

Hártyára ejtett labda

Szederkényi Kincső - Budapesti Német Iskola

Dr. Hömöstreier Mihály – ELTE TTK

Kivonat

A dobok hangja mindenki számára ismerős lehet, és forrása elsőre triviálisnak tűnhet. A hangot és annak okát jobban megvizsgálva egy nagyon érdekes, összetettebb jelenségcsoportot fedezünk fel. A hang létrejöttének pontosabb megértéséhez a dobok működését egyszerű eszközökkel reprodukáljuk, egy műanyag pohárra erősített membránra ejtett fém golyó segítségével. A membránra érkező golyó becsapódása során létrejövő hang különböző frekvenciáit és intenzitását megvizsgálva különleges jellegzetességeket és szabályosságokat figyelhetünk meg, amik a fizikai értelemben egyszerű elméleti modellünk eredményeivel is jól összeegyeztethetőek. Ez alapján látható, hogy egy ilyen dobszerű rendszernél mely tagok játszanak domináns szerepet a hang létrejöttében. Méréseinkből kiderül, hogy a modellünk a vizsgált jelenségre megfelelő pontossággal alkalmazható, így egy összetett rendszer leírását sikerült egy egyszerű, akár középiskolai szinten értelmezhető modellel és kísérleti összeállítással megalkotni.

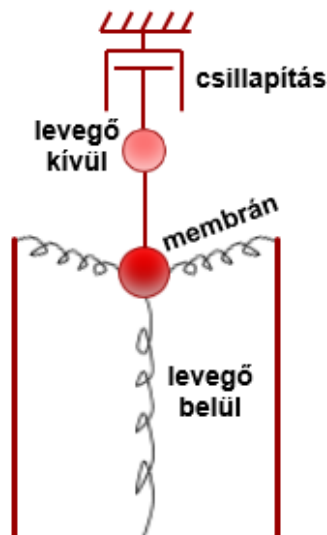
1. Bevezetés

Egy fém golyó pohárra erősített gumimembránnal való ütközése különböző helyeken, különböző módon csoportosítható rezgéseket hoz létre, amiknek összességét külső szemlélőként egy egyszerű, rövid hangként érzékelünk. Különböző elméletekkel belátjuk, hogy a rendszer domináns frekvenciáit nem a poháron belül vagy kívül létrejövő hanghullámok adják, hanem a membrán felszínén létrejövő rezgések. Ezt több paraméter figyelembe vételével méréseink is bizonyítják.

2. Elmélet

2.1 Egyszerű fizikai modell

A golyó membránnal való érintkezése során létrejövő rezgéseket három csoportba osztjuk. Egyrészt megfigyelhetők a membrán felületén kialakuló állóhullámok, és a poháron belüli, illetve azon kívüli rezgések, ahol a levegő egy csillapító hatást fejt ki a hártára. Ezek a hanghullámok részben egymást befolyásolva alkotják a létrejövő hangot, ami az ütközés során és utána hallható. A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy milyen releváns szerepet játszanak ezek a csoportok a hang szempontjából és hogyan befolyásolják azt.

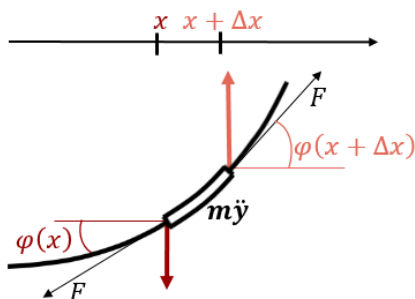


1. ábra. Mérési felállítás analóg modellje

Membrán rezgései

2.2 Egydimenziós analógia

A membrán rezgésének kialakulását először a lehető legegyszerűbb módon szeretnénk megérteni, amihez a jelenséget egydimenzióban vizsgáljuk meg. Ehhez egy kis húrrész szabad rezgésére felírjuk a mozgásegyenletet,



2. ábra. Egy húr szabadrezgési modellje

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = F(x) \cdot \sin(\phi(x)) - F(x + \Delta x) \cdot \sin(\phi(x + \Delta x)) = \mu \Delta x \ddot{y} \rightarrow F \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \Rightarrow c^2 y'' = \ddot{y}$$

ahol μ a lineáris tömegsűrűség, ω a körfrekvencia, k a hullámszám és $c = \sqrt{F/\mu}$ a hullám terjedési sebessége. Ezek alapján a megfelelő matematikai műveletek segítségével megkapjuk az egydimenziós hullámegyenletet és ennek egy lehetséges megoldását [1]:

$$y(x, t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

2.3 Kétdimenziós hullám

Azonban a mi esetünkben nem egy húrral dolgozunk, hanem egy membrán viselkedésével, így több dimenziót figyelembe kell vennünk. Tehát az egydimenziós analógiához hasonlóan, itt egy kis membrándarab szabadrezgését vizsgáljuk meg, amihez egy rezgő membrándarabra felírt mozgásegyenletből levezetett kétdimenziós hullámegyenletet használunk,

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} \\ \Rightarrow c^2 \cdot \nabla^2 z(x, y, t) = \ddot{z}(x, y, t)$$

ahol $\nabla^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ a Laplace operátor [1], σ a területi sűrűség és S a membrán feszítettsége (N/m).

2.4 Áttérés polárkoordináta-rendszerre

Egy kör alakú membrán használata során, vagyis mikor a membrán egy kör alakú peremnél ér véget, érdemes áttérnünk a Descartes-féle koordináta-rendszerből a polárkoordináta-rendszerre, hogy később egyszerűbbek és jobban használhatóak legyenek számításaink. Ily módon használunk egy időfüggő és egy helyfüggő tagot, amely a sugártól és szögtől függ.

A korábban említett kétdimenziós hullámegyenletet parciálisan deriválva és ez elmozdulással leosztva természetesen egy harmonikus rezgőmozgást kapunk:

$$\frac{c^2 \cdot z_t(t) \cdot \nabla^2 z_p(r, \varphi)}{z_p \cdot z_t} = \frac{z_p \cdot \ddot{z}_t(t)}{z_p \cdot z_t} = -\omega^2$$

Ezt felhasználva a z_t időfüggő tagra az általános megoldás

$$\ddot{z}_t(t) = -\omega^2 z_t(t)$$

Ami z_t -re megoldva

$$z_t = \cos(\omega t + \alpha_0)$$

z_p helyfüggő tagra az általános megoldás

$$\nabla^2 z_{r,\varphi} = -k^2 z_{r,\varphi}$$

Ennek szögfüggő tagjára az általános megoldás

$$z_\varphi'' = -n^2 z_\varphi$$

Ami z_φ -re megoldva

$$z_\varphi = \cos(n\varphi + \zeta_0).$$

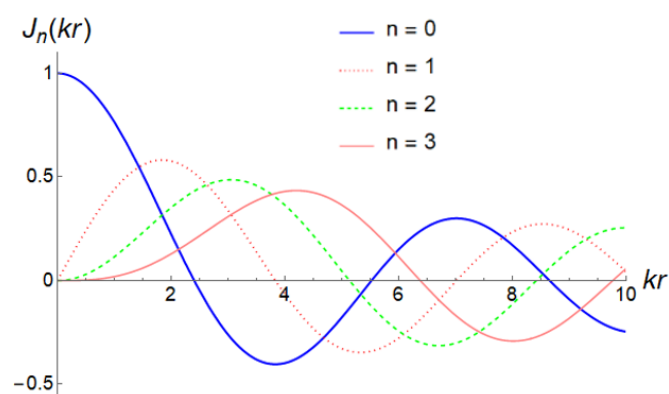
Viszont a sugárfüggő tag megoldása a Bessel függvény [1]:

$$z_r(r) = J_n(kr)$$

Ezek alapján egyértelműen látszik, hogy a szög-és helyfüggő tagok megoldásai cosinus-függvényekkel írhatók le, azonban a sugárfüggő tag megoldása nem, amit a továbbiakban ismerünk meg jobban.

2.5 Bessel-függvény

A sugárfüggő tag megoldása a Bessel-függvénnyel írható le, ahol minden n -értékhez végtelen megoldás tartozik.



3. ábra. Első négy Bessel-függvény (Wolfram Mathematicával rajzolva)

Ezen a ponton egy peremfeltételt kell bevezetnünk, hiszen egy kör alakú membránról van szó, ami nem mozog a pohár legszélén, a pereménél, miszerint:

$$z_r(R) = J_n(kR) = 0.$$

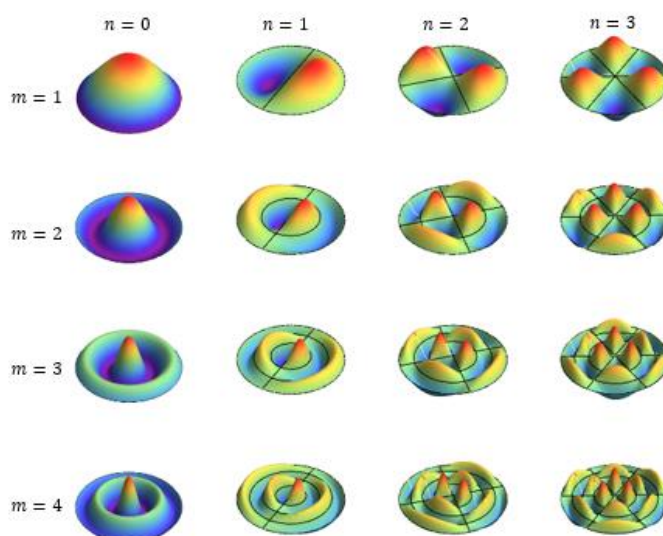
Ez azt jelenti, hogy a Bessel-függvények zérushelyeit keressük, azokat a pontokat, ahol $J_n(kr) = J_n(\gamma_m) = 0$.

$m \backslash n$	0	1	2
1	2.4048	3.8317	5.1356
2	5.5201	7.0156	8.4172
3	8.6537	10.1735	11.6198
4	11.7915	13.3237	14.7960
5	14.9309	16.4706	17.9598

4. Ábra. $kr = \gamma_{mn}$ – zérushelyek

A peremfeltételünk segítségével már megadhatók egy kör alakú membrán módusai:

$$k_{mn} = \frac{\gamma_{mn}}{R}$$



5. ábra. Kör alakú membrán módusalakjai (Wolfram Mathematicával rajzolva), ahol m a csomókörök számát, n a csomóvonalak számát jelzi.

Ezek alapján pedig természetesen az egyes módusok sajátfrekvenciái is kiszámolhatóak:

$$\omega_{mn} = k_{mn}c = \frac{\gamma_{mn}c}{R}$$

2.6 Frekvenciaelemzés

A Bessel függvények zérushelyei (4. ábra) alapján, ha az egyes zérushelyek első zérushelyhez ($\gamma_{1,0}$) képesti arányát vesszük megkapjuk a Bessel arányokat.

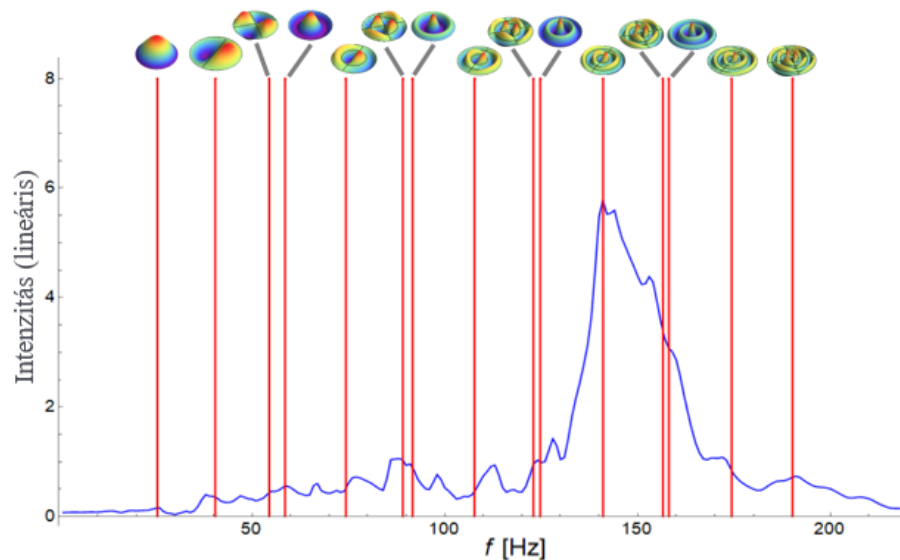
$m \backslash n$	0	1	2
1	1	1.5934	2.1356
2	2.2955	2.9173	3.5002
3	3.5985	4.2305	4.8319
4	4.9033	5.5405	6.1527
5	6.2088	6.8491	7.4683

6. ábra. Bessel arányok ($\gamma_{mn}/\gamma_{1,0}$)

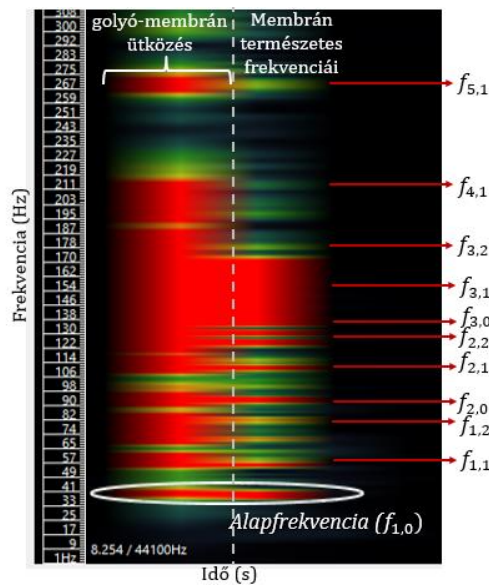
Ezek segítségével az alapfrekvenciához ($f_{1,0}$) képest a különböző módusokhoz tartozó frekvenciák kiszámolhatóak:

$$f_{mn} = \frac{\gamma_{mn}c}{2\pi R}$$

Ezeket az elméleti frekvenciákat egy méréssel összehasonlítva láthatjuk, hogy az egyes módusokhoz tartozó frekvenciák a mérési eredményben is dominánsan jelennek meg.

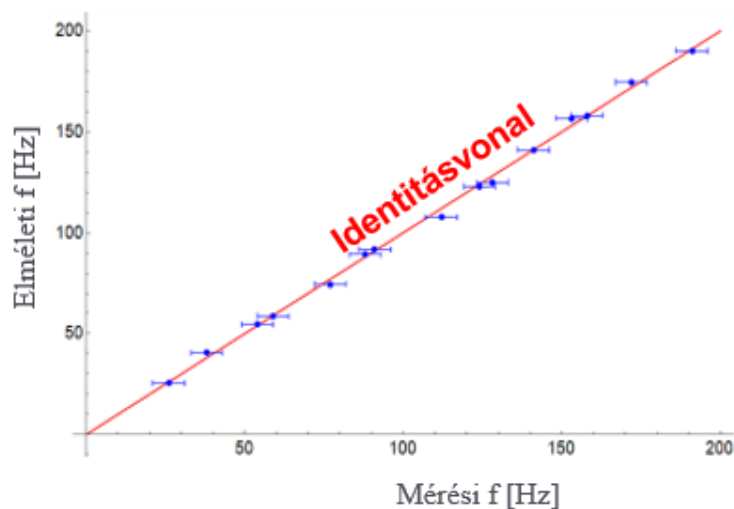


7. ábra. Fourier transzformált mérés (kék) domináns frekvenciáinál látható módusokhoz tartozó frekvenciák (piros egyenesek)



8. ábra. Fourier transzformált mérés domináns frekvenciáinál látható módusokhoz tartozó frekvenciák, ahol a szín a hang intenzitását jelzi (piros: magasabb intenzitás, zöld: alacsonyabb intenzitás)

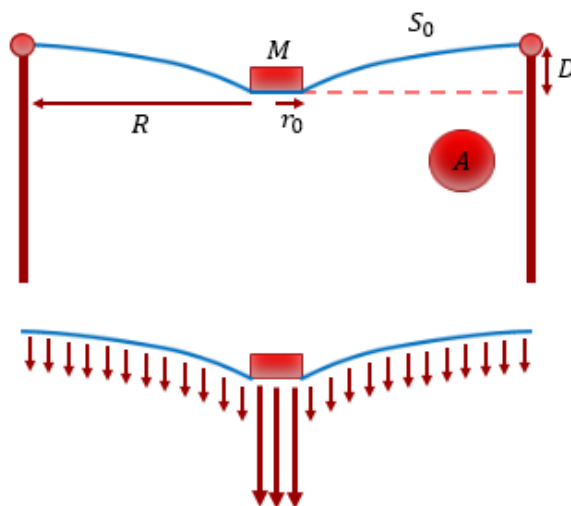
A mérés domináns, kimagaslóan magas intenzitású frekvenciáit és az módusokhoz tartozó elméleti frekvenciákat egy identitásvonal segítségével vizualizáljuk, így látszik, hogy az elmélet jól illik az mérési eredményekkel összevetve.



9. ábra. Elméleti és mérési eredmények összehasonlítása identitásvonallal

2.7 Alapfrekvencia meghatározása

Ahhoz, hogy a módusokhoz tartozó frekvenciákat meg tudjuk adni a Bessel arányok segítségével, szükségünk van az alapfrekvencia magasságára, hiszen az arányok ehhez képest adják meg a többi frekvenciát. Ennek meghatározásához először a membrán feszítettségét kell tudnunk definiálni. Ehhez a membránra egy súlyt helyezünk, majd megmérjük a kitérést. Így az ismert értékekkel meg tudjuk határozni a membrán feszítettségét.



10. ábra. Alapfrekvencia megadásához szükséges mérési felállítás

A feszítettség ismeretében pedig kiszámolható az alapfrekvencia:

$$f_0 = \frac{k_{1,0}}{2\pi R} \sqrt{\frac{S}{\sigma}}$$

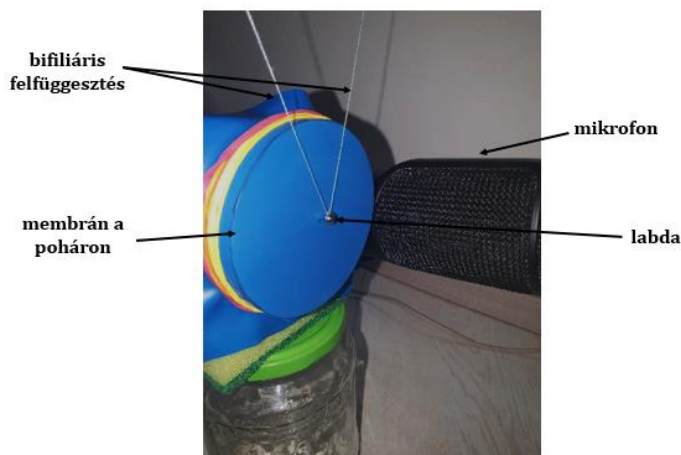
Mi esetünkben ennek értéke $\approx 25.4 \text{ Hz}$ (7. ábra).

3. Mérések

3.1 Mérési felállítás

A mérések jó reprodukálhatóságának, megismételhetőségének érdekében különböző méretű műanyag 3D-nyomtatott poharakra különböző erősségű homogén gumimembránokat feszítünk befőttesgumik segítségével és az így alkotott dobszerű rendszert egy szivacsra állítjuk, hogy elnyelje a lehetséges egyéb zajokat.

Ha a labdát felülről ejtjük a membránra könnyen elugrál az eredeti érintkezési pontjától, ezzel akaratlanul paramétereket változtatva, zavaró tényezőket okozva. Ennek elkerüléséhez cérnával bifiliárisan felfüggesztett labdát használunk, ami mindig ugyanott ütközik így a membránnal, rendkívüli pontosságot eredményezve. A létrejövő hangot egy mikrofon segítségével vesszük fel.

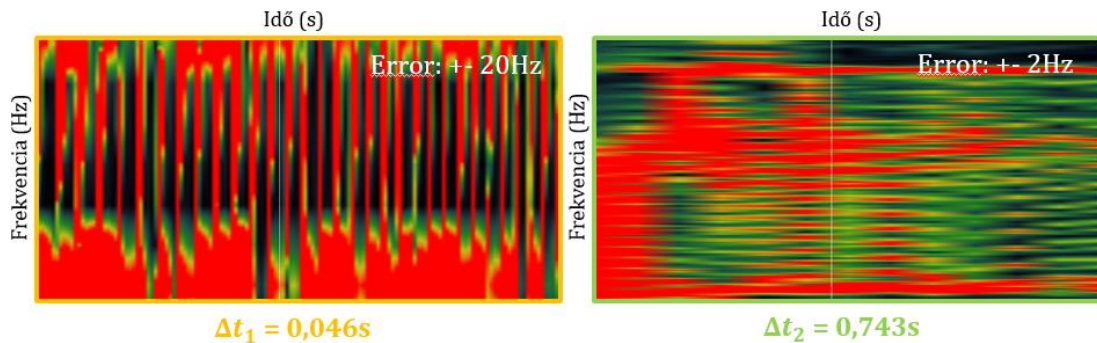


11. ábra. Mérési felállítás

3.2 Mérések elemzése, hibaelemzés

A mikrofonnal felvett hang elemzése a létrejövő frekvenciák intenzitása és hossza szerint Fourier transzformációval történt, a Sonic Visualiser [2] és Wolfram Mathematica [3] programok segítségével.

A létrejövő hibák legfőképpen tehát a Fourier transzformációnál kiválasztott időablak időhosszából származnak. Ha a kiválasztott időablak hosszabb, a frekvenciákat sokkal nagyobb pontossággal tudjuk megadni, viszont rövidebb időablak használatakor a hang létrejöttének idejét és hosszúságát lehet pontosabban meghatározni.



12. ábra. Fourier-transzformáció pontatlanságának vizualizációja

Persze felmerül hibalehetőségként az a kérdés is, hogy a bifiliáris felfüggesztéssel vajon tényleg utánosztható-e a golyó mozgása? Amellett, hogy ha a golyó felülről érkezik, a pattogások sűrűsödése gyorsabban történik és az intenzitáscsökkenés is máshogy változik a két esetben, a golyó oldalra elpattogásának veszélyét is limitáljuk ezzel, tehát pontosabb mérési eredményeket kapunk.

Emellett a mikrofonnak is fontos hatása van a mért intenzitásra. A rendszer körül létrejövő hangtér nem szimmetrikus, mivel a módusalakok (5. ábra) sem szimmetrikusak, így annak is hatása van a mért intenzitásokra, hogy a mérésben hol helyezkedik el a pohár körül a mikrofon.

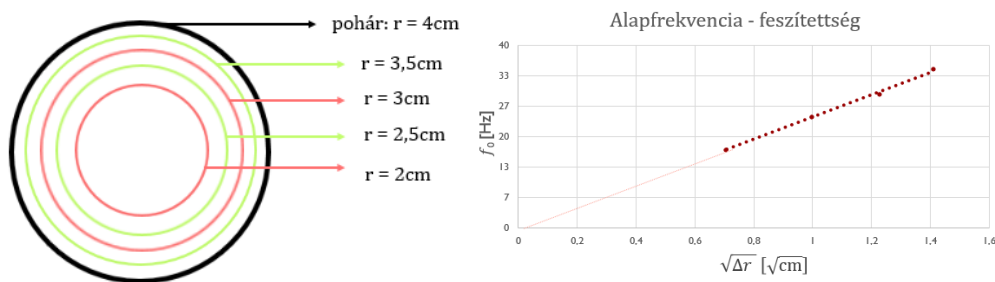
3.3 Vizsgált paraméterek

A megvizsgált paraméterek a membránra (feszítettség, szimmetria, alak, ütközés helye) és belső levegőre (pohár térfogata, nyitott poharak) vonatkoznak.

3.3.1 Membrán feszítettsége

Egy membránt különböző feszítettségekkel lehet a pohárra erősíteni, amik különböző frekvenciákat hoznak létre. Ennek pontos megméréséhez különböző sugarú koncentrikus köröket rajzolunk a membrán felületére és azt úgy nyújtjuk meg, hogy egy-egy kör pont a pohár pereménél legyen.

A $S \sim \epsilon \cdot \Delta r$ és $f_0 \sim \sqrt{S}$ arányosságokból, ahol S a membrán feszítettsége N/m-ben, és ϵ a rugóállandó tudjuk, hogy $f_0 \sim \sqrt{\Delta r}$, amit a mérések is jól mutatnak.

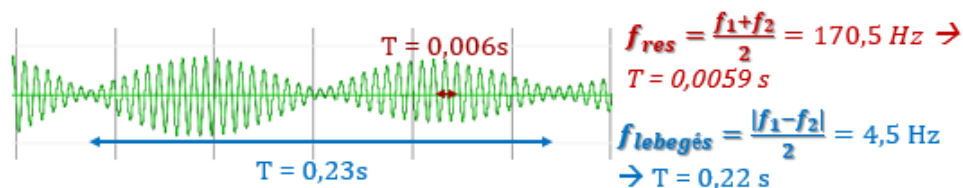


13. ábra. Bal: Feszítettség változtatására használt koncentrikus körök sugarának ábrázolása; jobb: alapfrekvencia változása különböző feszítettségeknél

3.3.2 Aszimmetrikus feszítés – lebegés

Az előző példával ellentétben, ha a peremre illesztett membránra nem egy kört, hanem egy ellipszis alakját rajzoljuk, egy érdekes jelenséget fedezhetünk fel. Mivel az oldalakon nem egyforma a feszítettség, a hang terjedési sebessége, így a frekvenciák sem lesznek egyformák, tehát létrejön két egymáshoz feltűnően közeli frekvencia. Ez a kettőződési-effektus pedig a lebegéssel is összefügg.

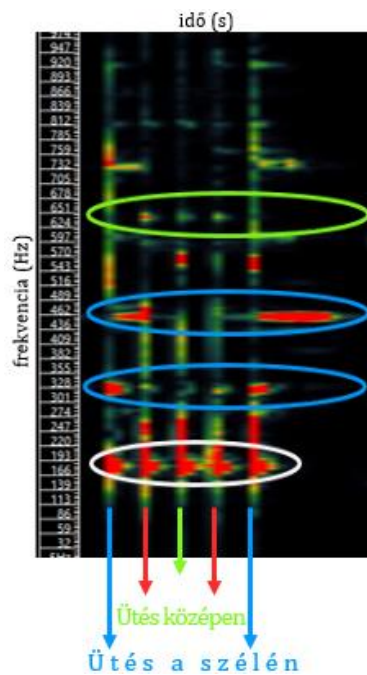
Két ilyen kiválasztott egymáshoz közeli frekvencia magasságai $f_1 = 166\text{Hz}$ és $f_2 = 175\text{Hz}$. Elméleti értéküket kiszámolva a mérésihez nagyon közel kerülünk.



14. ábra. Bal: mérési eredmény; jobb: elméleti eredmény

3.3.3 Ütközés helye

A membrán megütésének pozíciójának pontosabb megvizsgálásához egy nagyobb átmérőjű dobót használunk. Attól függően, hogy a szélén vagy közepén lesz megütve a felület, különböző frekvenciák dominálnak. Ez azzal magyarázható, hogy a megütés helyétől függően mindig azok a módusok jelennek meg erősebben, azaz lesznek relevánsabbak, amelyeknél az ütközés helyénél nincsen csomósík. (5. ábra), így a különböző módusoknál mindig más frekvenciák játszanak nagyobb szerepet.



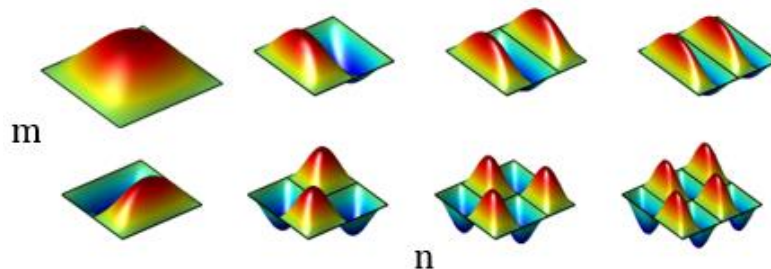
15. ábra. Domináns frekvenciák helyfüggése

Szín az a hang intenzitását jelzi (piros: magasabb intenzitás, zöld: alacsonyabb intenzitás)

Azonban kisebb poharak és kisebb feszítettségű membrán használata esetén nem figyelhető meg releváns különbség, ha különböző helyeken csapódik be a labda, ez csak a doboknál volt jelentős.

3.3.4 Négyzet alakú membrán

A membrán peremének alakját és ezzel a membránon kialakuló rezgések határának megváltoztatásával a rajta kialakuló módusok, így frekvenciáik is változnak.

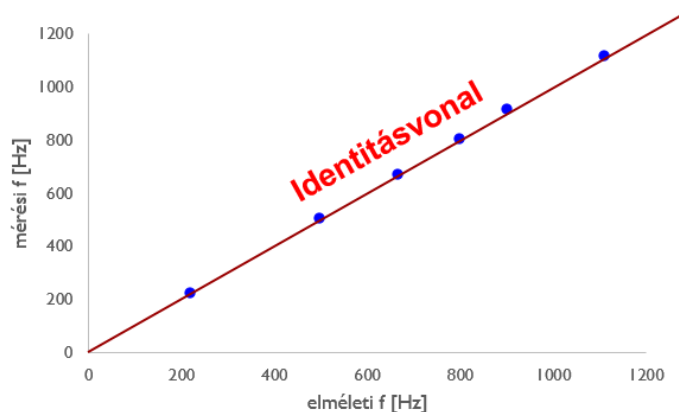


16. ábra. négyzet alakú membrán módusalakjai [1]

Tehát a membrán alakját a pohár alakjának változtatásával szabályoztuk. A négyzet alakú membrán egyes módusainak frekvenciájának meghatározásához [1]

$$2\pi f = \omega_{mn} = \frac{c\pi}{L} \sqrt{m^2 + n^2}$$

egyenletet használjuk. A mérés elvégzésekor a golyó a membrán középpontjába lett ejtve, emiatt azok a módusok, amelyeknél egy csomósík közepén fut végig kevésbé valószínű, hogy kialakulnának. Az összehasonlításnál is tehát azon módusok sajátfrekvenciáival hasonlítjuk össze a mérési domináns frekvenciákat, melyeknél közepén nincsen csomóvonal.



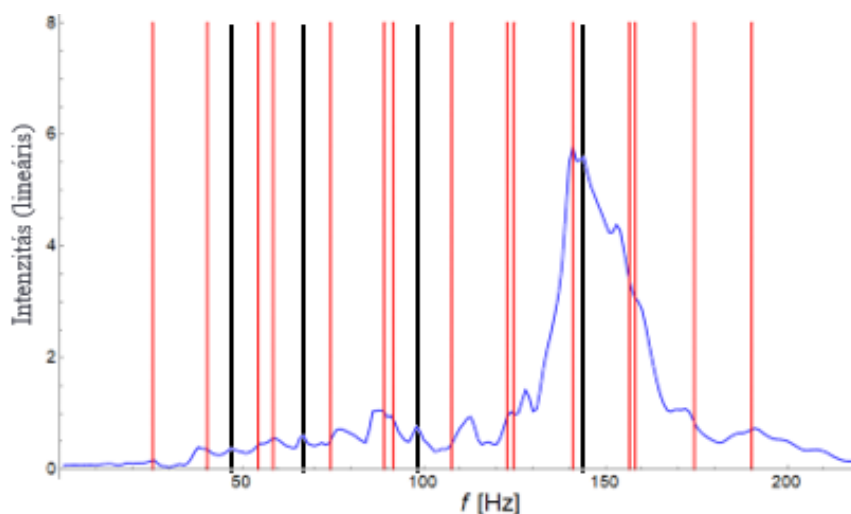
17. ábra. Négyzet alakú membrán mérési és elméleti eredményeinek összehasonlítása identitásvonallal

3.4 Pohárban lévő levegő hatása

A 17. ábrán látható, hogy módusokhoz tartozó frekvenciák (7. ábra) mellett észreveszünk egyéb dominánsnak tűnő frekvenciákat is a mérésben, és a kérdés fennáll, hogy ők vajon honnan miért jönnek létre. Egyes módusok sajátfrekvenciájának meghatározásához használhatjuk a következő egyenletet [1]:

$$f_{lmn} \propto \sqrt{\left(\frac{J_{mn}}{\pi R'}\right)^2 + l^2}$$

ahol L a pohár magassága és $R' = \frac{R}{L}$. Ez alapján azoknak a relevánsnak tűnő frekvenciáknak az okát is megtaláltuk, amik nem a Bessel arányokból származnak.



18. ábra. Fourier transzformált mérés (kék) domináns frekvenciáinál látható módusokhoz tartozó frekvenciák (piros egyenesek), módusok sajátfrekvenciájához tartozó frekvenciák (fekete)

Ha a módusokat figyelmen kívül hagyva, csak belső levegő térfogatát vesszük figyelembe, a pohárban lévő légüreg rugóval való helyettesítéséhez megadhatjuk a rugó merevségét:

$$k_c = \rho_0 \cdot c^2 \cdot \frac{A^2}{V}$$

ahol ρ_0 a levegő sűrűsége, c a hangsebesség, V a pohár térfogata, A a pohár szájának felülete, k_c a belső levegő rugóállandója.

Ebből következik, hogy pohár térfogatának csökkenésével, az alapfrekvencia is csökkenni fog, hiszen tudjuk, hogy

$$f \sim \sqrt{\Sigma k}$$

$$\Sigma k \sim k_m + k_c$$

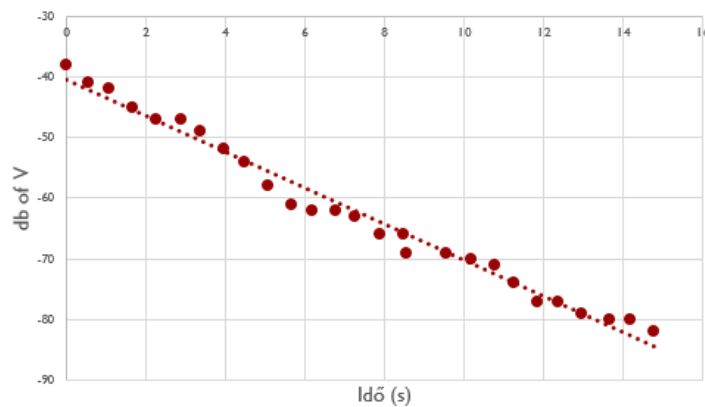
3.4.1 Nyitott poharak

A belső levegő hatásával kapcsolatban, ami nagyon érdekes, hogy ha egy nyitott pohárral végezzük el ugyanazt a mérést, azaz egy alsó része nélkül membránnal ellátott pohárral, a sípokhoz hasonlóan, szabályosság vehető észre a frekvenciáknál. Azonban ezek nem a jellemzően várt frekvenciák lesznek, mivel a membrán miatt egy csillapított légmozgás jön létre.

3.5 Külső levegő hatása

3.5.1 Hangintenzitás változása

A külső térnek hatása van a hangintenzitásra, ugyanis a vele együtt mozgó levegő tömege csillapító hatást fejt ki rá. Egy logaritmikus skálán az idővel való decibel intenzitáscsökkenés szépen látszik.



19. ábra. Hangintenzitás csökkenése idővel logaritmikus skálán

3.5.2 Frekvenciaváltozás

A külső terhelő levegő frekvenciaváltoztató hatása egy-egy membránmódus légterhelés hatására létrejövő sajátfrekvenciájával fejezhető ki:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sqrt{k/(m_m + m_t)}}{\sqrt{k/m_m}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{8\rho_0 R}{3\pi\sigma}}}$$

ahol m_m a membrán tömege, m_t a külső terhelő levegő tömege és k a membrán módusához tartozó rugóállandó. Mi esetünkben $R = 10 \text{ cm}$, $\sigma = 1 - 3 \text{ kg/m}^2$, $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$. Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{\omega'}{\omega} \approx 0.95 - 0.98$$

azaz a frekvenciacsökkenés nagyon kicsi, közel elhanyagolható.

4. Konklúzió

Analóg modellünk szerint különböző rezgések alakulnak ki a jelenséget körülvevő térben, amiket elméleti úton és mérésekkel is megvizsgáltunk. Egyértelműen láthattuk, hogy a rendszerben a membránon kialakuló hanghullámok dominálnak, amiknek frekvenciáit a meghatározott alaphangfrekvenciához képesti Bessel-arányokból megadtunk, és amelyek értékeivel a méréseink domináns frekvenciái is egyeznek. A mérésben más domináns frekvenciákat a belső levegő hangjával magyarázunk, emellett a külső tér csak kis változtatását is belátjuk. A több megvizsgált paraméter mellett azt is belátva, hogy a különböző részek erősen befolyásolják egymást is, összességében jól látható, hogy a mérések szépen illeszkednek az elmélettel.

Irodalom

- [1] A hangszerek fizikája jegyzet – Fiala Péter -
<https://last.hit.bme.hu/sites/default/files/documents/hangfiz.pdf>
- [2] Sonic Visualizer <https://www.sonicvisualiser.org/>
- [3] Wolfram Mathematica <https://www.wolfram.com/mathematica/>