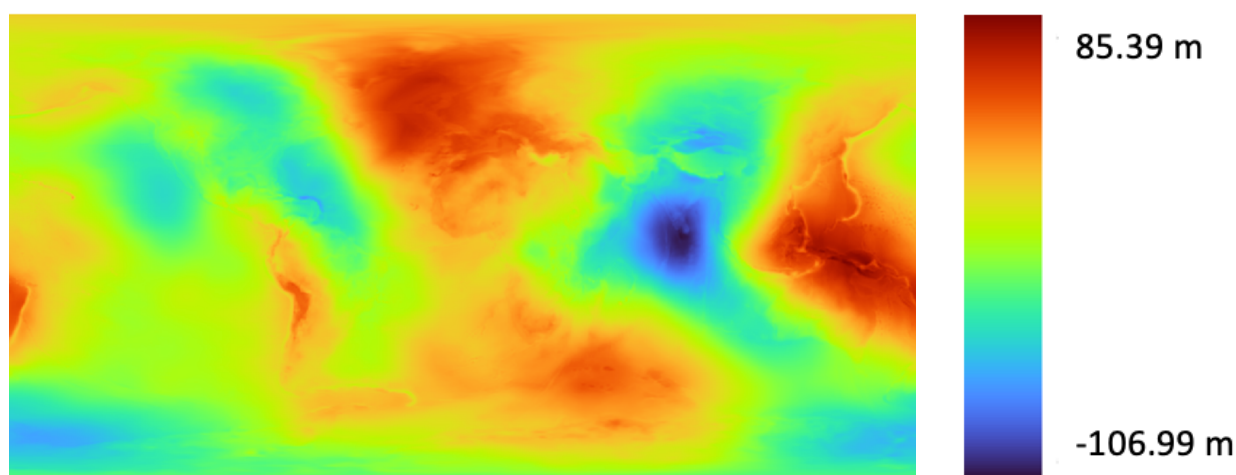
Mindezek azt támasztják alá, hogy a Hold nehézségi erőterében sokkal nagyobb eltéréseket tapasztalhatunk, mind a Föld esetében, utóbbi ezért sokkal jobban is közelíthető forgási ellipszoiddal. Ennek okai főképp az aktív planeto-dinamika (köpenykonvekció, lemeztektonika, izosztázia), mely a Földön nem teszi lehetővé akármilyen méretű

tömegtöbbletek kialakulását. Ezek nélkül pedig a Holdon fenn tudnak maradni olyan anomáliák (jó példák a *masconok*), amelyek ilyen mértékben befolyásolják a potenciálfelületek alakját.

6.7. Az ideális ellipszoid meghatározása a Földön

A 3.fejezetben leírt módszerek segítségével, néhány kisebb változtatás eszközölésével a geoid ideálisan illeszkedő ellipszoidja is kiszámítható. Természetesen ez egy nagyon széles körben használt, létező ellipszoid, a WGS84 (DMA 1984). A számítás elsődleges célja tehát nem egy „új” ellipszoid alkotása, sokkal inkább annak megállapítása, hogy mennyire képes reprodukálni az általam használt módszer a WGS84 paramétereit, lényegében ezzel ellenőriztem a Holdra alkalmazott számítási módszert.

Bemenő adatként az EGM96 (Lemoine et al. 1996) geoidmodell gridjét használtam, melyet a <https://www.agisoft.com/downloads/geoids/> honlapról töltöttem le. Ez 360 fokig és rendig veszi figyelembe a gömbi harmonikusfüggvények együtthatóit. A geoidot az 100 000 pontos Fibonacci-gömb segítségével mintavételeztem QGIS-ben a Point Sampling Tool használatával. Az egyetlen fontos különbség a holdi eljáráshoz képest itt, hogy míg ott 0-360 fokig tartanak a hosszúságok, addig a Földön -180- +180 fokig, így ennek megfelelően alakítottam a Fibonacci-gömb koordinátáit.



6. kép: Az EGM96 QGIS-ben megjelenítve

Forrás: Lemoine et al. 1996, <https://www.agisoft.com/downloads/geoids/>, QGIS

Az így elkészített mintát aztán a hold paramétereire írt program módosításával dolgoztam fel. Egyrészt különböző számok közelében kerestem a megoldásokat, a 6300 és

6400 km-ek között. Mivel a Földön jóval nagyobb, km-es nagyságrendű az eltérés a félnagy tengely és a félkistengely között, először egy km-es nagyságrendű számítást végeztem el, ennyivel egészült ki a program.

Emellett az is egy eddig nem tapasztalt kihívás volt, hogy az EGM96 geoidmodell adatai nem egy referenciagömb felett értelmezendők, mint a Hold esetében, hanem a WGS84 ellipszoid felett, így az ellipszoid adott pontba húzott sugarát kellett hozzáadni a modellben szereplő számhoz. Ezeken kívül viszont minden más pontosan ugyanúgy történt, mint a szelenoid esetében.

A geoid esetében is 10 cm-es pontosságig számítottam az ideális ellipszoidot. Ez, mint ahogy az várható volt, csak minimálisan tér el a WGS 84 paramétereitől. Ennek ugyanis félnagy tengelye 6 378 137,0 m, félkistengelye pedig 6 356 752,3142 m. Az általam kapott ellipszoid esetében pedig előbbi 6 378 136,4 m, utóbbi pedig 6 356 751,7 m.

7. Konklúzió

Kutatásom során a holdi gravitációs tér ellipszoidi közelítését végeztem el, vagyis kerestem azt a forgási ellipszoidot, mely a legkevésbé tér el a Hold kitüntetett potenciálfelületétől, amely a szelenoidot definiálja. Ennek során a GRGM1200A szelenoid-modellt mintavételeztem egyenlő területet reprezentáló pontok segítségével, majd ez alapján készítettem el egy program segítségével az ellipszoid paramétereit, mely a szelenoid-undulációk legkisebb négyzetes közelítésén alapult.

Az eredményül kapott ellipszoid középpontja a Hold tömegközéppontja, félnagy tengelye 1 737 576,6 méter, félkistengelye 1 737 046,8 méter, lapultsága pedig 0,000305. Az ellipszoid paramétereit 10 cm-es pontossáig határoztam meg, és a 100 000 pontos minta esetén a mintavételezés felbontása nagyságrendileg megegyezett a szelenoid-modell felbontásával.

Az általam így meghatározott ellipszoid pontosságot tekintve felülmúlja az általánosan használt, 1737,4 km sugarú gömböt, hiszen a Hold lapultságát is figyelembe veszi. Érdekes azonban, hogy a szelenoid-undulációk az ellipszoid felett nézve is jelentős szélsőségeket, és általánosan nézve is nagy értékeket produkálnak. Ennek oka, hogy a Holdon nincs olyan folyamat, mely a keletkezett tömegtöbbleteket homogenizálná, nincs lemeztectonika vagy izosztázia.

Kutatásom során elvégeztem a számítást a földi geoidra is, olyan céllal, hogy megmutassam, ez a módszer egy jó becslést képes adni az ideálisan illeszkedő ellipszoidra. Mivel a Földön ennek a paramétere ismertek, ezzel vettem össze az eredményeimet, amik jól közelítették azt, 60 cm-es eltérést mutattak csak.

8. Felhasznált irodalom jegyzéke

Arkani-Hamed, J. (1998): The lunar mascons revisited. *Journal of Geophysical Research* 103: 3709-3739.

Asphaug, E. (2014): Impact Origin of the Moon?. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 42: 551–78.

Barr, A. C. (2016): On the origin of Earth's Moon. *Journal of Geophysical Research Planets* 121(9): 1573-1601.

Cziráki, K., Timár, G. (2023): Estimation of parameters of a lunar ellipsoid of revolution based on GRAIL selenoid data and Fibonacci mesh. *EGU General Assembly 2023, Vienna, Austria, 23–28 April 2022, EGU23-7979 (submitted)*

DMA, Defense Mapping Agency (1986): Department of Defense World Geodetic System 1984 – Its Definition and Relationships With Local Geodetic Systems. Technical Report 8350.2. St. Louis, Missouri, USA.

Gauss, C. F. (1828): Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 84 p.

Goossens, S., Lemoine, F.G., Sabaka, T.J., Nicholas, J.B., Mazarico, E., Rowlands, D.D., Loomis, B.D., Chinn, D.S., Neumann, G.A., Smith, D.E and Zuber, M.T. (2016): A Global Degree and Order 1200 Model of the Lunar Gravity Field using GRAIL Mission Data. *Lunar and Planetary Science Conference, Houston, TX, Abstract #1484*

Goulden, T., Hopkinson, C., Demuth, M. (2013): Sensitivity of alpine glacial change detection and mass balance to sampling and datum inconsistencies. *The Cryosphere Discussions* 7: 55-101.

Hirt, C., Featherstone, W. E. (2012): A 1.5 km-resolution gravity field model of the Moon. *Earth and Planetary Science Letters* 329-330: 22-30.

Iz, H.B. (2009): New parameters of geometrically best fitting lunar figures. *Journal of Applied Geodesy* 3, 155-162.

Jones, A (2022): China to build a lunar communications and navigation constellation. Spacenews. <https://spacenews.com/china-to-build-a-lunar-communications-and-navigation-constellation/>

Kis K. (2002): Általános geofizikai alapismeretek. ELTE Eötvös kiadó, Budapest, 384 o.

Konopliv, A.S., Asmar, S.W., Carranza, E., Sjogren, W.L. and Yuan, D.N. (2001): Recent Gravity Models as a Result of the Lunar Prospector Mission. *Icarus* 150(1): 1-18.

Lemoine, F.G.R., Smith, D.E., Zuber, M.T., Neumann, G.A., and Rowlands, D.D (1997): A 70th degree lunar gravity model (GLGM-2) from Clementine and other tracking data. *Journal of Geophysical Research* 102(7): 16339-16359.

Lemoine, F. G., Kenyon, S. C., Factor, J. K., Trimmer, R. G., Pavlis, N. K., Chinn, D. S., Cox, C. M., Klosko, S. M., Luthcke, S. B., Torrence, M. H., Wang, Y. M., Williamson, R. G., Pavlis, E. C., Rapp, R. H., Olson, T. R. (1998): The development of the joint NASA GSFC and NIMA geopotential model EGM96. NASA/TP-1998-206861, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD USA, 575 p.

Lemoine, F.G., Goossens, S., Sabaka, T.J., Nicholas, J.B, Mazarico, E., Rowlands, D.D., Loomis, B.D., Chinn, D.S., Neumann, G.A., Smith, D.E. and Zuber, M.T (2014): GRGM900C: A degree 900 lunar gravity model from GRAIL primary and extended mission data. *Geophysical Research Letters* 41: 3382-3389.

Martinec, Z., Pěč, K. (1988): A determination of the parameters of the level surface of lunar gravity. *Earth, Moon and Planets* 43: 21-31.

Muller, P. M., Sjorgen, W. L. (1968): Mascons: lunar mass concentrations. *Science* 161: 680-684.

Murphy, J. P., Siry, J. W. (1970): Lunar mascon evidence from Apollo orbits. *Planetary and Space Science* 18: 1137-1141.

NASA, National Aeronautics and Space Administration (2022): LunaNet Interoperability Specification Document. LN-IS V004

NASA, National Aeronautics and Space Administration (2008): A Standardized Lunar Coordinate System for the Lunar Reconnaissance Orbiter and Lunar Datasets.

Sjogren, W. L., Wimberly, R. N. and Wollenhaupt, R. W. (1974): Lunar gravity: Apollo 17. *The Moon* 11: 41-52.

Talwani, M. (2003): The Apollo 17 gravity measurements on the Moon. *The Leading Edge*, 22(8): 786–789.

Wang, W.R., Li, F., Liu, J.J., Ren, X., Zou, X.D., Mu, L.L., Yan, J.G., Zou, Y.L., Zhang, H.B., Lü, C., Liu, J.Z., Zuo, W., Su, Y., Wen, W.B., Bian, W., Wang, M., Li, C.L. and Ouyang, Z.Y. (2010): Triaxial ellipsoid models of the Moon based on the laser altimetry data of Chang'E-1. *Science China Earth Sciences* 53(11): 1594-1601.

Yan, J., Liu, S., Xiao, C., Ye, M., Cao, J., Harada, Y., Li, F., Li, X., and Barriot, J. (2020): A degree-100 lunar gravity model from the Chang'e 5T1 mission. *Astronomy & Astrophysics* 636 (2020): A45

9. Képek és ábrák jegyzéke

1. kép: A GRGM 1200A szelenoid-modell QGIS-ben megjelenítve, forrás: Goossens et al. 2016, Lemoine et al. (2014). Figyeljük meg a földi geoidhoz képest sokkal szélesebb értékkészletet és a Hold jellegzetes formakincsének tükröződését az adatokban.

2. kép: 5000 pontból álló Fibonacci-gömb a Hold földtávolsági oldalán a szelenoid-modell felett a Google Holdon ábrázolva, forrás: Goossens et al. 2016, Lemoine et al. (2014), Google Earth

3. kép: A mintavételezést követően elkészült 5000 pontos adatbázis, a pontokban vett középponttól való távolság szerinti színezéssel QGIS-ben, forrás: Goossens et al. 2016, Lemoine et al. 2014, QGIS

4. kép: A szelenoid-undulációk QGIS-ben megjelenítve

5. kép: A geoid-undulációk hisztogramja az EGM08 geoid és a WGS84 ellipszoid alapján, forrás: Goulden et al. 2013

6. kép: Az EGM96 geoid-modell QGIS-ben megjelenítve

1. táblázat: Az eredményül kapott félnagy tengelyek, félkistengelyek és lapultságok a mintavételezési pontok száma alapján

2. táblázat: Az eredményül kapott forgási ellipszoid összehasonlítása a gömbi, valamint a CE-1-LAM-LEVEL (Wang et al. 2010) referenciafelülettel

3. táblázat: Egy pont által reprezentált terület a pontok számának megfelelően

1. ábra: Az illesztett ellipszoid félnagy tengelyének hossza a különböző pozíciójú gömbök esetén

2. ábra: Az illesztett ellipszoid félnagy tengelyének hossza a különböző pozíciójú gömbök esetén

3. ábra: A 100 000 pontból álló Fibonacci-gömb pontjaiban vett szelenoid-undulációk hisztogramja, és az arra illesztett normáloszlás sűrűségfüggvénye

1. egyenlet: A legjobban illeszkedő ellipszoid kiszámításának módszere N pontos Fibonacci gömb esetén

10. Függelék

10.1. Az N pontos Fibonacci-gömb meghatározásának kódja Pythonban

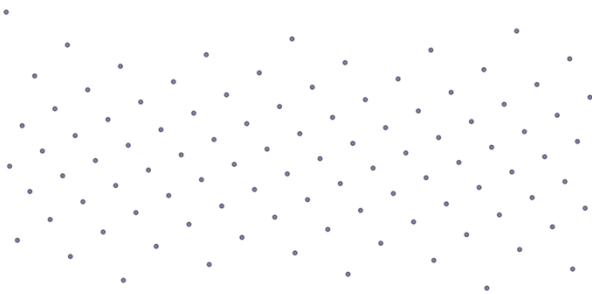
def fibonacci_sphere(samples):

```
    points=[]
    phi= math.pi * (3. - math.sqrt(5.))
    for i in range(N):
        z = 1 - (i / float(N - 1)) * 2
        radius = math.sqrt(1 - z * z)
        theta = phi * i
        x = math.cos(theta) * radius
        y = math.sin(theta) * radius
        points.append((x, y, z))
    return(points)
```

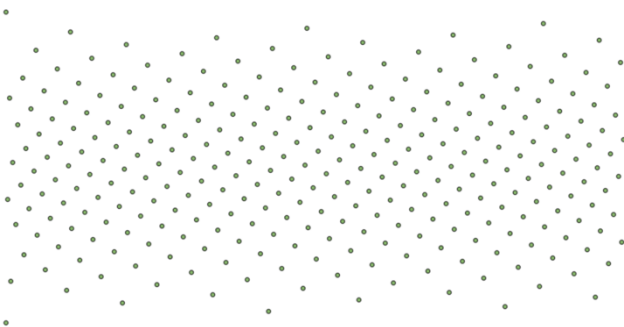
Forrás: <https://stackoverflow.com/questions/9600801/evenly-distributing-n-points-on-a-sphere>

10.2. A Fibonacci-gömb pontjai QGIS-ben különböző pontszámok mellett, egyenközü szélesség-hosszúsági koordináta-rendszerben

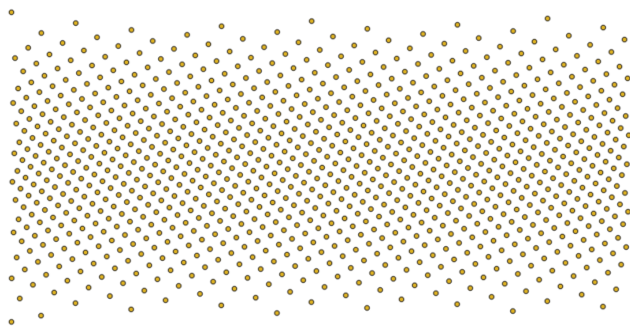
100 pont:



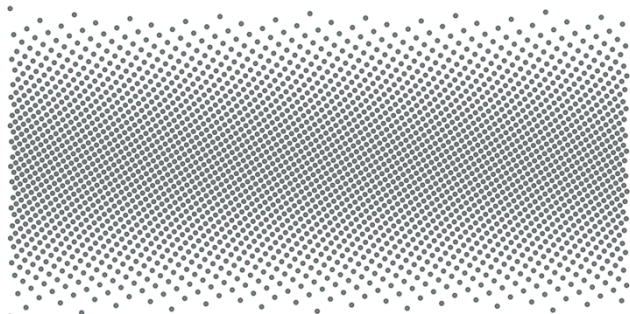
300 pont:



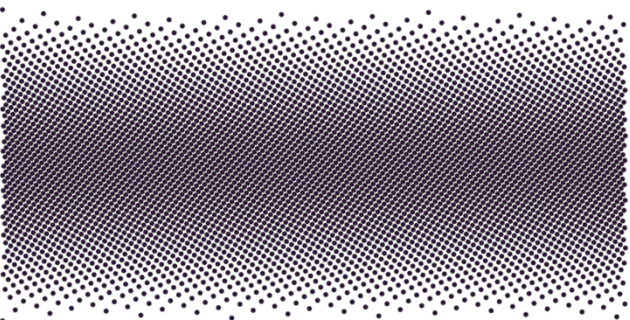
1000 pont:



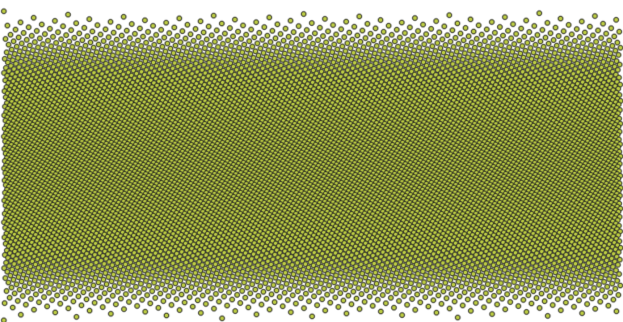
3000 pont:



5000 pont:



10 000 pont:



100 000 pont:



10.3. A félnagy tengelyek és félkistengelyek kiszámításához használt legkisebb négyzetes közelítés Python-kódja, 100 méteres lépésközzel

```
import math
f=open("/Users/kamilla/Desktop/tdk/pts_elev_10000.txt")
content=f.read().splitlines()
f.close()
def ellipszoidtav(phi, felnt, felkist):
    tv=math.pow((math.pow((math.sin((phi*math.pi)/180)*felkist),2)+math.pow(math.co
    s((phi*math.pi)/180)*felnt,2)), 1/2)
return tv
eredm=[]
eredmfelnagy=0
eredmfelkis=0
min=1159703910454.0 #a szelenoid-undulációk négyzetösszege a paraméterek első két
lehetséges értéke esetén
# 100 méteres közzel, 1734000-1739000
for fnt in range(50):
    squarelist=[]
    for felkist in range(fnt+1):
        ossz=0
        for i in content:
            szelenoidadatok=list(map(float,i.split(";")))
            szelenoidtav=1737400+szelenoidadatok[1]
            z=math.pow(((ellipszoidtav(szelenoidadatok[3], 1734000+100*fnt,
            1734000 +100*felkist)) - szelenoidtav),2)
            ossz=ossz+z
        if ossz<min:
            min=ossz
            eredmfelnagy=fnt
            eredmfelkis=felkist
        squarelist.append(ossz)
    print(fnt)
    eredm.append(squarelist)
print(eredm)
print(eredmfelnagy)
print(eredmfelkis)
```