

Rezonáns bolygórendszerek analitikus vizsgálata a Kuramoto-modell segítségével

Takács Árpád

fizika BSc, 3. évf.

témavezető:

Kovács Tamás

ELKH-ELTE

Tartalomjegyzék

Absztrakt	2
1. Égi mechanikai bevezetés	3
1.1. Az egycentrum probléma és a pályaelemek	3
1.2. Delaunay-féle hatás- és szögváltozók	5
2. 4 bolygó középmozgás rezonanciájának analitikus leírása	6
2.1. A Hamilton-függvény általános felépítése és a Kepleri tag alakja	6
2.2. Perturbációs tag meghatározása	7
2.2.1. Új változók bevezetése	8
2.2.2. A Hamilton-függvény együtthatói	11
3. Kapcsolat a Kuramoto-modellel	12
3.1. Kuramoto-modell alapjai	12
3.2. Kuramoto-modell általánosítása	14
3.3. A mozgásegyenletek Kuramoto-modellhez igazítása	14
3.3.1. Az általános impulzusok értékei	21
4. Diskusszió	22
Függelék	23
4.0.1. A rendszer csillagászati adatai	23
4.0.2. Pályaelemek kezdőértékei	23
4.0.3. Kanonikus transzformáció	24
Irodalomjegyzék	25

Absztrakt

A bolygórendszerek kialakulásában és fejlődésében fontos szerep jut a középmozgás rezonanciáknak, azaz amikor szükséges feltételként az égitestek keringési periódusai kis egész számok hányadosai. Az elmúlt évek exobolygó-kutatásának egyik fontos eredménye, hogy többes rendszerekben az égitestek ún. rezonancia láncokba rendeződnek. Ez a dinamikai mechanizmus a probléma nemlineáris jellegéből adódóan numerikusan kezelhető kényelmesen. Analitikus tárgyalásmódja, a perturbációs függvény pályaelemek szerinti sorfejtése, azonban jóval korábbra nyúlik vissza. Mindazonáltal a bolygók rezonáns viselkedésére teljesen általános analitikus modellt eddig nem sikerült kidolgozni. Magasabb rendű rezonanciák és több (5-6) bolygó esetén a sorfejtés bonyolult alakot ölt.

Dolgozatomban egy, az eddigiektől eltérő, megközelítést használok. Más tudományterületeken sikerrel alkalmazott Kuramoto-modell által leírt csatolt oszcillátor rendszer szinkronizációjával modellezem a bolygók rezonáns mozgását. Ehhez a gravitációs probléma Hamilton-függvényét kell a Kuramoto-modell Hamilton-függvényének formájára hozni. A módszer előnye, hogy a Kuramoto-modell az oszcillátorok szinkronizációját egy a statisztikus fizikából ismert rendparaméter segítségével tárgyalja, aminek analógiája analitikus leírást ad nagyszámú bolygó rezonáns dinamikájára.

Kutatásom fő feladata a megfelelő kanonikus transzformáció(k) felírása, a mozgásegyenletek levezetése és végső soron a rezonáns dinamika analitikus modelljének megadása. A dolgozatban a munka első fázisaként speciálisan három bolygó elsőrendű rezonanciába való mozgását tárgyalom a fenti módszerrel az általánosítás lehetőségét szem előtt tartva.

1. fejezet

Égi mechanikai bevezetés

Az égitestek mozgásának vizsgálatakor a következő kérdésekre várunk választ:

- Milyen a pálya alakja?
- Milyen a mozgás időbeli lefolyása, azaz adott időpontban hol lesz az égitest?
- Mennyire stabil a pálya hosszú távon?

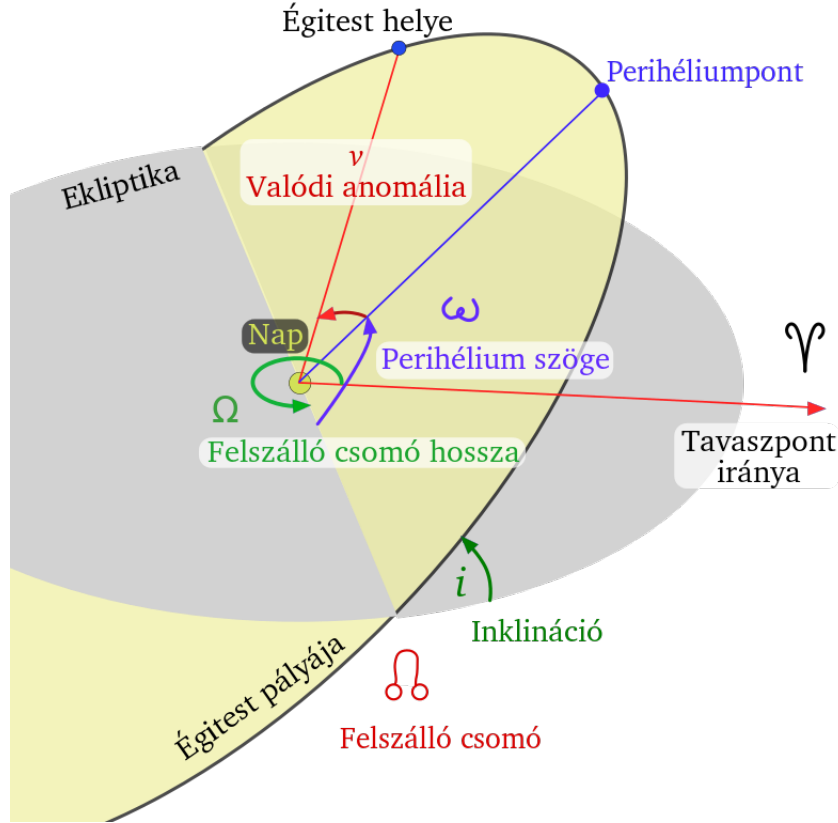
A kéttest-probléma megoldása (a pálya alakja) már évszázadok óta ismert, elsőként Newton vezette le a tömegvonzás törvényéből, azonban több test esetén a leírás sokkal bonyolultabbá válik.

1.1. Az egycentrum probléma és a pályaelemek

Az egycentrum probléma esetében az egy bolygóból álló rendszer 3 szabadsági fokú (a vonzócentrumhoz nem tartozik szabadsági fok), így 3 általános koordináta szükséges a leírásához (fázistere 6 dimenziós, a probléma differenciálegyenlet-rendszere hatodrendű). A 6 adat lehet a 3 hely- és 3 sebesség koordináta, azonban sok esetben célszerűbb, az ún. pályaelemeket használni. A pályaelemek az integrációs állandókat helyettesítik, és azokkal a megoldás egyszerűbben kifejezhető. A pályaelemek az integrációs állandókkal kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban vannak. A mozgást leíró pályaelemek a következők:

- e : (excentricitás) Az ellipszis excentricitása, a pálya "lapultságát" jellemzi.
- a : (fél nagytengely) Az ellipszis fél nagytengelye, a perihélium és a számtani közepe
- i (inklináció) Az inklináció vagy pályahajlás az Ekliptikával (vagy a központi égitest egyenlítőjével) bezárt szög
- Ω (felszálló csomó) A felszálló csomó és a referencia irány által bezárt szög

- ω (pericentrum argumentuma) Az ellipszispálya vonzócentrumát az ellipszispálya hozzá legközelebbi pontjával összekötő egyenes és a referencia irány által bezárt szög
- ν (pericentrum-átmenet időpontja)



1.1. ábra. A kéttest-probléma pályaelemei és geometriai jelentésük. Az ábrán a pályasík (sárga) metszi a referenciasíkot (szürke). A két sík metszése a csomópontvonal nevezzük, ez köti össze a centrumot a felszálló és a leszálló csomóval. [https://hu.wikipedia.org/]

Több bolygó esetén az egyes égitestek egymás kölcsönös gravitációs hatása alatt a Kepleri megoldástól eltérő pályán mozognak. Első közelítésben két bolygó kölcsönös perturbációi a többi bolygó hatásától függetlenül vizsgálhatók. A perturbációs számítás alapfeladatáknak a perturbált kéttest-probléma tekinthető, melynek mozgásegyenlete az egycentrum problémát leíró egyenlettelől csak a tömeg egységre ható R perturbáló erőben különbözik, ahol $R = -Gm' \left(\frac{\Delta}{\Delta^3} + \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right)$, G a Newton-féle gravitációs állandó, Δ a két bolygó távolsága, valamint $\mathbf{r}'$ a perturbált bolygó Naptól mért távolsága. [1]

A perturbáló erő hatására a bolygók pályaelemei időben változnak a planetáris Lagrange-egyenleteknek megfelelően. Ezek megoldásához ismerni kell az R perturbációs függvény pályaelemek szerinti sorfejtését. Ennek legáltalánosabb alakja $R = \sum C \cos D$, melyben a C együttható tartalmazza az a, e, i pályaelemeket, míg D a szögváltozókat (Ω, ω, ν) .

D konkrét alakjából következően kaphatunk időben lineáris (szekuláris) vagy periodikus perturbációt. Ez utóbbi felelős a bolygók közti ún. középmozgás rezonanciákért, melyek során az égitestek adott idő elteltével azonos konfigurációt vesznek el. Azaz keringési idejük kis egész számok hányadosával közelíthető. Ez a mozgástípus mind naprendszerbeli, mind pedig extraszoláris bolygók esetén gyakori. Jelenleg elfogadott, hogy a bolygórendszerek keletkezésében és hosszú idejű fejlődésében alapvető szerep jut a középmozgás rezonanciáknak.

A dolgozat további részében a középmozgás rezonanciák egy új modelljét mutatom be.

1.2. Delaunay-féle hatás- és szögváltozók

A perturbáció-elméletben rendkívül hasznos a kanonikus hatás- és szögváltozók bevezetése. Ezekkel a változókkal a mozgásegyenletek megoldása explicit formában megoldható. Természetesen a megfelelő hatás- és szögváltozók megtalálása bonyolult feladat lehet.

A kéttest-problémában szerencsére rendelkezünk a fent említett változókkal. Vezessük be az ún. Delaunay-féle hatás- és szögváltozókat [2] (Λ_i, λ_i) és (D_i, ϖ_i) :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \Lambda_i &= \mu_i^* \sqrt{\mu_i \cdot a_i} \approx m_0 \sqrt{G m_0 a} & \lambda_i &= \ell_i + \varpi_i \\ D_i &= \Lambda_i \left(1 - \sqrt{1 - e_i^2} \right) \approx \Lambda_i \cdot \frac{e_i^2}{2} & \gamma_i &= -\varpi_i \end{aligned}$$

Ahol $\mu^* = \frac{m_0 \cdot m_i}{m_0 + m_i}$ a redukált tömeg, és $\ell_i = E_i - e_i \cdot \sin E_i$ a középanomália (E_i az excentrikus anomália) továbbá kihasználtuk, hogy az excentricitás kicsi, és $m_0 \gg m_i \quad \forall m_i, i \neq 0$ -ra. Ezekkel a változókkal a (perturbált) Kepler-probléma könnyedén tárgyalható kanonikus formalizmusban. Munkám jelentős részében erre támaszkodom.

2. fejezet

4 bolygó középmozgás rezonanciájának analitikus leírása

Ebben az alfejezetben egy négy bolygóból, valamint a központi csillagból álló rezonáns rendszert leíró Hamilton-függvény bevezetésének szenteljük. A választást az elmúlt években felfedezett és aktívan vizsgált Kepler-223 jelű exobolygó-rendszer inspirálta.[3]

2.1. A Hamilton-függvény általános felépítése és a Kepleri tag alakja

A rendszer időfejlődését Hamilton-formalizmusban tárgyaljuk.[2] Ehhez fel kell írni a rendszer Hamilton-függvényét, mely két részből adódik össze: a Kepleri és a perturbációs tagból:

$$(2.1) \quad H = H_{kep} + H_{per}$$

A továbbiakban az i -dik bolygó helyzetét r_i -vel, és az ebből származtatott kanonikus impulzust $\hat{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}$ -vel jelöljük, ahol L a rendszer Lagrange-függvénye.

A Kepleri tag a pályaelemek (a_i) felhasználásával a következő alakban írható:

$$(2.2) \quad H_{kep} = \sum_{i=1}^4 \frac{\|\hat{p}_i\|^2}{2m_i} - G \frac{m_0 m_i}{r_i} = - \sum_{i=1}^4 \frac{G m_0 m_i}{2a_i}$$

ahol az első tag a jól ismert kinetikus energia, a második pedig a potenciális energia, G pedig a gravitációs állandó: $G = 6.674 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. Látható, hogy a Kepleri tag kizárólag az egyes bolygók és a központi égitest közötti kölcsönhatást írja le.

A szumma egyes tagjainak vizsgálatához vezessük be az ún. középmozgást (átlagos

pályamenti szögsebességet):

$$(2.3) \quad n_i = \frac{2\pi}{T_i} \rightarrow n_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{a_i^3}}$$

Ahol T_i az i -dik bolygó periódusideje, $\mu_i = \sqrt{G(m_0 + m_i)}$ és (2.3)-nál kihasználtuk Kepler III. törvényét ($a^{3/2}n^{-1/2} = \text{const.}$).

Az új (1.1), kanonikusan konjugált párokkal kifejezve a Kepleri-tag:

$$(2.4) \quad H_{kep} = - \sum_{i=1}^4 \frac{\mu_i^2 \cdot (\mu_i^*)^3}{2\Lambda_i^2} \approx - \sum_{i=1}^4 \frac{G^2 \cdot m_0^2 \cdot m_i^3}{2\Lambda_i^2}$$

A közelítésnél kihasználtuk, hogy $m_0 \gg m_i$, $\forall i$ -re

A perturbációs tagra nem létezik a fentihez hasonló egyszerű összefüggés, gyakran a szögváltozók Fourier-soraként szokás felírni őket. [2]

2.2. Perturbációs tag meghatározása

Amint láttuk a bevezetésben a perturbációs függvény két markánsan különböző részből áll (rezonáns- és szekuláris perturbációk).

Ennek megfelelően a Hamilton-függvényben a perturbációs részt két tag összegeként írhatjuk:

$$(2.5) \quad H_{\text{pert}} = H_{\text{rez}} + H_{\text{szin}},$$

ahol H_{rez} a heliocentrikus rendszerben felírt rezonáns perturbáció:

$$(2.6) \quad H_{\text{rez}} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(-G \frac{m_i \cdot m_j}{\|r_i - r_j\|} + \frac{\hat{p}_i \cdot \hat{p}_j}{m_0} \right).$$

A fenti képlet kifejtésének nehézsége abban rejlik, hogy az i -dik és j -dik bolygó távolságát nehéz kifejezni a Delaunay-féle változókkal. Ennek általános kifejtése a [4]-ben található.

A szinodikus tag (csak a szomszédos bolygók hatását figyelembe véve):

$$(2.7) \quad H_{\text{szin}} = c_i \cos(\lambda_i - \lambda_{i+1}),$$

ahol a c_i a Laplace-együtthatóknak [1] és a rendszer változóinak függvénye.

Mivel azonban a szinodikus tag sokkal gyorsabban változik, mint a rezonáns tag, ezért ha a vizsgált időtartam elegendően hosszú akkor az szinodikus tag időátlaga nulla lesz.

Ennek következtében a továbbiakban csak a rezonáns taggal fogunk dolgozni.[5, 6, 7, 8]

2.2.1. Új változók bevezetése

Látható, hogy a fenti rezonáns tag nem integrálható. Annak érdekében, hogy a Hamilton-függvényt analitikusan tárgyalhatóvá tegyük, vezessük be a következő kanonikus-transzformációt [3]:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \lambda_1 + \lambda_3 - 2\lambda_2, & P_1 &= \Lambda_1, \\
Q_2 &= \lambda_2 + 2\lambda_4 - 3\lambda_3, & P_2 &= 2\Lambda_1 + \Lambda_2, \\
Q_3 &= \lambda_3 - \lambda_4, & P_3 &= 8\Lambda_1 + 6\Lambda_2 + 4\Lambda_3 + 3\Lambda_4, \\
Q_4 &= 4\lambda_4 - 3\lambda_3, & P_4 &= (\Lambda_1 - D_1) + (\Lambda_2 - D_2) + (\Lambda_3 - D_3) + (\Lambda_4 - D_4), \\
Q_5 &= 4\lambda_4 - 3\lambda_3 + \varpi_1, & P_5 &= D_1, \\
Q_6 &= 4\lambda_4 - 3\lambda_3 + \varpi_2, & P_6 &= D_2, \\
Q_7 &= 4\lambda_4 - 3\lambda_3 + \varpi_3, & P_7 &= D_3, \\
Q_8 &= 4\lambda_4 - 3\lambda_3 + \varpi_4, & P_8 &= D_4.
\end{aligned}$$

A fenti transzformációról Poisson-zárójelek segítségével megmutatható, hogy valóban kanonikus transzformációt ír le[2]. Poisson-zárójelek segítségével a mozgásegyenletek is megkaphatók.

Legyen $\Delta\Lambda_i$ az egzakt rezonancia értékénél felvett $\Lambda_{i,0}$ -tól vett eltérés. Ekkor $\Delta\Lambda_i$ -k kiszámíthatók a következőképpen:

$$\begin{aligned}
\Delta\Lambda_1 &= P_1 \\
\Delta\Lambda_2 &= P_2 - 2 \cdot P_1 \\
\Delta\Lambda_3 &= P_1 - 3 \cdot (P_2 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8) \\
\Delta\Lambda_4 &= 2 \cdot P_2 + 4 \cdot (P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8)
\end{aligned}
\tag{2.8}$$

A rendszer új változóiban felírt Kepleri Hamilton-függvénye:

$$\begin{aligned}
H_{\text{kep}} &= -\frac{3}{2} \sum_i^4 \frac{n_{i,0}}{\Lambda_{i,0}} \Delta\Lambda_i^2 = -\frac{3}{2} \left(C_1 P_1^2 + C_2 (P_2 - 2P_1)^2 + \right. \\
&\quad \left. C_3 (P_1 - 3(P_2 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8))^2 + \right. \\
&\quad \left. C_4 (2P_2 + 4(P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8))^2 \right)
\end{aligned}
\tag{2.9}$$

ahol $C_i = \frac{n_{i,0}}{\Lambda_{i,0}}$, Itt a az alsó indexben a 0 a középmozgás rezonancia nominális, Kepler III. törvényéből adódó, értékét jelenti.

A fenti transzformáció után a Hamilton-függvény rezonáns része a következő (csak az elsőrendű rezonanciákat figyelembe véve):

$$\begin{aligned}
 H_{\text{rez}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = & C_{12} \sqrt{P_5} \cos(Q_5 - 2Q_2 - 3Q_1) + \\
 & C_{21} \sqrt{P_6} \cos(Q_6 - 2Q_2 - 3Q_1) + \\
 & C_{13} \sqrt{P_5} \cos(Q_5 - 2Q_2 - 3Q_1) + \\
 (2.10) \quad & C_{31} \sqrt{P_8} \cos(Q_7 - 2Q_2 - 3Q_1) + \\
 & C_{23} \sqrt{P_6} \cos(Q_7 - 2Q_2) + C_{32} \sqrt{P_7} \cos(Q_7 - 2Q_2) \\
 & C_{24} \sqrt{P_6} \cos(Q_7 - Q_2) + C_{42} \sqrt{P_8} \cos(Q_8 - Q_2) \\
 & C_{34} \sqrt{P_7} \cos(Q_7) + C_{43} \sqrt{P_8} \cos(Q_8)
 \end{aligned}$$

Az új változókkal felírt mozgásegyenletek komponensekben kiírva:

$\dot{Q}_i$ -ra:

(2.11)

$$\dot{Q}_1 = -3C_1 \cdot P_1 - 6C_2(2P_1 - P_2) + 3C_3 \cdot (-P_1 + 3P_2 + 3P_4 + 3P_5 + 3P_6 + 3P_7 + 3P_8)$$

$$\dot{Q}_2 = 3C_2(2P_1 - P_2) - 9C_3(-P_1 + 3P_2 + 3P_4 + 3P_5 + 3P_6 + 3P_7 + 3P_8) -$$

$$12C_4(P_2 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6 + 2P_7 + 2P_8)$$

$$\dot{Q}_3 = 0$$

$$\dot{Q}_4 = -9C_3(-P_1 + 3P_2 + 3P_4 + 3P_5 + 3P_6 + 3P_7 + 3P_8) - 24C_4(P_2 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6 + 2P_7 + 2P_8)$$

$$\dot{Q}_5 = -\sqrt{P_5} \cdot \left(\frac{18C_3(-P_1 + 3P_2 + 3P_4 + 3P_5 + 3P_6 + 3P_7 + 3P_8)}{2\sqrt{P_5}} + \frac{48C_4(P_2 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6 + 2P_7 + 2P_8)}{2\sqrt{P_5}} \right) +$$

$$\frac{C_{12}}{2\sqrt{P_5}} \cos(3Q_1 + 2Q_2 - Q_5) + \frac{C_{13}}{2\sqrt{P_5}} \cos(Q_1 + 2Q_2 - Q_5)$$

$$\dot{Q}_6 = -\sqrt{P_6} \cdot \left(\frac{18C_3(-P_1 + 3P_2 + 3P_4 + 3P_5 + 3P_6 + 3P_7 + 3P_8)}{2\sqrt{P_6}} + \frac{48C_4(P_2 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6 + 2P_7 + 2P_8)}{2\sqrt{P_6}} \right) +$$

$$\frac{C_{21}}{2\sqrt{P_6}} \cos(3Q_1 + 2Q_2 - Q_6) + \frac{C_{23}}{2\sqrt{P_6}} \cos(2Q_2 - Q_6) + \frac{C_{24}}{2\sqrt{P_6}} \cos(Q_2 - Q_6)$$

$$\dot{Q}_7 = -\sqrt{P_7} \cdot \left(\frac{18C_3(-P_1 + 3P_2 + 3P_4 + 3P_5 + 3P_6 + 3P_7 + 3P_8)}{2\sqrt{P_7}} + \frac{48C_4(P_2 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6 + 2P_7 + 2P_8)}{2\sqrt{P_7}} \right) +$$

$$\frac{C_{31}}{2\sqrt{P_7}} \cos(Q_1 + 2Q_2 - Q_7) + \frac{C_{32}}{2\sqrt{P_7}} \cos(2Q_2 - Q_7) + \frac{C_{34}}{2\sqrt{P_7}} \cos(Q_7)$$

$$\dot{Q}_8 = -\sqrt{P_8} \cdot \left(\frac{18C_3(-P_1 + 3P_2 + 3P_4 + 3P_5 + 3P_6 + 3P_7 + 3P_8)}{2\sqrt{P_8}} + \frac{48C_4(P_2 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6 + 2P_7 + 2P_8)}{2\sqrt{P_8}} \right) +$$

$$\frac{C_{42}}{2\sqrt{P_8}} \cos(Q_2 - Q_8) + \frac{C_{43}}{2\sqrt{P_8}} \cos(Q_8)$$

$\dot{P}_i$ -ra a mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned}
\dot{P}_1 &= 3C_{12}\sqrt{P_5}\sin(3Q_1 + 2Q_2 - Q_5) + C_{13}\sqrt{P_5}\sin(Q_1 + 2Q_2 - Q_5) + \\
& 3C_{21}\sqrt{P_6}\sin(3Q_1 + 2Q_2 - Q_6) + C_{31}\sqrt{P_7}\sin(Q_1 + 2Q_2 - Q_7) \\
\dot{P}_2 &= 2C_{12}\sqrt{P_5}\sin(3Q_1 + 2Q_2 - Q_5) + 2C_{13}\sqrt{P_5}\sin(Q_1 + 2Q_2 - Q_5) + \\
& 2C_{21}\sqrt{P_6}\sin(3Q_1 + 2Q_2 - Q_6) + 2C_{23}\sqrt{P_6}\sin(2Q_2 - Q_6) + \\
& C_{24}\sqrt{P_6}\sin(Q_2 - Q_6) + 2C_{31}\sqrt{P_7}\sin(Q_1 + 2Q_2 - Q_7) + \\
& 2C_{32}\sqrt{P_7}\sin(2Q_2 - Q_7) + C_{42}\sqrt{P_8}\sin(Q_2 - Q_8) \\
(2.12) \quad \dot{P}_3 &= 0 \\
\dot{P}_4 &= 0 \\
\dot{P}_5 &= \sqrt{P_5}(-C_{12}\sin(3Q_1 + 2Q_2 - Q_5) - C_{13}\sin(Q_1 + 2Q_2 - Q_5)) \\
\dot{P}_6 &= \sqrt{P_6}(-C_{21}\sin(3Q_1 + 2Q_2 - Q_6) - C_{23}\sin(2Q_2 - Q_6) - C_{24}\sin(Q_2 - Q_6)) \\
\dot{P}_7 &= \sqrt{P_7}(-C_{31}\sin(Q_1 + 2Q_2 - Q_7) - C_{32}\sin(2Q_2 - Q_7) + C_{34}\sin(Q_7)) \\
\dot{P}_8 &= \sqrt{P_8}(-C_{42}\sin(Q_2 - Q_8) + C_{43}\sin(Q_8))
\end{aligned}$$

2.2.2. A Hamilton-függvény együtthatói

A négy bolygóból álló rendszer új változókkal felírt Hamilton-függvényének együtthatói két részből állnak: egy direkt és egy indirekt tagból.

$$\begin{aligned}
(2.13) \quad C_{ij} &= -G \frac{m_i m_j}{a_{j,0}} \sqrt{\frac{2}{\Lambda_{i,0}}} \left(C_{ij}^{dir} - \frac{Gm_0}{\sqrt{\mu_i \mu_j} \alpha_{i,j}} C_{ij}^{ind} \right), \\
C_{ji} &= -G \frac{m_i m_j}{a_{j,0}} \sqrt{\frac{2}{\Lambda_{j,0}}} \left(C_{ji}^{dir} - \frac{Gm_0}{\sqrt{\mu_i \mu_j} \alpha_{i,j}} C_{ji}^{ind} \right),
\end{aligned}$$

ahol $i < j$, $\alpha = \frac{a_{i,0}}{a_{j,0}}$ és $a_{i,0}$ az egzakt rezonanciában mért fél nagytengelyeket jelöli.

A direkt és az indirekt tagok kiszámítása megtalálható [3]-ban.

A fenebb leírt általános leírást a Kepler-223-as bolygórendszer (lásd Függelék 4) példáján keresztül mutatom be. Ehhez először meghatároztam az imént definiált (2.13) együtthatókat:

i \ j	1 $\left[\sqrt{\frac{\acute{e}v}{M_\odot \cdot AU^2}} \right]$	2 $\left[\sqrt{\frac{\acute{e}v}{M_\odot \cdot AU^2}} \right]$	3 $\left[\sqrt{\frac{\acute{e}v}{M_\odot \cdot AU^2}} \right]$	4 $\left[\sqrt{\frac{\acute{e}v}{M_\odot \cdot AU^2}} \right]$
1	-	$9.71093 \cdot 10^{-5}$	$4.84213 \cdot 10^{-5}$	-
2	$-1.07125 \cdot 10^{-4}$	-	$5.41988 \cdot 10^{-5}$	$1.58367 \cdot 10^{-5}$
3	$-1.54964 \cdot 10^{-5}$	$-6.20398 \cdot 10^{-5}$	-	$5.53016 \cdot 10^{-5}$
4	-	$-5.05789 \cdot 10^{-6}$	$-6.09873 \cdot 10^{-5}$	-

2.1. táblázat. Az egyes együtthatók numerikus értékei

3. fejezet

Kapcsolat a Kuramoto-modellel

3.1. Kuramoto-modell alapjai

A Kuramoto-modell alapvető célja, hogy különböző rendszerek viselkedését tanulmányozza csatolt oszcillátoroknál kialakuló spontán szinkronizáció vizsgálatával.[9, 10] A főként kémiai és biológiai rendszerek ihlette modell az utóbbi évtizedekben jelentős karriert futott be, és az eredeti tárgykörön jóval túlmutató tudományágakban is iskeresen alkalmazták. [11, 12, 13]

Jelen dolgozatban égitestek mozgását, azon belül szinkronizációját – azaz rezonáns keringését – kívánjuk leírni a modell segítségével. Az ötletet Witthaut és Timme cikke [14] alapján gondoltuk tovább, ahol a Kuramoto-modell Hamilton-rendszerekben történő alkalmazására mutatnak példákat, valamint az égi mechanikában eddigi rezonáns perturbációs elméletek formalizmusát használtuk fel [15].

Általános esetben N darab gyengén csatolt oszcillátort vizsgálunk, melyeknél a csatolás az egyes oszcillátorok fáziskülönbségétől függ:

$$(3.1) \quad \frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i) \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

A fenti képletben ω_i jelöli az i -dik oszcillátor sajátfrekvenciáját és K pedig a csatolási erősséget. Amikor a csatolás kellően gyenge, az oszcillátorok inkoherens módon működnek, míg egy bizonyos kritikus K_c határon túl küszöbértékig spontán kialakul a kollektív szinkronizáció (az egyes vagy az összes oszcillátor fázisai szinkronizálódnak). Ha N -et egyre nagyobbak választjuk, akkor az (3.1)-es képletben a csatolási tag egyre kisebb lesz, és az $N \rightarrow \infty$ termodinamikai határesetben eltűnik. (ezzel a határesettel később részletesen fogunk foglalkozni).

Ahhoz, hogy ez a csatolt differenciálegyenlet-rendszer analitikusan kezelhetőbbé váljon

egy transzformációra van szükségünk. Vezessük be a következő változókat:

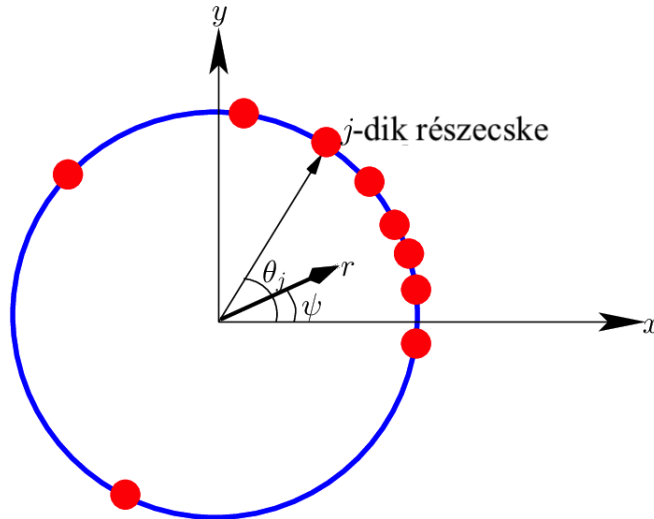
$$(3.2) \quad r \cdot e^{i\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j},$$

ahol $0 \leq r \leq 1$ a rend paraméter, amely a fázisok koherenciáját jellemzi, míg Ψ az átlagos fázist adja meg. Beszorozva az egyenletet $e^{-i\theta_i}$ -vel:

$$(3.3) \quad r \cdot e^{i(\Psi-\theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j-\theta_j)}.$$

Az egyenlet valós részét tekintve:

$$(3.4) \quad r \cdot \sin(\Psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_j).$$



3.1. ábra. A rendparaméter a koherencia leírására alkalmas mennyiség
[<https://www.researchgate.net/>]

Látható, hogy ez éppen a (3.7) jobb oldalával egyenlő (ω_i -től eltekintve). Ezek alapján:

$$(3.5) \quad \dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\Psi - \theta_i).$$

Így sikerült a csatolt egyenletrendszert egymástól független egyenletekre szétválasztani, most már az egyenletek csak a két rendparamétertől függenek. Egy másik transzformációt elvégezve, egy forgó vonatkoztatási rendszerbe, amelyikben az átlagfázis 0, az egyenlet a következőképpen fog kinézni:

$$(3.6) \quad \dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin(\theta_i).$$

3.2. Kuramoto-modell általánosítása

Dolgozatom fő eredménye, hogy sikerült a Kuramoto-modellt úgy általánosítanom, hogy annak megoldása alkalmas a bolygórendszert leíró transformált Hamilton-függvény vizsgálatára.

Vegyük észre, hogy a fenti gondolatmenet azon alapul, hogy a csatolási állandó az egyes oszcillátorok között állandó minden oszcillátorpárra. Ha ez nem áll fent (mint a Hamilton-függvény mozgásegyenleteinél), akkor a fenti gondolatmenet is általánosításra szorul.

Tegyük fel, hogy az egyes bolygók közti csatolási állandók különbözőek is lehetnek:

$$(3.7) \quad \frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ji} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad i \in \{1, \dots, N\},$$

ahol a K_{ji} egy kétindexes tenzor. Vezessük be a rendparamétert (3.3)-vel analóg módon ügyelve a normálásra, majd szorozzuk be $e^{-i\theta_i}$ -vel:

$$(3.8) \quad r_i \cdot e^{i(\Psi_i - \theta_i)} = \frac{1}{K_i} \sum_{j=1}^N K_{ji} e^{i(\theta_j - \theta_i)}$$

Látható, hogy a normálás miatt a rendparaméter és ψ függeni fog i -től. A fenti képletben bevezetett normálás: $K_i = \sum_{j=1}^N |K_{ji}|$. A „hagyományos” Kuramoto-modell gondolatmenete alapján az általánosított Kuramoto-modell mozgásegyenlete az alábbi alakban írható:

$$(3.9) \quad \dot{\theta}_i = \omega_i - \underbrace{K_i r_i}_{\widetilde{K}_i} \sin(\theta_i) = \omega_i - \widetilde{K}_i \sin(\theta_i)$$

A fenti képlethez a rendparamétert és a hozzá tartozó ψ -t könnyedén meghatározhatjuk:

$$(3.10) \quad r_i = \frac{1}{K_i} \sqrt{\left(\sum_j^N K_{ji} \cdot \cos(\widetilde{Q}_i) \right)^2 + \left(\sum_j^N K_{ji} \cdot \sin(\widetilde{Q}_i) \right)^2},$$

$$(3.11) \quad \psi_i = \arctan \left(\frac{\sum_j^N K_{ji} \cdot \sin(\widetilde{Q}_j)}{\sum_j^N K_{ji} \cdot \cos(\widetilde{Q}_j)} \right).$$

3.3. A mozgásegyenletek Kuramoto-modellhez igazítása

Látható, hogy a kapott mozgásegyenletek nem egyeznek meg teljesen a sem (3.1)-el, sem (3.7)-el, így először ezzel analóg alakra kell hozni ahhoz, hogy a Kuramoto-féle megoldási

módszer alkalmazhatóvá váljon rá. Ennek érdekében először végezzük el a következő változótranszformációt:

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_1 &= 2Q_2, & \tilde{Q}_5 &= Q_5 + \frac{\pi}{2}, \\
\tilde{Q}_2 &= Q_2, & \tilde{Q}_6 &= Q_6 + \frac{\pi}{2}, \\
\tilde{Q}_3 &= 3Q_1 + 2Q_2, & \tilde{Q}_7 &= Q_7 + \frac{\pi}{2}, \\
\tilde{Q}_4 &= Q_1 + 2Q_2, & \tilde{Q}_8 &= Q_8 + \frac{\pi}{2}, \\
\chi &= 0,
\end{aligned}
\tag{3.12}$$

ahol $\chi = 0$ segédváltozót azért vezetjük be, hogy az utolsó két egyenletet is a Kuramoto-modell alakjára tudjuk hozni. Az erre vonatkozó mozgásegyenlet nyilvánvalóan 0, így ezt a későbbiekben nem fogjuk vizsgálni.

Fontos, hogy még az általánosított Kuramoto-modellben is ω_i és K_{ji} is állandó. Ennek érdekében a rendszer leírásánál a következő közelítéseket tesszük: feltesszük, hogy az egyes bolygók közti csatolás kellően kicsi, így a kanonikus impulzusokat időben állandónak tekinthetjük, csak az általános koordináták megváltozását vizsgáljuk.

Az új változókkal felírt mozgásegyenletek $\tilde{Q}_i$ -re már analóg alakúak az általánosított Kuramoto-modellével ($\tilde{P}_i$ -re felírt mozgásegyenlettel a továbbiakban nem foglalkozunk, hiszen a Kuramoto-modell nem ezt vizsgálja, és előzőleg feltettük, hogy ezek időben állandóak). Ezek alapján az általános impulzusokat a nominális értékükkel helyettesíthetjük (lásd a Függelékben (3.17)).

Vegyük észre, hogy (2.11) első négy egyenletének jobb oldala konstans, így ezek megoldása könnyedén felírható:

$$\begin{aligned}
Q_1(t) &= w_1 \cdot t + Q_{10} \\
Q_2(t) &= w_2 \cdot t + Q_{20} \\
Q_3(t) &= w_3 \cdot t + Q_{30} \\
Q_4(t) &= w_4 \cdot t + Q_{40}
\end{aligned}
\tag{3.13}$$

Ezek ismeretében az újonnan bevezetett első négy változó időfüggése:

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_1(t) &= 2 \cdot w_2 \cdot t + 2 \cdot Q_{20} = \widetilde{w}_1 \cdot t + \widetilde{Q}_{10} \\
\tilde{Q}_3(t) &= w_2 \cdot t + Q_{20} \\
\tilde{Q}_3(t) &= \underbrace{(3(w_1) + 2w_2)}_{\widetilde{w}_3} \cdot t + \underbrace{3Q_{10} + 2Q_{20}}_{\widetilde{Q}_{30}} = \widetilde{w}_3 \cdot t + \widetilde{Q}_{30} \\
\tilde{Q}_4(t) &= \underbrace{((w_1) + 2w_2)}_{\widetilde{w}_4} \cdot t + \underbrace{Q_{10} + 2Q_{20}}_{\widetilde{Q}_{40}} = \widetilde{w}_4 \cdot t + \widetilde{Q}_{40}
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

Látható, hogy ezek a változók jelennek meg a koszinusz belső függvényében. Ha egy koszinusz függvény argumentumát $\pi/2$ -vel eltoljuk, akkor ugyanannak az argumentumnak a szinuszát kapjuk meg.

Ezek alapján meghatározhatjuk (3.14) kezdőfeltételeit a $t=0$ időpillanatban (az állandók kiszámítása megtalálható az alábbi linken ¹):

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tilde{Q}_i(t=0)$	-0.87266	-0.43633	-0.45379	-0.73304	1.78024	0.66323	0.76794	0.90757

3.1. táblázat. A rendszer új változóinak kezdőfeltételei

¹A kutatás során megírt programok Python kódja

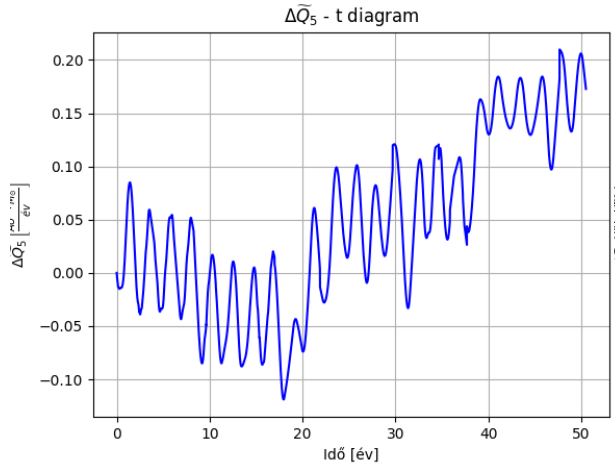
Az új változókkal felírt mozgásegyenletek a másik négy változóra:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{Q}}_5 &= -\sqrt{P_5} \cdot \left(\frac{18C_3(-P_1 + 3P_2 + 3P_4 + 3P_5 + 3P_6 + 3P_7 + 3P_8)}{2\sqrt{P_5}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{48C_4(P_2 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6 + 2P_7 + 2P_8)}{2\sqrt{P_5}} \right) + \\
&\quad \frac{C_{12}}{2\sqrt{P_5}} \sin(\tilde{Q}_3 - \tilde{Q}_5) + \frac{C_{13}}{2\sqrt{P_5}} \sin(\tilde{Q}_4 - \tilde{Q}_5) \\
&= \omega_5 + K_{53} \cdot \sin(\tilde{Q}_3 - \tilde{Q}_5) + K_{54} \cdot \sin(\tilde{Q}_4 - \tilde{Q}_5) \\
\dot{\tilde{Q}}_6 &= -\sqrt{P_6} \cdot \left(\frac{18C_3(-P_1 + 3P_2 + 3P_4 + 3P_5 + 3P_6 + 3P_7 + 3P_8)}{2\sqrt{P_6}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{48C_4(P_2 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6 + 2P_7 + 2P_8)}{2\sqrt{P_6}} \right) + \\
&\quad \frac{C_{21}}{2\sqrt{P_6}} \sin(\tilde{Q}_3 - \tilde{Q}_6) + \frac{C_{23}}{2\sqrt{P_6}} \sin(\tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_6) + \frac{C_{24}}{2\sqrt{P_6}} \sin(\tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_6) \\
&= \omega_6 + K_{61} \cdot \sin(\tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_6) + K_{62} \cdot \sin(\tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_6) + K_{63} \cdot \sin(\tilde{Q}_3 - \tilde{Q}_6) \\
\dot{\tilde{Q}}_7 &= -\sqrt{P_7} \cdot \left(\frac{18C_3(-P_1 + 3P_2 + 3P_4 + 3P_5 + 3P_6 + 3P_7 + 3P_8)}{2\sqrt{P_7}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{48C_4(P_2 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6 + 2P_7 + 2P_8)}{2\sqrt{P_7}} \right) + \\
&\quad \frac{C_{31}}{2\sqrt{P_7}} \sin(\tilde{Q}_4 - \tilde{Q}_7) + \frac{C_{32}}{2\sqrt{P_7}} \sin(\tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_7) + \frac{C_{34}}{2\sqrt{P_7}} \sin(\tilde{Q}_7 - \chi) \\
&= \omega_7 + K_{71} \cdot \sin(\tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_7) + K_{73} \cdot \sin(\tilde{Q}_4 - \tilde{Q}_7) + K_{79} \cdot \sin(\tilde{Q}_7 - \chi) \\
\dot{\tilde{Q}}_8 &= -\sqrt{P_8} \cdot \left(\frac{18C_3(-P_1 + 3P_2 + 3P_4 + 3P_5 + 3P_6 + 3P_7 + 3P_8)}{2\sqrt{P_8}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{48C_4(P_2 + 2P_4 + 2P_5 + 2P_6 + 2P_7 + 2P_8)}{2\sqrt{P_8}} \right) + \\
&\quad \frac{C_{42}}{2\sqrt{P_8}} \sin(\tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_8) + \frac{C_{43}}{2\sqrt{P_8}} \sin(\tilde{Q}_8 - \chi) \\
&= \omega_8 + K_{82} \cdot \frac{C_{42}}{2\sqrt{P_8}} + K_{89} \cdot \sin(\tilde{Q}_8 - \chi)
\end{aligned}
\tag{3.15}$$

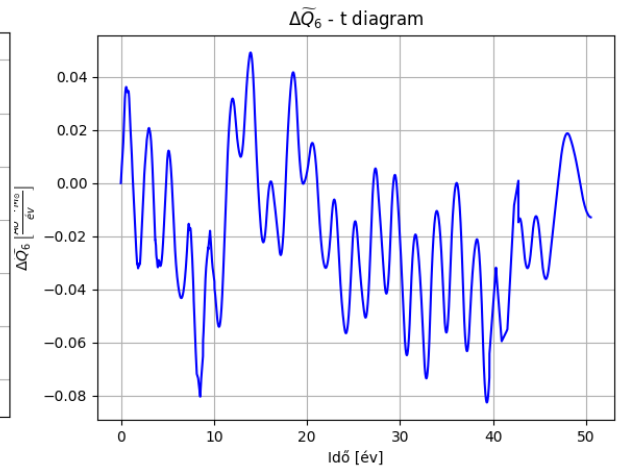
Ebből az alakból már leolvasható a K_{ji} csatolási állandó tenzor:

$$(3.16) \quad K_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{12}}{2\sqrt{P_5}} & \frac{C_{13}}{2\sqrt{P_5}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_{23}}{2\sqrt{P_6}} & \frac{C_{24}}{2\sqrt{P_6}} & \frac{C_{21}}{2\sqrt{P_6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_{32}}{2\sqrt{P_7}} & 0 & 0 & \frac{C_{31}}{2\sqrt{P_7}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{34}}{2\sqrt{P_7}} \\ 0 & \frac{C_{42}}{2\sqrt{P_8}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{43}}{2\sqrt{P_8}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

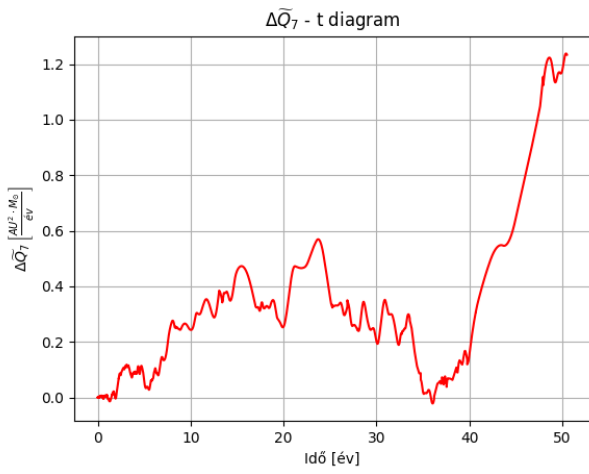
A fenti egyenleteknek nem létezik analitikus megoldása, de numerikusan könnyen kezelhetők. A numerikus értékek behelyettesítése után egyből látszik, hogy a konstans tag minden esetben sokkal nagyobb, mint a „perturbációs” szinuszos tagok. Ennél fogva ezen változók esetében is olyan megoldást várunk, ami nagyon közel lesz egyeneshez. Annak érdekében, hogy a minket érdeklő perturbáló rész hatását vizsgálhassuk az egyes változók és a (3.15)-ben szereplő konstansoknak megfelelő meredekségű egyenesek különbségét ábrázolhatjuk az idő függvényében. Ezzel elérhető, hogy láthatóvá váljon az „egyenestől való eltérés” mértéke, ezt $\Delta\tilde{Q}_i$ jelöli az i -dik változó esetén. A numerikus integrálást leíró Python kód megtalálható a következő linken A kutatás során megírt programok Python kódja. Az alábbi egyenletek példa megoldása:



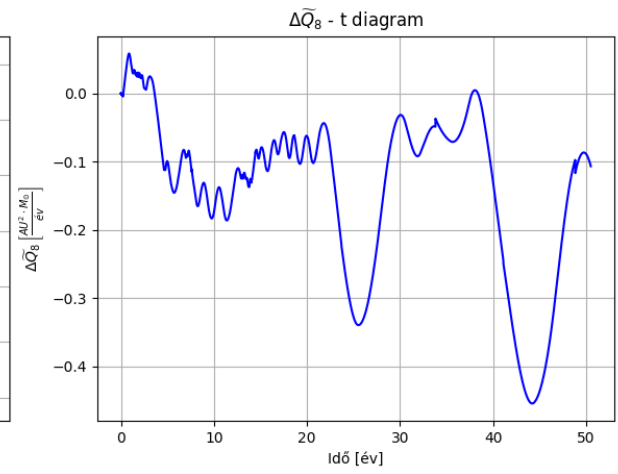
(a) $\Delta\tilde{Q}_5-t$



(b) $\Delta\tilde{Q}_6-t$

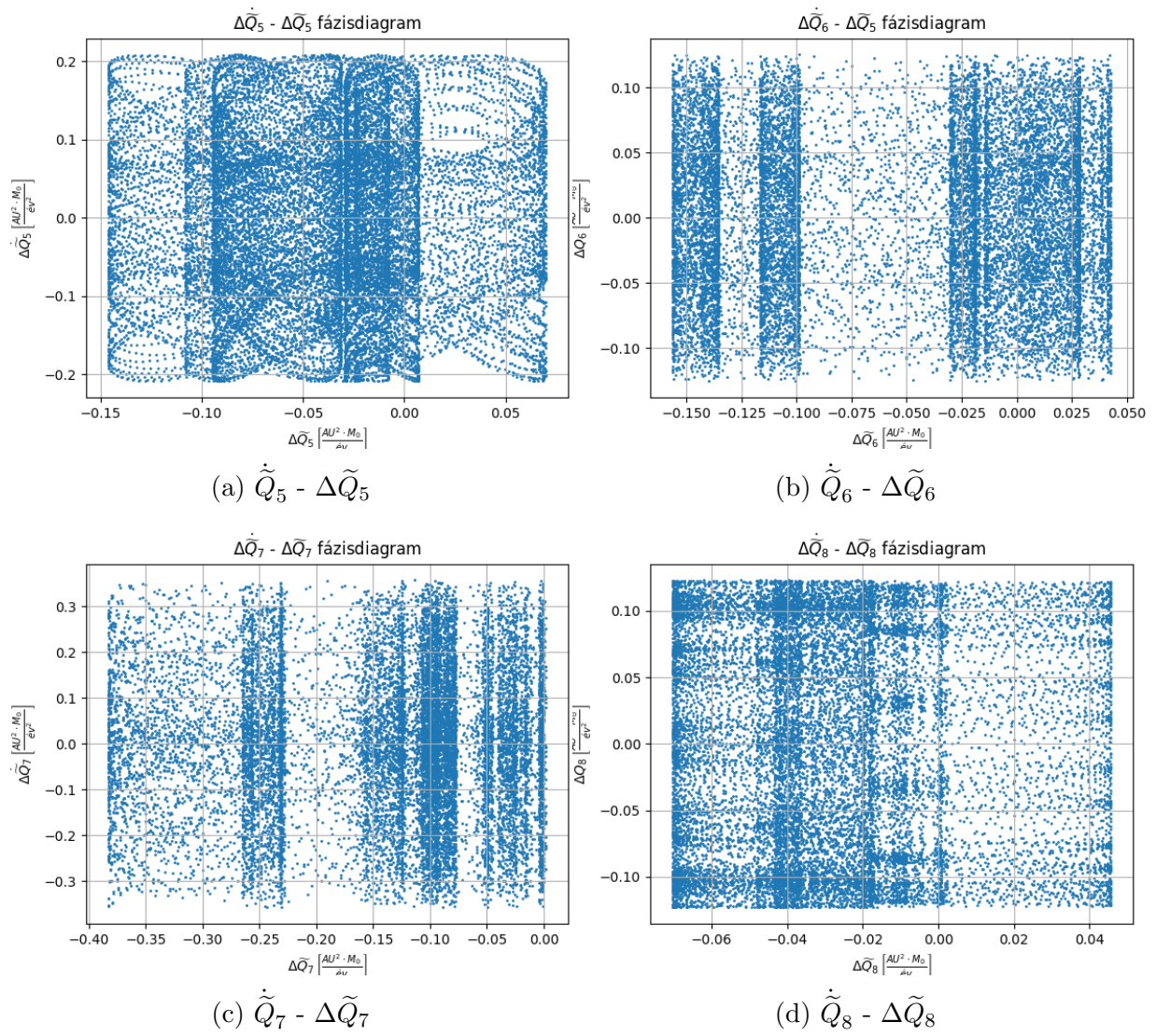


(c) $\Delta\tilde{Q}_7-t$



(d) $\Delta\tilde{Q}_8-t$

3.2. ábra. Az egyes változók időfüggése



3.3. ábra. A változók fázisdiagramjai

Megjegyzendő, hogy a rendszer roppant érzékeny a kezdőfeltételekre; sokszor kis változtatásra is meg tud változni a rendszer időfejlődése.

3.3.1. Az általános impulzusok értékei

A Kuramoto-modellnél állandónak feltételezett általános impulzusok értékei:

$$\begin{aligned} P_1 &= 3.99261 \cdot 10^{-5} \frac{AU^2 \cdot M_\odot}{year} \\ P_2 &= 1.23689 \cdot 10^{-4} \frac{AU^2 \cdot M_\odot}{year} \\ P_3 &= 9.49623 \cdot 10^{-4} \frac{AU^2 \cdot M_\odot}{year} \\ P_4 &= 1.88660 \cdot 10^{-4} \frac{AU^2 \cdot M_\odot}{year} \\ P_5 &= 1.21640 \cdot 10^{-7} \frac{AU^2 \cdot M_\odot}{year} \\ P_6 &= 4.95969 \cdot 10^{-7} \frac{AU^2 \cdot M_\odot}{year} \\ P_7 &= 3.44624 \cdot 10^{-8} \frac{AU^2 \cdot M_\odot}{year} \\ P_8 &= 7.19538 \cdot 10^{-8} \frac{AU^2 \cdot M_\odot}{year} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ahol $M_\odot$ a Naptömeg, AU a csillagászati egység.

4. fejezet

Diszkusszió

A kutatásom során arra a kérdésre kerestem a választ, hogy a rezonáns bolygórendszerek leírhatók-e a Kuramoto-modelléhez hasonló mozgásegyenletek segítségével. Ehhez egy konkrét rezonáns bolygórendszert, a Kepler-230-at és annak 4 bolygóját vizsgáltam. Egy kanonikus transzformáció után felírtam a Hamilton-függvényt, majd abból a mozgásegyenleteket. Egy változócsere után így leolvashatóvá váltak az általánosított Kuramoto-modell csatlási tenzorjának elemei. Az általánosított Kuramoto-modell mozgásegyenleteit ezután numerikusan meg is oldottam, így megkaptam a rendszer időfejlődését és fázisterét.

A kapott eredmények ismeretében érdekes folytatása lehetne a munkának a disszipatív esetek tanulmányozása; Ilyenkor a rendszer teljes energiája nem marad meg, hanem disszipatív folyamatok (pl csillagközi anyagban való súrlódás) hatására a mozgásuk is átalakul. Ennek hatása lehet a rezonanciára is, hiszen ha az egyik bolygó nagyobb súrlódás hat mint a másikra, akkor előfordulhat, hogy az eredetileg nem rezonáns bolygók között is kialakul a rezonancia. A cél megint az egyenletek Kuramoto-modellhez igazítása lenne. Másik lehetséges folytatás lenne a kapott eredmények általánosítása magasabb rendű rezonanciákra, esetleg nagyobb rezonáns bolygórendszerek leírására.

Függelék

Jelen függelékben kívánjuk megadni azokat a numerikus számolási eredményeket, melyek ismeretében a probléma numerikusan kezelhetővé válik. A számolások során csillagászati egységrendszerben dolgozunk (hosszúság - AU, idő - év, tömeg - $M_{\odot}$ (Naptömeg)). Fontos, hogy ilyen egységrendszer választás esetén a gravitációs állandót se felejtjük el átváltani:

$$(4.1) \quad G = 4\pi^2 \frac{AU^3}{\text{year}^2 \cdot M_{\odot}}$$

4.0.1. A rendszer csillagászati adatai

A numerikus munka során a Kepler-223-as csillag és a körülötte vizsgált négy bolygó (Kepler-223 b, Kepler-223 c, Kepler-223 d, és Kepler-223 e) időfejlődését tanulmányoztam. Ennek a rendszernek az adatai a következők (0 a csillag, 1-4 pedig b-e bolygókat jelölik):

	m (tömeg) [$M_{\odot}$]	a (fél nagytengely) [AU]	e (excentricitás)	T (periódusidő) [év]
0	1.12	-	-	-
1	$2.22234 \cdot 10^{-5}$	0.0730	0.0780	0.0202
2	$1.53215 \cdot 10^{-5}$	0.0880	0.1500	0.0270
3	$2.40276 \cdot 10^{-5}$	0.1160	0.0370	0.0405
4	$1.44147 \cdot 10^{-5}$	0.1400	0.0510	0.0540

4.1. táblázat. A rendszer alapvető adatai [?]

4.0.2. Pályaelemek kezdőértékei

Mivel a számításban használt rendszer pályaelem adatai hiányosak ([?]), így a numerikus számításokhoz véletlenszerű kezdőfeltételeket adtam meg:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda(t=0)$ [deg]	30	35	48	42	47	35	80	75
$\varpi(t=0)$ [deg]	12	76	70	62	-	-	-	-

4.2. táblázat. A rendszer kezdőfeltételei

4.0.3. Kanonikus transzformáció

A Hamilton-formalizmusban egy transzformációt akkor nevezünk kanonikusnak, ha az általános koordináták megváltoztatásával $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ a Hamilton-egyenletek alakja változatlan marad, de a Hamilton-függvény alakja változhat. Annak eldöntésére, hogy egy transzformáció kanonikus-e egy jól bevált módszer a Poisson-zárójelek alkalmazása [16]. Két $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ és $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ mennyiség Poisson zárójele:

$$(4.2) \quad \{f, g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right)$$

A poisson-zárójelek néhány fontosabb tulajdonsága:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\} \\ \{f, c\} &= 0 \\ \{f_1 + f_2, g\} &= \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \\ \{f_1 \cdot f_2, g\} &= f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\} \end{aligned}$$

ahol c egy állandó függvény.

Egy transzformáció kanonikus, ha teljesíti a következő összefüggéseket:

$$(4.4) \quad \{Q_i, Q_k\}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} = 0 \quad \{P_i, P_k\}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} = 0 \quad \{P_i, Q_k\}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} = \delta_{ik}$$

A (4.4) használatával megmutatható, hogy a (2.8) valóban kanonikus. Ennek az ellenőrzésére általam írt kód : A kutatás során megírt programok Python kódja .

Irodalomjegyzék

- [1] C. D. Murray and S. F. Dermott. *Solar system dynamics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [2] Alessandro Morbidelli. *Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics*. Taylor Francis, London, 2002.
- [3] J. B. Delisle. Analytical model of multi-planetary resonant chains and constraints on migration scenarios. *Astronomy and Astrophysics*, 605:A96, September 2017.
- [4] Jacques Laskar and Philippe Robutel. Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62(3):193–217, July 1995.
- [5] Konstantin Batygin and Alessandro Morbidelli. Dissipative Divergence of Resonant Orbits. *Astronomical Journal*, 145(1):1, January 2013.
- [6] Konstantin Batygin, Katherine M. Deck, and Matthew J. Holman. Dynamical Evolution of Multi-resonant Systems: The Case of GJ876. *Astronomical Journal*, 149(5):167, May 2015.
- [7] Konstantin Batygin, Alessandro Morbidelli, and Matthew J. Holman. Chaotic Disintegration of the Inner Solar System. *The Astrophysical Journal*, 799(2):120, February 2015.
- [8] Gabriele Pichierri and Alessandro Morbidelli. The onset of instability in resonant chains. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 494(4):4950–4968, June 2020.
- [9] Y. Kuramoto. *Chaos and statistical methods*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.
- [10] Yoshiki Kuramoto and Ikuko Nishikawa. Statistical macrodynamics of large dynamical systems. Case of a phase transition in oscillator communities. *Journal of Statistical Physics*, 49(3-4):569–605, November 1987.

- [11] Steven H. Strogatz. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 143(1-4):1–20, September 2000.
- [12] John D. Crawford and K. T. R. Davies. Synchronization of globally coupled phase oscillators: singularities and scaling for general couplings. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 125(1-2):1–46, January 1999.
- [13] Xin Hu, S. Boccaletti, Wenwen Huang, Xiyun Zhang, Zonghua Liu, Shuguang Guan, and Choy-Heng Lai. Exact solution for first-order synchronization transition in a generalized Kuramoto model. *Scientific Reports*, 4:7262, December 2014.
- [14] Dirk Witthaut and Marc Timme. Kuramoto dynamics in Hamiltonian systems. *Physical Review E*, 90(3):032917, September 2014.
- [15] Sylvio Ferraz-Mello. *Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance*, volume 345. Springer, New York, 2007.
- [16] L.D. Landau and E.M. Lifsic. *Elméleti fizika I. - Mechanika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.