

Tranziens nyírási instabilitások vizsgálata

Tudományos Diákköri Dolgozat

Készítette:

Kadlecsik Ádám

Fizika BSc III.

Témavezető:

Dr. Vincze Miklós

tudományos főmunkatárs,
ELKH-ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoport

ELTE TTK

Fizikai Intézet

Kármán Környezeti Áramlások Laboratórium

2023

Kivonat

A nyírási instabilitások a hidrodinamika egy máig kutatott jelenségkörét jelentik. Természetes körülmények között is gyakran előfordulnak, illetve több jól reprodukálható kísérleti összeállításban is előállíthatók. Erre egy jó példa az, amikor egy vödör aljába helyezünk egy a vödörtől függetlenül forgatható tányért. A tányér megfelelő frekvenciájú forgatásakor a vödörben lévő víz felszíne egy forgó, szakszögszerű formát vehet fel, mely a tányér egyenletes forgása mellett egy stabil állapotnak tekinthető. Felmerül a kérdés, hogy ezen jelenségek hogyan alakulnak ki.

Ezen dolgozat célja a tranziens nyírási instabilitások vizsgálata. Ezek nem stabil kialakult rendszerek, így kísérleti megfigyelésük jóval nehezebb. Az eljárásunk a következő: egy magas falú hengeres edényt forgatunk, melyben a víz mozgását a felszínéhez közel figyeljük meg, PIV (*Particel Image Velocimetry*) módszerrel. Erre azért van szükség, hogy az edény alja már ne befolyásolja a jelenséget. Azt vizsgáljuk, hogy a forgást megkezdő edény falától hogyan terjed beljebb a vízfelszín közepéig a határréteg a már forgó és a még nyugalomban lévő vízrétegek között, illetve hogy ez a nyírási eredményez-e rövid időtartamú instabilitásokat.

Tartalomjegyzék

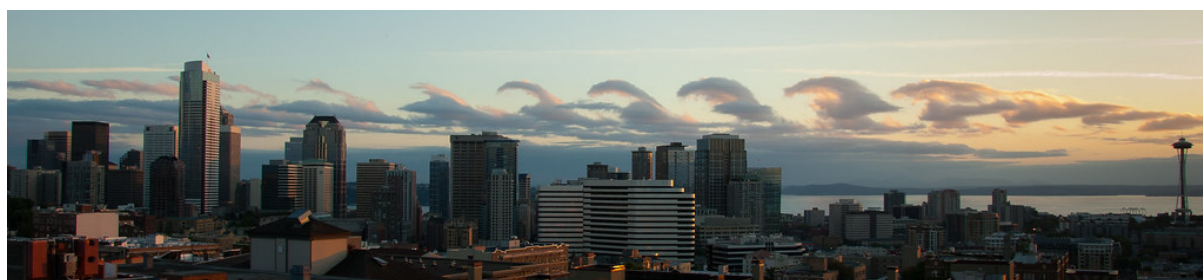
1. Bevezetés és motiváció	2
1.1. Nyírási instabilitások	2
1.2. A Rayleigh–Kuo-kritérium	5
1.3. „Newton-vödör”	7
2. A kísérlet	9
2.1. A mérési eszköz	9
2.2. A mérések feldolgozása	10
3. Numerikus szimulációk	14
3.1. Elméleti megfontolások	14
3.2. Navier–Stokes-egyenletek	14
3.3. OpenFOAM	15
4. Eredmények	16
4.1. A sebességprofil vizsgálata	16
4.2. Az instabilitás vizsgálata	22
4.3. Szimulációk	23
4.4. Egy speciális eset: a felpörgetés megszakítása	26
5. Összefoglalás	27

1. Bevezetés és motiváció

Az áramlástani jelenségek sokaságának egyik érdekes és máig kutatott ágazata a hidrodinamikai instabilitás. Instabilitások során egy stabilnak tűnő rendszer spontán megváltozik, és véges idő elteltével beáll egy kvázistabil állapotba, melyet hosszasan fenn is tud tartani. Ezen jelenség természetes folyamatok útján is kialakulhat, és mesterségesen is számos egyszerű módszerrel előállítható.

1.1. Nyírási instabilitások

A továbbiakban a nyírási instabilitásokat ismertetem, melyek közös jellemzője, hogy két folyadék réteg közötti relatív sebességkülönbségen alapszanak. Bemutatásukat egy példán keresztül teszem meg, mely a híres *Kelvin–Helmholtz-instabilitás*. (1.1. ábra.)



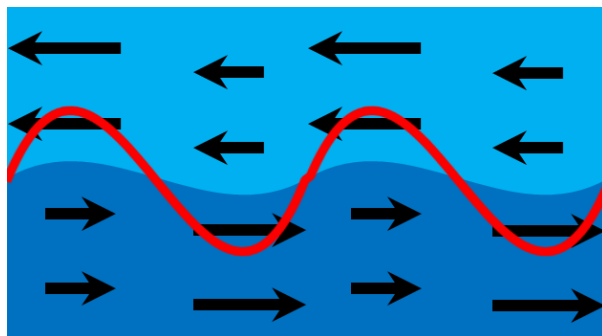
1.1. ábra. Felhőalakzatban kivehető Kelvin–Helmholtz-instabilitás.

Tekintsünk két egymás felett elhelyezkedő, nem azonos sűrűségű folyadék réteget, melyek ΔU sebességkülönbsége nem nulla. Tegyük fel, hogy az alsó közeg sűrűbb, valamint hogy a két közeget elválasztó határfelület kezdetben sík. Vizsgáljuk meg, hogy e felület kis, tetszőleges hullámhosszú deformáció hatására visszatér-e kezdőállapotába. Amennyiben létezik olyan λ hullámhosszú perturbáció, melynél a határfelület nem tér vissza eredeti állapotába, akkor e síkot instabilnak nevezzük. Ez a *Kelvin–Helmholtz-(KH)-instabilitás*. Az instabillá vált határfelület egyre nagyobb amplitúdójú kitéréseket mutat, majd linearitását elveszítve, érdekes mintázatokba gyűrődik be.

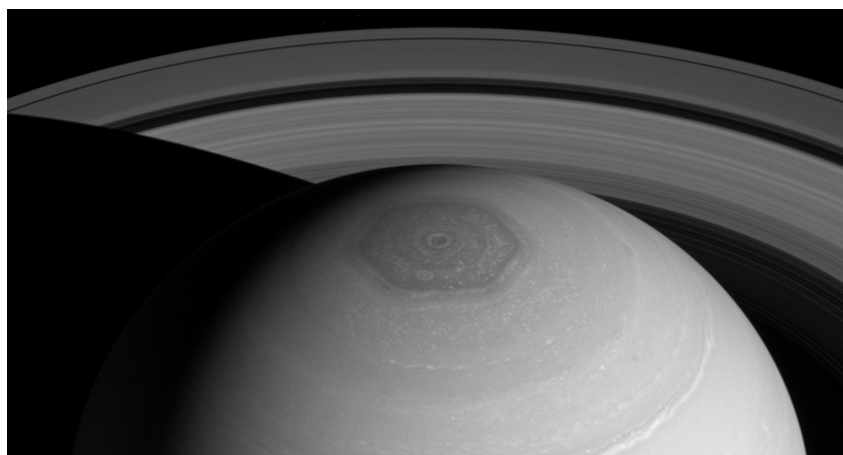
Az instabilitás mechanizmusának kvalitatív megértéséhez tekintsünk az 1.2. ábrára, amely a két elkülönülő réteg (világos- és sötétkék) sebességmezejének (fekete nyilak) vázlatát mutatja. Látható, hogy a két tartomány határfelületének kicsiny térbeli perturbációi azt eredményezik, hogy – a folyadék összenyomhatatlanságából következően – a lokálisan megvastagodó rétegben a sebesség lecsökken, míg az elvékonyodóban megnövekszik. A Bernoulli-hatás következtében azonban ez a folyamat *instabil*, vagyis az elvékonyodó tartományok még vékonyabbá, a vastagodók még vastagabbá válnak. Így a kezdeti periodikus perturbációk megnövekednek.

A Kelvin–Helmholtz instabilitás azonban csak egy formája a nyírási instabilitások kiterjedt családjának. Hasonló, de nem azonos jelenséget láthatunk például a *Szturnusz* északi sarkánál, ahol egy hatszögformát figyelhetünk meg (1.3. ábra).

Különbség egyrészt a kissé görbült geometria, viszont még fontosabb, hogy itt periodikus határfeltétel van, azaz az áramlás „önmagába záródik”, továbbá, hogy ebben az esetben nincsen sűrűségkülönbség az áramlási tér különböző sebességgel jellemezhető tar-



1.2. ábra. Ábra az instabilitásról. A világoskék folyadékréteg a sötétkék folyadékrétegen áramlik. A fekete nyilak hosszúsága az áramlás nagyságát reprezentálja az egyes szakaszokon.

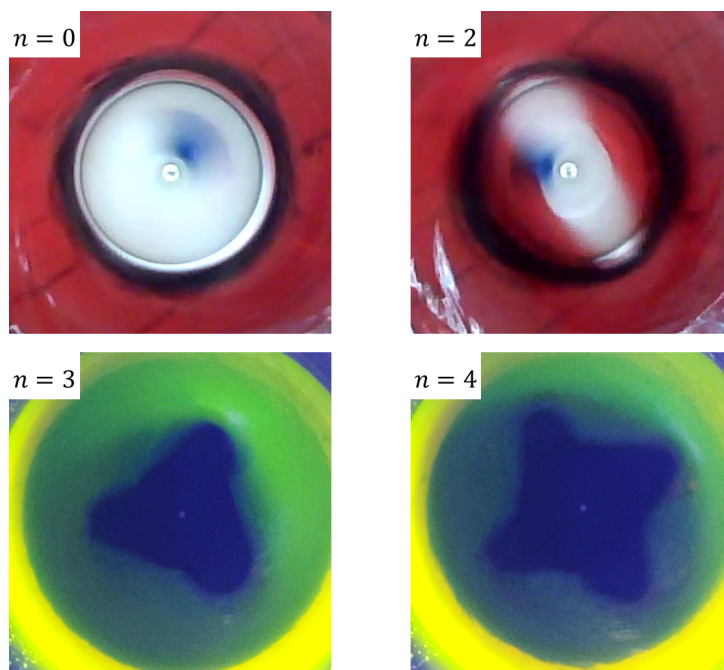


1.3. ábra. A Cassini űrszonda felvétele a Szaturnusz északi sarkánál lévő hatszögről. Átmérője kb. 29000 km. (Forrás: NASA)

tományai között. Épp ezért a nyírási instabilitás ezen formája nem egymás alatt, hanem egymás mellett, azonos gravitációs potenciálon elhelyezkedő sávok között alakul ki. A periodikus határfeltétel miatt csak olyan hullámhossz erősödhet fel, amely teljesíti az $u(\varphi) = u(\varphi + 2\pi)$ feltételt. Ez magyarázza a sokszögszerű formát, a szögszámot pedig a rendszer egyéb paraméterei határozzák meg.

Ehhez nagyon hasonló jelenséget láthatunk, ha egy meglehetősen érdekes kísérleti elrendezést építünk. Ebben egy hengeres edény aljába helyezünk egy attól függetlenül forgatható lapos tányért. A megfelelő méretekkal rendelkező és megfelelő sebességgel forgatott edénybe felülről belenézve sokszögszerű formákat láthatunk, melyeket a benne lévő víz kontúrvonalai rajzolnak ki (1.4. ábra). Ebben az elrendezésben a sebességkülönbséget az alsó forgó tányérhez tapadó, vele együtt forgó, és a falhoz tapadó, azzal együtt álló vízrétegek közötti nyírás eredményezi.

A bemutatott jelenségek mind kvázistatikus rendszerekben alakulnak ki. Felvetül a kérdés, hogy olyan rendszerekben is kialakulhatnak-e hasonló állapotok, melyek éppen aktív változáson mennek keresztül, azaz tranziensek. Dolgozatomhoz végzett kutatómunkámban ilyen tranziens nyírási instabilitásokat kerestem és vizsgáltam.



1.4. ábra. A függetlenül forgatható alsó tánnnyérral rendelkező edényben létrehozható formák. A képen látható formákat egy korábbi munkánkban hoztuk létre, cikkekben olvashatunk továbbá 5 és 6-szoros szimmetriával is rendelkező formákról, illetve azok részletes vizsgálatáról. [1, 2, 3]

Viszkózus áramlásokban a folyadék sebességének a szilárd határfelületekhez (pl. egy edény vagy cső falához, aljzathoz) képest el kell tűnnie azok szomszédságában. A folyadék belső súrlódása, vagyis a viszkozitás – amint később látni fogjuk – alakilag „sebességdiffúzióként” értelmezhető. Így egy, a kezdetben nyugvó folyadékhoz képest bizonyos sebességgel mozgó perem nem csak a közvetlen környezetében ragadja magával a folyadékelemeket a peremfeltétel értelmében, hanem hatása idővel „bediffundál” az anyag mozgó peremtől távolabbi tartományaiba is. Hengeres geometriában ilyen helyzet áll elő egy kezdetben álló hengeres víztartályban, melyet szimmetriatengelye körül forgatni kezdünk. Kezdetben a víztest felső részének középső régiója, mely egyaránt messze esik a függőleges faltól és az aljzattól, az inerciarendszerhez képest nyugalomban marad, miközben a falhoz kötött határréteg már kezdettől fogva együtt forog a tartállyal. Ahogy a „sebességdiffúziós front” befelé halad a víztestbe, úgy jutunk el fokozatosan a merevtestként, minden pontjában azonos szögsebességgel forgó végállapotba. A közbülső időszakban azonban értelemszerűen nyírás ébred a nyugalomban lévő „belső” és a tartállyal együtt mozgó „külső” tartományok között.

A kérdés, melyre a jelen dolgozatban (kísérletek és szimulációk segítségével) választ keresünk, hogy a fentebb említett sokszög-örvényekhez hasonló jellegű instabilitási mintázatok megjelennek-e a felpörgetési folyamatok során. Megjegyzendő azonban, hogy (a tavalyelőtti TDK-munkámban vizsgált) forgóaljzatos – 1.4. ábrán mutatott – instabilitás esetében a gyors forgatás miatti centrifugális erő alakja döntően befolyásolta a dinamikát (hiszen ez tette lehetővé, hogy a sokszöges tartomány közepe „szárazzá” váljon), a jelen problémában ez az effektus másodlagos jelentőségű: a vizsgált felpörgetési szögsebességek és tartálméretek esetében a vízfelszín alakjának megváltozása nem volt jelentős.

1.2. A Rayleigh–Kuo-kritérium

Vizsgáljuk meg, hogy egy kétdimenziósna tekinthető összenyomhatatlan áramlási rendszerben milyen megszorítás, avagy szükséges feltétel adható meg nyírási jellegű instabilitási jelenségek megjelenésére! [4] Az áramlási teret a vizsgált tartomány $\mathbf{r} \equiv (x; y)$ koordinátájú pontjaiban, bármely t időpillanatban jellemzi az $\mathbf{u}(\mathbf{r}; t) \equiv (u(x; y; t); v(x; y; t))$ sebességmező.

Habár a vizsgált „felpörgetési” jelenségek kialakulásában a folyadék viszkozitása alapvető szerepet játszik, az instabilitási jelenségek szempontjából ez a belső súrlódás másodlagos fontossággal bír. Ezért kiindulhatunk a $-\nabla p$ negatív nyomásgradiens által gyorsított ρ sűrűségű folyadékelemek súrlódásmentes mozgásegyenletéből, vagyis az Euler-egyenletből, mely így írható:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1)$$

Bevezetve a sebességmező rotációjaként előálló $\boldsymbol{\varsigma} = \nabla \times \mathbf{u}$ örvényességet, illetve felhasználva az

$$(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (2)$$

vektorazonosságot, az Euler-egyenlet így alakul:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{\varsigma} \times \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}^2) \equiv -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right). \quad (3)$$

Ha képezzük az egyenlet rotációját, felhasználva a megfelelő vektoranalízis-azonosságokat (illetve az előismeretet, hogy $\boldsymbol{\varsigma}$ egy vektormező rotációjaként állt elő, ezért divergencia-mentes), az alábbi alakra jutunk:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varsigma}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \boldsymbol{\varsigma} + \boldsymbol{\varsigma} \nabla \mathbf{u} = 0. \quad (4)$$

A folyadék összenyomhatatlanságát kifejező $\nabla \mathbf{u} = 0$ összefüggés miatt a harmadik tag eltűnik. Vegyük észre továbbá, hogy kétdimenziós áramlásról lévén szó, az $\boldsymbol{\varsigma}$ örvényességvektornak csak egyetlen komponense, mégpedig a síkra merőleges (vagyis z -irányú) vetülete különbözik nullától, tehát az örvényesség lényegében skalárként viselkedik: $\boldsymbol{\varsigma} \equiv (0; 0; \varsigma)$. Ezen megfontolások figyelembevételével egyenletünk így írható:

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \varsigma \equiv \frac{\partial \varsigma}{\partial t} + u \frac{\partial \varsigma}{\partial x} + v \frac{\partial \varsigma}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

mely ebben a formában a folyadékelemek örvényességének megmaradását fejezi ki.

Tekintsünk most az egyszerűség kedvéért egy olyan (U, V) stacionárius alapáramlást, amely a tartomány minden pontjában x irányú (vagyis $V \equiv 0$), nagysága viszonyt y függvénye. Az ezen alapáramláshoz tartozó örvényességet jelöljük Z -vel! Az alapállapot körüli kicsiny sebesség- és örvényességperturbációkat jelölje u' , v' és ς' , vagyis a változók így bonthatók fel:

$$\begin{aligned} u &= U + u' \\ v &= v' \\ \varsigma &= Z + \varsigma', \end{aligned} \quad (6)$$

ahol a perturbációk között fennáll a kétdimenziós áramlás örvényességét (rotációját) definiáló

$$\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \quad (7)$$

kapcsolat. Ilyen egyenlet felírható az (U, V, Z) alapáramlásra is, mely azonban a sebességkomponensek fentebb választott tulajdonságai miatt egyszerűen a $Z = -\partial U / \partial y$ összefüggésre vezet.

A 6. egyenlet szerinti felbontást az 5. egyenletbe helyettesítve és azt felhasználva, hogy az (U, V, Z) alapáramlás nem függ az időtől és az x koordinátától, valamint hogy U és Z perturbációja kicsiny ($u' \ll U$ és $\zeta' \ll Z$), s ezt a kicsinységet deriváltjaikról is feltételezhetjük, kapjuk:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v' \frac{\partial Z}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

A sebességmező összenyomhatatlanság miatti divergencia mentességéből következik, hogy a kétdimenziós $(u'; v'; 0)$ sebességtér mindig előállítható egy $(0; 0; \psi')$ vektormező rotációjaként, hiszen $\nabla (\nabla \times \mathbf{w}) \equiv 0$ bármely folytonosan differenciálható $\mathbf{w}$ vektormező esetén. Vagyis:

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{\partial \psi'}{\partial y} \\ v' &= \frac{\partial \psi'}{\partial x}. \end{aligned} \quad (9)$$

Behelyettesítéssel könnyen belátható, hogy a 7. egyenlet nem más, mint egy ψ' -re vonatkozó Laplace-egyenlet:

$$\zeta' = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} \equiv \Delta \psi'. \quad (10)$$

A ψ' , ún. áramfüggvénnyel kifejezzük a 8. összefüggést, tehát

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \psi') + U \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \psi') + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Mivel az egyenlet második és harmadik tagjának együtthatói (U illetve $\partial Z / \partial y$) nem függenek az x koordinátától, ezért ez a probléma lineáris. Vagyis a partikuláris megoldásokat kereshetjük az alábbi, exponenciális formában:

$$\psi' = \text{Re} \left(\Psi(y) e^{ik(x-ct)} \right). \quad (12)$$

A függvény viselkedését a c paraméter jellege határozza meg. Amennyiben c valós, a megoldás $c(k)$ fázissebességgel haladó, k hullámszámú hullámot ír le. Ha azonban c pozitív képzetes résszel rendelkezik, a megoldás instabil, vagyis „öngerjesztő”, exponenciálisan növekvő jellegű lesz.

A 12. próbafüggvény visszahelyettesítése a 11. egyenletbe és a deriválás elvégzése az alábbi, ún. Rayleigh-egyenletre vezet:

$$(U - c) \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - k^2 \Psi \right) - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Psi = 0. \quad (13)$$

A stabilitásvizsgálat annak a meghatározását jelenti, hogy a Rayleigh-egyenlet egy adott $U(y)$ sebességmezővel jellemzett áramlásban mely k hullámszámú perturbációk mellett eredményez pozitív képzetes résszel bíró c -ket. Az ilyen hullámszámmal jellemezhető kis kitérések fognak instabillá válni, vagyis észrevehető nagyságúra felnőni az áramlásban.

A probléma megoldása tetszőleges $U(y)$ esetén rendkívül bonyolult. Hsiao-Lan Kuo azonban 1949-ben itt nem részletezendő módon megmutatta [5], hogy az instabilitás megjelenésének *szükséges feltétele*, hogy a második tag lokálisan zérus legyen, azaz:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \quad (14)$$

Vagyis instabilitás megjelenésére a nyírási áramlások olyan tartományaiban számíthatunk, ahol a (párhuzamos áramvonalakkal jellemezhető) sebességmezőnek inflexió „pontja” (pontosabban: vonala) van. Ezt az összefüggést nevezzük Rayleigh–Kuo-féle instabilitási kritériumnak.

1.3. „Newton-vödör”

Először induljunk ki egy egyszerűbb, nyírási instabilitással nem rendelkező, kvázisztatikus elrendezésből. Legyen ez a „Newton’s bucket”-ként ismert kísérlet, (a magyar tankönyvekben legtöbbször egyszerűen csak mint „forgatott folyadék” szerepel, ld. pl.: [6]), mely során egy vízzel töltött hengeres edényt szimmetriatengelye körül forgatunk. Maga Isaac Newton ezt elsősorban a centrifugális erő hatásának bemutatására használta, melyről a *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*-ban ír részletesebben. Ebben a rendszerben a felszíni vírzészecskékre két erő hat: a gravitációs, illetve a közelében lévő más részecskék nyomóereje. Külső inerciarendszerből szemlélve a két erő eredője a befelé mutató centripetális erő, együttlmozgó koordinátarendszerben pedig a kifelé mutató centrifugális erő. Ezeket figyelembevéve a következőt kapjuk a vízfelszín alakjára:

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \quad (15)$$

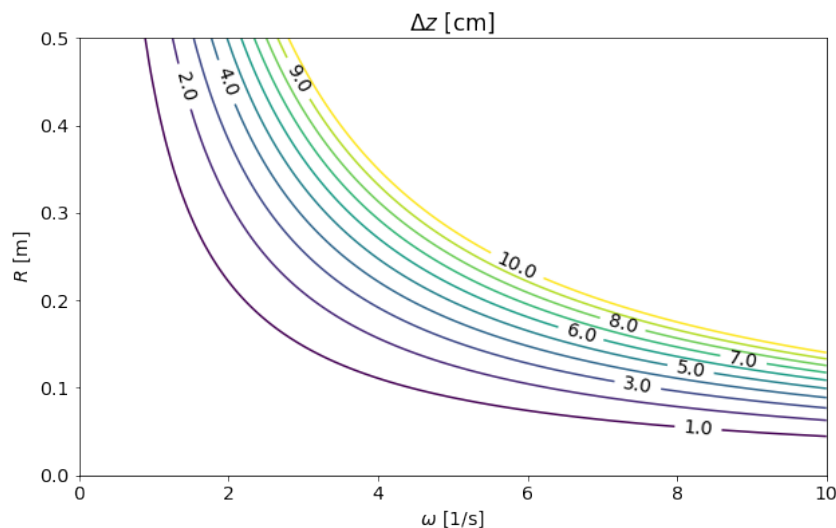
Látható, hogy olyan forgáspároloid alakot vesz fel, melyben z a függőleges tengely, z_0 a parabola legalsó pontja, ami a szimmetriatengelyen van, ω a forgatás szögsebessége, r a tengelytől mért radiális távolság és g a gravitációs gyorsulás. Itt z_0 -ra a következő formulát kapjuk:

$$z_0 = H_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}, \quad (16)$$

ahol H_0 a víz nyugalmi magassága, azaz a magassága, amikor nem forgatjuk az edényt és R az edény sugara. Maga a jelenség egy nagyon jól ismert és kidolgozott példa ([7]). Sokkal érdekesebb viszont ezen jelenségnek azon fázisa, amikor a még nyugvó víz körül elkezdjük forgatni az edényt, vagy a már kvázi-merevtest forgást végző víz körül megállítjuk az edény forgatását.

Tételezzük fel, hogy az edény sokkal magasabb, mint amilyen széles ($H \gg R$). Ha a folyadékot a felszínéhez közel vizsgáljuk, akkor ott csak az edény fala van rá hatással, az edény alja túl messze van, hogy befolyásolja az ottani sebességeket. Az edény forgatását megkezdve a falhoz tapadó határfeltétel miatt a forgó edény sebessége fokozatosan ’propagál’ kívülről a folyadéktest közepe felé. Mint később olvashatjuk, mi a mérések során a folyadéktestnek csak egy síkját tudjuk vizsgálni, ezért fontos lenne az, hogy a forgatás során a folyadékfelszín minél ’vízszintesebb’ maradjon. Ehhez nézzük meg a 16. egyenletet felhasználva, hogy a „Newton’s bucket” határesetben mennyire nem vízszintes a folyadék

egyes beállításokban, azaz mekkora a magasságkülönbség a folyadékfelszín közepénél valamint a fal mellett. Ez látható az 1.5. ábrán. A mi mérési tartományunkban ez az érték nem éri el a $\Delta z_{\max} < 2$ cm-t. Továbbá mi a kísérletek során ezt a stabil állapotot csupán megközelítjük, de nem érjük el, hiszen mi tranziens folyamatokat vizsgálunk. Mindezt a vizsgálataink során feltehetjük, hogy a vízfelszín vízszintesnek tekinthető.



1.5. ábra. A „Newton’s bucket” kísérleti elrendezésben a vízfelszín közepe és a fal menti része közötti magasságkülönbség, a forgatás mértéke és az edény sugarának a függvényében. A mi mérési tartományunk a grafikon bal alsó sarkába esik (mivel $\omega_{\max} \approx 5 \frac{1}{s}$, $R_{\max} \approx 0,15$ m). Továbbá a méréseink alatt ezt az állapotot csak megközelítjük, így a vizsgált időtartományban nem éri el ezt a nagyságot a magasságkülönbség. Így bizonyossággal állíthatjuk, hogy a víz felszíne esetünkben vízszintesnek tekinthető.

Feltételezhetjük, hogy ebben az elrendezésben is alakulhat ki nyírási instabilitás. Ekkor a sebességkülönbséget a még közepén nyugalomban lévő, és a már fallal együtt forgó folyadékrétegek közötti nyírás kelti. Ezeket ugyanakkor sokkal nehezebb vizsgálni, mivel a rendszer változáson megy át, azaz a jelenség tranziens. Továbbá érdemes vizsgálni magát az időben változó sebességmezőt, melyen bemutatható a faltól befelé propagáló nagyobb sebesség.

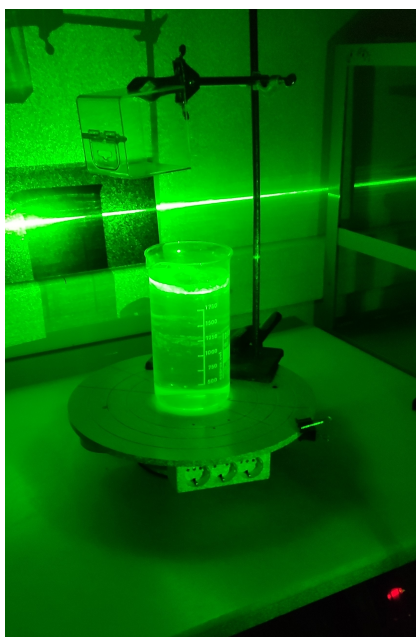
2. A kísérlet

Célunk tranziens nyírási instabilitásokat megfigyelni, illetve a releváns paraméterek hatását vizsgálni. Mivel tranziens jelenségről van szó, ezért a megfigyelése jóval nehezebb; hiszen időnként csak pár másodpercig áll fenn a számunkra érdekes állapot.

2.1. A mérési eszköz

A kísérleti eszközünk egyszerűnek tekinthető. Magát a mérési elrendezést a 2.1. és 2.2. ábrákon láthatjuk, egy róla készült sematikus ábrát pedig a 2.3. ábrán. Az edény forgatásához egy forgóasztalt használtunk, mely forgásfrekvenciája az $\omega \in [0 ; 5,14] \frac{1}{s}$ intervallumban analóg módon változtatható. Mivel a forgatás pillanatnyi frekvenciáját a forgóasztal nem közli, ezért azt utólag állapítottam meg. Egy, a forgóasztalról lelógó műanyag rúd minden fordulatnál hozzáverődött egy merev tárgyhoz, mely jól hallható zajt keltett. Ez jól kivehető a mérésekről készített felvételek hangsávjain, ennek segítségével a forgatás frekvenciája utólag könnyedén megállapíthatóvá vált.

Magát a felvételt egy, az asztallal együttforgó kamera készítette. A tartója látható a 2.1. ábra felső részén. Ez fentről lefelé nézve mozgófelvételen rögzítette az edényt és a benne áramló folyadékot.



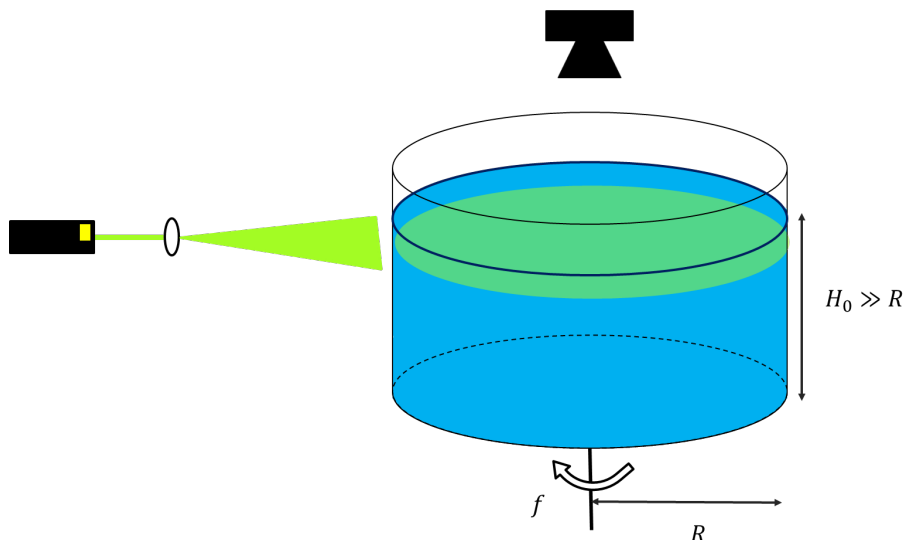
2.1. ábra. A kísérleti eszköz. Mérés során a lézeren kívül minden más, a mérést zavaró fényforrást kikapcsoltam.



2.2. ábra. A méréshez használt zöld fényű csillagászati lézer, illetve a sík fénynyaláb létrehozásához használt üveghenger. (A kép 90°-al el van forgatva.)

A folyadék áramlásának megfigyeléséhez PIV (Particle Image Velocimetry, avagy részecskeképen alapuló sebesség-meghatározás) eljárást alkalmaztam. Ehhez a folyadékot kisméretű nyomjelző részecskékkal vegyítettem, melyek a folyadék áramlását nem befolyásolva, azzal együtt áramlanak. A nyomjelző szemcsék sebességmeghatározása lézeres sebességméréssel történik – ehhez oldalról, egy síkban, lézerrel világítjuk a folyadékot. Minden más fényforrást kikapcsolunk, így csak az adott síkban világítjuk meg a nyomjelző részecskéket, azaz a felvételen a víztömegnek csak egy szeletét látjuk. A felvételen két

egymás melletti képkockán a látható részecskék elmozdulását meghatározhatjuk statisztikai módszerrel (lásd később), mellyel a megvilágított terület sebességét is megadhatjuk. Amennyiben a részecskék mérete nem túl nagy (esetünkben ~ 57 mikron), és a sűrűségük megegyezik a víz sűrűségével, akkor az egész eljárás beavatkozásmentes, azaz nem változtatja meg a vizsgálandó áramlásokat.



2.3. ábra. Sematikus ábra a mérési elrendezésről.

2.2. A mérések feldolgozása

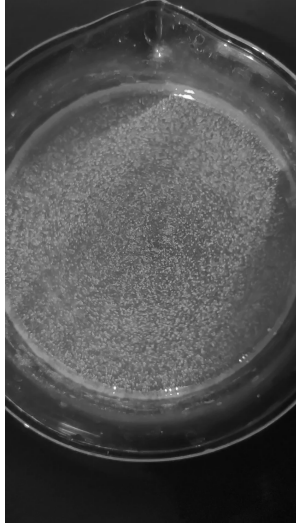
A felvételek feldolgozásához az OpenPIV [8] nevű szoftvert használtam, mely egy ingyenes, nyílt forráskódú Python 3-ban írt algoritmus. Mint korábban említettem, a részecskék elmozdulásának meghatározása statisztikai módszerrel történik. Két, időben egymás melletti képkockán a megadott azonos interrogációs területekre, avagy ablakokra kell meghatározni a térbeli korrelációt. Ezt, és a két kép közötti időkülönbséget ismerve az egyes ablakokhoz sebességet rendelhetünk. Ilyen ablakokkal az egész teret lefedjük, így kapva a kívánt sebességmezőt.

Amit keresünk, dióhéjban a következő: mennyivel kell az adott ablakot eltolni ahhoz, hogy az a legjobban illeszkedjen a következő képkockára? Mivel nem az egész képkockán akarjuk keresni az ablak új helyét, mert az fals pozitív korrelációhoz vezethetne egy hibás helyen, illetve megnövekedett számítási időt is jelentene, így elsősorban csak az ablak környezetében keresgélünk.

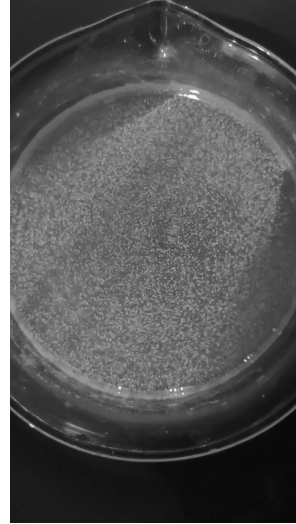
Ügyelni kell, hogy megfelelő méretű ablakokat, illetve időkülönbségeket válasszunk. Amennyiben az ablak túl kicsi, akkor túl kevés szemcse látható benne, melyek egyenkénti lekövetése időigényes és pontatlan. Túl nagy ablak esetén egyrészt kevés pontunk lesz a sebességmezőben, másrészt a korreláció is nehezebben kimutatható, mely nagy hibákhoz vezethet. Túl kicsi időlépés esetén nem egyértelműen kimutatható az ablakok elmozdulása, mely szintén nagy hibához vezet. Túl nagy időlépésnél az ablak elmozdulása jóval nagyobb lenne magának az ablaknak a méreténél, így az új helyzetének megkeresése pontatlan és nem egyértelmű.

A kiértékelés menetét a következőkben egy példán keresztül mutatom be. Ez a mérés

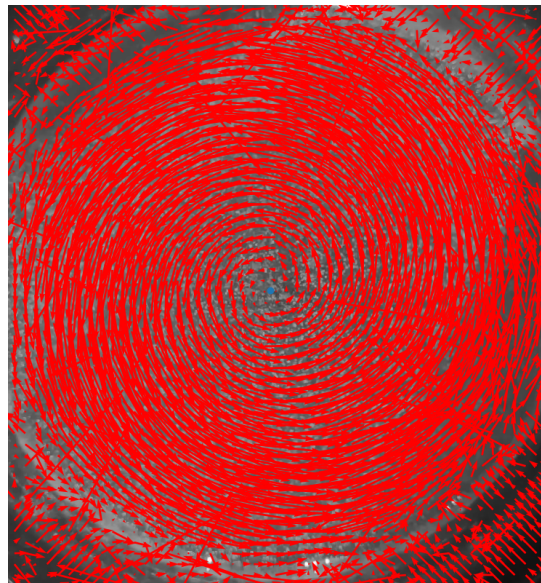
egy 12 cm átmérőjű hengerrel történt, a forgatás szögsebessége $\omega = 2,2 \frac{1}{s}$, és a víz mélysége $H_0 = 21$ cm volt. A felvétel ~ 60 fps-el készült, 720p-s felbontásban. A felvételnek a 3000. és 3001. képkockái a 2.4. és 2.5. ábrákon láthatók. Ezek segítségével nyerhetjük ki a mérés 58,28. másodpercében fellépő sebességmezőt.



2.4. ábra. A 3000. képkocka.



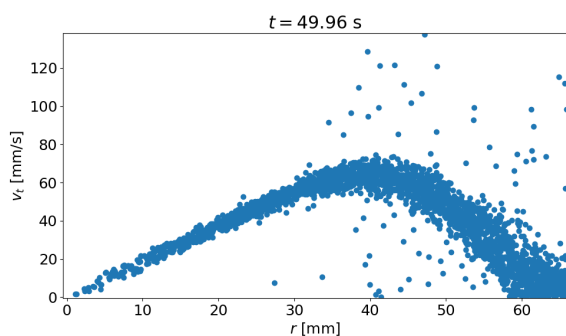
2.5. ábra. A 3001. képkocka.



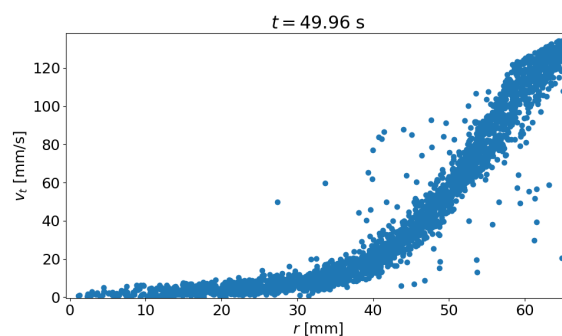
2.6. ábra. Vektormező a 2.4. ábrán látható képkockára kiértékelve. Jól kivehető a körkörös áramlás. Mivel ez a mérés 58,28. másodpercét mutatja, így a fal menti térrész viszonylag nagy sebességgel áramlik a fallal együtt, azaz az együttforgó rendszerhez képest kis sebességgel rendelkezik. Az egész mérésre vonatkozó kiértékelés a következő linket követve megtekinthető: *Példamérésből készített vektormezők*.

A két kép felhasználásával és az előbb leírt eljárás segítségével a 2.6. ábrán látható vektormezőt kapjuk. Jól kivehető a köráram középpontja, melynek helyzetét a kiértékelés későbbi szakaszában a koordinátáinak leolvasásával határoztam meg. Erre azért volt szükség, mert ez az adat a további számolásoknak egy bemenete, ezért manuálisan kell megadni.

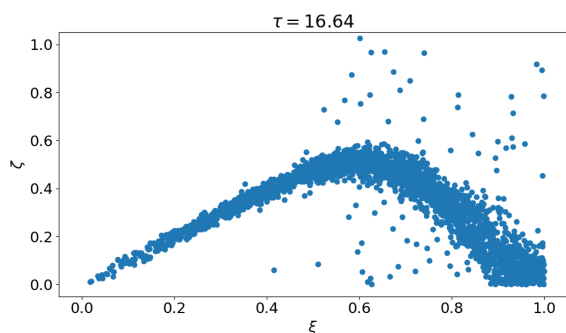
A kapott vektormezőből számos, a rendszert jellemző további adatot nyerhetünk ki. A legérdekesebb a rendszer sugár szerinti sebességprofilja. Az újonnan bevezetett polárkoordinátarendszer origója a henger középpontja. Az e szerint kinyert adatokat az együttforgó rendszerben a 2.7. ábrán láthatjuk. Az adatokat a labor inerciarendszerébe átváltva a 2.8. ábra mutatja. (A kapott eredmények részletes értelmezése a 4. fejezetben olvasható.) Érdekes lehet a mennyiségeket dimenziótlanítani, így a különböző mérések összehasonlítása könnyebbé válik. Vezessük be $\xi = \frac{r}{R}$ és $\zeta = \frac{v_t}{R\omega}$ mennyiségeket! Ezekkel a korábbi ábrák a következők lesznek: 2.9. és 2.10. ábrák.



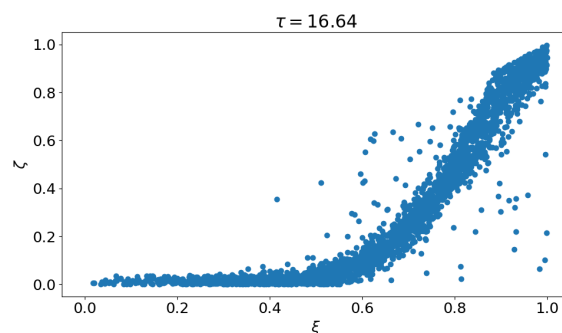
2.7. ábra. A tangenciális sebesség a sugár függvényében.



2.8. ábra. Átszámítva a labor inerciarendszerébe.



2.9. ábra. Dimenziótlanított eset.



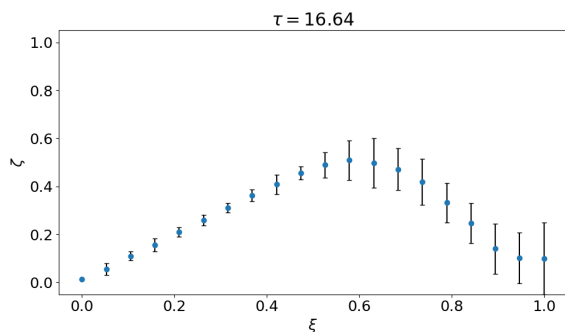
2.10. ábra. Dimenziótlanított eset a labor rendszerben.

Az is észrevehető, hogy a pontok a mérési hibák miatt viszonylag nagy szórással rendelkeznek. Később az is kiderül, hogy a nagy szórást a tranziens örvények is okozhatják. Ezért érdemes a sugár mentén a teret cellákra, azaz körgyűrűkre felbontani, és azok alapján kiátlagolni a sebességeket. Ez látható a 2.11. és 2.12. ábrákon.

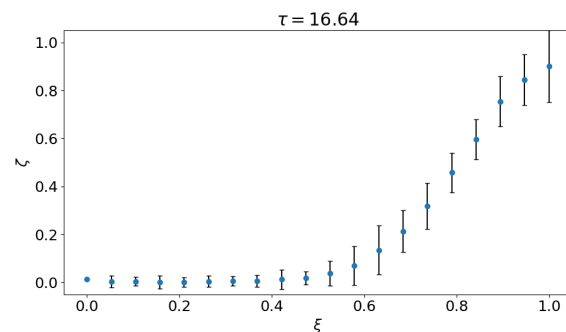
Hasonló ábrák a mérés összes képkockájára elkészíthetők – ezek elkészítésével a jelenség időfejlődését is megvizsgálhatjuk. Ugyanakkor nem érdemes minden egyes képkockára elvégezni ezt a kiértékelést, ugyanis az meglehetősen időigényes lenne és nem adna további hasznos eredményt. Ezért csak adott képkockánként (pl. 125 vagy 250) végeztem kiértékelést.

Ha az egész mérést az összes kiértékelt időpillanattal együtt egyben szeretnénk ábrázolni, akkor érdemes egy 2D tér-idő-grafikont bevezetni. Egy ilyen tér-idő-grafikon a példamérésre a 2.13. ábrán látható. A függőleges tengely az időfejlődés, a vízszintes tengely a sugár, és az adott pontban a színskála jelzi a tangenciális sebesség nagyságát.

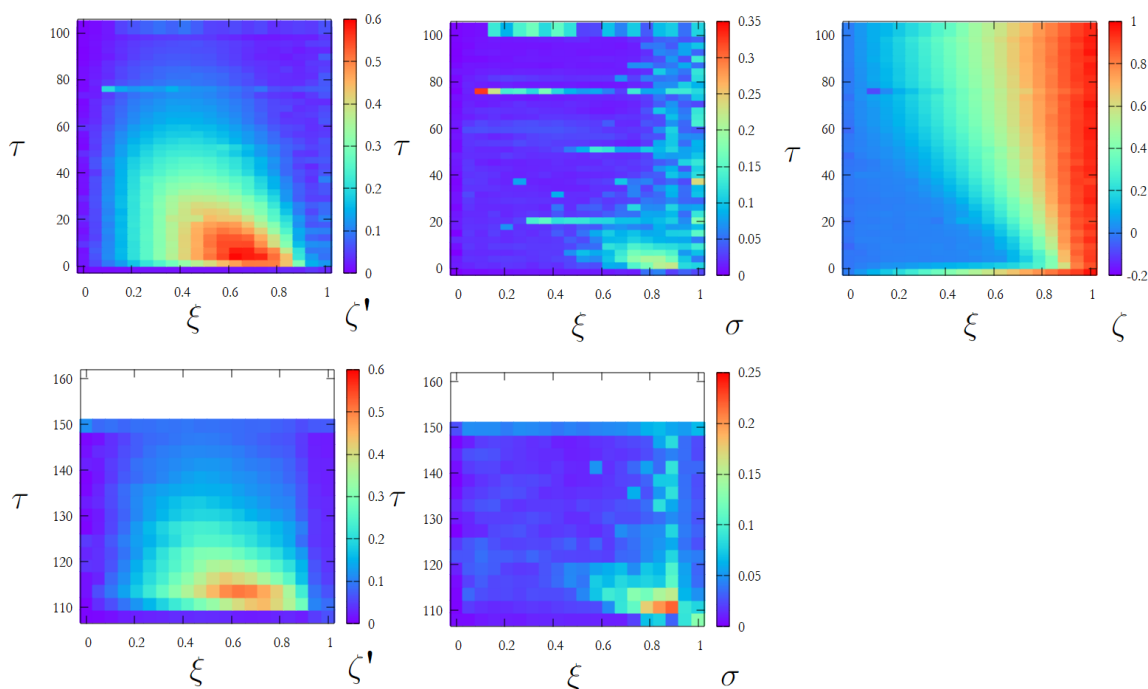
Ezen dolgozat kísérleti célja ilyen és hasonló ábrák elkészítése és ezek tanulmányozása.



2.11. ábra. Cellákra bontott kiértékelés.



2.12. ábra. Cellákra bontott kiértékelés a labor rendszerben.



2.13. ábra. A példamérés téridő-diagramjai. A felső sor a nyugalmi helyzetből kiinduló felpörgetést, az alsó a víz edénnyel együttes merevtest forgásából kiinduló lassulást mutatja. A függőleges tengelyen telik az idő, a vízszintes tengely a sugár, és a szín jelzi a tangenciális sebességet, illetve a középső ábrán annak szórását. Mivel a lassuláznál már nincsen együttforgó rendszer, így ott nincs értelme azt a labor rendszerbe átszámítani. A 0. időpillanatban még nyugalomban volt az edény, és vele együtt a folyadék is. A bal oldali ábra az együttforgó rendszerből megfigyelt $\zeta(r)$, a jobb oldali a laborrendszerből látott $\zeta'(r) = \zeta(r) - \omega r$ sebességeket mutatja be. Értékeik mindkét vonatkoztatási rendszerben az $\omega R = 1$ skála megválasztásával lettek dimenziótlanítva, míg az időmúlást a periódusidő felhasználásával, $\tau = \frac{t}{T}$ módon dimenziótlanítjuk. Itt is jól kivehető a falhoz tapadó, azzal már együtt forgó, és az edény közepében, még nyugalomban álló folyadékrétegek közötti határréteg, illetve nyírás, melynek nagysága időben csökken, és folyamatosan halad befelé. A sebességek azimutális átlaguk körüli σ szórását (szintén $\omega R = 1$ szerint dimenziótlanítva) azért érdemes ábrázolni, mert további mérésekben a magas szórás értékek örvények jelenlétére utalhatnak.

3. Numerikus szimulációk

Gyakran felmerül a kérdés hidrodinamikai jelenségek esetén, hogy egy kísérletet, vagy numerikus szimulációt egyszerűbb-e végezni az adott jelenségről. Hidrodinamikai szimulációkat készíteni általában nehéz, mivel a határfeltételek bonyolultak lehetnek, és egy dinamikus, 3D rendszer esetén nagyon finom idő- és térfelbontás szükséges a kielégítő eredményhez. Mindez nagyon hosszú számítási időkhöz vezet.

Ha hidrodinamikai instabilitást szimulálunk, a számítási idő hatványozódik, mivel az effektus kicsi perturbációkból nő ki, melyek helyes implementálásához még részletesebb felbontás szükséges, mely még hosszabb számítási időt von maga után. Tovább bonyolítja a helyzetet az, hogy ha a térbeli felbontást finomítjuk, akkor ezzel egyetemben az időfelbontást is emelni kell, különben a szimuláció divergálhat.

3.1. Elméleti megfontolások

Áramlások számos fajtáját tudjuk megkülönböztetni, melyek közül számunkra legrelevánsabb a lamináris illetve turbulens áramlások különbsége. Lamináris áramlás esetén elegendően egyszerű esetekben a Navier–Stokes-egyenletek analitikusan is megoldhatók. Turbulens áramlásnál a sebesség- és nyomásmezők kaotikusan fejlődnek, és nincsen analitikus megoldása a fejlődést leíró differenciálegyenleteknek. Így turbulens esetben csak numerikus szimulációkhoz fordulhatunk.

Lamináris és turbulens áramlások megkülönböztetéséhez kényelmes módszer a Reynolds szám kiszámítása:

$$\text{Re} = \frac{\omega R^2}{\nu}, \quad (17)$$

ahol ω a rendszert jellemző szögsebesség, R a rendszert jellemző sugár és ν a kinematikai viszkozitás. Általában állítható, hogy ha egy rendszer Re száma kisebb, mint 2300, akkor lamináris az áramlás, míg ha nagyobb, mint 2900, akkor valószínűleg turbulens. Ha behelyettesítjük a mi rendszerünk értékeit, akkor az egyes méréseinkben előforduló legnagyobb Reynolds szám a következő intervallumba esik:

$$\text{Re}_{\max} \approx 4000 - 30000. \quad (18)$$

Megbizonyosodhattunk afelől, hogy esetünkben turbulens áramlások alakulnak ki. Ez természetesen nem meglepő, hiszen kísérleteink során számos örvényességet figyeltünk meg, melyek turbulens áramlásra utalnak.

3.2. Navier–Stokes-egyenletek

A folyékony anyagok mozgásegyenletei a Navier–Stokes-egyenletek (19. egyenlet.) Megoldásuknak nehézsége a bal oldal második tagjában rejlő nemlinearitás okozza. Szimulációk során gyakran vele párhuzamosan kell megoldani a kontinuitási (20.) egyenletet.

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + (\eta + \eta') \nabla (\nabla \mathbf{u}) + \mathbf{f}. \quad (19)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (20)$$

Mivel esetünkben turbulens áramlásról van szó, így csak numerikusan tudjuk ezt megoldani.

3.3. OpenFOAM

A szimulációk elvégzéséhez az OpenFOAM nevű programot használtam. [9] Az OpenFOAM (Open-source Field Operation And Manipulation) egy ingyenes, nyílt forráskódú CFD (Computational Fluid Dynamics) szoftver, mely C++ nyelvben íródott. Ez egy nagyon elterjedt és sokoldalú szimulációs eszköz, mely számos fizikai rendszert képes kezelni, rengeteg algoritmusból lehet választani. Úgy találtuk, hogy a mi elrendezésünk szimulációjához a PisoFOAM solver lesz a legideálisabb.

A PisoFOAM a PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) algoritmuson alapszik. A PisoFOAM egy olyan solver, azaz megoldási eszköztár, mely turbulens és összenyomhatatlan áramlásokat tud kezelni. Tranziens jelenségek modellezésére is alkalmas, mely számunkra különösen fontos. Megjegyzendő, hogy ez a solver csak véges térfogatú rendszerekre működik. Egy iteratív megoldási módszert használ, mely a 21. és 22. egyenletekkel számol:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p_k + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (22)$$

ahol ν a kinematikai viszkozitás és p_k a 'kinematikai' nyomás, mely nem más, mint a nyomás leosztva a sűrűséggel, tehát ennek dimenziója: $[p_k] = \frac{m^2}{s^2}$. Mivel tisztán összenyomhatatlan esetről beszélünk, így nincsen összefüggés a nyomás és a sűrűség között. A 22. egyenlet bal oldalának második tagjában fellépő nemlinearitást a PISO algoritmus az előbb említett iteratív megoldási módszerrel oldja meg, mely alapján

$$\nabla (\mathbf{u}\mathbf{u}) \approx \nabla (\mathbf{u}^0 \mathbf{u}^n), \quad (23)$$

ahol $\mathbf{u}^0$ az iteráció előző megoldása, és $\mathbf{u}^n$ az iteráció következő megoldása. Egy iteráció addig tart, amíg $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^n$. Ezt általában 1-4 lépésben eléri.

A szimulációk eredményét talán legjobban befolyásoló tényező maga a 'mesh'. A mesh elkészítése során osztjuk fel a teret sok kicsi, jól definiált geometriai alakzatra, melyek együttesen alkotják magát a mesh-t. Ezek megválasztása döntő fontosságú lehet egyes szimulációk kimenetelében. Egyrészt nagy fontosságú a mesh finomságának megválasztása. Nagyobb felbontású mesh esetén a szimuláció pontosabb lesz, viszont a számítási idő is megemelkedik.

Emellett hatása lehet a mesh alakjának is. Esetünkben egy 2D körre kell mesh-t készítenünk, mely nehezebb feladat, mint első ránézésre tűnhet. Nem célszerű a térrészt apró kockákkal feltölteni, mert a kör határánál kérdéses azok alakjának megszabása, illetve így nem triviális a sugárirányú és tangenciális hatások figyelembevétele és megfigyelése. Így a másik egyértelmű lehetőség egy polárkoordinátarendszer alapján készített mesh, mellyel bár kényelmesen kezelhetők az előbb említett hatások, de az origó környékén szingularitással járó problémákba ütközhetünk. Ennek a mi esetünkben szerencsére nincsen akkora szerepe, mivel a számunkra fontos effektusok nem a kör középpontjában történnek. Egy másik gyakori elrendezés a kör középpontjában egy négyzet alapú mesh-ből indul ki, mely a sugárral növekedve alakul át egy inkább polárosabb mesh-sé. Ennek a hátulütője az, hogy a mesh 4-szeres forgatási szimmetriája miatt ezzel kapcsolatos artefaktumok jelenhetnek meg a szimulációban, melyek az áramlásról hibás képet adhatnak.

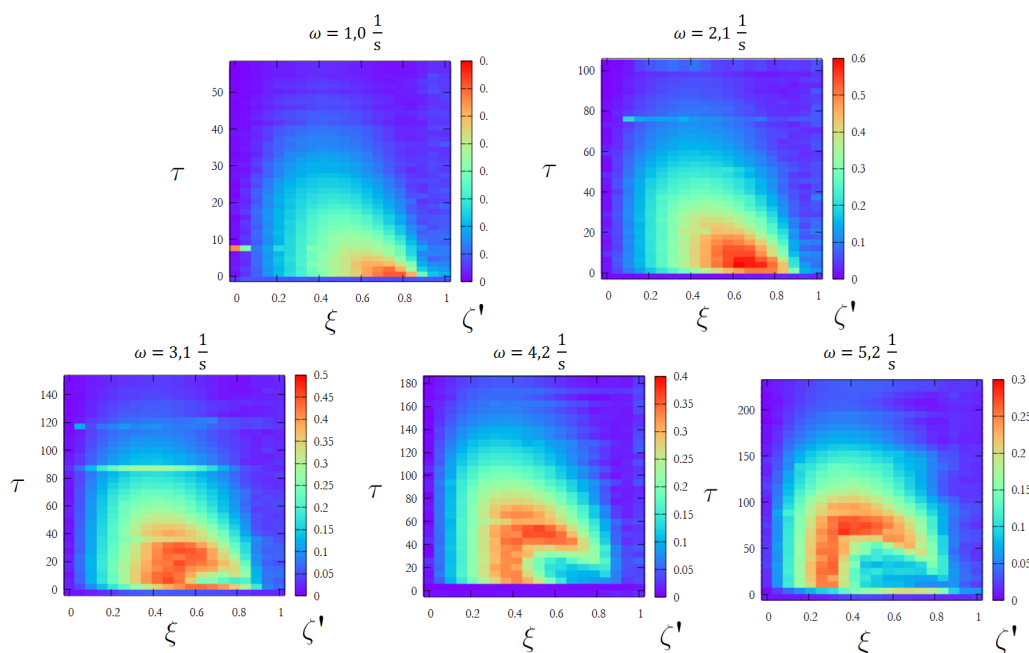
Célunk a szimulációkkal visszacapni a kísérletek eredményeit, ezzel a használt numerikus módszereket validálni, hogy használhatók-e ilyen fajta nyírási instabilitások reprodukálására. Amennyiben igen, a jövőben hasonló szimulációs módszereket alkalmazhatunk kísérletileg nem kivitelezhető esetekben is.

4. Eredmények

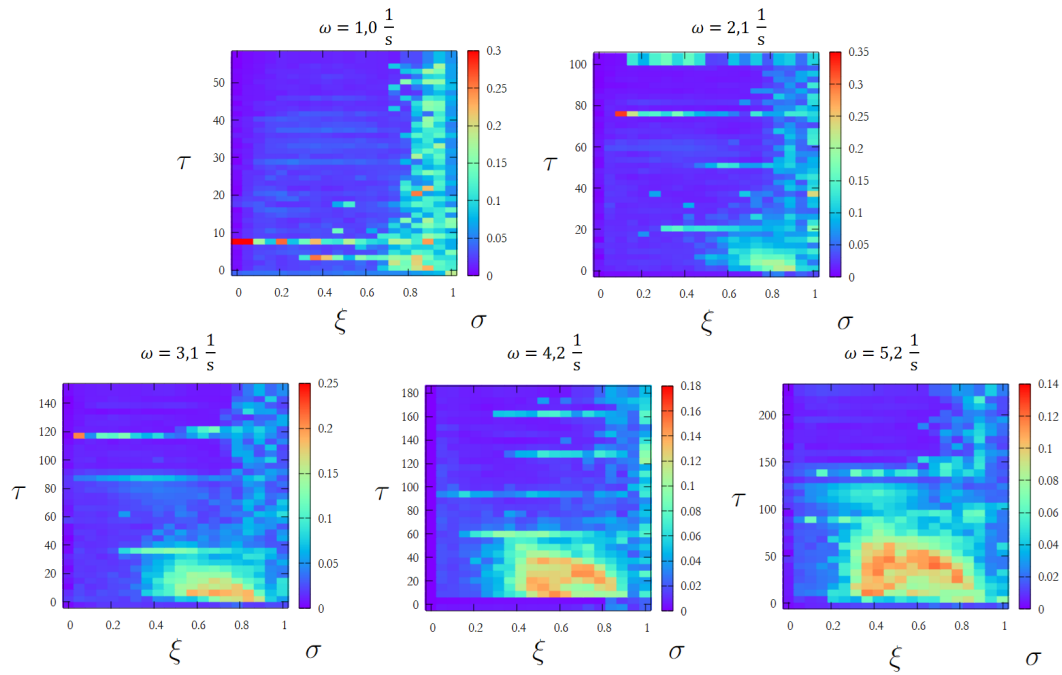
A vizsgálatok során három különböző átmérőjű edénnyel készültek mérések, 5 forgatási sebesség mellett. Az átmérők rendre $D = 12; 14, 5; 16$ cm-ek, a forgatási szögsebességek pedig $\omega = 1, 0; 2, 1; 3, 1; 4, 2; 5, 2 \frac{1}{s}$ -ok voltak. A mérés kezdetekor a beállított sebességet a forgóasztal pár fordulat megtétele után elérte. ($\tau \approx 2 - 4$.) Így bár - mint később a grafikonokon láthatjuk - az instabilitás létrejöttje kis mértékben belecsúszhat ebbe az edényre vonatkozó felgyorsítási intervallumba, ennek a hatásnak a részletes vizsgálata meghaladja ezen dolgozat kereteit.

4.1. A sebességprofil vizsgálata

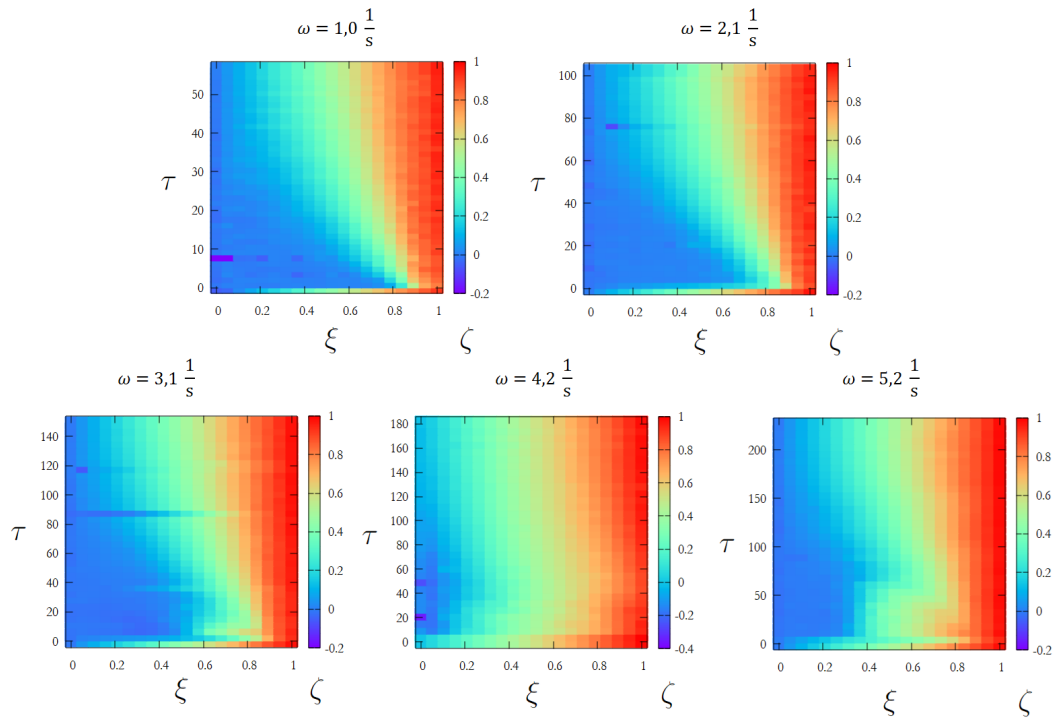
Először nézzük meg egyes mérések időfejlődését, azon belül a 12 cm átmérőjű edénnyel, különböző forgatási sebességgel készített méréseket! A felpörgetéshez tartozó térítő-grafikonokat a 4.1. 4.2 és 4.3. ábrákon láthatjuk. A 4.1. ábrán az együttforgó rendszert, a 4.2. ábrán a sebesség szórását, és a 4.3. ábrán a labor rendszert tüntetem fel.



4.1. ábra. A 12 cm átmérőjű edénnyel készített mérések sebességprofilja az együttforgó rendszerben, a felpörgetés alatt.

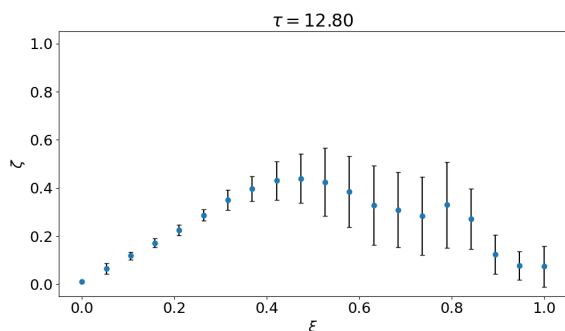


4.2. ábra. A 12 cm átmérőjű edénnyel készített mérések sebességprofiljának a szórása az együttforgó rendszerben, a felpörgetés alatt.

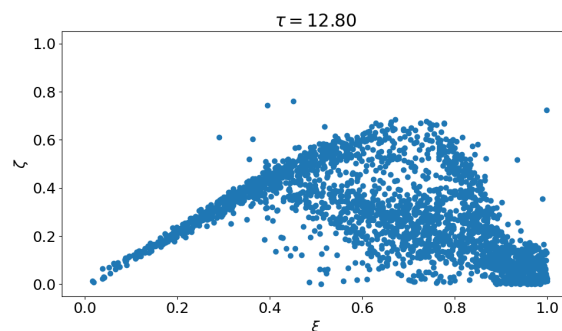


4.3. ábra. A 12 cm átmérőjű edénnyel készített mérések sebességprofilja a labor rendszerben, a felpörgetés alatt.

Az együttforgó rendszert mutató grafikonokon jól látható tendencia vehető észre a forgatás növelésével. (A labor rendszert ábrázoló sebességprofilokon nehezebben mutatható ki ez változás.) Az instabilitás megjelenését jelzi a téridő-diagramokon, hogy az együttforgó rendszerből figyelt ζ' sebességtérnek azimutális átlaga egy külsőbb tartományban lecsökken, s ezzel egyidejűleg a sebességek azimutális átlag körüli szórása megnő. Ennek magyarázata, hogy az áramlási képben örvények jelennek meg, melyek körkörös mintázatok lévén csökkentik az azimutális átlagot, ám növelik a szórást. Ez az effektus a 4.1. ábra alsó sorában lévő grafikonokon figyelhető meg. Egy ebből kiragadott időpillanat a 4.4. ábrán látható. Ha nem a már kiátlagolt profilt ábrázolnánk, akkor a 4.5. ábrához hasonló szétválást látnánk a sebességprofilban. A cellákra átlagolt ábrán az így megjelenő inflexiós pont a Rayleigh–Kuo-kritérium állítását alátámasztja.



4.4. ábra. Példa a sebességprofil szétválásánál megnövekedő szórásra.

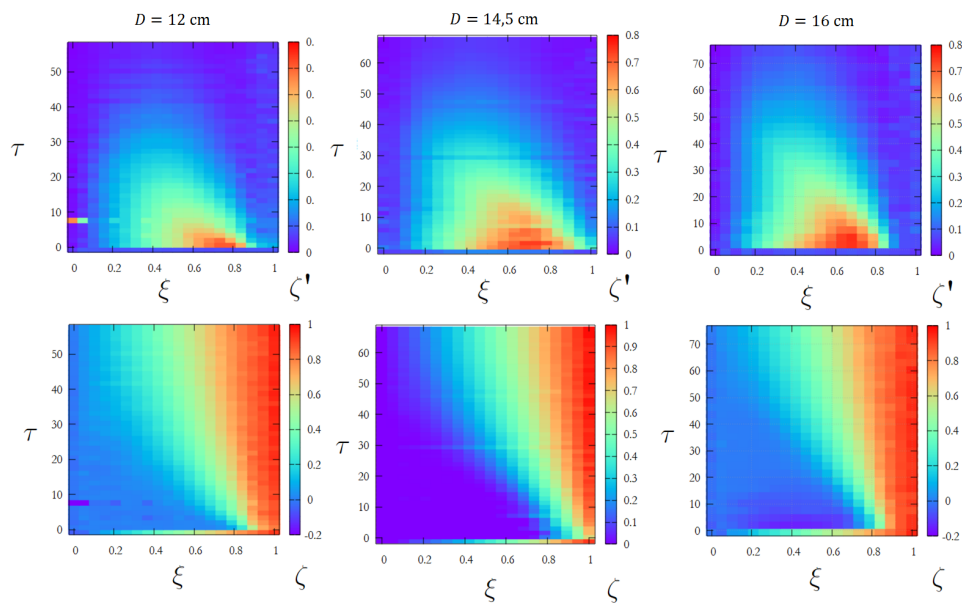


4.5. ábra. Példa a sebességprofil instabilitás miatti szétválására.

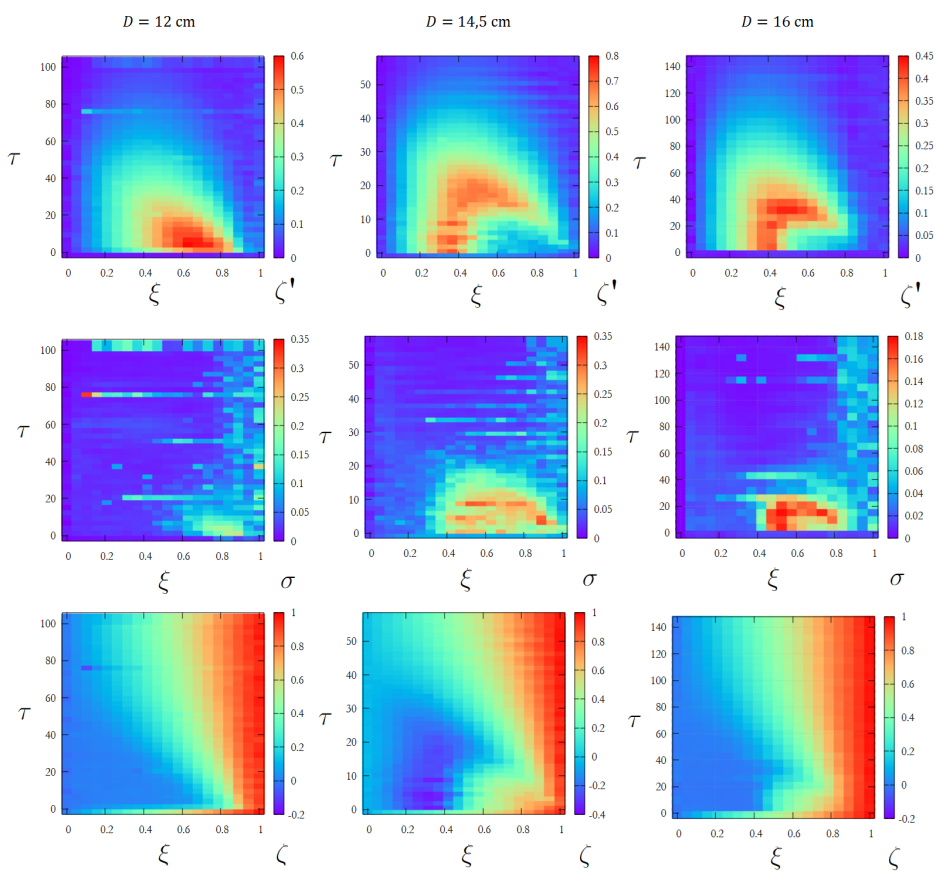
Vizsgáljuk meg az edény átmérőjének a hatását! A 4.6. ábrán láthatjuk a három különböző méretű edény eredményeit $\omega = 1,0 \frac{1}{s}$ forgatás mellett. Ezeknél a beállításoknál egyik edényben sem alakult ki instabilitás. A legszembevetőbb különbség a grafikonok időskálája. Nagyobb edénynél több időbe kerül, míg a rendszer eléri a merevtest forgást. Ez nem meglepő, hiszen a befelé disszipáló sebességfrontnak nagyobb utat kell megtennie. Emellett természetesen nagyobb edényben nagyobb sebességek fordulnak elő, hiszen azonos szögsebesség mellett nagyobb sugárnál nagyobb a tangenciális sebesség.

A 4.7. ábrán az előzőhöz hasonló, azonos szögsebességű, de más átmérőkkel készített összehasonlítást látunk. Vegyük észre, hogy $D = 12$ cm eset kivételével létrejönnek instabilitások, melyek a sebességprofilokon és a szórásokon is észrevehetőek. Bár három mérés kevés egyértelmű korreláció kimutatására, de általánosságban azt mondhatjuk, hogy nagyobb edényekben nagyobb eséllyel láthatunk instabilitásokat.

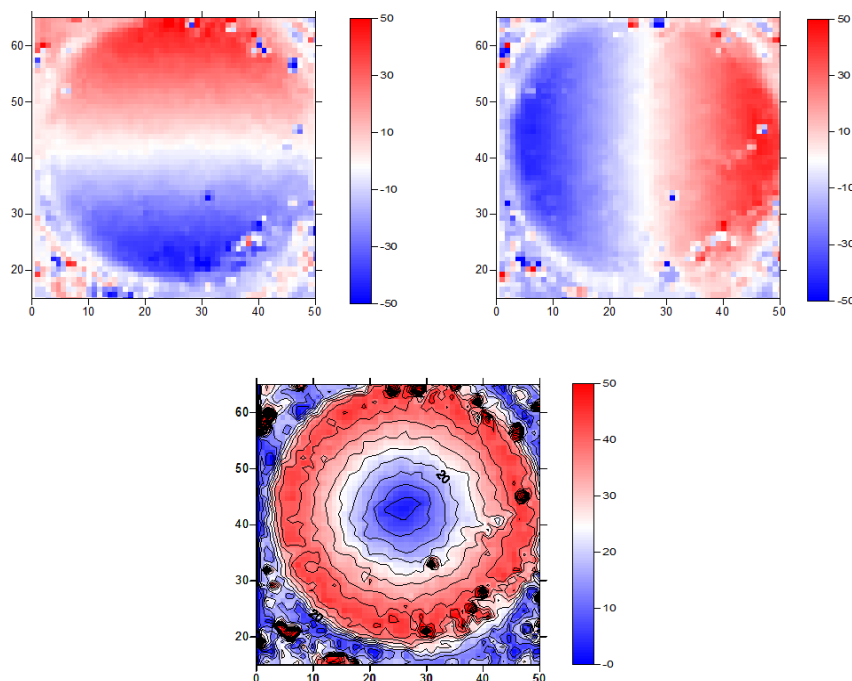
A sebességmezőket érdemes nem csak vektorokkal, hanem nagyságuk szerint kontúrvonalakkal is ábrázolni. Ennek bemutatásához a 12 cm átmérőjű és a 14,5 cm átmérőjű edényekkel $\omega = 3,1 \frac{1}{s}$ mellett készített méréseket választottam. A két ábrázolt esetben (4.8. ábra) nincsenek örvények, a másikon viszont (4.9. ábra) vannak. Így ábrázolva a sebességmezőkben még könnyebben kivehetőek az örvények, és nagyon jól látható a működésük. Az ábrákon a felső két grafikonon a sebességmező ketté van szedve az x és y irányú komponenseire, így jól kimutatható az örvények visszafelé áramlása is.



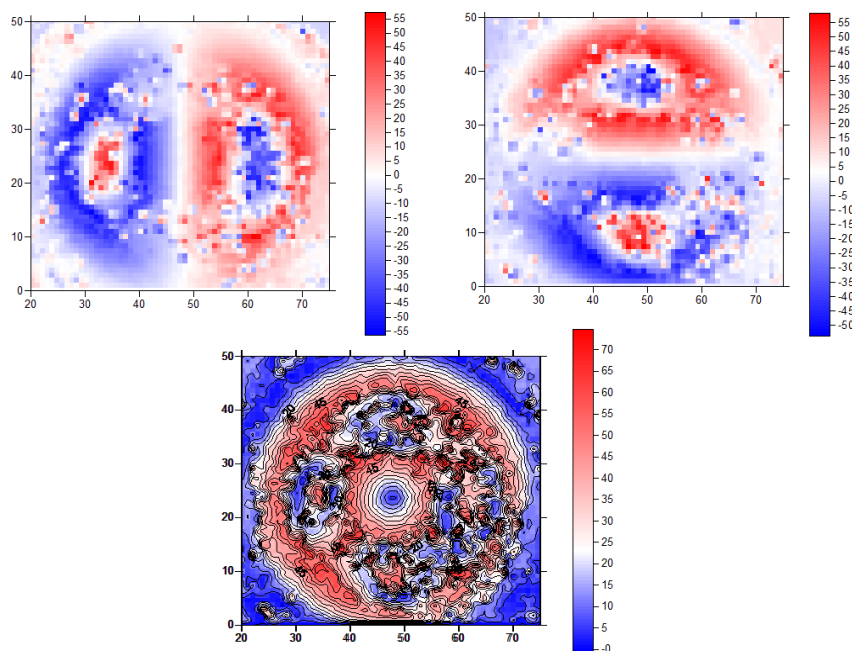
4.6. ábra. A három edénnyel készített mérések felpörgetési szakasza $\omega = 1,0 \frac{1}{s}$ forgatással. A felső sor az együttforgó rendszerben látható, az alsó sor a labor rendszerből látható sebesség.



4.7. ábra. A három edénnyel készített mérések felpörgetési szakasza $\omega = 2,1 \frac{1}{s}$ forgatással. A felső sor az együttforgó rendszerben látható sebességet, a középső sor a sebességek szorzását, és az alsó sor a labor rendszerből látható sebességet tartalmazza.

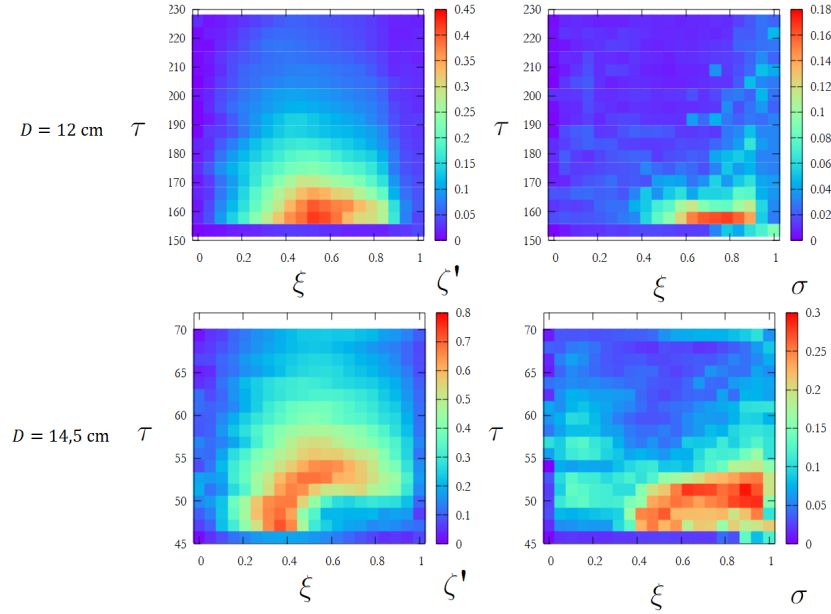


4.8. ábra. 12 cm átmérőjű, $\omega = 3,1 \frac{1}{s}$ forgási frekvenciájú mérés egyik pillanata. A felső két grafikonon a sebességmezőket x és y komponenseire bontva láthatjuk.



4.9. ábra. 14,5 cm átmérőjű, $\omega = 3,1 \frac{1}{s}$ forgási frekvenciájú mérés egyik pillanata. A felső két grafikonon a sebességmezőket x és y komponenseire bontva láthatjuk. Vegyük észre az örvények helyén az ellentétes előjelű áramlásokat!

A mérések lelassulási szakasza a gyorsítási szakaszhoz nagyon hasonlóan viselkedik. Ekkor a már merevtestként forgó víz körül megállítjuk az edény forgását, így a falhoz tapadó víz lassítja le a beljebb lévő folyadékrétegeket. Tekintsünk a 4.10. ábrára: a bal

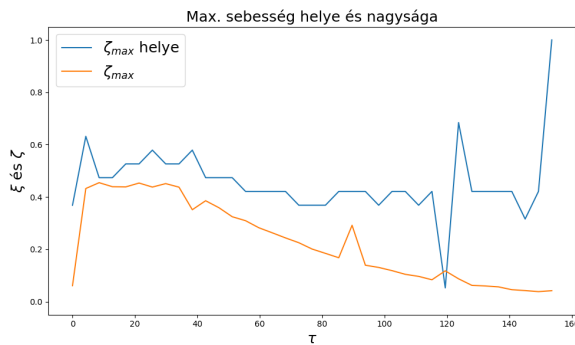


4.10. ábra. Példa a rendszer lassulására. $\omega = 3,1 \frac{1}{s}$.

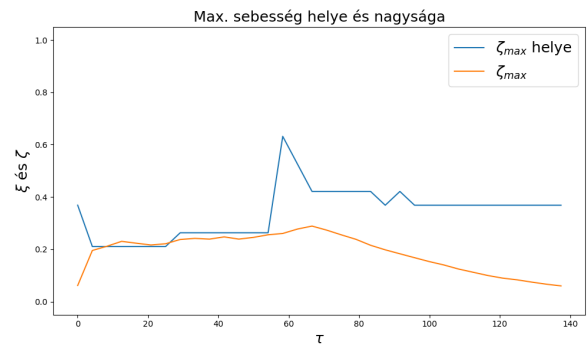
oldali oszlop ábrázolja a sebességeket, a jobb oldali pedig a szórásukat. A $D = 12$ cm esetben nem lehetett instabilitást megfigyelni, míg a $D = 14,5$ cm edénynél igen. A tér-idő-grafikonok is erre utalnak, hiszen míg az egyik esetben megjelenik az inflexiós pont a sebességtérben, illetve a szórás is megnő, addig a másik esetben hasonló jelenségek nem mutathatók ki.

Érdeemes megvizsgálni továbbá az együttforgó rendszerben a maximális sebesség helyét és nagyságát az idő függvényében. Elméleti megfontolások alapján azt kell látnunk, hogy a nagysága folyamatosan csökken, és helye a faltól befelé halad.

Tekintsünk a 4.11. és 4.12. ábrákra, amelyeken a szereplő mérések megegyeznek a 4.8. és a 4.9. ábrákon láthatókkal. Előbbiben nincs, utóbbiban van instabilitás. Vegyük észre, hogy amikor nincsen instabilitás a rendszerben, akkor a maximális sebesség nagysága monoton csökken, illetve helye is a sugár feléhez konvergál. Ugyanakkor amikor instabilitás van a rendszerben, akkor sem $\zeta'_{\max}$ helye, sem maga $\zeta'_{\max}$ nem így viselkedik. Az instabilitás megszűnésével (itt $\tau \approx 60$) viszont újra hasonló tendenciát mutatnak.



4.11. ábra. 12 cm átmérőjű, $\omega = 3,1 \frac{1}{s}$ forgási frekvenciájú forgatás mellett a maximális sebesség helye és nagysága időben.



4.12. ábra. 14,5 cm átmérőjű, $\omega = 3,1 \frac{1}{s}$ forgási frekvenciájú forgatás mellett a maximális sebesség helye és nagysága időben.

4.2. Az instabilitás vizsgálata

Nézzük meg, mely esetekben jön létre instabilitás, és amennyiben igen, alátámasztott-e elméletünk alapján. Az 1. táblázatban foglaltam össze az összes mérésünket. A táblázatból az olvasható le, hogy az egyes méréseknél a három vizsgálati módszerrel észlelünk-e instabilitást, külön a felpörgetés és lelassulás szakaszaira. A három vizsgálati módszer a sebességmező vizsgálata, a sebességprofilban előforduló inflexiós pont, illetve a sebesség maximumának a helyzete.

Ezek közül a legegyszerűbb a sebességmező vizsgálata. Megnézzük a sebességmezőket képkockáról képkockára, és örvényeket keresünk, melyek instabilitásra utalnak.

A sebességprofil vizsgálatát a Rayleigh–Kuo-kritérium miatt érdemes megtenni, hiszen az a sebességprofilban egy inflexiós pont jelenlétét szükséges, de nem elégséges feltételként adja meg instabilitás létrejöttéhez. Ehhez a korábbiakban leírt módszerekkel kinyerjük a sebességmezőből a sebességprofil, és vizsgáljuk, van-e benne inflexiós pont.

A sebesség maximumának a helyzete is adhat képet instabilitás jelenlétéről. Instabilitás esetén a sebességmező eltorzul, és maximuma nem várt helyre kerülhet.

ω [1/s] \ D [cm]	12		14,5		16	
	fel	le	fel	le	fel	le
1,0	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X
2,1	X	X	✓	✓	✓	✓
	X	X	✓	✓	✓	✓
	X	X	✓	~	✓	~
3,1	✓	X	✓	✓	✓	~
	✓	X	✓	✓	✓	~
	~	X	✓	~	✓	X
4,2	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	✓	✓	✓	✓	✓	~
	✓	~	✓	✓	✓	~
5,2	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	✓	✓	✓	~	✓	✓
	✓	✓	✓	~	✓	✓

1. táblázat. Az egyes beállításoknál megfigyelhető örvények. A táblázatban minden méréshez hat cella tartozik, 2x3-as elrendezésben. A két oszlop azt mutatja, hogy a mérés felpörgetését (*fel*), vagy lelassulását (*le*) jelöli az adott cella. A sorok jelentése fentről lefelé a következő: 1. a vektormezőben megfigyelhető-e örvény; 2. a sebességprofilban megjelenik-e inflexiós pont; 3. a maximális nyírás helye utal-e örvény jelenlétére. ✓ zöld háttéren azt jelenti, hogy igen, X piros háttérrel azt jelöli, hogy nem. ~ sárga háttérrel azt jelenti, hogy nem lehet egyértelműen beazonosítani.

Bár egyértelmű összefüggések találásához több mérésre lenne szükség, néhány empirikus következtetést levonhatunk. Általánosságban tapasztaltuk, hogy nagyobb forgatási sebességek mellett, valamint nagyobb edényeknél gyakrabban jelennek meg instabilitások.

Továbbá vegyük észre azt, hogy a három módszer többnyire minden mérésnél ugyanazt sugallja. Ez alatt azt értjük, hogy valóban akkor nem volt megfigyelhető instabilitás, ami-

kor nem volt a sebességprofilban inflexiós pont, és a sebesség maximuma is a várt módon viselkedett. A legkevesbé megbízható módszernek instabilitások észlelésére a maximális sebesség helyzetének vizsgálata bizonyult, mely csak ritkán adott egyértelmű eredményt.

4.3. Szimulációk

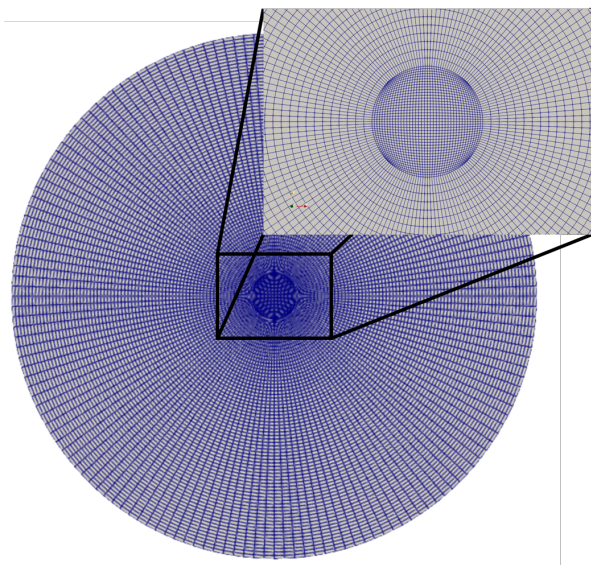
Korábban említettem, hogy hidrodinamikai instabilitásokat nagyon nehéz szimulálni, mivel apró perturbációk erősödnek fel, ezek figyelembevétele pedig bonyolult és időigényes feladat. Ezért további céloom elsősorban egy olyan szimuláció lefuttatása volt, melyben instabilitási jelenségek megfigyelhetők.

A dolgozatban két elvégzett szimulációt és eredményüket fogom bemutatni, melyek paraméterei ugyanazok, csupán a mesh felépítésében különböznek. Törekedtem továbbá arra, hogy a szimulációk hasonló áramlást írjanak le (lásd később), mint a kísérleteim. Ugyanakkor a kísérleteim több percen át tartanak, és egy ilyen felbontású szimuláció pár másodpercének számolása is több órát igényel.

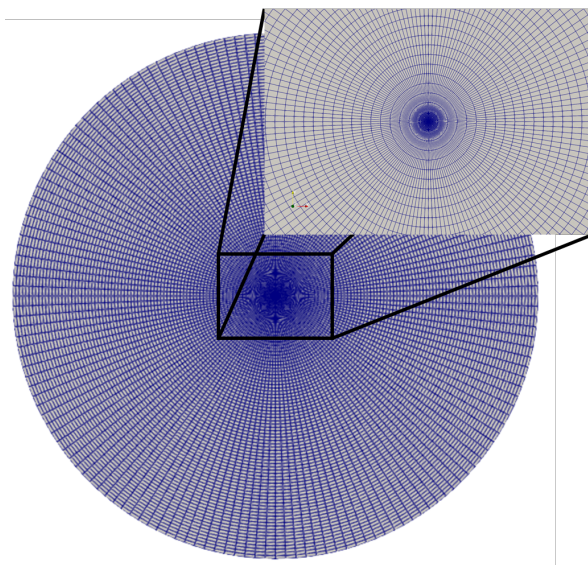
Más áramlástani kísérleteknél is szokás több nagyságrenddel nagyobb méretű jelenségeket, pl. ciklonokat lemodellezni pár deciméter nagyságú eszközökkel. Ezt akkor lehet megtenni, ha a két rendszer Reynolds száma nagyjából azonos. Én is ehhez az eljáráshoz folyamodtam a szimulációk számítási idejének a csökkentéséhez. A mérésekhez képest a forgatás sebességét és az anyag viszkozitását egy nagyságrenddel növeltem. Így bár a Reynolds szám nem változott, a jelenség a szimulációban sokkal gyorsabban, pár másodperc alatt megjelent. A szimulációkban így $\omega = 60 \frac{1}{s}$, $\nu \approx 10^{-5} \frac{m^2}{s}$ és $D = 0,16$ m paramétereket választottam. Ezekkel az adatokkal $Re_{sim} \approx 38400$.

A két szimuláció különböző mesh-ei a 4.13. és 4.14. ábrákon láthatók. A két mesh nagyjából azonos felbontású, legnagyobb különbségük az origó környékén van. Míg a 4.13. ábrán látható mesh középpontjánál négyzetek alkotják a mesh-t, addig a másik esetben az egész mesh tisztán poláros. Azért érdekes ezen két mesh eredményének az összehasonlítása, mert ha a középén négyzetes mesh-ben elő is állnak instabilitások, akkor azok lehet, hogy csak a mesh sajátos alakjából eredő artefaktumok felerősödése, mely hibás képet adhat a valódi megoldásról. Ehhez képest tisztán poláros mesh esetén nem léphetnek fel ehhez hasonló hatások. Ugyanakkor az origónál a koordinátarendszer szingularitása miatt előfordulhat más probléma.

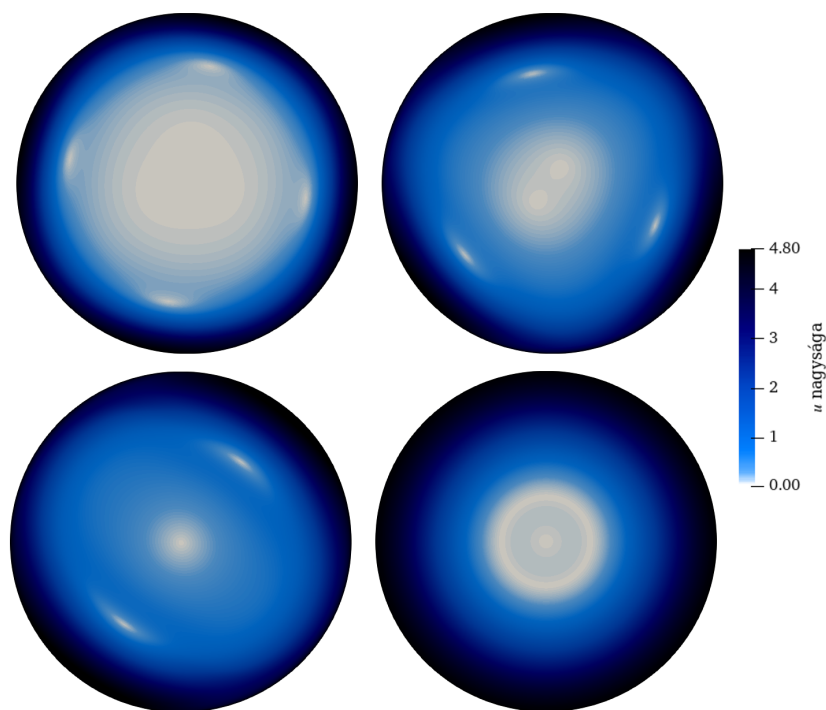
Mindkét esetben $t = 20$ s fizikai ideig futott a szimuláció, $5 \cdot 10^{-5}$ s időlépésekkel. A két szimuláció nagyon hasonló eredményeket adott, a rendszerek fejlődése szinte azonos. Az egyik szimulációból pár kiragadott képkocka a 4.15. ábrán látható. A teljes szimulációk a következő linkeken tekinthetők meg: *Négyzetes meshel készített szimuláció*. *Poláros meshel készített szimuláció*. Mindkét esetben előálltak instabilitások, melyek nagyon érdekes, a kísérletekben nem megfigyelt módon változtak. Először 4 örvény képződött, melyek száma nem sokkal később 3-ra csökken, majd 2-re, majd az összes instabilitás eltűnik, és elkezd beállni a merevtest forgás. Ez egy rendkívül izgalmas eredmény, hiszen a mérések során nem figyelhető meg az örvények számának változása, mivel hamarabb szétoszlanak, minthogy ez észlelhető lenne. Ugyanakkor korábbi kutatásaink során talákoztunk hasonló jelenséggel.



4.13. ábra. Középen 4-szeres szimmetriával rendelkező mesh.



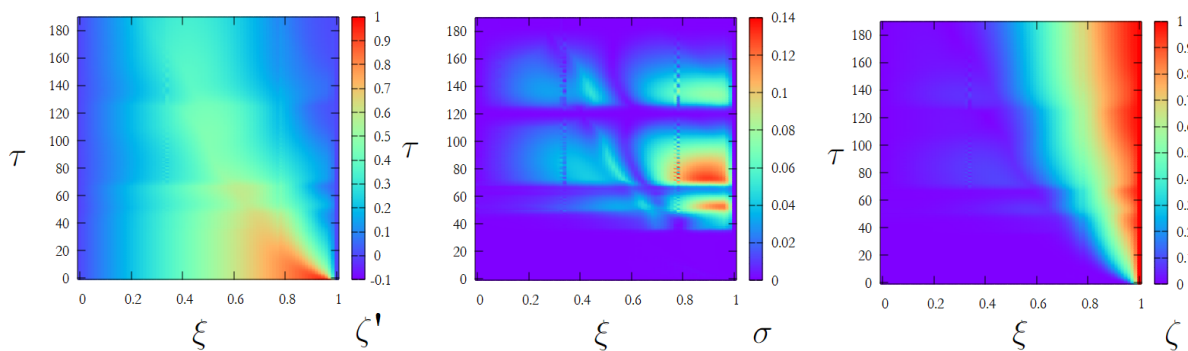
4.14. ábra. Tisztán poláros mesh.



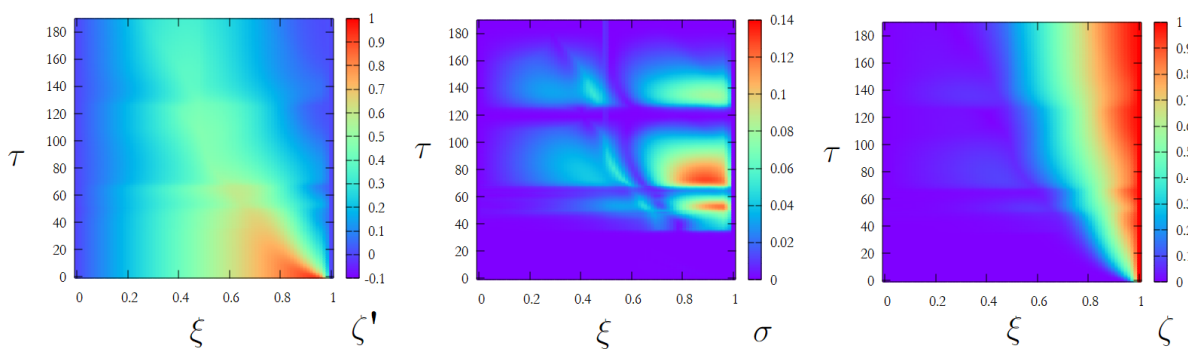
4.15. ábra. A tisztán poláros mesh-el rendelkező szimulációban létrejövő örvények, illetve a $t = 20$ s-ban beálló állapot. A színskála jelöli a sebességmező nagyságát.

Az 1.4. ábrán látható jelenség esetében a létrejövő sokszögforma szögeinek a számát befolyásoló paraméterek közé tartozott a forgatás frekvenciája. Általánosságban gyorsabb forgatás nagyobb szögszámhoz vezetett. A szimulációkban is egy hasonló képet kapunk, hiszen azt látjuk, hogy az idő múlásával csökken az örvények száma, mellyel párhuzamosan a sebességkülönbség nagysága is csökken. Tehát kisebb nyírási sebességek itt is kevesebb örvényt eredményeznek.

A 4.16. és 4.17. ábrákon láthatjuk a szimulációk sebességprofiljának fejlődését. Jól kivehetők rajtuk az ugrások, ahol az örvények száma változott. Az is látszik, hogy csak akkor volt örvény a rendszerben, amikor a szórás nem nulla volt.

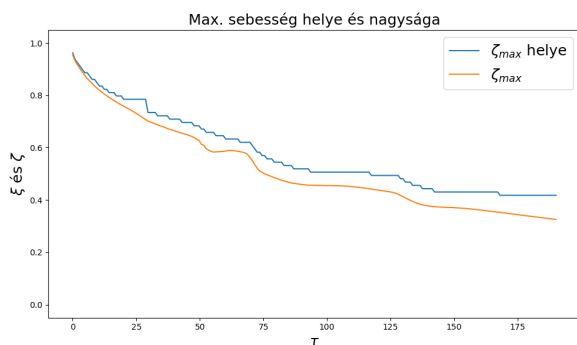


4.16. ábra. A középen négyzetes mesh-el rendelkező szimuláció eredménye. Észrevehető pár kiugró pont. Ezek minden bizonnyal a mesh sajátosságából eredő artefaktumok lehetnek.

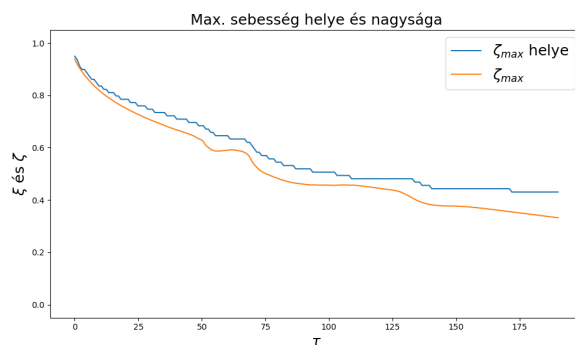


4.17. ábra. A tisztán poláros mesh-el rendelkező szimuláció eredménye.

A 4.18. és 4.19. ábrákon látható az együttforgó rendszerben a maximális sebesség nagysága és helyzete az időben. Ezeken is észrevehetőek ugrások az örvényszámok változásakor.



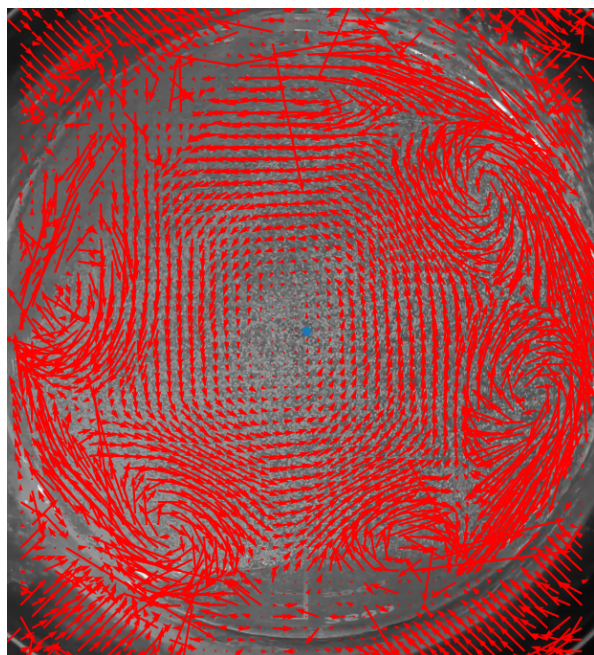
4.18. ábra. Középen négyzetes mesh-el rendelkező szimuláció esetén a maximális nyírás helye és nagysága.



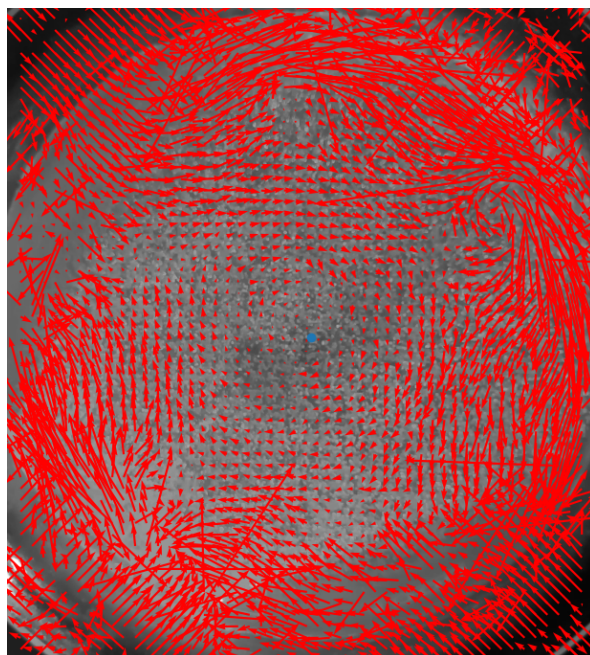
4.19. ábra. Tisztán poláros mesh-el rendelkező szimuláció esetén a maximális nyírás helye és nagysága.

4.4. Egy speciális eset: a felpörgetés megszakítása

Korábbiakban láthattuk a mérések sebességprofiljain, hogy a felpörgetés során a nyírás a faltól a kör közepe felé terjed. Felmerülhet a kérdés, hogy elindíthatunk-e több nyírást a faltól, melyek egymás mögött haladnak befelé. Ezt legegyszerűbben úgy tehetjük meg, ha a kezdeti nyugalmi állapotban elkezdjük forgatni az edényt, de még mielőtt a folyadék felvenné annak sebességét, leállítjuk a forgatást. Így egy olyan sebességprofilt kell kapnunk, mely közepén és szélén nyugalom van, de a kettő közötti réteg rendelkezik sebességgel. A mi esetünkben ilyenkor nagyon jól látható örvények jelentek meg, melyekre néhány példa a 4.20. és 4.21. ábrákon látható.



4.20. ábra. $D = 14,5$ cm, $\omega = 4,2 \frac{1}{s}$, a forgatást 3 teljes kör megtétele után kapcsoltam le. Jól kivehetőek a fal mentén képződő örvények.



4.21. ábra. $D = 16$ cm, $\omega = 3,1 \frac{1}{s}$, a forgatást 5 teljes kör után kapcsoltam le.

A 4.20. ábrán láthatunk 5 jól látható és egy 6., kevésbé tiszta örvényt az edény falánál, míg a 4.21. ábrán 5, esetleg 6 középen egybeolvadt örvényt láthatunk. Ezzel a mérési módszerrel szinte minden esetben láthattunk örvényeket, mely nem meglepő, hiszen két nyírás is megjelenik a rendszerben. Vizsgálataink szerint ezek együtt még hajlamosabbak instabilitásba fajulni. Ahhoz viszont, hogy az egymást követő nyírásokat pontosabban vizsgálhassuk, egy nagyobb edény szükséges, melyben ezek diszkrétebben haladhatnak, egymást kevésbé befolyásolva. Ugyanakkor egy ilyen elrendezés és analízis meghaladja ezen dolgozat kereteit. Tervezünk a jövőben ezzel kapcsolatosan részletesebb vizsgálatokat végezni.

5. Összefoglalás

A dolgozatban a tranziens nyírási instabilitásokról készített méréseimet illetve szimulációimat és azok kiértékelését tárgyaltam.

- **Kísérleti elrendezés:** A mérések elvégzéséhez egy forgóasztalon forgatott edényt használtam, amelyben a vizet nyomjelző részecskékkel vegyítettem, amelyek lézerfény hatására jól láthatóan követték az edényben fellépő áramlásokat. Az erről készített felvételeket térbeli korreláció kereső módszerrel értékeltem ki.
- **Sebességprofilok vizsgálata:** Az így kapott sebességmezőkön egyes beállításoknál megfigyelhető volt instabilitás jelensége. Továbbá a tangenciális sebességeket lehetett a sugár mentén ábrázolni, mely megadja a rendszer átlag sebességprofilját. Ennek időfejlődését 2D téridő-grafikonokon lehet nyomon követni. Érdekes továbbá a sebességprofil maximumának a vizsgálata is, mellyel bemutatatható a rendszer merevtest forgásba való konvergálása is.
- **Instabilitások vizsgálata:** Instabilitás jelenléte esetén az előbb említett téridő-grafikonok speciális módon torzulnak. A sebességprofilban inflexiós pont jelenik meg, illetve a pontok szórása is megugrik az örvények miatt. Az összes mérés instabilitással kapcsolatos eredménye az 1. táblázatban szerepel.
- **Szimulációk:** Mérések mellett készítettem szimulációkat is. A szimulációk kvalitatíve visszaadják a kísérletek eredményét illetve tulajdonságait. Fontos eredménynek tartom a szimulációkban is létrejövő instabilitást, mivel hidrodinamikai instabilitásról helyes szimulációt készíteni igen nehéz feladat.

A kívánt instabilitási jelenséget sikerült előállítani, kísérleti vizsgálataimmal és szimulációs eredményeimmel betekintést nyerhettünk tulajdonságaira és működésére. A jövőben érdemes lehet további kísérleteket végezni más beállításokkal, illetve a 4.4. alfejezetben említett jelenséget közelebbről megvizsgálni nagyobb átmérőjű edényekkel. Tervezem további szimulációk lefuttatását, illetve a jövőben ezen kutatási munkában szerzett tapasztalataimat felhasználva más, akár 3D jelenségekre is kitérhetek.

Hivatkozások

- [1] JANSSON, THOMAS R. N.; HASPANG, MARTIN P.; JENSEN, KÅRE H.; HERSEN, PASCAL; BOHR, TOMAS. 2006 *Polygons on a Rotating Fluid Surface*. Physical Review Letters 96, 174502.
- [2] R. BERGMANN, L. TOPHØJ, T. A. M. HOMAN, P. HERSEN, A. ANDERSEN, & T. BOHR. 2011 *Polygon formation and surface flow on a rotating fluid surface*. J. Fluid Mech. 679, 415–431.
- [3] B.BACH, E. C.LINNARTZ, M. H. VESTED, A. ANDERSEN AND T. BOHR. 2014 *From Newton's bucket to rotating polygons: experiments on surface instabilities in swirling flows*. J. Fluid Mech. 386-403.
- [4] Vallis, G. K. (2017). Atmospheric and oceanic fluid dynamics. Cambridge University Press.
- [5] Kuo, H. L. (1949). Dynamic instability of two-dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere. Journal of Atmospheric sciences, 6(2), 105-122.
- [6] BUDÓ ÁGOSTON 1965 *Mechanika* Tankönyvkiadó, Budapest
- [7] CARL E. MUNGAN, TREVOR C. LIPSCOMBE. 2013 *Newton's Rotating Water Bucket: A Simple Model*. Washington Academy of Sciences. 15-24.
- [8] <http://www.openpiv.net/>
- [9] <https://www.openfoam.com/>