

SÜLLYEDÉSI PARADOXON

Országos Tudományos Diákköri Dolgozat 2023

Készítette: Gál-Knapcsek Zsombor

Témavezető: dr. Hömöstrei Mihály

Iskola: Budapesti Német Iskola – Thomas Mann Gymnasium

Tartalomjegyzék

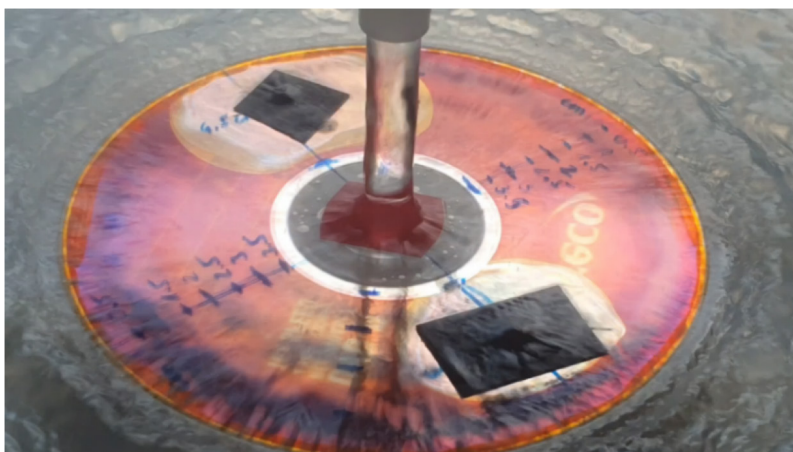
1.	Kísérlet felépítése.....	5
1.1.	Kísérleti berendezés felépítése.....	6
2.	Megfigyelések.....	7
3.	Magyarázat.....	9
3.1.	Kvalitatív magyarázat.....	9
3.2.	Elméleti magyarázat.....	9
3.3.	Vízréteg vastagsága.....	13
3.4.	Vízréteg nyomása.....	15
3.5.	Statikai összefüggések.....	16
4.	Mérések.....	19
4.1.	Lebegés „jóslása”.....	19
4.2.	Lemez süllyedése a vízszög függvényében.....	20
4.3.	Süllyedés a tömeg függvényében.....	22
4.4.	Minimális vízhozam a tömeg függvényében.....	23
4.5.	Hidraulikus ugrás kitolódása.....	25
4.6.	Vízréteg sebessége.....	27
4.7.	Hibaszámítás.....	27

Rövid összefoglalás

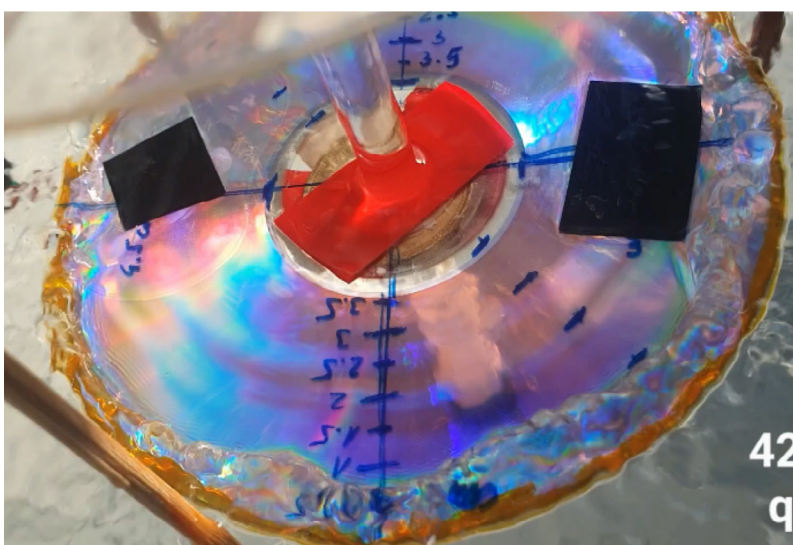
Mindenki ismeri azt a jelenséget, amikor egy borotvapengét vagy egy régi tűzfillérest ráhelyezünk a vízfelszínre, és úszik a vízfelszínen, noha a sűrűsége a víz sűrűségének a többszöröse. Megfigyeljük, hogy a lemez behorpasztja a vízhártyát, ebből tudjuk, hogy a lemezt a felületi feszültség és a tűzfilléres aljára ható hidrosztatikai nyomóerő tartja fenn.^[1] Azonban, ha növeljük a súlyát, előbb-utóbb lesüllyed. Viszont ha a közepére egy függőleges vízugarat irányítunk, úszni kezd. Felmerül a kérdés, hogy ha a felhajtó erő eddig is kevésnek bizonyult, ráadásul növeljük a lefelé ható erőt, hogy jöhet létre erő-egyensúly.

A jelenséget jobban megfigyelve látjuk, hogy a lemez a plusz tolóerő hatására lejjebb süllyedt. A lemez most már nem csak behorpasztja a vízhártyát, hanem alá is süllyed. Az így kialakuló hidrosztatikai nyomáskülönbségből származó erő már elég nagy ahhoz, hogy ellensúlyozza a lefelé ható erőket. Ez azonban felvet egy másik kérdést. Ha a lemezünk a vízszint alá süllyed, a külső vízközeg miért nem folyik a felületére? Amennyiben a lemez tetejére kívülről víz folya, a hidrosztatikai nyomás kiegyenlítődne, így a lemez lesüllyedne. A függőleges vízugarból származó víz, az impulzusátadás után sugár irányban nagy sebességgel távozik a lemez felületéről. A lemez szélénél kiáramló vízréteg hidrosztatikai ugrást hoz létre, ami meggátolja a külső vízközeg lemezre áramlását.

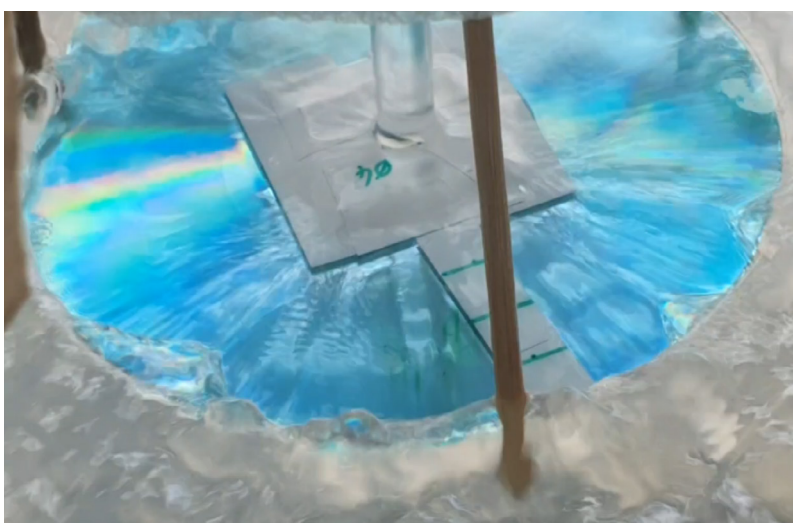
A dolgozatban szeretném ismertetni a jelenség magyarázatát és a releváns paramétereket. Ezeket az elméleti állításokat mérésekkel alátámasztani, illetve bemutatni a kísérletek pontatlanságait és hibáit. Ez a kísérlet remek lehet otthon és középiskolában kísérletezők számára. Számukra is szeretnék ötleteket és javaslatokat adni, hogy hétköznapi körülmények között megfigyelhessék a jelenséget.



1. ábra: A jelenséget bemutató kép.



2. ábra: I. Típusú lemez: közepén mélyedés van.



3. ábra: II. Típusú lemez: közepén lyuk van.

1. Kísérlet felépítése

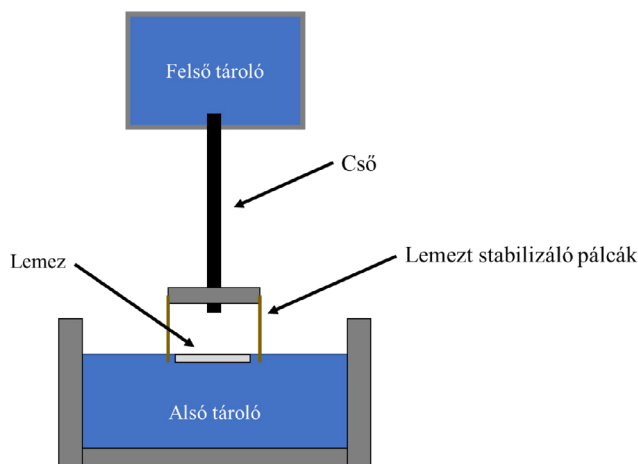
A kísérletnél kettő eltérő típusú lemezt vizsgáltunk. A két típus megegyező felületű és sűrűségű, vagyis az egyetlen különbség köztük, hogy még az első típus közepe egy gömbsüveg (2. ábra), amit egy szigetelőszalag darabbal alakítottam ki,^[5] addig a második típus közepe lyukas (3. ábra). A dolgozat folyamán ha egy állítás nem igaz, mindkét típusra ki fogom emelni, hogy melyikről van szó.

A kísérlet során ráhelyeztem egy lemezt (Compact Disc^[6]) a víz felszínére. Egy ilyen lemez tömege körülbelül 14-16gramm, amit a felületi feszültség és a hidrosztatikai nyomóerő önmagában képes fenntartani. A tömeg megnövelésére érméket ragasztottam a lemezek alá. (200Ft – 9gramm, 100Ft – 8gramm, 50Ft – 7,7gramm, 20Ft – 6,9gramm, 10Ft – 6,1gramm, 5Ft – 4,2gramm) Az érméket elhanyagolható tömegű szigetelőszalaggal ragasztottam a lemezekre. A szigetelőszalagnak az áramlásra gyakorolt hatását elhanyagoltam. Az I. típusú lemez esetében az érméket a lemez közepére ragasztottam, a gömbsüveg alá. A II. típusú lemez esetében az érméket ki kellett helyeznem a lemez szélére, hogy ezzel a lyuk szabad maradjon. Ennek hatására az I. típusú lemezeknél a tömegközéppont lejjebb került, így azok stabilabban, szinte oszcilláció nélkül úsztak a vízfelszínen. A II. típusú lemezeknél sokkal nagyobb oszcillációt tapasztaltam, ezért azokat stabilizálnom kellett. Erre külön ki fogok térni a vízszintes mérési berendezés bemutatásakor. Miután a lemezt a vízrétegre helyeztem, a közepére irányítottam egy függőleges vízszögletet. Fontos, hogy a vízszöglet a lemez felületére merőlegesen csapódjon be, különben a lemez kilökődik oldalra, és elsüllyed. A lemez közepén lévő gömbsüveg szintén hozzájárul a lemez stabilitásához. Az I. típusú lemezek esetén a süveg oldalának egyenletesen csapódó vízszöglet ereje meggátolja, hogy a lemez kiússzon a vízszöglet alól. A II. típusú lemezeknél a lyuk körül a lemez teljesen sík, ez szintén hozzájárul a lyukas lemezek instabilitásához.

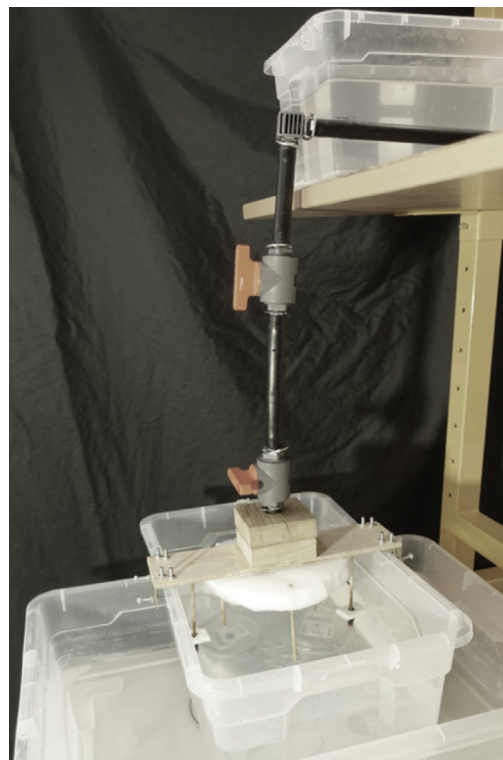
Ez a kísérlet jó példa arra, hogy a kutatásunkat némi találékonysággal otthoni körülmények között is összeállíthatjuk. A jelenség előidézéséhez elég egy Compact Disc, érmék, egy kevés szigetelőszalag, egy tál, és egy csap. Ezek a tárgyak megtalálhatóak a háztartások nagy részében, így ez a kísérlet bárki számára könnyen elvégezhető. Az otthon kísérletezőknek fontos, hogy a lemez közepén lévő gömbsüveget kialakítsák, és a lyuk éles pereme lankássá váljon.^[1] Különben a szétterülő vízszöglet a perembe ütközik és felfelé fröcsköl, a lemez pedig nem lebeg stabilan. Egy ráragasztott szigetelőszalag-darabka megfelel a feladatnak. Amennyiben valaki a II. típusú lemezzel szeretne kísérletezni, ügyelni kell az érme szimmetrikus elhelyezésére is.

1.1. Kísérleti berendezés felépítése

A kísérleti berendezés alapját egy állvány alkotta. Az állvány tetején egy kisebb tárolóba vizet öntöttünk. Ebből a tárolóból a víz egy csőön áramlott kifelé. (4. ábra) Az állvány emelésével növeltem a víz potenciális energiáját és ezzel a becsapódó vízszugár sebességét. A cső egy alsó tároló fölött fejeződött be. (5. ábra) A lemezt ebbe az alsó tárolóba helyeztem. Az alsó tároló falára lyukat fúrtunk, így a vízszint állandó maradt. Továbbá a lemezt három hurkapálca rögzítette, hogy az ne csússzon ki a vízszugár alól. A pálcáknak csak a lemez stabilitásában volt szerepük, a lebegéshez semmilyen módon nem járultak hozzá! A cső vége 8cm-el volt a lemez felülete felett. A vízszugarat egy csap megnyitásával lehetett elindítani. A felső tartályból kiáramló víz sebességét a Torricelli egyenlettel határozhatjuk meg. Ebből az összefüggésből tudjuk, hogy a felső tartály vízszintje nagyban befolyásolja a sugár sebességét. Annak érdekében, hogy ez állandó maradjon, egy kis teljesítményű pumpát használtam. Ez a pumpa nem volt képes teljesen ellensúlyozni a vízvesztéseket, így a felső tartály vízszintje nem volt állandó. Ez a szintváltozás a későbbi méréseknél pontatlanságot eredményezett. Ennek a bővebb kifejtését lentebb *hibaszámítások* címszó alatt találhatók.



4. ábra: Egyszerűsített áttekintő vázlat a kísérleti berendezésről.

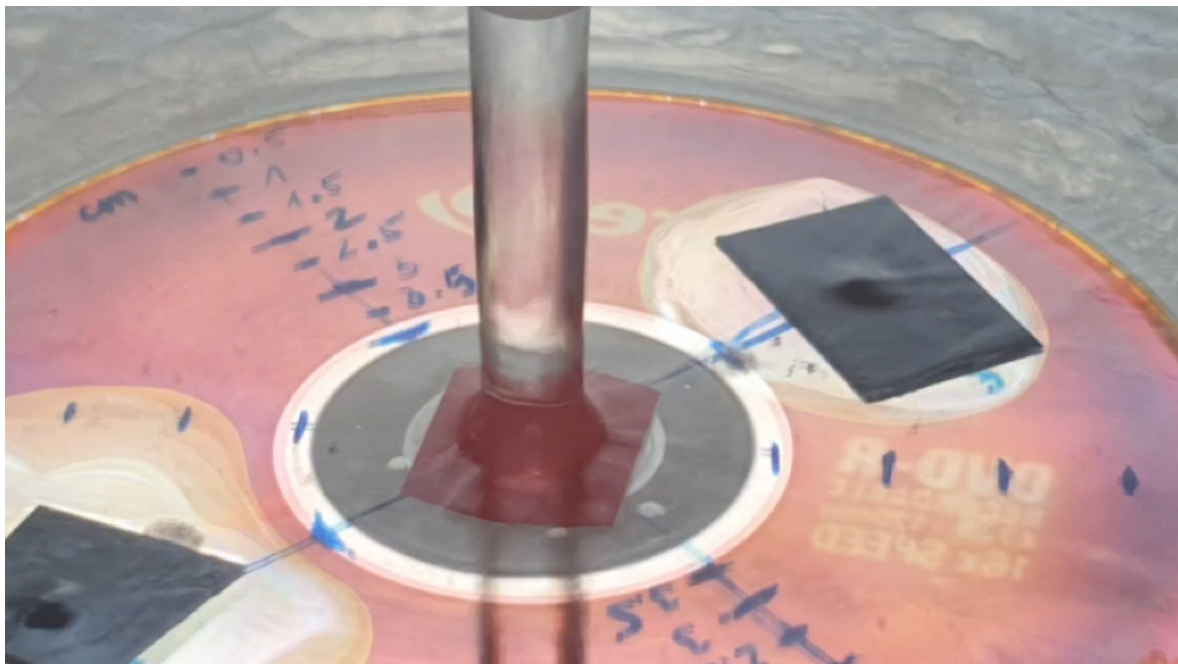


5. ábra: Kép a kísérleti berendezésről.

2. Megfigyelések

A kísérlet közben három jelenség egyből feltűnik. Mindhárom megfigyelés pontos megértése fontos az elméleti háttér megértéséhez, és külön-külön mindhárom több kutatásom tárgyát képezte, így jobbnak láttam külön alcímek alatt lentebb mindet részletesen bemutatni. Itt csak felületesen, felsorolásjelleggel fogom tárgyalni a megfigyeléseimet, és mindenhol fel fogom tüntetni, hogy hol található a részletesebb leírás.

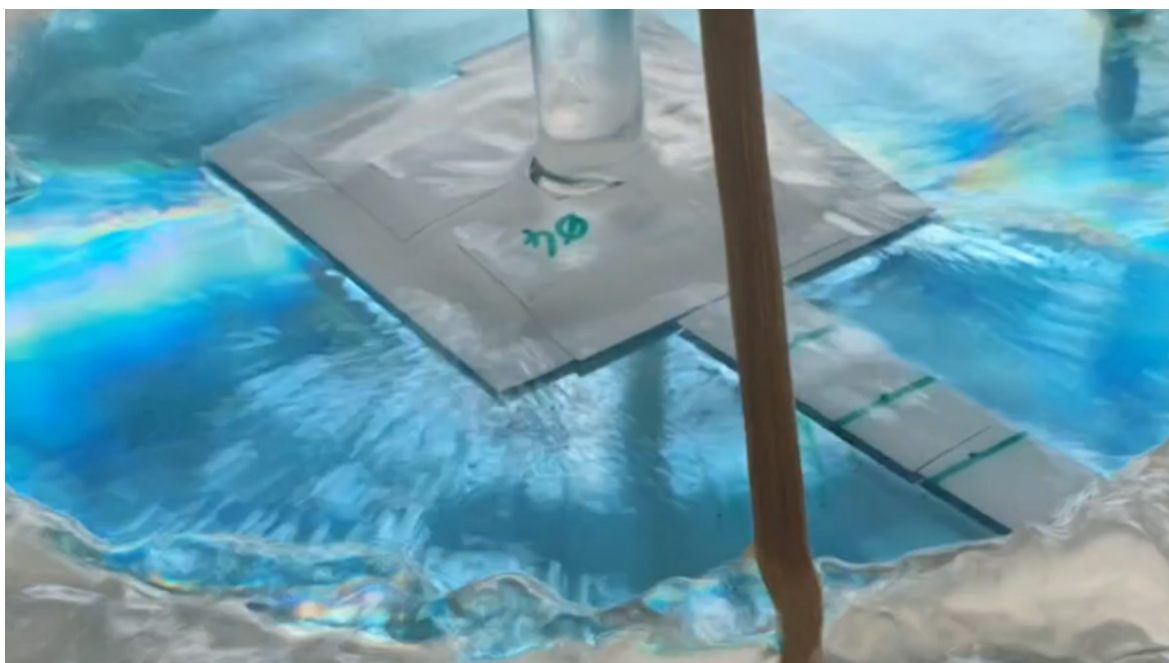
Az első és leginkább észrevehető jelenség egy sugárirányú, gyorsan mozgó vízréteg közvetlenül a lemez felületén. (2-3. ábra) A vízszög az impulzusátadást követően a felület lankássága miatt könnyedén felfekszik a lemez tetejére, és mivel az utána érkező víz tovább nyomja, ezért gyorsan kiáramlik a lemez szélén. Ez jól megfigyelhető mind az első, mind a második ábrán. A vízréteggel kapcsolatos részletesebb kutatást lentebb, *vízréteg nyomása* címszó alatt olvashatjuk.



6. ábra: A jelenség megfigyelése oldalsó szemszögből.
A lemez szélénél jól megfigyelhető a hidraulikus ugrás.

A második szembetűnő megfigyelés, hogy a lemez szélénél létrejön egy hidraulikus ugrás (3. ábra). A hidraulikus ugrást akkor figyelhetjük meg, amikor a gyorsan, laminárisan áramló, viszonylag sekély folyadék hirtelen feltornyosul és lelassul. A lelassult és feltornyosult vízközeg az ugrás után vastagabb rétegben folyik tovább. Hasonló ugrást figyelhetünk meg, amikor az üres mosogató aljának csapódik egy függőleges vízszugár.^[3] A hidraulikus ugrás jelentőségét lentebb *kvalitatív magyarázat* címszó alatt olvasható.

A harmadik megfigyelésem alapja, hogy összehasonlítjuk a lemez szintjét a külső vízközeg szintjével. Egyértelművé válik, hogy a lemez a vízszint alá süllyedt. (7. ábra) Mivel a hidraulikus ugrás kiemelkedik a vízszintből, nehéz ezt megállapítani, de a későbbi mérések ezt egyértelműen alátámasztották.



7. ábra: A jelenség bemutatása oldalsó szemszögből.
Ha összehasonlítjuk a lemez szintjét a külső vízközeg szintjével, egyértelműen látszik, hogy a lemez a vízszint alá süllyedt.

3. Magyarázat

3.1. Kvalitatív magyarázat

Mivel tudjuk, hogy a lemez a vízszint alá süllyedt, mindenkiben jogosan merül fel a kérdés, hogy a külső vízközeg miért nem folyik rá a lemez felszínére. A gravitáció ugyan visszahúzza a külső vízközeget, de a lemez tetején lévő vízréteg akkora sebességgel halad kifelé, hogy ezt ki tolja. Ez a mozgás hozza létre a hidraulikus ugrás turbulens áramlását. A lemez szélénél létrejövő hullám egy „képzeletbeli falat” képez. Ez a fal gátolja meg, hogy a külső vízközeg a lemez tetejére folyjon és ezzel elsüllyessze azt.

3.2. Elméleti magyarázat

A vízfelszínre helyezett borotvapenge úszásának magyarázatát mindenki ismeri, bár hiányosan. Megfigyeljük, hogy a penge behorpasztja a folyadékhártyát, és az így megfeszített felszín elég erőt képes kifejteni, hogy a penge lebegjen. Az általános magyarázat erre nem szokott kitérni, de mivel a penge lejjebb süllyed, mint a vízfelszín, rá a hidrosztatikai nyomáskülönbségből származó felhajtóerő is hat.^[1] Amennyiben tovább növeltem a lemez tömegét, az lesüllyedt.

Azonban amikor a függőleges vízszugárral eltaláltam a lemez közepét, az mégis lebegni kezdett. Jogosan merül fel mindenkiben a kérdés, hogy egy plusz lefelé ható erő hogyan eredményezheti a lemez lebegését. A vízszugár által kifejtett tolóerőt a következők alapján számíthatjuk ki: A beérkező vízszugár elveszti a függőleges irányú lendületét, szétterülve, minden irányban azonos sebességgel halad tovább.^[1] Az időegységre eső lendületváltozás adja a vízszugár tolóerejét:

$$F_{tm} = \frac{\Delta vm}{\Delta t} = \frac{4\rho q^2}{D^2\pi} = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \rho v^2 \quad (1)$$

ahol a becsapódó vízszugár sebessége v , átmérője D , $q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ pedig a vízhozam.

Ez az egyenlet azonban csak az I. típusú lemezeknél használható. A II. típusú lemezeknél be kell iktatni még egy tagot.

$$F_{tly} = \frac{\Delta v m}{\Delta t} = \frac{4\rho q^2}{(D-d)^2\pi} = \left(\frac{D-d}{2}\right)^2 \rho v^2 \quad (2)$$

ahol d a lemez közepén lévő lyuk átmérője.

Az egyenletekben szereplő q vízhozamot egy egyszerű méréssel meghatározhatjuk. Be kell tennünk a csap alá egy ismert térfogatú edényt, majd az edény megtöltésének idejét lemérjük. Ebből meghatározhatjuk a függőleges sugár sebességét is, a sugár közvetlenül a lemez fölötti vastagságának az ismeretében.^[3]

$$v = \frac{4q}{D^2\pi} \quad (3)$$

Az általam használt és korábban bemutatott kísérleti berendezés esetében ezt egy egyszerűbb módon is meghatározhatjuk. A felső tartályt és a csövet egy rendszernek tekinthetjük, amelyre igaz a Torricelli-féle kiömlési törvény: megállapíthatjuk, hogy a sugár kezdeti és végsebessége azonos. A sugár kezdeti sebességét meghatározhatjuk a Torricelli-féle kiömlési törvénnyel.

$$v = \sqrt{2gH} \quad (4)$$

ahol H a lemez felülete és a felső tároló vízszintje közti magasságkülönbség.

Azonban a vízszög a lemez súlyát is befolyásolja. Tudjuk, hogy a lemezen egy vízréteg áramlik sugárirányban kifelé. A lemezt lefelé nyomó nehézségi erőhöz a vízréteg súlyából származó erőt is hozzá kell adnunk.

$$G = (m_{lemez} + V\rho) \cdot g = (m_{lemez} + r^2 \cdot \pi \cdot z(r) \cdot \rho) \cdot g \quad (5)$$

ahol $z(r)$ a vízréteg vastagsága a lemez középpontjától vett sugár függvényében, r pedig a hidraulikus ugrás sugara a lemez középpontjától számítva.

Jelen esetünkben felületi feszültségről nem beszélhetünk, hisz a folyadékhártya nincs megfeszítve. Azonban, mint azt a borotvapengés kísérletnél is látjuk, a lemez a vízszint alá süllyed, ami egy hidrosztatikai nyomáskülönbséget eredményez. A hidrosztatikai nyomásból származó felhajtó erő képlete a következő:

$$F = \rho \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot \left(r^2 - \frac{D^2}{4} \right) \quad (6)$$

ahol h a lemez süllyedése. A zárójelben lévő tag a lemez felülete, az r tag a hidraulikus ugrás kitolódásának mértéke. Ebből még ki kell vonnunk a lemez közepén a függőleges vízszög sugárát is. Ezeken a területeken a lemez mindkét oldalán vastag vízközeg van, így a hidrosztatikai nyomás nagyból kiegyenlítődik. *Kísérlet felépítése* címszó alatt említettem, hogy a lemezek aljára érméket ragasztottam, hogy növeljem a tömegüket. Ezért a kísérlet során valójában nem egy, hanem több összetapasztott lemezről beszélünk. Ez alapján pontosíthatjuk az egyenletünket az érmékre ható felhajtó erővel.

$$F = \rho g h A + \rho g (h + h_{é1}) (A_{é1} - A_{é2}) + \rho g (h + h_{é1} + h_{é2}) A_{é2} \quad (7)$$

A lemez felülete A . $A_{é1}$ és $A_{é2}$ az első, illetve a második érme felülete. $h_{é1}$ és $h_{é2}$ az első, illetve a második érme vastagsága. Ezt a sorozatot nyilván addig folytathatjuk, ahány érme van. A számításaim alátámasztották, hogy az érmékre egyesével ható hidrosztatikai nyomás a kis felületük miatt elhanyagolható. Így azt a továbbiakban nem vettem számításba.

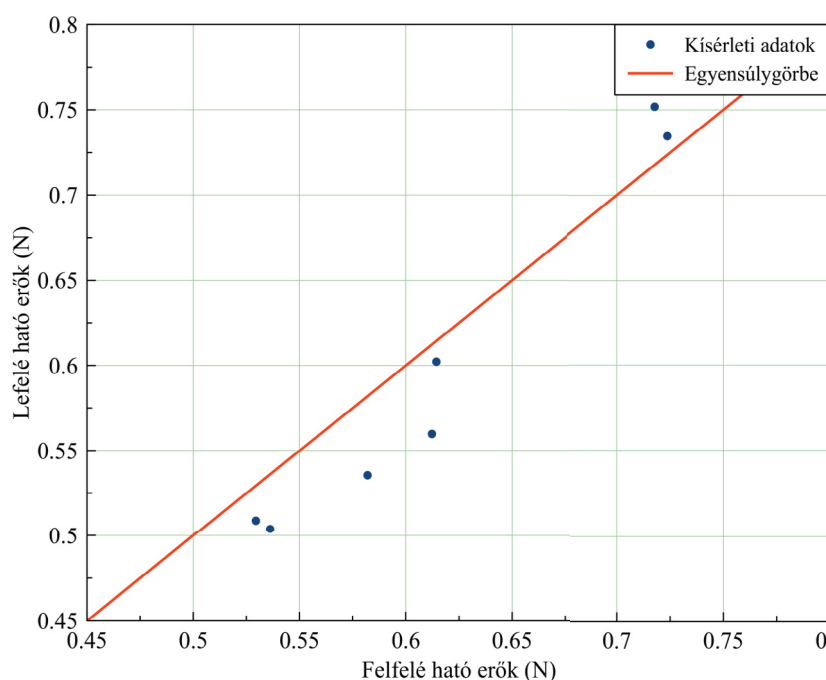
Mivel a lemez úszik a vízfelszínen tudjuk, hogy erőegyensúly áll fenn.

$$\Sigma F = 0 \quad (8)$$

Ez alapján megállapíthatjuk, hogy

$$\vec{G} + \vec{F}_t + \vec{F} = 0 \quad (9)$$

A létrejövő erőegyensúlyt a következő grafikonon ábrázolja.



8. ábra: A lefelé és felfelé ható erők. Az értékek akkor vannak tökéletes összhangban, ha az egyensúlygörbére esnek. A diagramon szereplő kísérleti adatok az (1), (2), (3) egyenletek alapján lettek meghatározva.

A diagram (8. ábra) mutatja a lefelé, illetve felfelé ható erők egyensúlyállapotát. A lefelé ható erőt a súlyerő és a tólóerő összege adja. A felfelé ható erőt a lemezre és az érmékre ható erők összege adja. Az ábrán szereplő kísérleti adatokat egy-egy tömeggel elvégzett mérések átlaga alapján számítottam ki, így minden pont egy bizonyos tömeggel elvégzett méréseket jelöl. A diagramon szereplő értékeket csak az I. típusú lemezes mérések alapján számítottam ki! Mint azt a *kísérlet felépítése* címszó alatt olvasható, a II. típusú lemezeknél az érméket szimmetrikusan, szétszórva ragasztottam fel a lemez aljára. A rájuk külön ható hidrosztatikai nyomáskülönbségből származó erő így még inkább elhanyagolhatóvá válik. Az értékek körülbelül 5%-osan térnek el az egyensúlygörbéhez képest. Ez az érték mind a számított, mind a becsült hibahatárokon belül esik. Ennek a levezetését *hibaszámítások* címszó alatt olvasható.

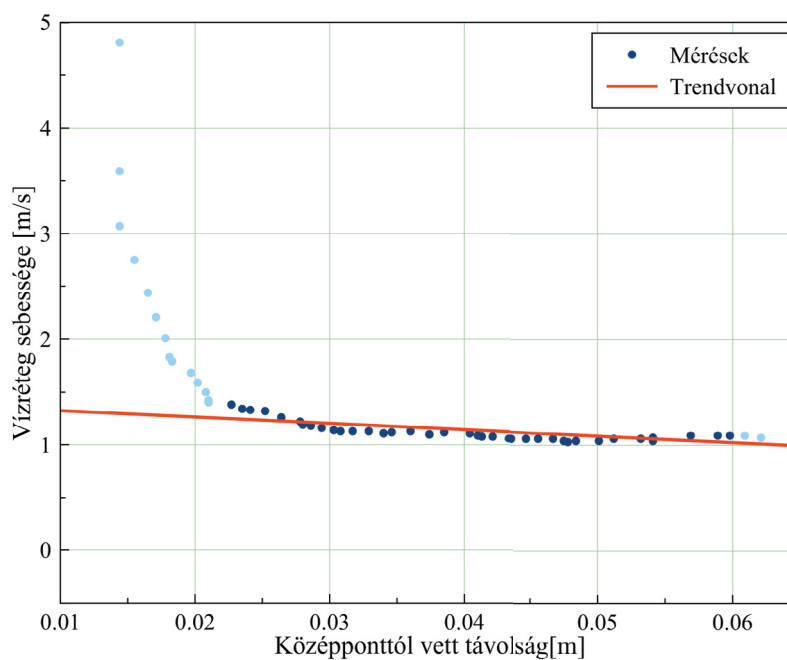
3.3. Vízréteg vastagsága

A lemez felületén sugárirányban spriccelő vízréteg vastagságának a meghatározása a kutatás elejétől kezdve problémákat okozott. Ezt az értéket a kezdeti becslések is fél milliméteresre tették, azaz $5 \cdot 10^{-4}$ m-re. Egy ilyen vékony, nagy sebességgel mozgó közeg mérése sok problémát vetett fel, de a matematikának hála viszonylag pontosan meg lehet határozni ezt a vastagságot.

Ha a kontinuitási törvényből indulunk ki, azaz

$$A_0(r) \cdot u_0(r) = A_1(r) \cdot u_1(r) \quad (10)$$

ahol A a vízréteg keresztmetszete a középponttól vett távolság függvényében, u pedig a vízréteg sebessége a középponttól vett távolság függvényében.



9. ábra: A lemez felületén levő vízréteg sebessége a lemez középpontjától vett távolság függvényében. A piros trendvonal az intervallumban lévő mért értékek átlagját jelöli.

A diagramra (9. ábra) ránézve senkinek sem az az első gondolata, hogy ez a sebesség konstans. Azonban, ha a mért értékek elejét elhanyagoljuk, és csak a mérés második felét vesszük (sötétkék pontok), láthatóvá válik, hogy a lemez közepétől számított 2 cm

után körülbelül állandó sebességről beszélünk. A mérés elejét (világoskék pontok) elhanyagolhatjuk, ugyanis a mérést egy festékpöttyel végeztem. A festékpöttyöt ráejtettem a vízrétegre, és egy 1000 frame/sec-es kamerával felvettem. A pötty útját elég pontosan meg tudtam határozni, miközben a vízréteggel azonos sebességgel kifolyt a lemez szélére. Azonban a lemez közepétől számított első 2 cm-en a festék oldódni kezdett, és kissé szétterjedt a vízben. Ezt az első stádiumot elhanyagoltam, mivel nem tudtam eldönteni, hogy ezek helyes mérések, vagy az oldódás következménye. A mérés menetéről és a mért értékekről lentebb, mérések: *vízréteg sebessége* címszó alatt olvashatunk. Ha a vízréteg sebességét közel állandónak vesszük, adja magát, hogy

$$A = 2\pi rz(r) \approx konst. \quad (11)$$

Ahol A az áramló vízréteg keresztmetszete. Ha ezt átrendezzük, azt kapjuk, hogy a vízréteg vastagsága és a lemez közepétől vett sugár közötti összefüggés:

$$z(r) \sim \frac{1}{r} \quad (12)$$

Azonban a kísérletek során nem tudtam semmilyen hirtelen vékonyodást, vagy nagy eltérést megfigyelni, jogos a feltételezés, hogy a kutatás szempontjából lényeges intervallumban a görbe közel állandó. Ez alapján a lemez felületén áramló vízréteg vastagságát állandónak vettem.

3.4. Vízréteg nyomása

A kutatás folyamán sokaknak vázoltam a jelenséget, hogy meghallgassam az ő magyarázatukat és megközelítésüket a problémához. Mindenkinek az első gondolata az volt, hogy találtunk egy újabb szép példát a Bernoulli-törvény megjelenésére.^[2] Valóban logikusan hangzik, hogy a felső vízréteg nagy sebessége miatt a nyomása lecsökken. Közben a lemez alatt a mélységnek megfelelő hidrosztatikai nyomás uralkodik. Adja magát, hogy a két oldal között fennálló nyomáskülönbség elég erőt képes kifejteni, hogy a lemez lebegni tudjon. Budó Ágoston Kísérleti fizika I. kötetében^[4] szerepel is egy hasonló kísérlet leírása aerodinamikai paradoxon néven. Ott egy függőlegesen tartott csőbe levegőt fújunk, és a cső alján elhelyezett vízszintes papírtányér ahelyett, hogy a tólónyomás hatására eltávolodna a csőtől, hozzátapad.

Vizsgáljuk meg, hogyan jelenik meg Bernoulli-törvény ebben a jelenségben. Ennek megértéséhez a vízréteget több, kisebb rétegre kell osztanunk. Először vegyünk a vízréteg legtetejét. Tudjuk, hogy a vízréteg tetején $p = p_0$ hisz, ha kisebb lenne, mint a légköri nyomás, összenyomódna, ha pedig nagyobb, akkor felemelkedne. Aztán vegyünk a vízréteg legalsó rétegét. Tudjuk, hogy a víz nedvesíti a lemez anyagát, vagyis a vízmolekulák között fellépő kohéziós erő kisebb, mint a víz- és lemezmolekulák között fellépő adhéziós. Ez alapján megállapíthatjuk, hogy a legalsó vízrétegben $u = 0$, így ott a vízréteg sebessége semmilyen nyomásváltozást nem okoz. Itt azonban egy adott hidrosztatikai nyomás már fennáll. Ebből következik a következő összefüggés:

$$p_0 < p < p + \rho g z \quad (13)$$

ahol az első tag a felső vízréteg nyomása, a második tag a vízréteg átlagos nyomása, a harmadik pedig az alsó vízrétegé. Mivel

$$\rho g z \approx 6 \text{ Pa} \quad (14)$$

ami elhanyagolható a légköri nyomáshoz képest, a vízrétegben nyomását vehetjük légköri nyomásnak.

Most helyettesítsük be mindezt a Bernoulli egyenletbe.

$$p + \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z = \text{konst.} \quad (15)$$

Mivel $p = p_0$ és a többi tag ahhoz képest elhanyagolható, így a vízrétegben nem jöhet létre csökkentett nyomás, vagyis ebből nem származhat felhajtóerő.

3.5. Statikai összefüggések

Az elmélet helyességének az igazolására átrendeztem a fő egyenletet és egy adott paramétert egyetlen adott változó függvényében vizsgáltam. A valóságban ez nem volt ilyen egyszerű, mert a tömeget leszámítva egyik paramétert sem tudtam teljesen állandónak venni, ezért átlagokat használtam. Arról, hogy ez milyen hibaszázalékot okozott, *hibaszámítás* címszó alatt majd részletesen beszámolok.

$$\left(m_{\text{lemez}} + \left(r - \frac{D}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot z \cdot \rho\right)g + \frac{4\rho q^2}{D^2\pi} = \rho g h r^2 \pi \quad (16)$$

Ez az elméleti magyarázatnál már bemutatott fő egyenlet, ami a lemezre felírható erők egyensúlyából levezethető. Az egyenletet átrendeztem a lemez h süllyedésére és q szükséges minimális vízhozamra. A lemez süllyedését a tömeg, illetve a függőleges vízszög v sebessége függvényében vizsgáltam.

A fent feltüntetett fő egyenlet nem tartalmazza a függőleges vízszög sebességét. Ehhez az (1) egyenlet második formáját kell használnunk. A két egyenlet között semmi eltérés nincsen, pusztán más alakban vannak felírva.

Ez alapján a következő összefüggés jött létre:

$$h(v, m) = \frac{\left(m_{\text{lemez}} + \left(r^2 - \frac{D^2}{4}\right) \cdot \pi \cdot z \cdot \rho\right)g + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \rho v^2}{\rho g r^2 \pi} \quad (17)$$

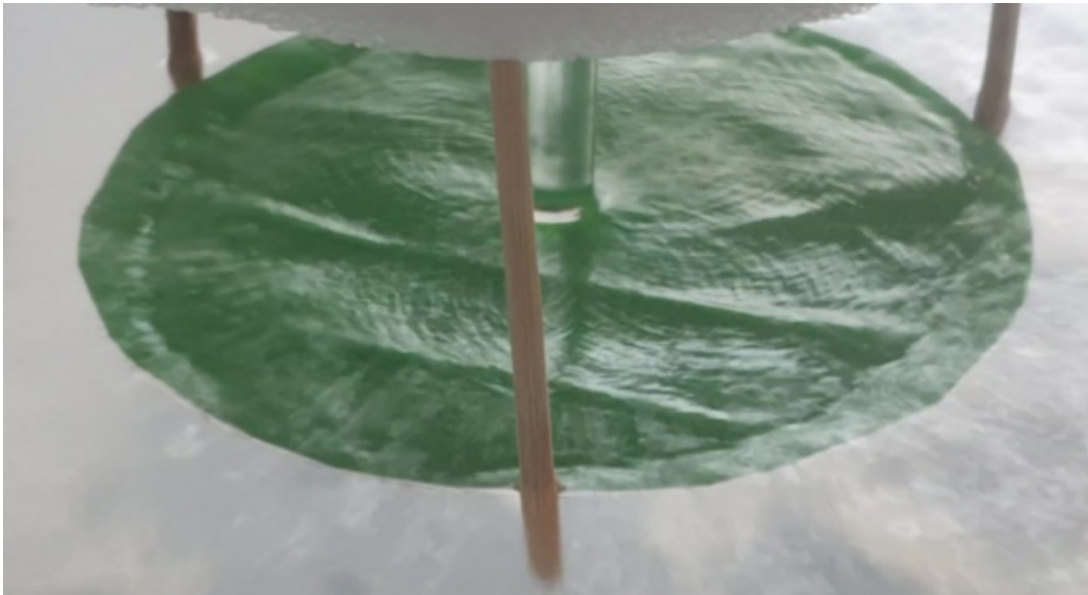
Ez az egyenlet közvetlenül csak az I. típusú lemezekre használható. A II. típusú lemezek esetében a tolóerőből származó D tagból ki kell vonnunk a lemez közepén lévő lyuk átmérőjét. Ezzel az összefüggéssel vizsgálhatjuk, hogy egy adott tömegváltoztatás, vagy egy adott sebességváltoztatás hogy befolyásolja a lemez süllyedését. A vízszög sebességének mérése ugyan nehézkes, de azt egyszerűen meghatározhatjuk a Torricelli-féle kiömlési törvénnyel. (Lásd: *Elméleti magyarázat, (4) egyenlet*)

A vízhozamot a tömeg függvényében vizsgáltam, ezzel meghatározhatjuk, hogy egy adott tömeg esetében mi az a minimális vízhozam, ami ahhoz kell, hogy a lemez úszni tudjon.

Ehhez a fő egyenlet eredeti alakját rendeztem át.

$$q_{min}(m) = \sqrt{\frac{ghD^2\pi^2\left(r^2 - \frac{D^2}{4}\right)}{4} - \frac{(m_{lemez} + r^2 \cdot \pi \cdot z \cdot \rho)gD^2\pi}{4\rho}} \quad (18)$$

Mint előző esetben is, ez az összefüggés csak az I. típusú lemezekre írható fel. Ahhoz, hogy a II. típusú lemezekre is igaz legyen, a tolóerőből származó két D tagból ki kell vonnunk a lyuk átmérőjét.



10. ábra: A hidraulikus ugrás jóval beljebb csúszott, mint a sima lemezes méréseken.

Megvizsgáltam a hidraulikus kitolódásának a mértékét a lemez süllyedésének a függvényében, amihez az alapgondolatot az adta, hogy a hidraulikus ugrás ott jön létre, ahol a lemez felületén áramló vízréteg sebessége megegyezik a kívülről a lemez felületére áramló vízközeg sebességével.^[3] Erre két megfigyelés alapján következtettem. Az első, hogy ha a függőleges vízszárnak nagyobb a sebessége, a hidraulikus ugrás is jobban kitolódik. Ugyan ez igaz fordítva is. Gyengébb vízhozam kisebb kitolódást eredményez.

A második megfigyelésem során megváltoztattam a lemez felületét. Ezzel megnőtt a vízréteg energiavesztesége és gyorsabban lassult. (10. ábra) Ebben a $r(h)$ összefüggésben már nem használhatjuk a vízréteg sebességére vonatkozó korábbi megközelítésünket, hogy az közel konstans. Ebbe a megközelítésbe már bele kell foglalnunk, hogy csökkenő tendenciát mutat. A vízréteg vastagságát továbbra is közel állandónak veszem.

Tudjuk, hogy a vízréteg sebessége r távolságban a lemez középpontjától megegyezik azzal a sebességgel, amivel a külső vízközeg a lemez felületére próbál áramlani.

Ez alapján:

$$u(r = r_{jump}) = \sqrt{2gh} = \frac{c}{r} \quad (19)$$

ahol c egy arányszám és r_{jump} a hidraulikus ugrás helye a lemez középpontjától számítva. Ennek az arányszámnak a meghatározásához tekintsük a következőket:

$$u\left(r = \frac{D}{2}\right) = \frac{2c}{D} = \sqrt{2gH} \quad (20)$$

vagyis a kontinuitásból adódóan azt feltételezzük, hogy közvetlenül a vízszögár mellett a vízrétegnek azonos a szögár irányú sebessége, mint magának a vízszögárnak a végsebessége. Az egyenletben szereplő H a felső tartály vízszintjének magassága. A két egyenletet c -re átrendezve a következő összefüggést kapjuk:

$$\sqrt{2gh} = \sqrt{2gH} \cdot \frac{D}{2r} \quad (21)$$

Az egyenletet átrendezzük r -re:

$$r(h) = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{H}{h}} \quad (22)$$

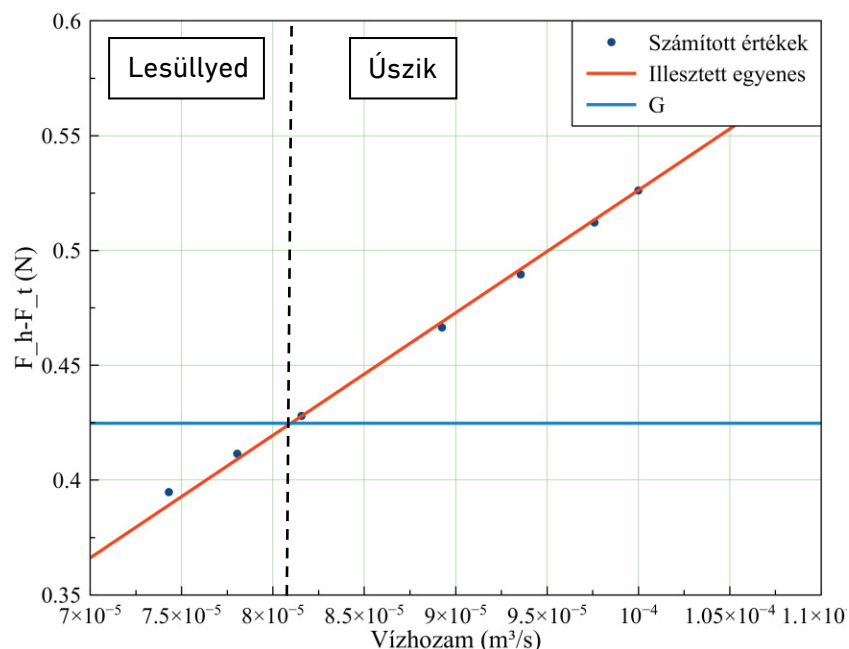
Alkottunk három egyenletet, amikkel összehasonlíthatjuk az elméletet a mérési eredményekkel és egy változóval határozhatunk meg paramétereket.

4. Mérések

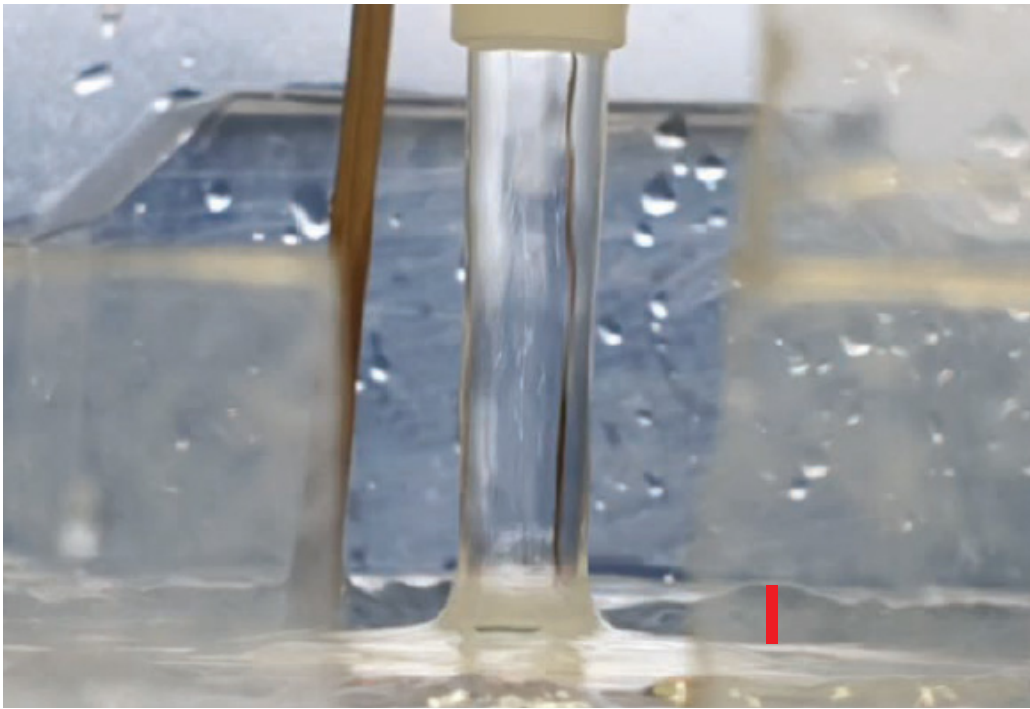
Ebben a részében a dolgozatnak szeretném bemutatni a méréseim folyamatát és módját, illetve magukat a méréseket. Diagramokon fogom bemutatni, hogy a mérések mennyiben támasztják alá az elméletet. A rész végén azt is szeretném bemutatni, hogy a mérések milyen hibaszázalékkal jártak.

4.1. Lebegés „jóslása”

A számított értékek meghatározzák, hogy egy adott vízhozamon mekkora súlyerőt tudunk ellensúlyozni, ezáltal meghatározhatjuk, hogy mi az a minimális vízhozam, amin a kísérlet elvégezhető. (11. ábra) A kék vonal jelöli ennél a lemeznél a súlyerőt. Az a vízhozamérték, ami a két vonal metszéspontjánál található, a minimális értéket, amin a jelenséget tapasztaljuk. Az csak egy bemutatott lehetőség, de a gyakorlatban, ha meg akarjuk a kísérlet előtt határozni, hogy mekkora vízhozamra van szükségünk, célszerűbb egyszerűen a statikai összefüggések címszó alatt feltüntetett $q_{min}(m)$ egyenletet használni.



11. ábra: Lebegés jóslása diagram 43,1g esetében. A diagram csak egy erős közelítés, ugyanis csak a vízhozamot és ennek függvényében a süllyedést vettem változónak. Azonban pontosan tudjuk, hogy a vízhozam növelése növeli a hidraulikus ugrás kitolódásának a mértékét is.



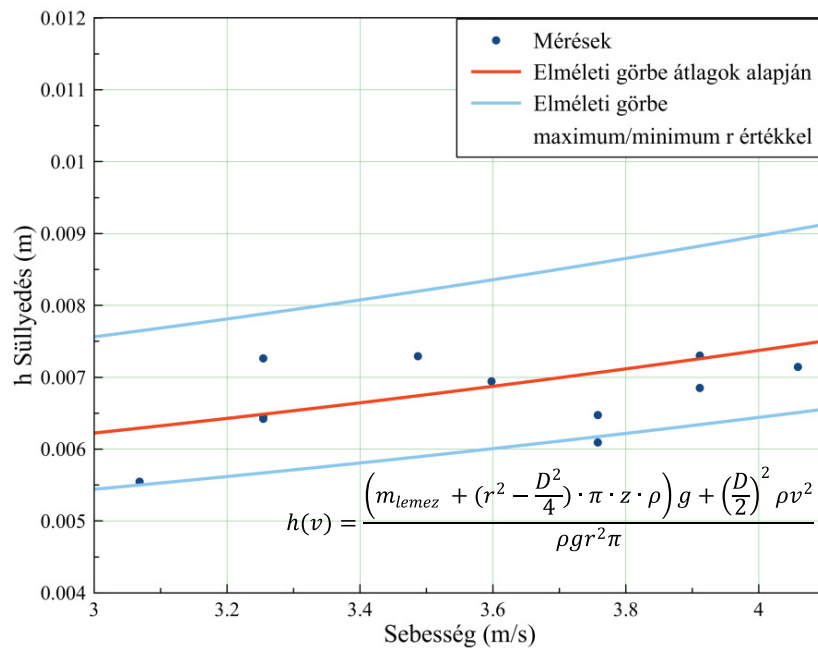
12. ábra: A jelenség oldalról. A piros vonal azt mutatja, hogy a mérések során melyik távolságot mértem, vagyis a lemez süllyedését.

4.2. Lemez süllyedése a vízszugár sebességének a függvényében

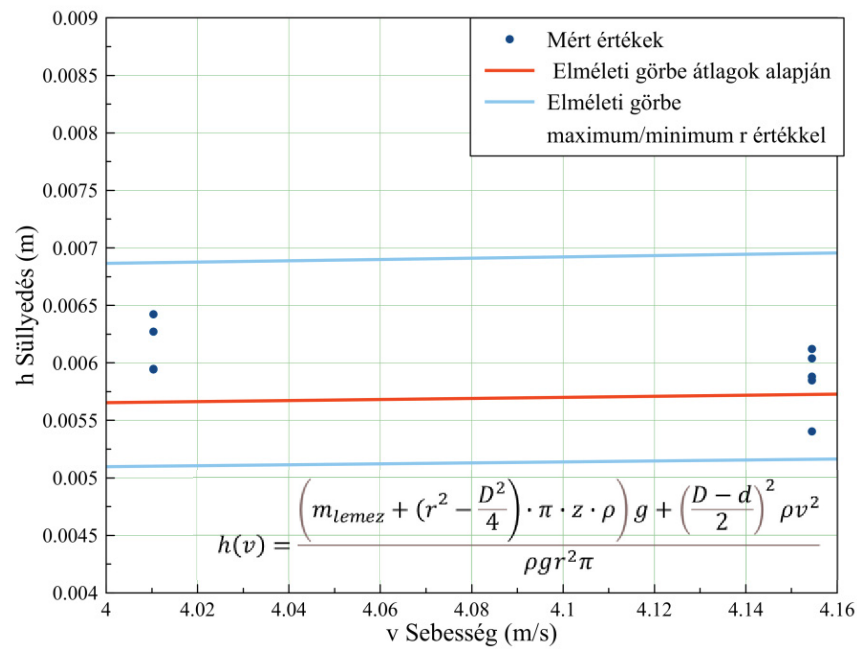
A lemez süllyedésének mérésekor oldalról vettem fel a jelenségét, és később azt elemeztem. Törekedtem rá, hogy minél lejjebb legyen a kamera, ezzel csökken a kamera általi torzítás. Ezen kívül igyekeztem minél több megvilágítással dolgozni, hogy a kis távolságok jobban látszódnak.

Tudjuk, hogy ez a mérés rendelkezik egy komoly hibával. Az egyensúlyhelyzet egyenletéből kiindulva, a h süllyedés a hidrosztatikai nyomás egyenletéből fakad. Ez azt jelenti, hogy a süllyedést a lemez aljától kellene számítani. Ennek a pontatlanságnak a javítására a mért értékhez hozzáadtam 2mm-t. Ez egy kicsivel több mint a lemez vastagsága. Azért kellett többet hozzáadni, hogy ezzel megközelítőleg kifejezzük az érmékre ható hidrosztatikai nyomást is.

Egy adott tömeggel, egy adott nagyból állandó sebességen hat mérést végeztem. Alapvetően akkor lennének tökéletesek a mérések, ha a többi paraméter (r, D) állandóak lennének. Ezt nem sikerült elérni, ezért a többi paramétert is mértem. A méréseket kiátlagoltam, így keletkeztek a következő mért adatok:



13. ábra: Süllyedés a függőleges vízugár sebességének függvényében. A diagramon I. típusú lemezes mérések vannak feltüntetve. Az elméleti görbén: $D=0.00849\text{m}$, $r=0.0597\text{m}$



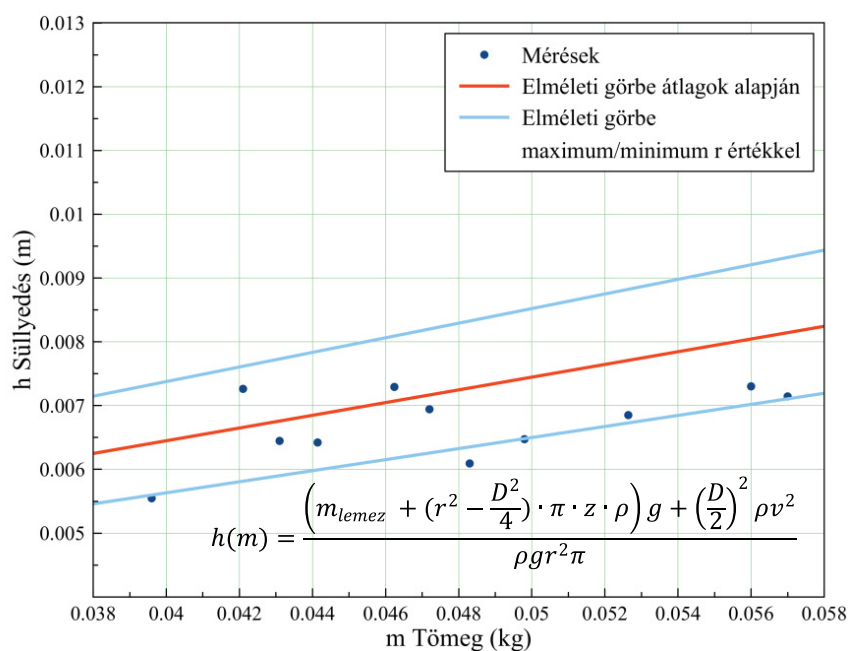
14. ábra: Süllyedés a vízugár sebességének a függvényében. A diagramon II. típusú lemezes mérések vannak feltüntetve. Az elméleti görbén: $D=0.008495\text{m}$, $r=0.0597\text{m}$

A 13. ábra esetében a mért értékek és az elméleti görbe között van némi eltérés, de még a legszélső esetekben is az eltérés körülbelül 14%, ami a hibaszámításaimon belül esik. Ez alapján megállapíthatjuk, hogy a méréseink jók és az elméletünk helytálló.

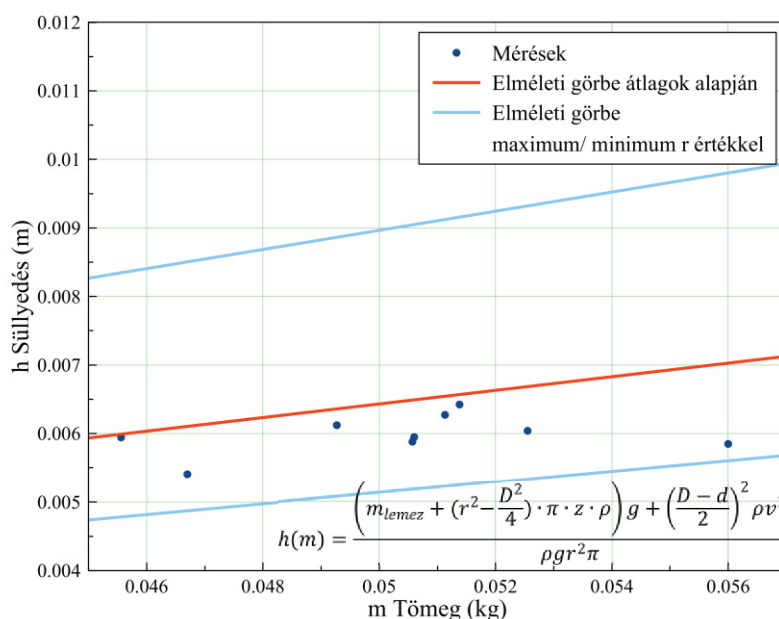
Ugyan a 14. ábra mérései is hibahatáron belülre esnek, de kevésbé erős bizonyíték. A méréseket csak kettő eltérő sebességgel végeztem el, így azok bizonyítási ereje is kisebb. Ennek ellenére az eddigi mérések nem cáfolják az elmélet helyességét.

4.3. Süllyedés a tömeg függvényében

Az előző vizsgálathoz hasonlóan a méréseket itt is oldalról végeztem. Minden tömegen hat mérést végeztem, miközben próbáltam a többi paramétert állandó értékeken tartani. Ezeken a diagramokon szintén csak kiátlagolt értékek láthatók.



15. ábra: Szükséges süllyedés a tömeg függvényében. I. típusú lemez.
Az elméleti görbén: $D=0.008579\text{m}$, $r=0.05679\text{m}$



16. ábra: Szükséges süllyedés a lebegés függvényében. II. típusú lemez.

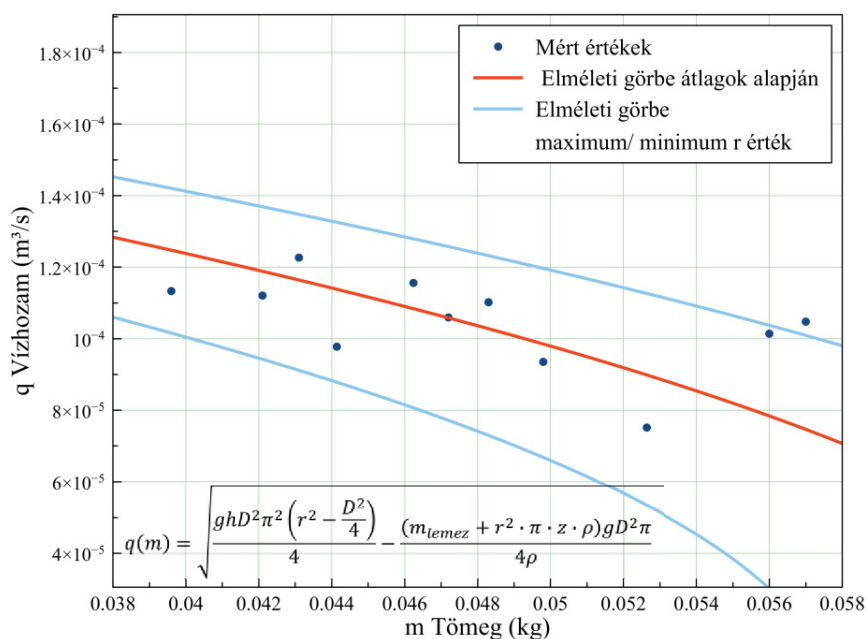
Az elméleti görbén: $D=0.008495m$, $r=0.0569m$

Mindkét diagram esetében az elméleti görbétől való eltérés szinte elhanyagolható. A mért értékek viszont láthatóan az elméleti görbe alatt vannak, vagyis a számítás többet jósol, mint amit a valóság alátámaszt. Ez annak tudható be, hogy az elméleti görbe a lemez és az érmék együttes süllyedésére vonatkozik. A mérésekhez hozzáadott korrekció csak becslésen alapult. A diagram mutatja, hogy minimálisan alábecsültem ezt az értéket, de a különbség olyan csekély, hogy a hibahatárokon belül elveszik. Összességében kijelenthetjük, hogy ez az elméleti görbe is helyesnek bizonyult.

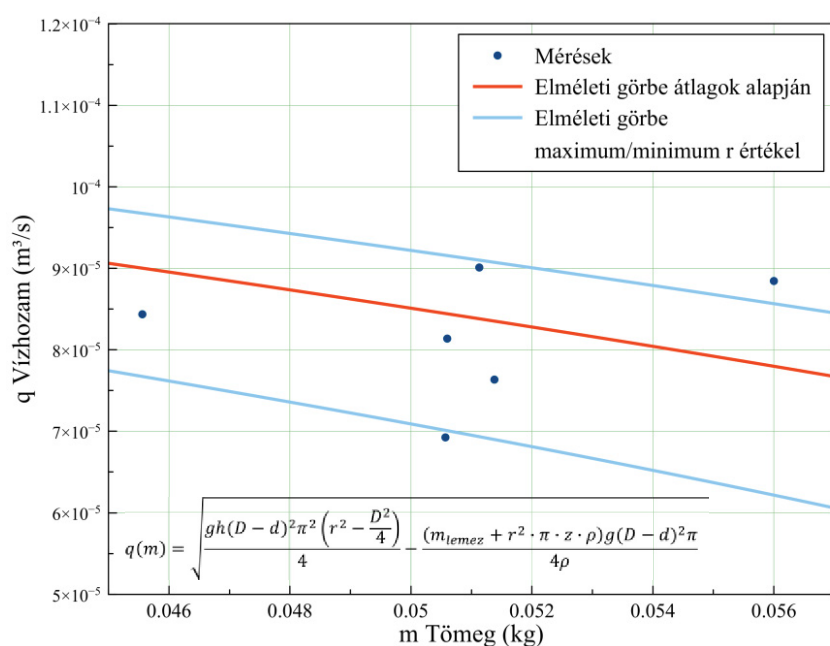
4.4. Minimális vízhozam a tömeg függvényében

Itt csak azt vizsgáltam, hogy egy adott vízhozam esetében egy adott lemez lebegni fog-e. Ennek a méréseknek egy komoly hibája, hogy a vízhozamot nem tudtam teljesen állandóan tartani. Ez alapján becsültem meg ennek a mérésnek a hibáját. (Lásd: Hibaszámítások)

Aki otthon szeretné elvégezni a kísérletet fontos, hogy tisztában legyen azzal, hogy a csapok vízhozama sem feltétlenül állandó. Befolyásolja, hogy a házban hány csap van nyitva, és milyen intenzitással.



17. ábra: Minimálisan szükséges vízhozam I. típusú lemezek esetében.
Az elméleti görbén: $D=0.00859m$, $r=0.0579m$



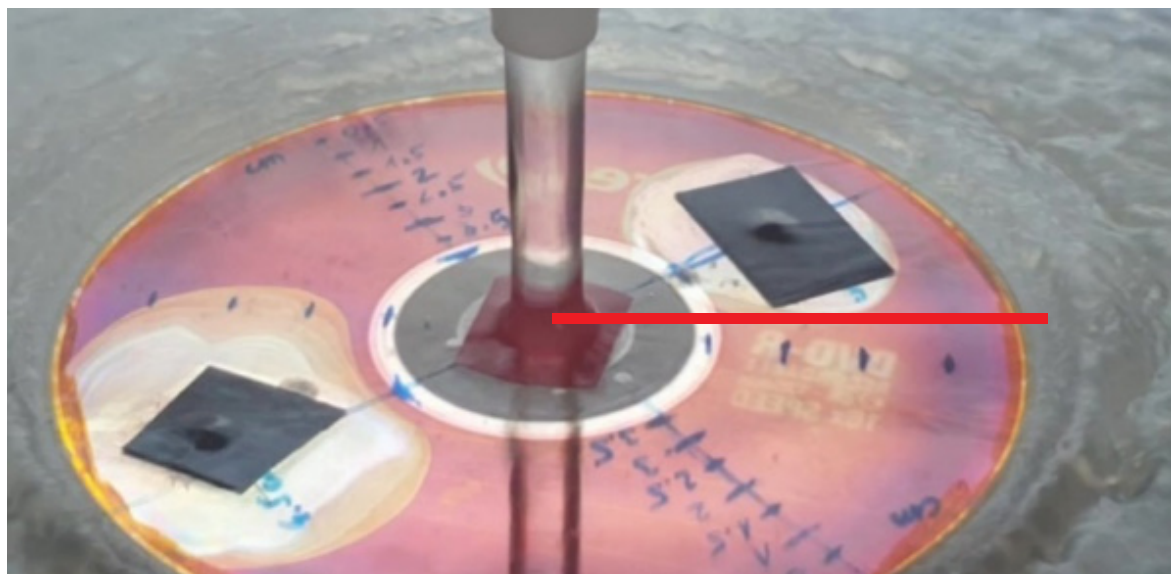
18. ábra: Minimálisan szükséges vízhozam II. típusú lemezek esetében.
Az elméleti görbén: $D=0.00849m$, $r=0.0579m$

A 17. ábra mérései mindenképp hibahatáron belülre esnek. Látható némi szórás, de ez elhanyagolható. A 18. ábra esetében vannak szélsőbb értékek, ahol az eltérés közel 17%. A vízhozam meghatározásánál viszonylag nagyobbak a hibahatárok, a 17%-os eltérés hibahatáron belül esik. Alapvetően kijelenthetjük, hogy a mérések viszonylag jól alátámasztják az elméletek helyességét.

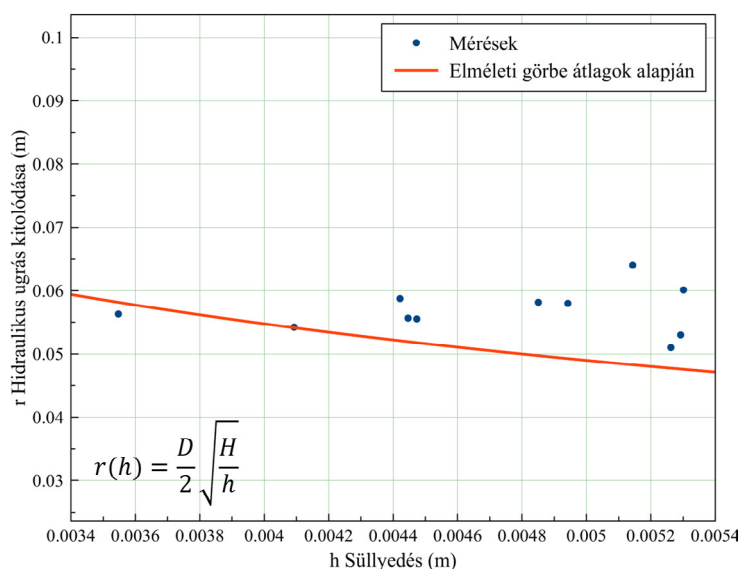
Jogosan merülhet fel mindenkiben a kérdés, hogy az elméleti görbék csökkennek, így előbb- utóbb el kell érniük az x-tengelyt. Ez azt jelentené, hogy egy bizonyos tömegben a lemezeknek megint lebegniük kell a vízszugár nélkül is. Hadd emlékeztessenek mindenkit a korábban bemutatott hidraulikus ugrás szerepére. Meggátolja, hogy a külső vízközeg a lemez tetejére folyjon. Ez egyből rámutat ennek az elméletnek a hibájára. Korábban már bebizonyítottuk, hogy a függőleges vízszugár sebessége összefügg a hidraulikus ugrás kitolódásával. Ez azt jelenti, hogy ha a vízszugár sebességét (vagyis a vízhozamot) csökkentem, visszább húzódik hidraulikus ugrás is, így a lemez felületére ható hidrosztatikai felhajtóerő is. Ezt az összefüggést az elméleti görbe során elhanyagoltam, mert a r -et állandónak vettem.

4.5. Hidraulikus ugrás kitolódása

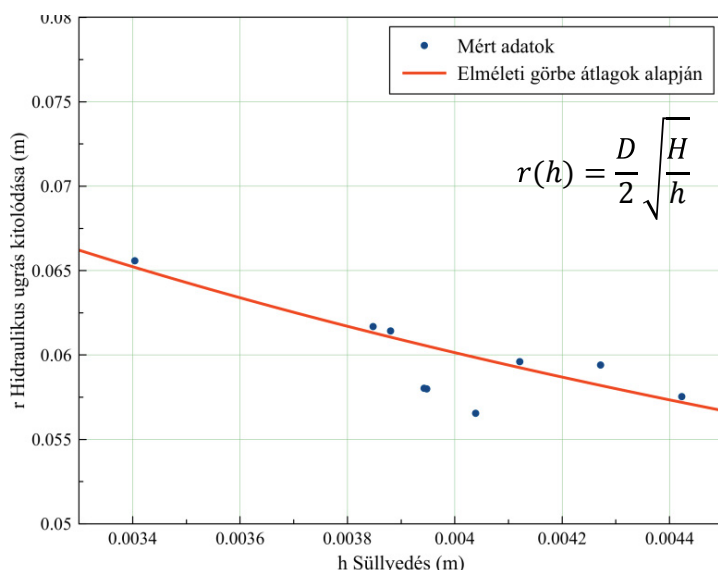
Ugyan jóval nagyobb távolságról beszélünk, mint a lemez süllyedése esetében, ennek mérése mégis nehezebb volt. Az ugrás helye a mérés közben folyamatosan változott, ráadásul a 7., illetve a 19. ábra is jól mutatja, hogy nem beszélhetünk általános r értékekről, pusztán az értékek átlagáról.



19. ábra: A kép látványosan mutatja a hidraulikus ugrás helyzetét. A piros vonal a mért távolságot jelöli.



20. ábra: Hidraulikus ugrás távolsága a lemez középpontjától a lemez süllyedésének függvényében. I. típusú lemezek esetében. Az elméleti görbén: $D=0.0084\text{m}$, $H=0.68\text{m}$



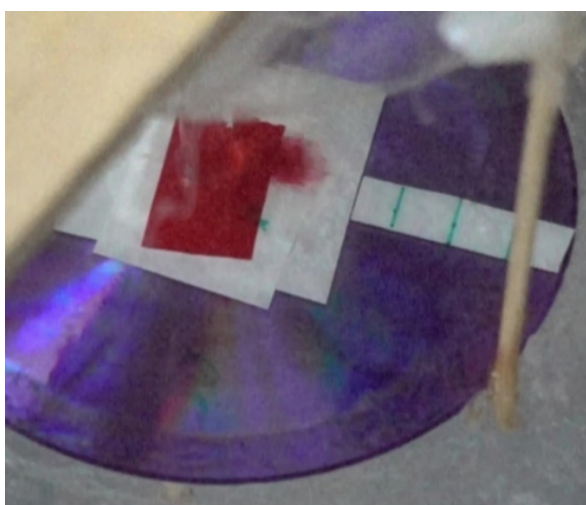
21. ábra: Hidraulikus ugrás távolsága a lemez középpontjától a lemez süllyedésének függvényében. II. típusú lemezek esetében. Az elméleti görbén: $D=0.0083\text{m}$, $H=0.85\text{m}$

A 20. ábra, vagyis az I. típusú lemezes mérések kisebb-nagyobb eltérést mutatnak az elméleti görbéhez képest. A II. típusú lemezeknél észrevehető, hogy a mérések az elméleti görbénél néhol eltérnek, de az eltérések maximum 5%-osak, ami egyértelműen hibahatáron belüli. Így összességében kijelenthetjük, hogy a mérések alátámasztják az elméletet.

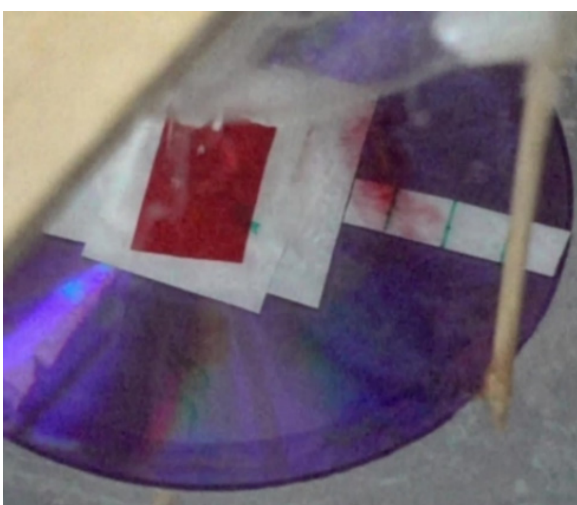
Fontos megemlíteni, hogy ezekben az egyenletekben használt h szintén a lemez süllyedésére vonatkozik, viszont ezekhez nem adtam hozzá a 2mm-t. Ebben az esetben azt a távolságot használjuk, amelyen a víz szabadon esik, hisz csak ezen a távolságon gyorsul. Ez a távolság csak lemez felületéig tart. A víréteg z vastagságát a mérete miatt elhanyagoltam!

4.6. Vízréteg sebessége

Mint azt már láttuk korábban, elég nagy sebességről beszélünk, így a mérése nem bizonyult egyszerűnek. Egy vörös festékcseppet ejtettem a felszínre, majd egy 1000frame/sec-es kamerával felvettem az útját. A képkockák között eltelt idő ismeretében elég volt megmérni, hogy két képkocka között mekkora távolságot tett meg a pötty, és ezzel kirajzolni egy hely-idő diagramot. Ez alapján meghatározhattam a sebességét egy adott időpillanatban. Ezzel kirajzolhattam a már bemutatott $u-r$ diagramot. (Lásd: 9.ábra)



22. ábra: Festék csepp a lemez felületén közvetlenül az esés után.



23. ábra: Festék csepp a lemez felületén miközben a lemez széle felé áramlik.

A 22. és 23. ábra jól mutatja, hogy a csepp közvetlenül a vízbe csapódást követően először elterjed, és aztán kezd a lemez széle felé áramlani. Ezért tudtuk a mérések első részét elhanyagolni.

4.7. Hibaszámítás

A dolgozat folyamán többször emlegettem hibahatárokat, de sosem magyaráztam meg, hogy mindezek miből származnak. A $h(m, v)$, illetve a $r(h)$ függvények esetében kiszámoltam a mérések szórását, és abból hibát számoltam. Az $r(h)$ mérések esetén 5%-os szórást mutattatnak. A becsléseim ennél magasabbra teszik, ugyanis mint már említettem, nem tudjuk a hidraulikus ugrást egy általános helyre tenni, pusztán

átlagértéket tudunk venni. Ehhez még az is hozzájárul, hogy a kitolódása intenzíven változik egy mérésen belül is. A h süllyedésre vonatkozóan 14%-os hibahatárt kaptam. Ez nagyából tükrözi a becsléseimet is, ugyanis a h értéke is ingadozott a méréseken belül.

A $q_{min}(m)$ mérések hibaszámításánál azt vettem alapul, hogy egy mérés során mennyit csökken a felső tartály vízszintje. Ez alapján meghatároztam az egy mérésen belüli vízhozamingadozást, és azt átszámoltam százalékká. Ez alapján 20%-ot kaptam. Ez a komoly pontatlanság rávilágít a kísérleti berendezés tökéletlenségére.

Összességében a hibahatárok 5% és 20% között mozognak, amit egy dinamikusan mozgó kísérlet esetén viszonylag jónak vehetünk.

Konklúzió

A kutatásom során két célom volt, és a dolgozat folyamán is törekedtem rá, hogy ehhez a két célhoz tartsam magam. Az elsődleges cél az volt, hogy rávilágítsak a jelenség magyarázatára és bemutassam a releváns paramétereket. Az elméleteimet sikerült gyakorlati mérésekkel is alátámasztanom. Több helyen pusztán megközelítésekkel dolgoztam, és bizonyos tényezőket elhanyagoltam, ezeket a jövőben még szeretném beleszőni az elméletekbe. Maradtak kérdések, amikre még nem adtam teljesen pontos választ. A jövőben ezeket is meg szeretném válaszolni. A másodlagos célom az volt, hogy bemutassak egy kutatást, amit otthoni körülmények között is bárki könnyen elvégezhet. Kísérleti berendezés címszó alatt leírtam, hogy otthoni körülmények között hogyan lehet előidézni a jelenséget, illetve mire kell közben figyelni. Remélem ezzel többen kedvet kapnak az otthoni kísérletezéshez.

Felhasznált irodalom:

- 1) Baranyai Klára: Vízben lebegő rézlemez, Fizika Szemle, 2015
- 2) Luzin: An unsinkable disk, Quantum (1999. Sept./Oct.), 42.old
- 3) Y. Brechet, Z. Nédá: On the circular hydraulic jump, American Journal of Physics, August 1999
- 4) Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 1978
- 5) KöMaL mérés 2015 október