

A ^{60}Co gamma-fotonjai közötti szögkorreláció és a forrás abszolút aktivitásának mérése koincidencia-módszerrel

Kovács Balázs Csaba
ELTE Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizika BSc I. évfolyam

Témavezető: dr. Veres Gábor
ELTE TTK, Atomfizikai Tanszék

2023. január 11.

Kivonat

A radioaktív minták aktivitásának pontos ismerete számos tudományterület és technikai alkalmazás számára nagy jelentőséggel bír. Esetünkben az abszolút aktivitás mérésének fő motivációja egy nagy pontosságú, gamma spektrometriában használt félvezető detektor hatásfokmérésének előkészítése volt. Az aktivitásmérés pontosítása érdekében sok tényezőt figyelembe kellett vennünk.

Munkám célja egy ^{60}Co forrás aktivitásának minél pontosabb megmérése és a ^{60}Co béta-bomlását követően kisugárzott két gamma-foton közti szöghkorreláció kísérleti vizsgálata. Méréseim során nagy hangsúlyt fektettem a mérési bizonytalanságok csökkentésére és azok gondos elemzésére.

A koincidencia-módszer alkalmazásával megmértem a minta abszolút aktivitását, és ehhez először megvizsgáltam a mért szöghkorreláció távolság- és szöghfüggését is. A ^{60}Ni atommag különböző spinű energiaszintjei közötti átmenetekből várt elektromos kvadrupól sugárzásra adódó elméleti szöghfüggést összevettem a kísérleti adatokkal és elemeztem az eltérések lehetséges okait. Emellett létrehoztam egy szimulációt a mérési összeállításról a GEANT4 programcsomag segítségével, ami jó egyezést mutat kísérleti adatainkkal, és aminek segítségével kontrollálni tudtam a detektorok hatásfokának hatását a mérési eredményekre.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés a gamma-spektroszkópia alapjaiba	4
1.1. Radioaktív bomlás	4
1.2. Abszolút aktivitás	4
1.3. Gamma-fotonok irány-korrelációja	5
1.4. A detektor működése	7
1.5. A detektor hatásfoka	8
2. Abszolút aktivitás mérése $\gamma - \gamma$ koincidencia-módszerrel	9
2.1. Hibaszámítás	10
3. Munkám célja	10
4. Mérés menete	11
4.1. Első mérési sorozat	11
4.2. Második mérési sorozat	12
5. Mérési korrekciók és hibák	14
5.1. Háttérsugárzás	14
5.2. A mérési elrendezés geometriai méreteinek hibái	14
5.3. Erősítés stabilitása	14
5.4. Dátum szerinti korrekció	18
5.5. Holtidő miatti korrekció	18
5.6. Az összegcsúcs miatti korrekció	20
6. Korrigált adatok kiértékelése	21
6.1. A korrigált adatok	21
6.2. Abszolút aktivitás számítása elméleti úton	23
6.3. Abszolút aktivitás kiszámítása GEANT4 szimuláció használatával	26
6.4. A második mérési sorozat kiértékelése	28
7. Szimuláció	30
7.1. GEANT4 szimuláció	30
7.2. A gamma korrelációs görbe kiszámítása	34
7.3. Az abszolút aktivitás elméleti számolásának tesztelése	36
8. A minta aktivitásának mérése HPGe detektor segítségével	37
8.1. Összegcsúcs-módszer ismertetése	37
8.2. Mérés menete	38
8.3. Mérés kiértékelése	40
9. Összegzés	41
10. Kitekintés	41

1. Bevezetés a gamma-spektroszkópia alapjaiba

Dolgozatomban egy ^{60}Co radioaktív forrás aktivitását tervezem megmérni a lehető legpontosabban a rendelkezésre álló eszközök segítségével. Először ismertetni fogom a legfontosabb gamma-spektroszkópiai alapfogalmakat, majd bemutatom a mérések menetét. A hibaforrások részletes vizsgálata után pedig kiszámítom a minta abszolút aktivitását két különböző módszerrel is. Az elméleti bevezető elkészítéséhez felhasználtam a [1], [2] forrásokat.

1.1. Radioaktív bomlás

A radioaktív bomlások három fajtaba sorolhatók: α -, β - és γ -bomlások.

- α -bomlás során a bomló atommagból egy ^4He atommag lép ki, melynek következtében a bomló mag rendszáma 2-vel, míg tömegszáma 4-gyel csökken.
- β -bomlás során az atommag tömegszáma állandó marad, csak a rendszáma nő vagy csökken 1-gyel ($p^+ \rightarrow n^0 + e^+ + \nu$ vagy $n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}$).
- Az α - és β -bomlások után sok esetben gerjesztett atommagok maradnak hátra. Ezen gerjesztett atommagok γ -bomlással legerjesztődhetnek az alapállapotukba, melynek során egy nagy energiájú gamma-fotont bocsátanak ki. A γ -bomlás hatására se a bomló mag tömegszáma, se a rendszáma nem változik meg.

A radioaktív bomlási folyamatokat időben a következő differenciálegyenlettel írhatjuk le:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \quad (1)$$

ahol N a még elbomlatlan atommagok száma, λ pedig az atommagra jellemző bomlási állandó. Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (2)$$

ahol N_0 a bomlásra kész atommagok száma a $t = 0$ s időpillanatban. Látható, hogy a bomlásra kész atommagok száma exponenciálisan csökken, így definiálhatjuk a felezési időt is. Ez legyen az az időtartam, amely alatt a bomlatlan atommagok száma megfeleződik (jele: $T_{1/2}$). A bomlási állandó és felezési idő közti kapcsolat a következő: $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$

Egy minta aktivitását, azaz az időegységenként végbemenő bomlások számát, a következőképp definiálhatjuk:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N \quad (3)$$

1.2. Abszolút aktivitás

Egy minta abszolút aktivitásának nevezzük a mintában egységnyi idő alatt végbemenő bomlások számát. Továbbá beszélhetünk relatív aktivitásról is, ha egy másik, már ismert aktivitású, forrás aktivitásához szeretnénk hasonlítani a mintánk aktivitását.

Az abszolút aktivitás mérése sok területen nagy jelentőséggel bírhat. Az egyik ilyen lehet, hogy a minta abszolút aktivitásának ismeretében használhatjuk azt később ismert forrásként más mérések esetében.

Ezáltal például a detektor hatásfokának ismerete nélkül megmérhetjük más ^{60}Co minták relatív aktivitását az ismert mintánk aktivitásához képest és ebből kiszámolhatjuk az ismeretlen forrásunk abszolút aktivitását is. Amennyiben ismerjük a detektorunk hatásfokának energiafüggését, amit megkaphatunk egy pontszerű, sok energián egyszerre sugárzó pl. urán minta segítségével, akkor megmérhetjük más energiákon sugárzó minták aktivitását is, bár csak kisebb pontossággal. Továbbá felhasználhatjuk az ismert aktivitású forrást egy detektor kalibrálásához, hatásfokának megbecsléséhez is.

1.3. Gamma-fotonok irány-korrelációja

A radioaktív bomlási sorok esetében sokszor előfordul, hogy a bomlás után keletkezett atommag többletenergiával rendelkezik, azaz gerjesztett állapotban van. Ilyen esetekben a vizsgált atommag rövid időn belül gamma-foton(okat) sugároz ki, hogy az alacsonyabb energiájú állapotba jusson. Gyakran ez a folyamat több foton kibocsátásával jár. Mivel a kisugárzott fotonok energiája az atommagon belüli energiaszintek különbségétől függ, így a fotonok energiájának mérése lehetőséget nyújt az atommagon belüli folyamatok tanulmányozására is.

Ennek egy specifikus módja lehet a kisugárzott gamma-fotonok irány-korrelációjának vizsgálata. A fotonok irány-korrelációján azt értjük, hogy az egy bomlás következtében gyorsan egymás után kibocsátott fotonok egymáshoz képesti kisugárzási irányai nem izotróp eloszlást követnek, hanem például függhetnek az irányok által bezárt szögtől.

A jelenség oka az, hogy az atommag különböző állapotaihoz különböző spinek tartoznak és a impulzusmomentum-megmaradás értelmében a kisugárzott fotonok impulzusmomentumainak összegének kompenzálnia kell az atommag különböző állapotainak spinkülönbségét. Ebből következik, hogy az irány-korreláció mérése betekintést nyújthat az atommag belső felépítésébe is. Ugyanakkor a magátmenetek típusának ismeretében a probléma visszavezethető a kvadrupól, illetve dipól sugárzások problémájára a klasszikus elektrodinamikában.

A fotonok kisugárzási irányai közti szöghorrelációt általában egy relatív sűrűségfüggvénnyel szokás jellemezni, mely megadja, hogy az adott kis térszögegység irányába mekkora valószínűséggel sugárzódik ki egy foton a többi irányhoz képest. Két foton esetén csak az általuk bezárt θ szög számít, tehát a folyamatot egy $W(\theta)$ függvénnyel írhatjuk le.

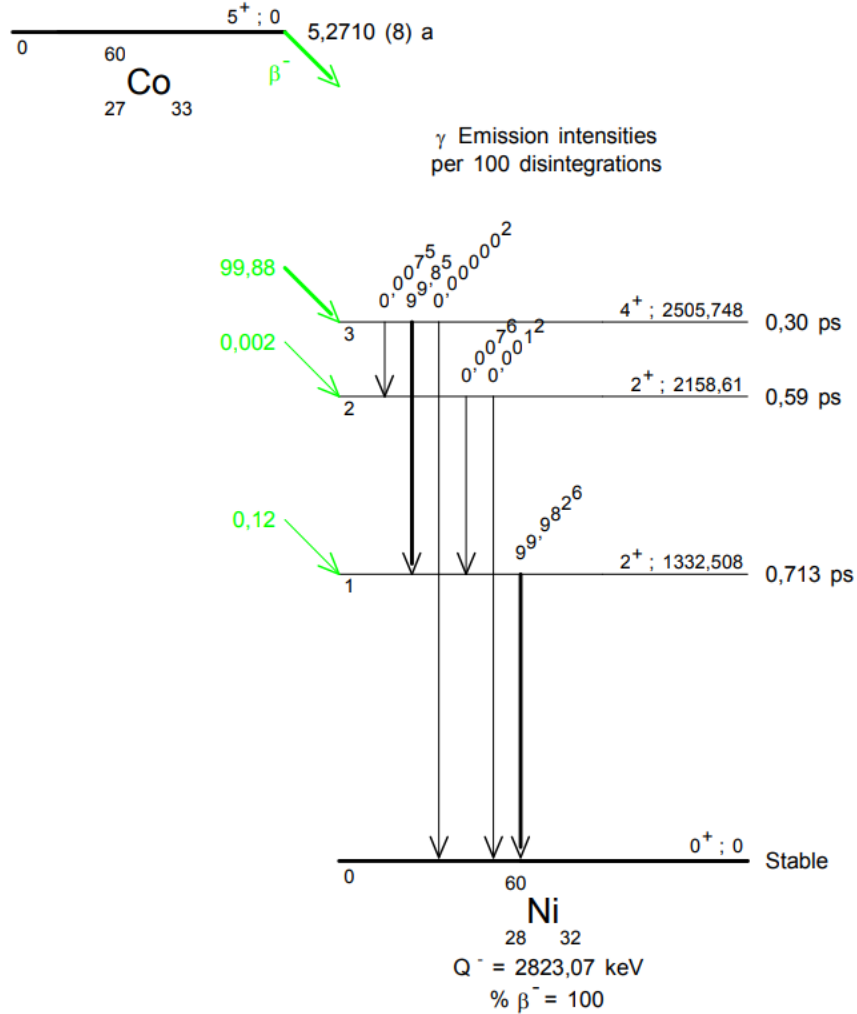
Kvantummechanikai számolásokkal Hamilton megmutatta ([3]), hogy egy konstans faktortól eltekintve a $W(\theta)$ függvény a következő alakú:

$$W(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^L \alpha_k \cos(\theta)^{2k} \quad (4)$$

ahol L a legkisebb impulzusmomentuma a két gamma-fotonnak.

A vizsgált ^{60}Co minta esetében a legvalószínűbb bomlási séma a 1. ábrán (forrás: [4]) látható. Leolvasható, hogy a ^{60}Co egy negatív béta bomlással gerjesztett állapotú ^{60}Ni maggá bomlik, majd ez a gerjesztett atommag gamma-fotonok formájában adja le energiáját. A legnagyobb valószínűségű lehetőség, hogy egy 1.1732 MeV energiájú gamma-fotont sugároz ki a

gerjesztett mag, majd nagyon rövid ($\approx 0.9\text{ps}$) idővel az első után egy második, 1.3325 MeV energiájú gamma-fotont is kibocsát. A számunkra fontos két magátmenet közti spinátmenetek: $4+ \rightarrow 2+$ és $2+ \rightarrow 0+$.



1. ábra. A $^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni}$ bomlási sémája.

Hamilton számolásai elméleti értékeket is megadnak az α_k együtthatókra dipól és kvadrupól sugárzásra. A most vizsgált ^{60}Co esetében mindkét atomi átmenet kvadrupól sugárzással jellemezhető, így az irány-korrelációt leíró elméleti függvény:

$$W(\theta) = 1 + \frac{1}{8} \cos(\theta)^2 + \frac{1}{24} \cos(\theta)^4 \quad (5)$$

A fentebbi elméleti képlet azonban nem alkalmazható egyből az általunk végzett mérések során. Ennek oka, hogy a detektoraink térbeli méretei miatt nem csak egy adott szöget bezáró fotonokat érzékelünk, hanem sok különböző szög esetében is mérhetünk koincidenziát. Ezért az elméleti képlet valószínűségeinek valamilyen súlyozott átlagát kell használnunk az adataink kiértékelése során. A $W(\theta)$ függvényt kis térszögelemekkel kell szoroznunk, hogy az

adott irányban mért kisugárzási valószínűséget megkapjuk, tehát ha figyelembe akarjuk venni a detektorok által lefedett nagy térszöget, akkor a legjobb a térszög szerinti súlyozás lenne. Viszont a detektor hatásfoka függ attól, hogy a sugárzás milyen irányból éri (pl. különböző úthosszuk lesz a detektoron belül), ezért teljesen pontos leírást nem tudunk megadni a kérésset kísérleti valószínűség eloszlásra.

A mérések kiértékelése során én egy olyan görbét használtam, ami az elméleti $W(\theta)$ függvény detektorfelületekkel súlyozott változata. Ennek kiszámításához numerikus Python szimulációt használtam és részletesebb leírást dolgoztam Szimuláció szekciójában nyújtok róla.

1.4. A detektor működése

Az általunk használt detektorok anyaga NaI szcintillátor volt. A szcintillátor detektorok általában egy kristályból és egy hozzá csatlakoztatott fotoelektron-sokszorozóból állnak. A beérkező sugárzás hatására a kristályban fotonok keletkeznek, melyek a fotoelektron-sokszorozóban láncreakciót indítanak be. A fotoelektron-sokszorozó egyetlen kristályból érkező foton hatására akár több ezer elektront is kibocsáthat, ami jelentősen megkönnyíti a sugárzás detektálását és magasabb felbontást tesz lehetővé. Mi a fotoelektron-sokszorozóból kilépő elektronok számából tudunk következtetni a sugárzás által a kristályban leadott energiára. A különböző összetételű szcintillátor kristályok különböző típusú sugárzás detektálására alkalmasak. A NaI típusú kristályok legfőképp gamma-fotonok érzékelésére használhatóak. A kristály és a sugárzás közti fő kölcsönhatások a következők:

- A **fotoeffektus** során a foton az atomrács egyik kötött elektronjával találkozva átadja annak a teljes energiáját. Így az elektron kilép az atomból, melyhez eddig kötve volt és ezen atom ionizálódik. Az atomból kilépett elektron hamarosan elveszti energiáját a rácsatomokkal való kölcsönhatásban, mivel töltött részecske. Eközben keletkeznek azok a fotonok, amiket később detektálni tudunk a fotoelektron-sokszorozóval. A fotoeffektus főleg kisebb energiák esetén valószínű.
- A **Compton-effektus** során a beérkező gamma-foton egy elektront eltalálva energiája egy részét átadja annak. A folyamat során a gamma-foton és az elektron mozgásának iránya is megváltozik. Az átadott energia a beérkező és kisugárzott foton haladási iránya által bezárt szögtől és a beérkező foton energiájától függ. Ezen folyamat miatt sokszor megtörténhet, hogy a beérkező gamma-foton energiájának csak töredékét hagyja a detektorban, ezért a vizsgált energiacsúcsoknál kisebb energiákon is mérünk beütéseket, amik egy folytonos ún. Compton-hátteret alkotnak.
- Ha elég nagy energiájú gamma-foton érkezik a detektorba, akkor lehetséges a **párkeltés** is. Ezen folyamat során a beérkező foton egy atommag közelében (impulzus-megmaraadás miatt szükséges az atommag) egy elektron-pozitron párt generál. A folyamathoz a gamma-foton energiája minimum 1022 keV kell hogy legyen, mivel az elektron és a pozitron nyugalmi energiája is 511 keV. A pozitron rövidesen a létrejötte után rekombinálódik az anyag egyik elektronjával, aminek hatására általában kettő (nagyjából 511 keV energiájú) vagy ritkább esetekben kettőnél több foton keletkezik. A keletkező fotonok ezután további interakcióba léphetnek az anyaggal, ugyanakkor kölcsönhatás

nélkül el is hagyhatják a kristályt. Ha utóbbi következik be, akkor az energiaspektrumon kb. 511 keV-tal eltolt másodlagos csúcsok keletkeznek.

A fenti folyamatok során mozgási energiához jutott elektronok hamar leadják energiájuk nagy részét fotonok formájában, melyeket később detektálni tudunk a foto-katód segítségével. Szintén fontos a mérés szempontjából, hogy a kristályból érkező fotonok nem pontosan egyszerre érik el a foto-katódot, majd a fotoelektron-sokszorozót, ezért a mérések során pár nanoszekundumig gyűjtenünk kell a fotonokat minden beütésnél (ennél a nanoszekundumos időtartamnál egyéb jelenségek miatt a detektorunk tényleges holtideje jóval nagyobb). Ennek két következménye is van. Az egyik az, hogy a detektorunk időfelbontása véges, a másik pedig az, hogy ha az egyazon bomlásból származó két gamma-foton kellően kis időn belül ugyanazt a detektort találja el, akkor két beütés helyett csak egyet detektálunk. Továbbá a két foton hatására az energiáik összegét mérjük és egy új csúcsot kapunk az energiaspektrumban, amit összegcsúcsnak szoktunk nevezni (például a ^{60}Co esetén ez 2.50 MeV-nál található).

Méréseim során a koincidenca-módszert használtam, melyhez mérnem kellett a koincideneciák számát is. Koincidenecián két vagy több jel időbeli egybeesését értjük. A koincideneciák számának méréséhez meg kell adnunk azt a T időintervallumot, melyen belül ha két jel érkezik a jelfeldolgozó egységhez, akkor azt koincideneciának tekintjük. Minél kisebb ez a T időintervallum, annál biztosabban állíthatjuk, hogy a két jel tényleg egy bomlásból származott.

A detektorból érkező jel feldolgozásához használt eszközök a differenciál-diszkriminátorok (röviden DD). Ezen egységek képesek a detektorból érkező jel alapján megállapítani a jelhez tartozó leadott energiaértéket (valójában csak a relatív energiaértéket, mivel csak a jel feszültségének nagyságát mérik) és csak abban az esetben engedik tovább a jelet a számláló egységeknek, ha a beérkező jelhez tartozó energiaérték meghaladja a beállított küszöbértéket (ez az általunk használt "integráló" mód, más esetben beállítható úgy is a műszer, hogy egy adott, két oldalról határos intervallumban engedjen át jeleket).

A detektorban hagyott energiák spektrumának vizsgálatához használhatunk többcsatornás analizátort (MCA) is, mely a teljes energia intervallumot kisebb egyenlő részekre (csatornákra) bontja és ezeken belül méri a beütésszámokat. Ezt a módszert használtuk az energiaspektrumok vizsgálatához méréseink során. Mi egy 13 bites, 4096 csatornás, 10 V-os méréshatárú eszközt használtunk, amit az ATOMKI-ban gyártottak. (A kapott spektrumra példa a 14. ábrán látható.)

1.5. A detektor hatásfoka

A detektorunk hatásfokát több tényező is befolyásolja.

Az egyik legfontosabb tényező a detektor hatásfokának meghatározásánál a minta detektortól mért távolsága. Mivel a minta véletlenszerű irányokban sugároz, de mi csak a teljes térszög egy részében vagyunk képesek detektálni a sugárzást, így a teljes aktivitásnak töredékét tudjuk csak mérni. Az ebből származó korrekciós faktort megkaphatjuk, ha a detektorunk effektív detektálási felületét (F) elosztjuk az r sugarú gömb felületével, ahol r a minta és a detektorunk távolsága:

$$g = \frac{F}{4\pi r^2} \quad (6)$$

Továbbá figyelembe kell vennünk, hogy a vizsgált minta nem minden bomlása vezet az általunk vizsgált részecskék kibocsátásához, mivel az esetek kis százalékában más típusú bomlás is bekövetkezhet. A vizsgált ^{60}Co esetében például 0,12% eséllyel a negatív béta bomlás energiája 1,48 MeV lesz és ezután csak egy 1,33 MeV energiájú gamma foton lép ki a magból, míg 99,88% eséllyel egy 0,31 MeV negatív béta bomlás után rövid időn belül egy 1,17 MeV és egy 1,33 MeV energiájú gamma foton is kisugárzódik. Ezt az effektust is figyelembe kell vennünk általános esetben a detektorunk hatásfokának számolásakor egy $\epsilon < 1$ számmal.

A harmadik és legnehezebben megbecsülhető tényező a detektor hatásfokának meghatározásánál abból adódik, hogy a gamma-fotonok áthatolóképessége nagy, ami miatt a gamma-fotonok jelentős része anélkül halad át a detektoron, hogy kölcsönhatásba lépne annak anyagával, így nem érzékeljük. Ezért a detektálás hatásfoka is mindenképp egy egynél kisebb szám: $\eta < 1$. Emellett az is lehetséges, hogy a foton csak energiája egy részét adja át a detektornak (például Compton-szórással) és emiatt a mért energia intervallumon kívülre esik a jel és ezért nem észleljük.

Mivel a beérkező elektromos jeleknek is van hosszuk, így a detektorunk rendelkezik holtidővel. Ezen holtidő kicsit rövidíti a tényleges mérési időt, ami főleg a nagyobb aktivitású minták esetében már észlelhető eltérést eredményezhet a mért aktivitások és a tényleges aktivitások közt.

Mindezeket a faktorokat együttevén definiálhatjuk a detektorunk egyesített számlálási hatásfokát (e), melynek értéke:

$$e = g \cdot \epsilon \cdot \eta \quad (7)$$

2. Abszolút aktivitás mérése $\gamma-\gamma$ koincidencia-módszerrel

Ha a mintánk olyan atomokból állna, melyek esetén az egy bomlásból keletkező két gamma-foton kisugárzási iránya közt nincs korreláció, azon esetben a következő módszert alkalmazhatnánk elméletileg az abszolút aktivitás megállapításához. (Forrás:[2])

Legyen az 1-es és 2-es detektorunk első és második gammára vonatkoztatott számlálási hatásfoka e_{11} ill. e_{12} , e_{21} ill. e_{22} . Így az 1-es és a 2-es detektorok által mért beütésszámok t idő alatt (ha a minta abszolút aktivitása A):

$$N_1 = (e_{11} + e_{12}) \cdot A \cdot t \quad (8)$$

$$N_2 = (e_{21} + e_{22}) \cdot A \cdot t \quad (9)$$

Ezeket nevezzük oldalági beütésszámoknak. Koincidenciát két esetben érzékelhetünk: ha az első gammát az 1-es detektor érzékeli, míg a második gammát a 2-es detektor, vagy épp fordítva (első gamma 2-es detektor, második gamma 1-es detektor). Ezért az érzékelt koincidenciák számát a következőképp kaphatjuk:

$$N_k = (e_{11} \cdot e_{22} + e_{21} \cdot e_{12}) \cdot A \cdot t \quad (10)$$

Az N_1 -re és N_2 -re kapott egyenletek felhasználásával:

$$\frac{N_1 N_2}{N_k} = A \cdot t \cdot \left(1 + \frac{e_{11} \cdot e_{21} + e_{22} \cdot e_{12}}{e_{11} \cdot e_{22} + e_{21} \cdot e_{12}} \right) \quad (11)$$

Ha mintából kilépő gamma-fotonok energiája egymáshoz közeli (pl. ^{60}Co bomlásánál 1.17 MeV és 1.33 MeV), akkor jó közelítéssel feltehetjük, hogy az egyes detektorok két gammára vett számlálási hatásfokai közelítőleg egyenlők: $e_{11} \approx e_{12}$ és $e_{21} \approx e_{22}$. Ennek felhasználásával: $\left(1 + \frac{e_{11} \cdot e_{21} + e_{22} \cdot e_{12}}{e_{11} \cdot e_{22} + e_{21} \cdot e_{12}}\right) \approx 2$. (Ezen közelítéseket később részletesen vizsgálom dolgozatomban.)

Így a minta abszolút aktivitása:

$$A = \frac{N_1 N_2}{2N_k t} \quad (12)$$

Látható, hogy ennek a módszernek a nagy előnye, hogy a detektorok hatásfokai kiestek az aktivitás képletéből. A módszer hátránya, hogy csak olyan forrásoknál alkalmazható, ahol egy bomlás rövid időn belül legalább két gamma-fotont generál és ezek közt nincs vagy kellően kicsi az irány-korreláció. Továbbá a detektorok egyes gammákra vonatkozó hatásfokainál alkalmazott közelítés sem teljesül pontosan a valóságban.

Az egyes detektorok beütési rátáit korrigálnunk kell a szobában található radioaktív háttér miatt, amihez ki kell vonnunk a forrással mért beütési rátákból a minta nélkül mért beütési rátákat. Hasonlóképp, a koincidenciák rátájából is ki kell vonnunk a véletlen koincidenciákból származó részt. (A hibák számításánál Gauss-i hibaterjedést használtunk.)

2.1. Hibaszámítás

A mért aktivitás értékek bizonytalanságuk megadása nélkül nem tudományos értékűek, mivel nem tudnánk összehasonlítani azokat más mérések eredményeivel, ezért mindenképpen szükségünk van az adataink bizonytalanságára/hibájára is.

A detektorok beütésszámainak hibájánál kihasználhatjuk, hogy a radioaktív bomlás statisztikus jellegű folyamat, ezért ha N beütést mérünk, akkor azok statisztikus hibája $\sqrt{N}$ lesz (ha N elég nagy).

Olyan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kifejezések estén, melyek több változótól függnének használhatjuk a Gauss-i hibaterjedést f hibájának kiszámolásához:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n\right)^2} \quad (13)$$

3. Munkám célja

Munkám célja egy ^{60}Co forrás aktivitásának minél pontosabb megmérése és ennek során a ^{60}Co béta-bomlását követően kisugárzott két gamma-foton közti szögkorreláció kísérleti vizsgálata. Az abszolút aktivitás mérésének fő motivációja egy nagy pontosságú, gamma spektrometriában használt félvezető detektor hatásfokmérésének előkészítése volt. Méréseim során kiemelt hangsúlyt fektettem a mérési bizonytalanságok csökkentésére és azok gondos elemzésére.

A minta aktivitását nagyságrendileg helyesen megkaphatjuk, ha a koincidencia-módszert alkalmazzuk az abszolút aktivitás mérésére, azonban ha ezt több olyan elrendezésben is elvégezzük, ahol a két detektor más-más szögeket zár be egymással, akkor azt tapasztaljuk, hogy az adott szögben mért látszólagos aktivitásnak szögfüggése lesz. Méréseim egyik fő motivációja ezen szögfüggés sokoldalú vizsgálata, majd kiküszöbölése a mérések során. Ennek

érdekében két mérési sorozatot végeztem el. Az első mérési sorozatban a detektorok és a minta távolságát nem változtatva vizsgáltam a mért látszólagos aktivitás szögfüggését. A második sorozatban pedig a detektor-minta távolságot változtatva elemeztem a 90 fokos és 180 fokos detektorszögek esetén mért látszólagos aktivitások arányát. Méréseim eredményét a megfelelő pontosság érdekében korrigáltam a mérések közt eltelt idő, a detektorok holtideje, a háttérsugárzás nagysága és a véletlen koincidenenciák száma szerint is.

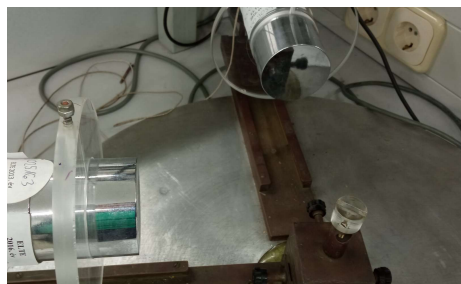
A mért aktivitások szögfüggésének oka a koincidencia fotonok irány-korrelációja a ki-sugárzás során. Ennek elméleti szögfüggése jól ismert, azonban korrekcióra szorul kiterjedt detektorfej méretek esetén (ezt korrekciót Python szimuláció segítségével végeztem el). Továbbá a mérési elrendezés modellezésére készítettem egy GEANT4 szimulációt is, melynek eredményeit a valós adatokhoz hasonlóan kiértékeltem és összevettem a mérések eredményeivel.

4. Mérés menete

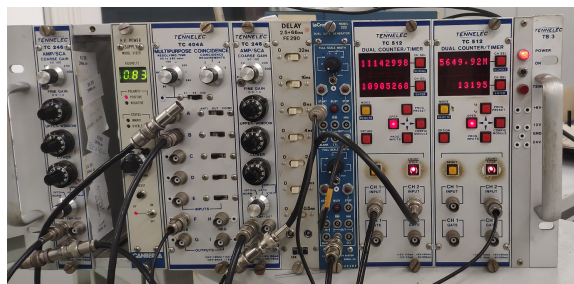
4.1. Első mérési sorozat

Az első mérési sorozatban a minta-detektor távolságot nem változtatva vizsgáltuk a mért látszólagos aktivitás szögfüggését.

A vizsgált mintát (kis méretű ^{60}Co forrás) egy állványra helyeztük, mely egy magasságba esett a használt NaI detektorok tengelyeivel, a minta és a detektorfejek távolsága 3.5 ± 0.2 cm volt. Minden mérés előtt a megfelelő állásba forgattuk a detektorfejeket. A differenciáldiszkriminátorok küszöbértékeit úgy állítottuk be, hogy 178 ± 2 cps (1 beütés/s) legyen mindkét detektor beütési rátája, mivel előzetesen egy több csatornás analízátorral (MCA) vizsgálva az energiaspektrumokat ezen érték esetén már mindkét energiacsúcs (1.17 MeV és 1.33 MeV) látható volt a spektrumon. A mérések időtartamának 20 órát választottunk, mely idő alatt nem változtattunk a mérési elrendezésen, a mérés végeztével lejegyeztük mindkét detektor egyéni beütésszámait és a koincidenenciák számát is. A mérési elrendezésről készített képek a 2. ábrán láthatóak.



(a) A detektorok



(b) A jelfeldolgozó egység

2. ábra. Mérési elrendezésről készített képek

Ezen mérések még korrigálatlan adatait a 1. táblázat tartalmazza.

Szög (°)	N_1	N_2	N_k	Időtartam (s)	Dátum
135	12904106	13328975	120327	72000	2022.07.28.
180	12989366	13120791	126340	72000	2022.07.29.
90	12641285	12652829	108373	72000	2022.08.01.
100	12732931	12805306	109994	72000	2022.08.02.
110	12788770	12754798	110283	72000	2022.08.04.
120	12827528	12706084	111597	72000	2022.08.04.
150	12880138	12471678	115706	72000	2022.08.09.
160	12864241	12448149	116537	72000	2022.08.10.
170	12848834	12410771	117690	72000	2022.08.11.

1. táblázat. Első mérési sorozat mért adatai. N_1 : 1-es detektor beütésszáma, N_2 : 2-es detektor beütésszáma, N_k : koincidenciák száma

Minden mérés végén lejegyeztük a dátumot is, mert a ^{60}Co felezési ideje kb. 5.27 év, ami több hónap alatt már okozhat pár százalék eltérést a minta aktivitásában.

A mintával a detektorban végeztük el a véletlen koincidenciák számának mérését is, melyhez a két differenciál-diszkriminátor jelét egymáshoz képest 1 ms-kel eltoltuk. Így pont azokat a koincidenciákat mértük csak, melyek két különböző bomlásból származtak véletlenszerűen. Ezeket ki kell küszöbölnünk, hogy megkapjuk a valódi koincidenciák számát. (A véletlen koincidenciák esetén két egymástól független bomlásból éri el egyszerre két foton a detektorfejeket.) Ennek a mérésnek a hossza 100 perc volt.

A minta detektorból való eltávolítása után egy rövidebb (10 perces) méréssel megmértük a csak a környezetből származó háttérsugárzást is.

A véletlen koincidenciák és háttérsugárzás mérése esetében is 180° -os detektorelrendezést (ezen mérések eredményére nincs hatással a detektorok által bezárt szög) használtunk és a mérések adatait a 2. táblázat tartalmazza.

	N_1	N_2	N_k	Időtartam (s)	Dátum
Véletlen koincidencia mérés	1066352	1032844	460	6000	2022.08.11.
Háttér mérés	3247	3068	1	600	2022.08.11.

2. táblázat. Véletlen koincidencia és háttér mérés adatai. N_1 : 1-es detektor beütésszáma, N_2 : 2-es detektor beütésszáma, N_k : koincidenciák száma

A mért adatokat még több szempont szerint korrigálnunk kell. Ennek részletes leírását a következő szekció tartalmazza.

4.2. Második mérési sorozat

A minta-detektor távolság változtatásával kísérletileg is vizsgálhatjuk a detektorok nagy térszögtartománya okozta eltérést az elméleti szöghorrelációs görbétől. A távolság növelése miatt csökkennek az egyes detektorok által lefedett térszögek, így csökkennie kell a különböző szögekben mért aktivitások eltérésének is az elméleti függvényről. Ugyanakkor a távolság növelésével jelentősen csökken az adott idő alatt mért beütésszám, ezért növelnünk kell a

mérési időtartamokat a megfelelő pontosság eléréséhez. A hosszabb mérési időtartamok miatt célszerű kevesebb szögben vizsgálni a mért aktivitást különböző detektortávolságok esetén. Az elmélet szerint a legnagyobb eltérés a 90 és a 180 fokok mérések közt várható, ezért most az ezen elrendezésekben mért aktivitások arányát fogjuk megvizsgálni a minta-detektor távolság függvényében.

Nagyobb távolság esetén egyre közelebb kell kerülnie a fenti aránynak az elméleti számolásból következő $\frac{W(180)}{W(90)} = \frac{1+1/8+1/24}{1} = \frac{7}{6} \approx 1.167$ értékhez.

Ezen mérési sorozat korrigálatlan adatait a 3. táblázat tartalmazza.

Szög (°)	Távolság (cm)	N_1	N_2	N_k	Időtartam (s)	Dátum
180	3.5	12989366	13120791	126340	72000	2022.07.29.
90	3.5	12641285	12652829	108373	72000	2022.08.01.
180	8.15	20321391	19749980	54386	360000	2022.09.22.
90	8.15	19924967	19490643	46883	360000	2022.09.28.
180	13	13886037	13610743	18382	420000	2022.10.12.
90	13	11155117	10916920	13208	339360	2022.10.17.

3. táblázat. Második mérési sorozat adatai. N_1 : 1-es detektor beütésszáma, N_2 : 2-es detektor beütésszáma, N_k : koincidenciák száma

A három különböző távolság esetén külön-külön meg kellett mérnünk a véletlen koincidenciák számát is. Emellett végeztünk minden távolság esetén egy háttérsugárzás mérést is (ezeknek nem szabad távolságfüggőnek lenniük). A véletlen koincidenciamérések korrigálatlan adatait a 4. táblázat, míg a mért háttérsugárzás adatait a 5. táblázat tartalmazza. Ezen mérések esetében 180 fokok detektor elrendezést használtunk, kivéve az utolsó véletlen koincidencia mérést, aminél 90 fokok elrendezésben voltak a detektorfejek. Ezt az eltérő utolsó mérést arra használtuk, hogy kísérletileg is megvizsgáljuk, hogy a véletlen koincidenciák száma nem függ a detektorok által bezárt szögtől.

Távolság (cm)	N_{velk}	Időtartam (s)	Dátum
3.5	460	6000	2022.08.11.
8.15	127	19813.2	2022.10.03.
13.0	229	96720	2022.10.13.
13.0	1029	420000	2022.10.25.

4. táblázat. Véletlen koincidenciák száma a távolság függvényében.

Távolság (cm)	N_1	N_2	Időtartam (s)	Dátum
3.5	3247	3068	600	2022.08.11.
8.15	332513	301953	55711	2022.10.05.
13.0	1155923	1017923	174000	2022.10.19.

5. táblázat. Háttérsugárzás mért adatai.

5. Mérési korrekciók és hibák

5.1. Háttérsugárzás

A mérések során nem csak a mintából jövő sugárzást érzékeljük, hanem egyéb forrásokból jövő sugárzásokat is, ezeket összefoglaló néven háttérsugárzásnak hívjuk. Ilyen lehet például a levegőben levő kis mennyiségű radioaktív izotópokból érkező sugárzás, vagy épp a légkörből müonoktól származó részecskezápör. Az ilyen jelenségek hatásait úgy vehetjük figyelembe, ha minta nélkül is mérünk a detektorral és az így mért háttérsugárzást kivonjuk minden mintával mért adatunkból. Ugyanakkor a háttérsugárzás valamelyest ingadozhat a napszak, légköri események és a terem szellőztetése hatására, így a mért háttérsugárzás bizonytalansága nagyobb a tisztán beütésszámokból származó statisztikus bizonytalanságnál. A mért véletlen koincidenenciák száma emellett enyhén függhet a detektorok távolságától, mivel a kozmikus sugárzás részecskezáporai nagyobb eséllyel okozhatnak véletlen koincidenenciát, ha kisebb a detektorok közti távolság.

Ezt pontosan nem tudtuk megmérni, viszont megvizsgálhatjuk a három háttérmérésünk közti eltéréseket és ezekből becslést adhatunk a háttérsugárzás bizonytalanságára. Ehhez a 4. táblázatból számított háttérsugárzási ráták szórását vettem bizonytalanságnak. Ez az egyes detektornál ≈ 0.62 cps, a kettes detektornál ≈ 0.37 cps hibát jelentett. (Az egyes detektoroknál a 5. táblázat alapján 6.01 cps és 5.46 cps átlag háttérsugárzást mértünk.)

A háttérsugárzásból adódó hiba csökkentésére több lehetőség is lenne. Az egyik, hogy a detektorokat árnyékoló ólom tömbök közé helyeznénk, ami egy-két nagyságrenddel csökkentené a háttérsugárzás nagyságát. A másik lehetőség az ingadozás pontosabb időbeli mérése lenne, azaz hosszabb időn át rövidebb intervallumokra bontva mérni a háttérsugárzás időbeli változását (ideális esetben ez a mérések menete közben történne).

5.2. A mérési elrendezés geometriai méreteinek hibái

A mérési elrendezés leírásához használt méretek hibáit is fel kell használnunk az adataink hibáinak becslésénél. A mért detektor-minta távolságok bizonytalansága nagyjából 2 mm minden esetben. Továbbá a detektorszögek beállítása 1 fok pontossággal történt.

A méréseink kiértékelése során pontszerűnek tekintettük a forrásunkat, amiből szintén származik bizonytalanság eredményeinkben. Valójában a mintánk burkolata henger alakú (≈ 1 cm átmérőjű, ≈ 1 cm magasságú), de azt nem ismerjük, hogy milyen a radioaktív anyag eloszlása a tokon belül. A mintában való önellenyelődést is elhanyagoltuk, tehát a mi eredményeink arra az aktivitásra vonatkoznak, amelyhez tartozó sugárzás ténylegesen ki is jut a mintából (gyakorlati alkalmazások esetén is ez az érték a fontosabb).

5.3. Erősítés stabilitása

Hibaforrásnak számít az is, ha a mérőberendezések által kibocsátott jel erősítése kicsit megváltozik, mivel a jel nagyságából tudunk következtetni a beérkező gamma-foton energiájára. Ha az erősítés időben kicsit ingadozik, akkor a korábban küszöbérték alatt levő fotonoktól származó jelek erőssége megnőhet úgy, hogy már a küszöbérték fölé kerülnek, vagy éppen fordítva. Tehát az erősítés változása a számlálási hatásfokot is változtatja, ezért

meg kell becsülni, hogy a hosszabb mérések esetén mennyiben befolyásoló tényező az erősítés ingadozása.

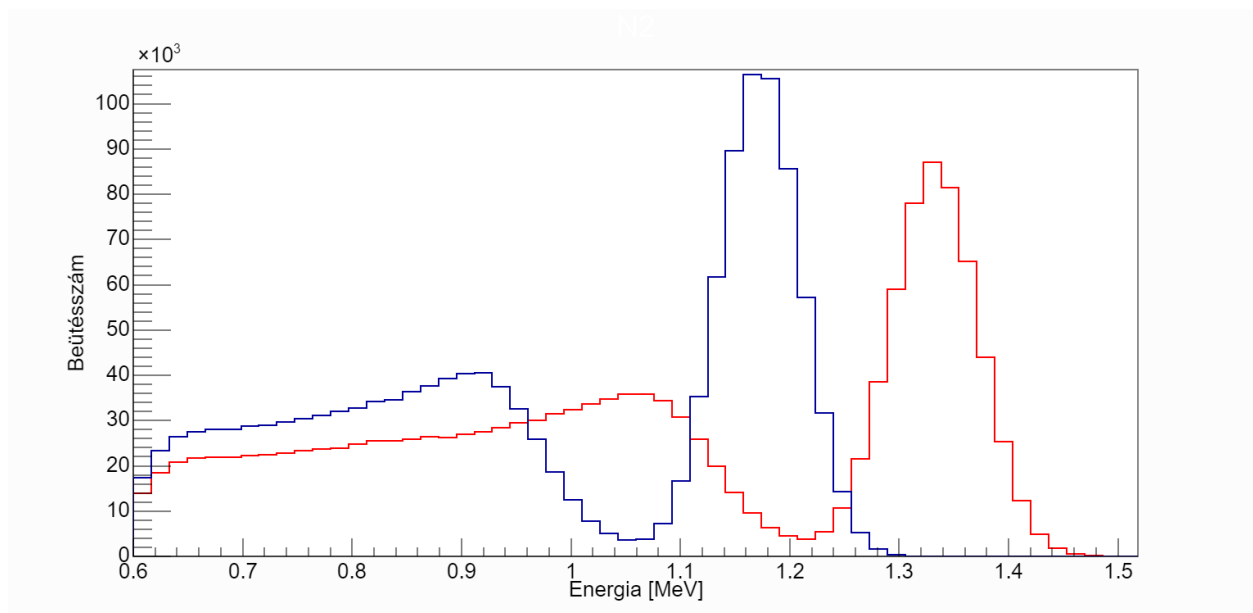
Mivel az aktivitás kiszámolása esetén alkalmazott (11) képletben a számlálási hatásokok valójában csak a 2-höz közeli (B pontosabb értékeit a 6. táblázat tartalmazza)

$$B = \left(1 + \frac{e_{11} \cdot e_{21} + e_{22} \cdot e_{12}}{e_{11} \cdot e_{22} + e_{21} \cdot e_{12}} \right)$$

arányszámokban szerepelnek, ezért a hatások ingadozása miatti hiba becsléséhez csak ezen szám ingadozását kell vizsgálnunk. Ennek kiszámolásához a GEANT4 szimulációt használtam, mivel ennek segítségével megbecsülhetjük, hogy mekkora a két gamma-foton esetén a detektor számlálási hatásfokainak aránya.

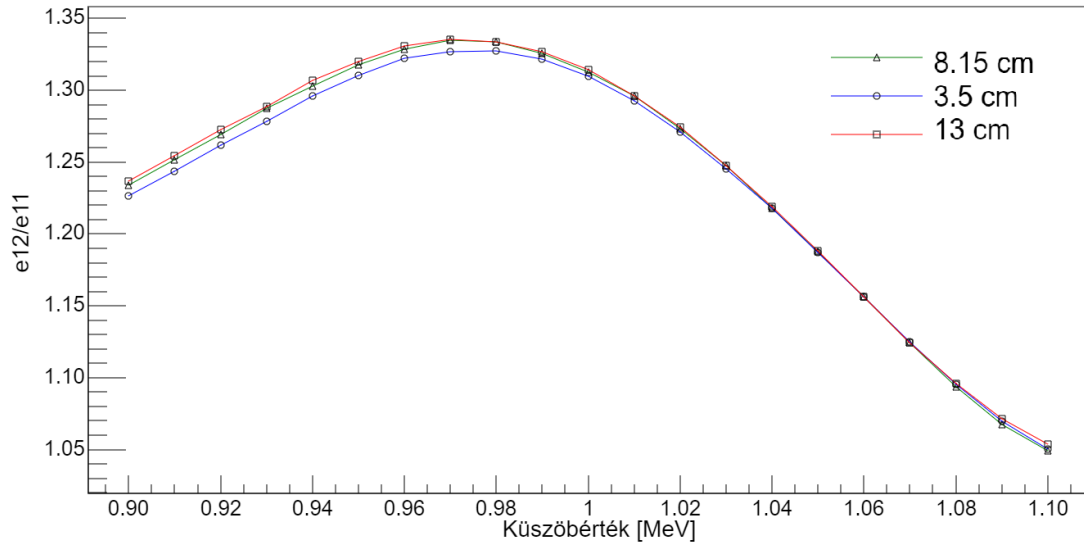
Ugyanezen B faktor hibájának megadásához figyelembe kell vennünk ennek távolságfüggését is, mivel a minta-detektor távolságokat csak 2 mm pontossággal ismerjük, így meg kell vizsgálnunk, hogy ekkora eltérés mekkora változást eredményez B értékében.

Ehhez módosítanunk kell a szimuláció elrendezését annyiban, hogy a pontszerű ^{60}Co forrást kicseréljük egy minden irányban izotróp módon sugárzó gamma-forrásra, melynek energiáját mi adhatjuk meg. Két szimulációt kell elvégeznünk minden távolság esetén, az egyikben a forrás energiáját 1173.2 keV-re, a másikban 1332.5 keV-re kell állítanunk. Ezt a szimuláció párt meg kell ismételtnünk a második mérési sorozat minden távolsága esetén, továbbá ezen távolságokhoz képest 2 mm-rel eltolt távolságok esetén is (elég az egyik irányba való eltolás esetét megnéznünk, mivel a kapott eltérések nagyon kicsik, tehát ha a másik irányba tolnánk el a detektorokat akkor is hasonló eltéréseket kapnánk). A detektorban hagyott energia eloszlásokra egy példa (3.5 cm-es minta-detektor távolság esete) a következő ábrán látható (megfelelő $\sigma(E)$ energiafüggő szórást alkalmazva, lásd 7.1. fejezet). A szórás utólagos alkalmazása miatt látható beütés a vizsgált energia felett is, mivel a szimulációban valójában nem történt ilyen energiájú beütés, csak Gauss-görbe szerinti elmosás hatására lett ilyen energiánk. Ugyanakkor ez számunkra nem probléma, mivel mi csak a küszöbérték feletti beütések összegét keressük, amit ez a valóságtól való eltérés nem befolyásol.



3. ábra. A két vizsgált gamma energiához tartozó detektorban hagyott energiaspektrumok az elmosás alkalmazása után. Piros - 1.17 MeV, kék - 1.33 MeV.

A mi méréseink esetében az energia küszöbérték 0.93-1.03 MeV intervallumban változott, így itt is hasonlóan kell eljárunk. Ekkor fontossá válik, hogy a nagyobb energiájú gamma-foton esetén a Compton-hát jobban beleér a számlált energiatartományba, így hiába magasabb a kisebb energiához tartozó csúcs, a beütésszám szempontjából a második csúcsnak lesz nagyobb számlálási hatásfoka. A hatásfokarányok változását a levágás helyének függvényében a 4. ábra szemlélteti.



4. ábra. A detektor két gammára vett hatásfokainak aránya az alkalmazott küszöbérték függvényében, a szimulált adatokat felhasználva. A három különböző görbe három különböző távolsághoz tartozik.

A mérések során minden távolságnál készítettünk egy-egy MCA spektrumot mindkét detektorral. Ezt felhasználva megkaphatjuk, hogy mekkora volt azon mérések során a küszöbérték. Ehhez meg kell vizsgálnunk, hogy hanyadik csatornaszámba igaz, hogy ha onnantól a nagyobb energiák felé összeadjuk az összes csatorna beütésszámát, akkor az pont a mért beütési rátához tartozik (ha megfelelő távolsághoz tartozó beütési rátát megszorozzuk az MCA mérés tényleges idejével, akkor megkapjuk a várt beütések számát). A küszöbérték ismeretében összegezzhetjük az ezen energia feletti beütések számát és eloszthatjuk a két foton energia esetén kapott értékeket egymással, ezzel megállapítva a két gamma-fotonra vett számlálási hatásfokok arányát a GEANT4 szimuláció segítségével. Továbbá arra is becslést adhatunk, hogy mekkora hibát okozott, ha a mérés folyamán a pillanatnyilag mért aktivitás 2-3% -ot ingadozott. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a újra kiszámítjuk a küszöbértéket, de már a megváltoztatott beütési ráták esetén és vizsgáljuk e_{12}/e_{11} arány változását ennek hatására (2-3% ingadozás felel meg az MCA spektrumon 1 csatorna eltéréshez a küszöbértékben). Az egyes távolságok esetén a küszöbértékek és ehhez tartozó arányok:

Távolság (cm)	Küszöbérték 1-es detektorra (MeV)	Küszöbérték 2-es detektorra (MeV)	e_{12}/e_{11}	e_{22}/e_{21}	B
3.5	0.99	1.03	1.322	1.245	2.031
8.15	0.99	0.99	1.326	1.326	2.040
13.0	0.93	0.96	1.289	1.331	2.037

6. táblázat. A küszöbértékek és ezekhez tartozó hatásfok arányok a három különböző mérési távolság esetén. e_{12}/e_{11} : 1-es detektor második ill. első gammára vett hatásfokainak aránya, e_{22}/e_{21} : 2-es detektor második ill. első gammára vett hatásfokainak aránya.

A táblázatból látszik, hogy minden mérésünknel elég jó közelítést kapunk $B \approx 2$ esetén. Továbbá kiszámolható, hogy ha a mért aktivitások a mérések ideje alatt 2-3%-kal ingadoznak, az nagyjából 20 keV ingadozást jelent a küszöbértékek esetében. A küszöbérték ekkora ingadozásához, továbbá a minta-detektor távolság 2 mm-es változásához tartozó hibák és ezek (13) szerinti "összegei" az alábbi táblázatban láthatóak:

Távolság (cm)	B hibája távolság bizonytalanság miatt	B hibája küszöbérték ingadozás miatt	B
3.5	0.0002	0.008	2.031 ± 0.008
8.15	0.0002	0.006	2.040 ± 0.006
13.0	0.0001	0.006	2.037 ± 0.006

7. táblázat. B távolság és küszöbérték bizonytalanság miatti hibái és ezek összegei a három mérési távolság esetében.

A domináns hibaértékek a küszöbérték ingadozásából adódnak. A B értékek százalékos hibáját a (13) képlet szerint használtam fel eredményeim kiszámolásánál.

5.4. Dátum szerinti korrekció

A vizsgált ^{60}Co forrás felezési ideje 5.27 év. Mivel az egyes méréseink közt akár egy hónap is eltelt, így a nagyobb pontosság elérése érdekében figyelembe kell vennünk, hogy a minta aktivitása folyamatosan csökkent az idő elteltével. Ezt úgy valósíthatjuk meg, ha kiválasztunk egy referencia időpontot, legyen ez most az első mérés időpontja (2022. 07. 28.), és minden későbbi mérést ehhez igazítunk. Ekkor a korrigált beütésszám értékünk:

$$N_{\text{dátum korrigált}} = N_0 \cdot 2^{(t - \Delta t)/T_{1/2}} \quad (14)$$

ahol N_0 a mért beütésszám, t a mérés vége és a referencia dátum közt eltelt idő, Δt a mérés hossza és $T_{1/2}$ a minta felezési ideje.

Továbbá a hibába beleszámíthatjuk, hogy a mérés idejét csak napra pontosan ismerjük. Ezt úgy becsültem meg, hogy minden adatpontnál a mérés idejének bizonytalanságát 5 órának választottam, és megnéztem, hogy mennyivel változott volna az aktivitás ennyi idő alatt. Ezt a következő képlet segítségével számoltam ki:

$$\Delta N_{\text{dátum}} = N_{\text{dátum korrigált}} \cdot (2^{\Delta t_5/T_{1/2}} - 1) \quad (15)$$

ahol $\Delta t_5 = 5$ óra. A korrekciót minden adatpontra elvégeztem. Ezek az egyes beütési rátákban 0.01% hibát eredményeztek.

5.5. Holtidő miatti korrekció

A megfelelő pontosság eléréséhez figyelembe kell vennünk a detektoraink holtidejét is. Ez annak az időintervallumnak a hossza, amíg a jelfeldolgozó egységek nem tudnak új jelet fogadni, ha már kaptak egyet. Jelöljük a holtidőt τ -val mostantól. Minden beütés után τ ideig nem tudjuk észlelni az abban az időintervallumban érkező jeleket, ami azt jelenti, hogy

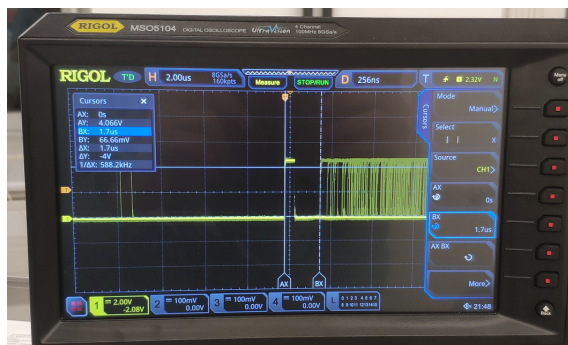
a mérésünk effektív időtartama ($t_0 - N \cdot \tau$)-ra csökken, ahol t_0 a mérés eredeti időtartama és N a beérkezett beütések száma.

A detektorunk holtidejét könnyen megtudhatjuk, ha a detektorból érkező jeleket oszcilloszkóp segítségével vizsgáljuk. Ha ezt megtesszük, akkor a detektorból érkező jel alakjára a következőt kapjuk:



5. ábra. A detektorból érkező jel alakja, egy beosztás 200 μ s.

Ugyanakkor a tényleges feldolgozó egységből jövő jel ettől eltérő alakú, ezek a két detektorra az alábbi ábrán láthatóak:



(a) Első detektor feldolgozott jele, egy beosztás 2 μ s.



(b) Második detektor feldolgozott jele, egy beosztás 2 μ s.

6. ábra. A két differenciál-diszkriminátorból érkező jel alakja.

A jelek alak és hosszbeli eltérését azzal magyarázhatjuk, hogy a detektor jelének, csak a kezdeti exponenciális ága fontos a jelfeldolgozás gyorsaságát tekintve, mivel annak lejártá után már tudjuk észlelni, ha egy újabb jel érkezik (ekkor a feszültség újból ugrik egyet). Tehát a holtidő korrekciónál az a fontos, hogy a jelfeldolgozó egységből mekkora minimális

idő elteltével érkezhet új jel. Ezt a 6. ábráról olvashatjuk le és értéke az 1-es detektorra $\tau_1 \approx 1.70 \pm 0.1 \mu s$, a 2-es detektorra $\tau_2 \approx 2.38 \pm 0.1 \mu s$.

Az egyes detektorok beütésszámaikat a korrigált mérési időtartamokkal elosztva pontosabb eredményt kaphatunk a detektorok által mért beütési rátákra, továbbá kiszámíthatjuk, hogy a holtidő hibája mekkora hibát okoz a beütési rátákban. A hibaszámításhoz mérési időtartam százalékos hibáját használhatjuk fel, amit akkor kapunk, ha a holtidő hibáját megszorozzuk a beütésszámokkal és elosztjuk az eredeti mérési időtartammal.

A koincidencia ráták kiszámolásánál a nagyobb holtidőjű detektorhoz tartozó korrigált időt használtuk, azaz a kettes detektorét.

Az így kapott hibák a többi hibaforráshoz képest elhanyagolhatóan kicsik (max. 0.002%).

5.6. Az összegcsúcs miatti korrekció

A koincidencia módszer ismertetésénél leírt képleteink nagy pontosságú mérések esetén korrekcióra szorulnak. Ennek az oka az, hogy ha egy bomlásból mindkét foton ugyanazt a detektort találja el, akkor csak egy beütést számlálunk, aminek az energiája a két beérkezett foton által leadott energiák összege lesz. Így az oldalági beütésszámaink kisebbek lesznek a vártnál. Ugyanakkor az is előfordulhat, hogy két foton ugyanazt a detektort találja el, de csak energiájuk egy részét adják le. Ekkor lehetséges, hogy az energiáik egyenként nem érnék el a beállított küszöbértéket, azonban ha egyszerre érkeznek, akkor az általuk leadott energiák összege már átlépi a küszöbértéket. Ez a folyamat olyan beütéseket is hozzáad a beütésszámainkhoz, amelyeket egyébként nem érzékelnénk, tehát növeli az oldalági beütésszámokat. Pontosabb képletet kaphatunk, ha figyelembe vesszük a fellebb említett két hatást is:

$$N_1 = (e_{11} + e_{12} - e_{11}e_{12}\overline{W}(0) + e_{1p}\overline{W}(0)) \cdot A \cdot t$$

$$N_2 = (e_{21} + e_{22} - e_{21}e_{22}\overline{W}(0) + e_{2p}\overline{W}(0)) \cdot A \cdot t$$

Ahol e_{1p}, e_{2p} a beütésszám növekedésért felelős faktorok és $\overline{W}(0)$ egy szöghkorreláció miatti faktor, ami azért szükséges, mert a forrás nagyobb valószínűséggel sugároz ki két fotont egy azonos irányba. Ezt a szöghkorrelációs faktort úgy számolhatjuk ki, ha az elméleti szöghkorrelációs görbét átlagoljuk egy detektorfejre. Közelítő értéke a következő képlet alapján kapható:

$$\begin{aligned} \overline{W}(0) &= \frac{\int_0^{\beta_{\max}} W_{\text{norm}}(\theta) \sin(\theta) d\theta}{\int_0^{\beta_{\max}} \sin(\theta) d\theta} \\ \overline{W}(0) &= \frac{20}{21} \cdot \frac{21/20 - \cos(\beta_{\max}) - \cos^3(\beta_{\max})/24 - \cos^5(\beta_{\max})/120}{1 - \cos(\beta_{\max})} \end{aligned} \quad (16)$$

Ahol $\beta_{\max} = \arctan(r/d)$ az a detektor tengelyétől mért maximális szög, amiben még érkezhet egy detektált foton. (r a detektor sugara, d a minta-detektor távolság)

Mivel a vizsgált faktorok nagyon kis hatással bírnak a mért beütésszámokra, így kezelhetjük külön őket kiszámításukkor. A beütésszám csökkenésért felelős faktor kiszámításához először az e_{11} és e_{12} hatásfokokat keressük meg, amihez a következő két másodfokú egyenletet

használjuk:

$$\frac{N_1}{A \cdot t} = e_{11} + e_{11}k_1 - e_{11}^2k_1\overline{W}(0)$$

$$\frac{N_2}{A \cdot t} = e_{21} + e_{21}k_2 - e_{21}^2k_2\overline{W}(0)$$

Ahol $k_1 = e_{12}/e_{11}$, $k_2 = e_{22}/e_{21}$ értékeket a 6. táblázatban találhatjuk meg. A hatásfokok ismeretében már kiszámolhatjuk $e_{11}e_{12}\overline{W}(0)$ és $e_{21}e_{22}\overline{W}(0)$ értékeit.

Az e_{1p} és e_{2p} számokat a GEANT4 szimuláció segítségével kaphatjuk meg. Ha csak az egyik és csak a másik fotonhoz tartozó spektrumokat vizsgáljuk, akkor kiszámolhatjuk, hogy mekkora eséllyel érkezett egy adott energiatartományba foton az egyik illetve a másik energiához tartozó spektrumban. Ezután ha megkeressük az összes olyan energia párosítást a két spektrum közt, ahol az egyes energiák egyenként a küszöbérték alatt vannak, azonban összegük már átlépi a küszöbértéket, akkor az így kapott energiapárok beütési valószínűségeit (amik a pár két tagjának valószínűségeinek szorzatai) összeadva megkaphatjuk, hogy mekkora az esélye a beütésszám növekedésének a vizsgált folyamat miatt. Az így kapott valószínűségek felelnek meg az egyes detektorokra e_{1p} illetve e_{2p} számoknak.

A vizsgált két folyamat két ellenkező irányba módosítja az oldalági beütésszámainkat és egy nagyságrendbe esnek, ezért hatásaik majdnem kiejtik egymást. Az e_{11} és e_{21} hatásfokok a 0.0075-0.0085 intervallumba estek az egyes adatpontokra nézve. Az e_{1p} és e_{2p} valószínűségekre pedig $(4.2 \pm 1) \cdot 10^{-5}$ ill. $(5.2 \pm 1) \cdot 10^{-5}$ értékeket kaptuk. Ezen faktorok hibái szisztematikus hibák és nagyjából 0.07% hibát okoznak az oldalági beütésszámokban, ezzel $\approx 0.13\%$ -kal járulnak hozzá a végeredmény hibájához.

6. Korrigált adatok kiértékelése

6.1. A korrigált adatok

Az előző szekcióban tárgyalt mérési bizonytalanságokat és korrekciókat figyelembe véve megkaphatjuk a (11) képlet alapján az aktivitás szögfüggését az első mérési sorozat adataiból. Ezen értékeket a 8. táblázat tartalmazza. (Ezen adatok a küszöbérték ingadozása miatti hibát még nem tartalmazzák, mivel az korrelált ezen egymás után következő mérések esetén, ezért később kell figyelembe vennünk.)

Hasonló korrekciókkal és számolással megkaphatjuk a második mérési sorozat esetén számított aktivitásokat is, ezeket a 9. táblázat tartalmazza. (Ezen adatok tartalmazzák a küszöbérték ingadozása miatti hibát is, mivel köztük újból be lett állítva a küszöbérték.)

A hibaszámítás során az egyes faktorokhoz tartozó hibák a 10. táblázatban találhatóak.

Szög (°)	Számított aktivitás (kBq)
90	10.064±0.059
100	10.111±0.059
110	10.095±0.059
120	9.962±0.058
135	9.708±0.054
150	9.465±0.054
160	9.367±0.054
170	9.233±0.053
180	9.141±0.050

8. táblázat. Az első mérési sorozat adataiból számított aktivitások és hibáik.

Minta-detektor távolság (cm)	Szög (°)	Számított aktivitás (kBq)
3.5±0.2	180	9.141±0.050
3.5±0.2	90	10.064±0.059
8.15±0.2	180	8.67±0.13
8.15±0.2	90	9.78±0.16
13±0.2	180	8.67±0.24
13±0.2	90	9.69±0.27

9. táblázat. A második mérési sorozat adataiból számított aktivitások és hibáik.

	Statisztikus hiba	Dátum miatti hiba	Holtidő miatti hiba	Véletlen koinc./ Háttér hibája	Teljes hiba
A_1 (3.5 cm)	0.03%	0.008%	0.002%	0.36%	0.36%
A_2 (3.5 cm)	0.03%	0.008%	0.002%	0.21%	0.22%
A_k (3.5 cm)	0.31%	0.008%	0.002%	0.25%	0.40%
A_1 (8.15 cm)	0.02%	0.008%	0.001%	1.21%	1.21%
A_2 (8.15 cm)	0.02%	0.008%	0.001%	0.74%	0.75%
A_k (8.15 cm)	0.46%	0.008%	0.001%	0.39%	0.61%
A_1 (13 cm)	0.03%	0.009%	0.0004%	2.26%	2.27%
A_2 (13 cm)	0.03%	0.009%	0.0004%	1.36%	1.36%
A_k (13 cm)	0.84%	0.008%	0.0003%	0.18%	0.86%

10. táblázat. Az egyes detektorok rátáinak és a koincidenciák rátájának átlagos százalékos hibái a különböző hibafaktorokra lebontva, mindhárom vizsgált detektor-minta távolság esetére. A_k -hoz a véletlen koincidenciák miatti, A_1 -hez és A_2 -höz a változó háttérsugárzás miatti százalékos hibák vannak feltüntetve a negyedik oszlopban.

Az adatok korrigálása során szinte minden esetben a legjelentősebb hibafaktort a háttérsugárzás ingadozásához köthető hiba jelentette. A mért beütésszámok statisztikus hibája majdnem egy nagyságrendbe esett a dátum korrekcióhoz köthető hibával.

A holtidő okozta hiba elhanyagolhatóan kicsi volt minden esetben.

Az egyes beütésszámok rátáinak hibáját és a véletlen koincidenciák rátáinak hibáját fel-

használva a küszöbérték ingadozásából kapott százalékos hibákkal együtt megkaphatjuk a számított aktivitások hibáit, melyek a 8. és a 9. táblázatokban láthatóak.

6.2. Abszolút aktivitás számítása elméleti úton

Ebben az alfejezetben a minta abszolút aktivitását szeretnénk kiszámolni elméleti megfontolásokból. Tudjuk, hogy a koincidenciák számának szögfüggése jellemezhető a következő típusú függvénnyel: (B és C konstansok)

$$f(\theta) = 1 + B \cdot \cos^2(\theta) + C \cdot \cos^4(\theta) \quad (17)$$

Továbbá azt is tudjuk, hogy az aktivitás (11) képletében a koincidenciák száma a nevezőben szerepel, ezért az aktivitás görbe $\frac{1}{f(\theta)}$ -val arányos. Valójában a (11) képlet szögfüggés esetén:

$$\frac{A_{\text{abszolút}}}{f_{\text{norm}}(\theta)} = \frac{A_1 A_2}{2A_k}$$

ahol f_{norm} a normált formája f -nek. Azaz:

$$\int_0^\pi 2\pi \sin(\theta) f_{\text{norm}}(\theta) d\theta = 4\pi$$

Ennek felhasználásával illeszthetünk egy $g(\theta) = \frac{D}{f(\theta)}$ függvényt a kapott aktivitás görbékre.

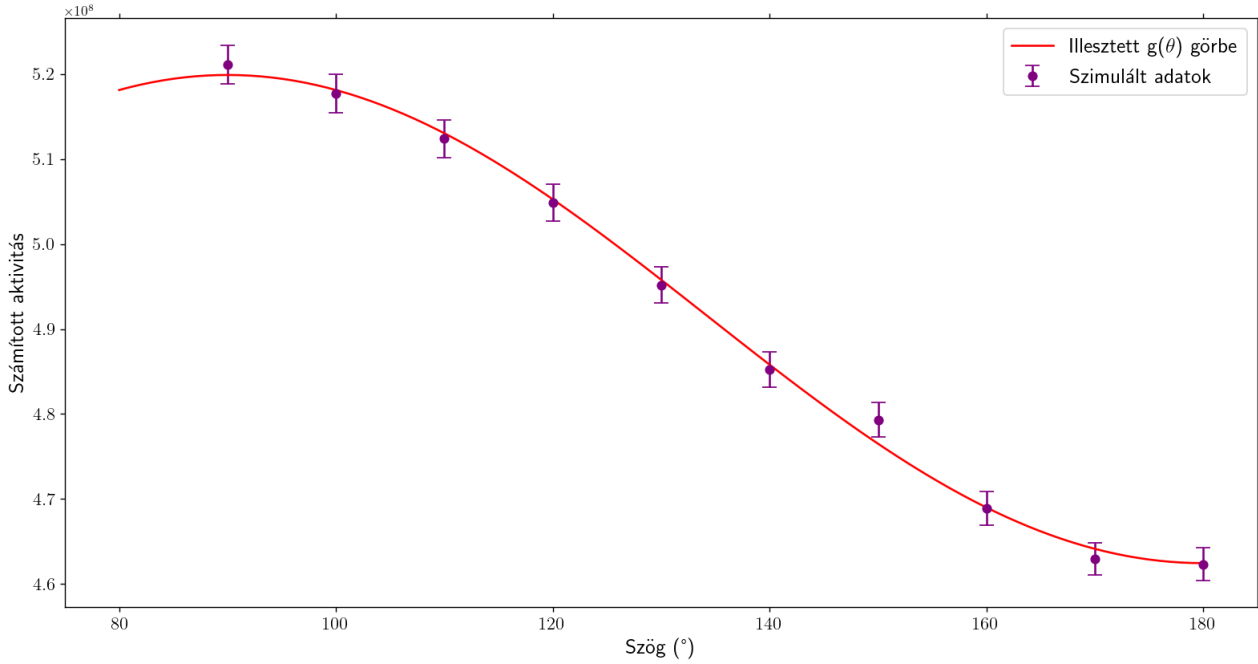
Ha minden irányban tudnánk detektálni a gamma-fotonokat, akkor mindig érzékelnénk koincidenciát, tehát, ha integráljuk az összes irányra az ahhoz tartozó koincidenciák számát, akkor megkaphatjuk a teljes aktivitást. A $g(\theta)$ függvényünkben még a normálás nélküli $f(\theta)$ szerepel, azaz el kell végeznünk $f(\theta)$ normálását:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{A_{\text{abszolút}}} &= \int_0^\pi \frac{2\pi \sin(\theta)}{g(\theta)} d\theta \\ \frac{4\pi}{A_{\text{abszolút}}} &= \int_0^\pi \frac{2\pi \sin(\theta) f(\theta)}{D} d\theta \\ \frac{2}{A_{\text{abszolút}}} &= \int_0^\pi \frac{\sin(\theta)(1 + B \cdot \cos^2(\theta) + C \cdot \cos^4(\theta))}{D} d\theta \\ \frac{2D}{A_{\text{abszolút}}} &= \left[-\cos(\theta) - \frac{B}{3} \cdot \cos^3(\theta) - \frac{C}{5} \cdot \cos^5(\theta) \right]_0^\pi \\ \frac{D}{A_{\text{abszolút}}} &= 1 + \frac{B}{3} + \frac{C}{5} \\ A_{\text{abszolút}} &= \frac{D}{1 + \frac{B}{3} + \frac{C}{5}} \end{aligned} \quad (18)$$

Ezáltal az illesztett függvény paraméterei segítségével kifejezhetjük a minta abszolút aktivitását. Ebben a módszerben az $f(\theta)$ függvény állandóinak illesztésével vesszük figyelembe az elméleti $W(\theta)$ függvény korrekcióit kiterjedt detektorfejek miatt. (Hasonló típusú illesztést találhatunk az [5] cikkben is.)

A módszert alkalmazva a GEANT4 szimulációból kapott adatok esetében becslést kaphatunk az eredmény pontosságára, mivel a szimuláció esetében ismerjük a bomlások számát. Ehhez 500 millió egymás utáni bomlás szimulációját használjuk. Az adatokra illesztett függvény és paraméterei:

B	C	D
0.112 ± 0.010	0.013 ± 0.010	519900000 ± 890000
$(0.896 \pm 0.080) \cdot 1/8$	$(0.31 \pm 0.24) \cdot 1/24$	



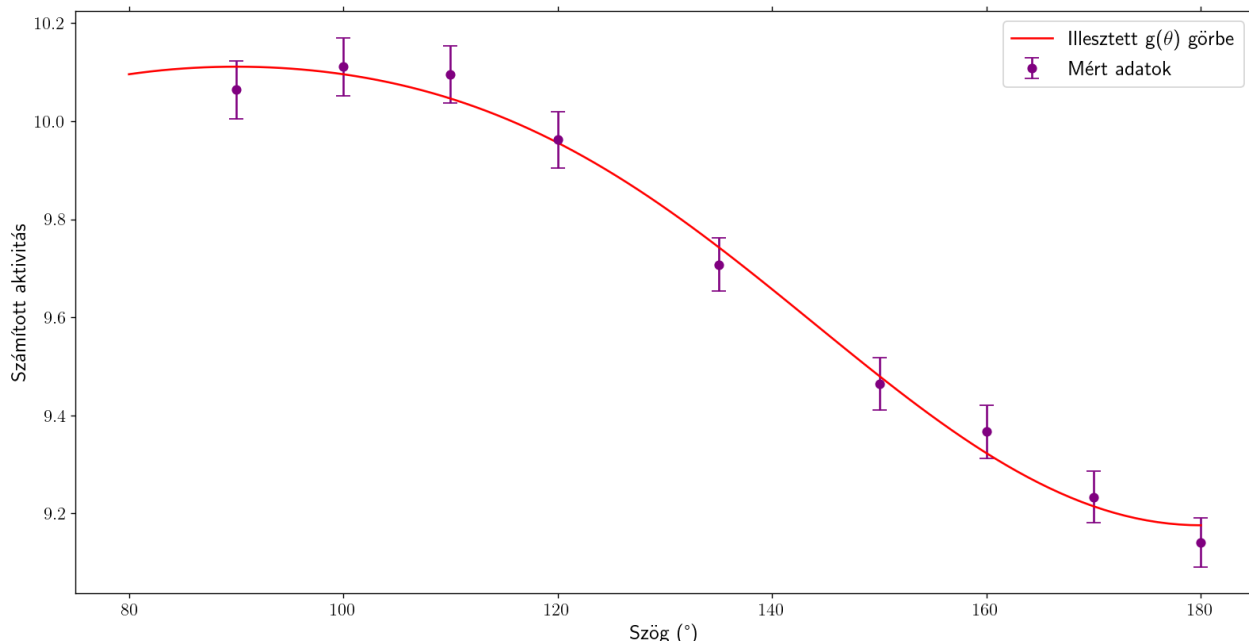
7. ábra. A GEANT4 szimulációból kapott adatokra illesztett $g(\theta)$ függvény és az illesztési paraméterek, minta-detektor távolság 3.5 cm. Az illesztésnél: $\chi^2 = 0.42$ (A Hamilton által jósolt paraméterek: $B = 1/8$, $C = 1/24$)

Ezen adatokat felhasználva a (18) képlet a szimulációban a bomlások számára a következőt adja (a szimulációban nincs eltelt idő, tehát a bomlások száma felel meg az abszolút aktivitásnak):

$$N_{\text{bomlások}} = (4.999 \pm 0.005) \cdot 10^8$$

Tudjuk, hogy 500 millió bomlást szimuláltunk, tehát a képletünk valójában $\approx 0.02\%$ hibával adta meg a bomlások számát, ami jóval kisebb az illesztési hibánál ($0.005/4.999 \approx 0.1\%$ hiba).

Most vizsgáljuk meg a mérésből kiszámolt adatokat is ezen módszer segítségével. Ehhez illesztünk kell a valós adatokra is egy $g(\theta)$ függvényt. Ezt az illesztést a 8. grafikonon láthatjuk.



B	C	D
0.050 ± 0.017	0.052 ± 0.017	10.111 ± 0.027
$(0.4 \pm 0.136) \cdot 1/8$	$(1.25 \pm 0.41) \cdot 1/24$	

8. ábra. Az első mérési sorozat eredményeire illesztett görbe és paraméterei, minta-detektor távolság 3.5 cm. Az illesztésnél: $\chi^2 = 0.53$ (A Hamilton által jóslott paraméterek: $B = 1/8$, $C = 1/24$)

Az illesztett paramétereket felhasználva megkaphatjuk a minta abszolút aktivitását is:

$$A_{\text{abszolút}} = (9.845 \pm 0.016) \text{ kBq}$$

(Itt csak az illesztési paraméterek hibájából számolt hibát tartalmazza a képlet.)

A küszöbérték ingadozása miatti hibát eddig nem vettük figyelembe, mert az az adatpontok közt korrelált hibának minősül. Ez azért van mivel a méréseket egymás után végeztük és köztük nem volt lehetséges a küszöbérték kellően pontos visszaállítása. Emiatt a küszöbérték ingadozás miatti százalékos hibát most kell hozzáadnunk a végeredmény hibájához. (A küszöbérték miatti hibák a 7. táblázatban találhatóak.) Emellett az összegcsúcs miatti korrekció hibáját is most kell felhasználnunk. Ezeket figyelembe véve az eredményünk:

$$A_{\text{abszolút}} = (9.845 \pm 0.044) \text{ kBq}$$

Ez az eredmény arra a dátumra érvényes, melyre minden adatpontot visszakorrigáltunk, azaz 2022. 07. 28-ra. A részletes hibaelemzés segítségével sikerült elérnünk a közel fél százalékos pontosságot.

6.3. Abszolút aktivitás kiszámítása GEANT4 szimuláció használatával

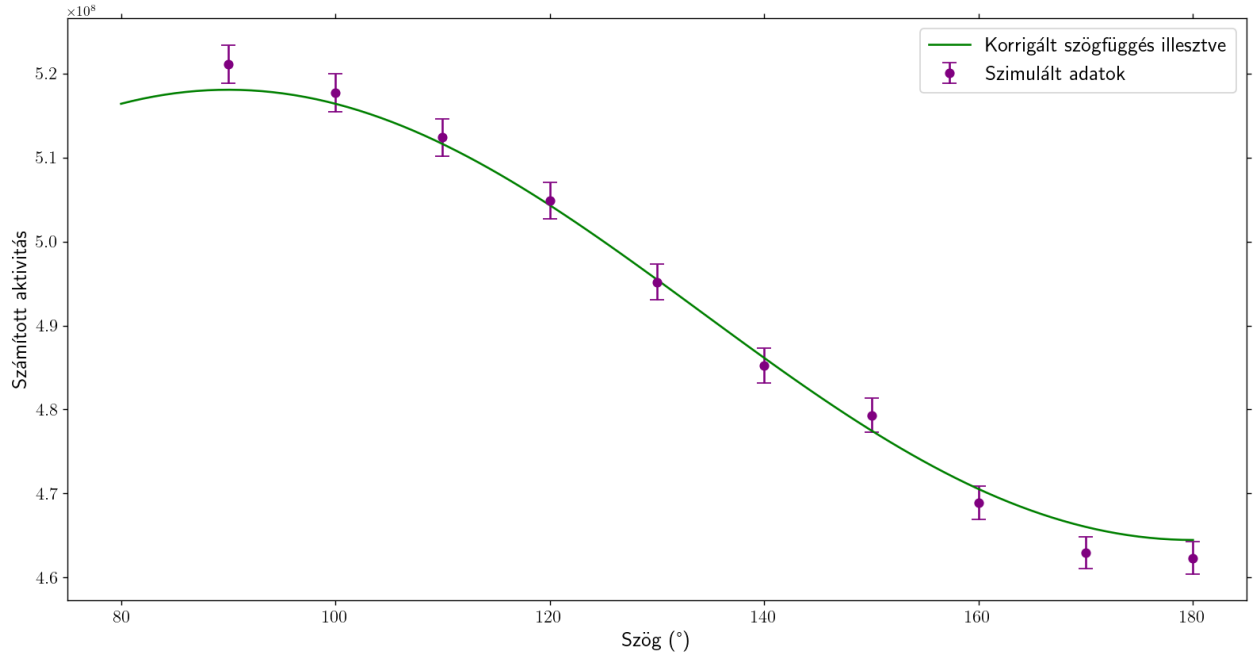
A minta abszolút aktivitásának kiszámításához felhasználhatjuk a GEANT4 szimulációt más módszerrel is. Ezt úgy tehetjük meg, ha a szimulált adatokra és a mért adatokra is illesztünk egy olyan görbét, ami az elméleti szögfüggés kiterjedt geometriát figyelembe vevő korrigálása. Ez az illesztett görbe a következő alakú lesz:

$$h(\theta) = C/W_{\text{kor}}(\theta)$$

ahol W_{kor} a (20) egyenletből származik, C pedig az illesztési paraméter.

Az illesztett paraméterünk egyenesen arányos kell hogy legyen az abszolút aktivitással és ennek az arányszámnak egyeznie kell a szimulációban és a valóságban, ha feltételezzük, hogy a szimuláció jól leírja a mérési elrendezésünket.

A mért adatok és a szimuláció összehasonlításához 90 és 180 fok közt 10 fokenként változtatva a két detektor közti szöget, a koincidencia módszert alkalmazva futtattam le a szimulációt. A kellő pontosság érdekében 500 millió bomlást szimuláltam le minden elrendezés esetén. A kapott adatoknak még szórást kell adnunk, hogy jobban tükrözzék a valós körülményeket (lásd Szimuláció szekció), továbbá a szimulációban is a valódi mérés esetén alkalmazott küszöbértéket kell használnunk az energiaspektrumon. Ha mindezeket elvégezzük, akkor megkaphatjuk a 9. ábrán szereplő adatokat. Az ábrán nem csak a szimulált adatok szerepelnek, hanem az ezekre illesztett $h(\theta)$ korrigált szögkorrelációs görbe is.

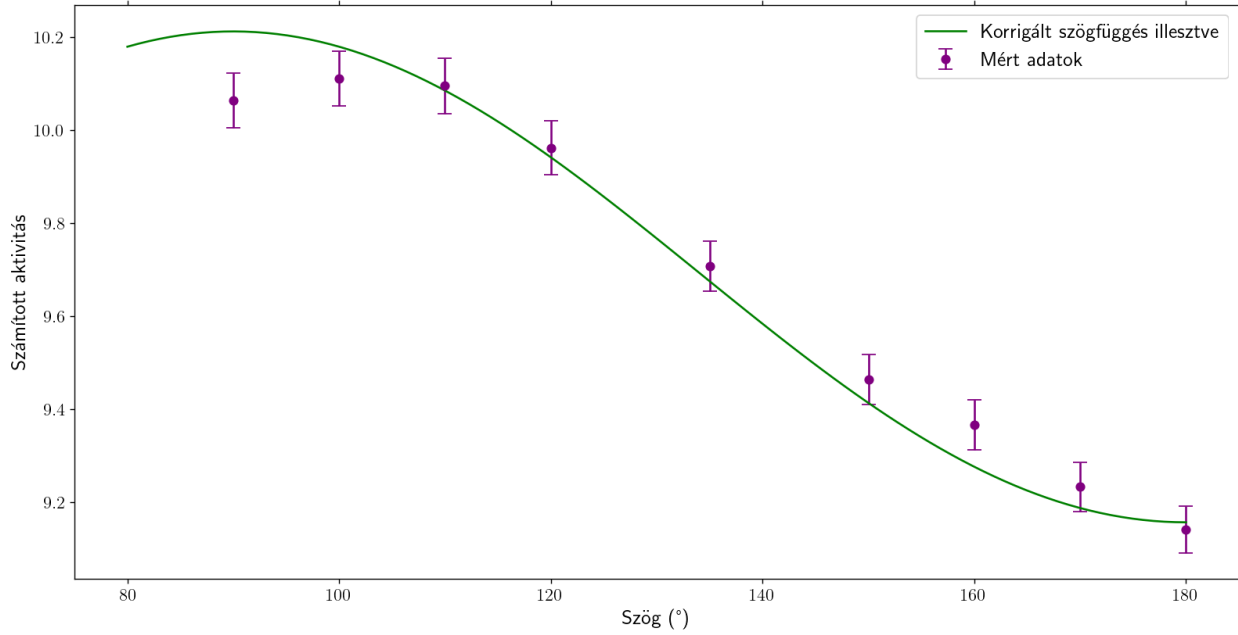


9. ábra. A GEANT4 szimulációból kapott adatok és a rájuk illesztett korrigált elméleti $h(\theta)$ görbe, minta-detektor távolság 3.5 cm.

A kapott illesztési paraméter:

$$C_{\text{GEANT4}} = (5.2860 \pm 0.0065) \cdot 10^8$$

Végezzük el ugyanezt az illesztést a mért adatainknál is. Az első mérési sorozat adataiból származó grafikonra illesztett $h(\theta)$ görbét a 10. ábra tartalmazza.



10. ábra. Mérési adatokra illesztett $h(\theta)$ görbe, minta-detektor távolság 3.5 cm.

Az illesztési paraméterre kapott érték:

$$C_{\text{mérés}} = 10.421 \pm 0.026$$

Mivel az illesztett paraméterünknek egyenesen arányosnak kell lennie az aktivitással, így felírhatjuk a következő összefüggést:

$$\begin{aligned} \frac{N_{\text{GEANT4}}}{C_{\text{GEANT4}}} &= \frac{A_{\text{abszolút}}}{C_{\text{mérés}}} \\ A_{\text{abszolút}} &= \frac{C_{\text{mérés}}}{C_{\text{GEANT4}}} \cdot N_{\text{GEANT4}} \end{aligned} \quad (19)$$

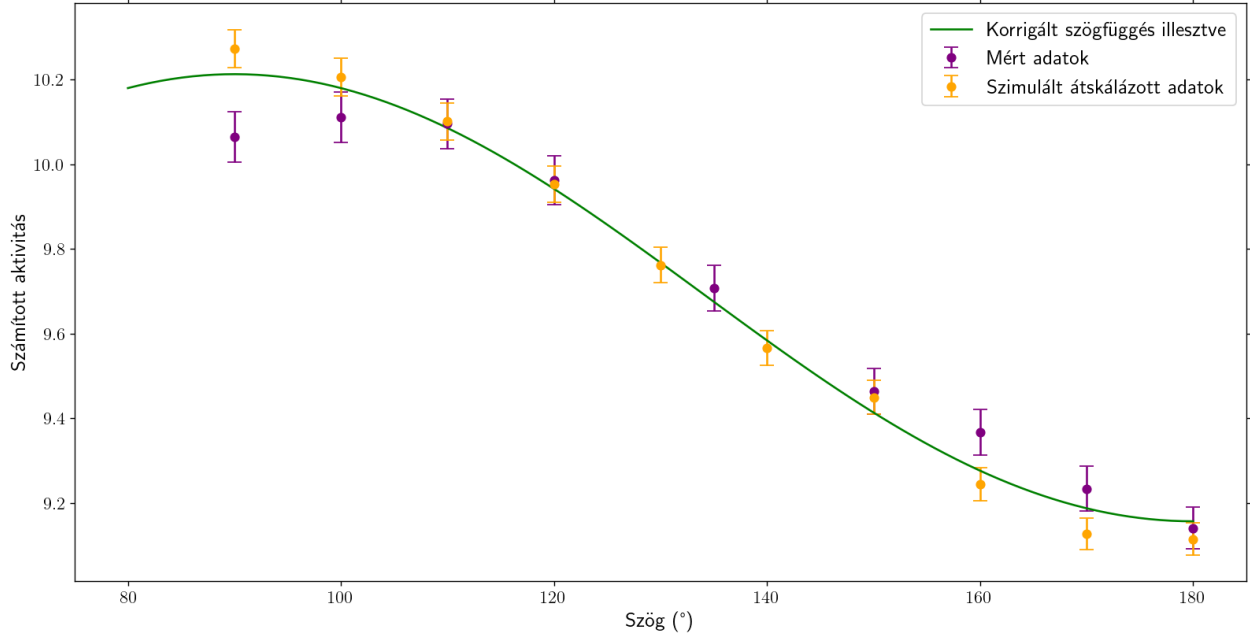
ahol $N_{\text{GEANT4}} = 5 \cdot 10^8$, a szimulált bomlások száma. Az ezzel a módszerrel kapott aktivitás:

$$A_{\text{abszolút}} = (9.857 \pm 0.027) \text{ kBq}$$

Ezen érték hibájához még hozzá kell adnunk a küszöbérték ingadozása és az összegcsúcs korrekció miatti hibákat is. Ekkor az eredményünk:

$$A_{\text{abszolút}} = (9.857 \pm 0.050) \text{ kBq}$$

A szimulált adatokat megfelelően átskálázva ábrázolhatjuk egyszerre a mért adatokkal is. Ez a 11. ábrán látható.



11. ábra. Az átskálázott szimulált adatok, a mért adatok és az illesztett korrigált görbe, minta-detektor távolság 3.5 cm.

Ezen módszer előnye, hogy megtartottuk az illesztésnél az elméletből kapott konstansokat a W_{kor} függvény kiszámításakor. A grafikonok alapján látszik, hogy a kiterjedt geometriára való korrigálás egész jó egyezést mutat a ténylegesen mért adatainkkal.

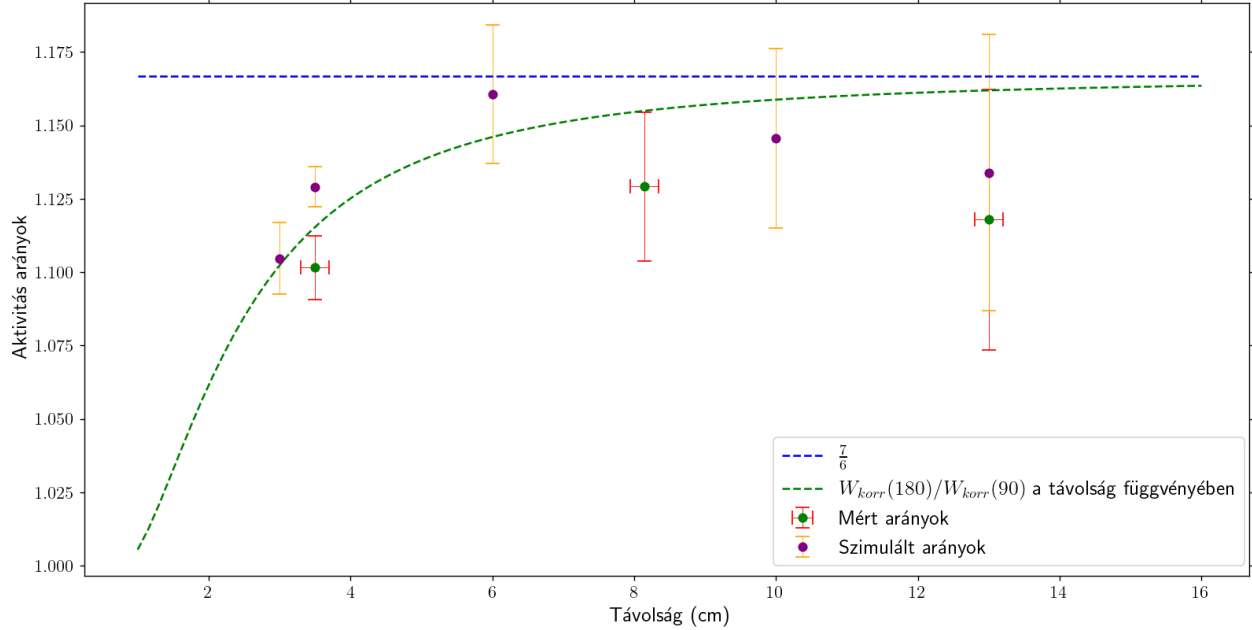
A módszer hátránya viszont, hogy a GEANT4 szimuláció adatait direkt módon fel kellett használnunk az aktivitás kiszámításához, tehát egy új hibafaktort adtunk az eredményünknek. A szimuláció esetleges hibáit, valóságtól való eltéréseit sajnos nem tudjuk pontos hibafaktorról megbecsülni, így veszítettünk a mérés pontosságából.

Az abszolút aktivitás meghatározásához használt két módszerünkből kapott eredmények hibahatáron belül egyeznek egymással. Mivel ezen, második, módszernél egy ismeretlen hibafaktort jelent a szimuláció pontossága, így a dolgozatomban végeredményének az első módszerből kapott abszolút aktivitást tekintem és a második módszert ellenőrzésnek használom.

6.4. A második mérési sorozat kiértékelése

A minta-detektor távolság változtatásával kapott adatainkat a 9. táblázat tartalmazza. Ezeket felhasználva megkaphatjuk a kísérletileg mért $\frac{A(90)}{A(180)}$ arány távolságfüggését (ahol $A(\theta)$ egy bizonyos θ szögben mért látszólagos aktivitást jelöli). Ezen arányokat a 12. ábra tartalmazza. Továbbá a grafikonon láthatóak szimulált adatpontok is, melyek a GEANT4 szimuláció segítségével készültek.

Távolság (cm)	Mért aktivitások aránya
3.5 ± 0.2	1.101 ± 0.009
8.15 ± 0.2	1.129 ± 0.025
13.0 ± 0.2	1.118 ± 0.044



12. ábra. A 90 és 180 fokban mért aktivitások aránya a távolság függvényében, a szimulációból kapott adatpontok és a korrigált Hamilton-görbe alapján várt arány-távolság függés.

A korrigált szögfüggésből várt elméleti görbe és a mérési adatpontok közti eltérések nem nagyobbak a hibák által megengedett eltéréseknél, tehát nincs szignifikáns eltérés az elméleti görbe és a mért adatok közt, ugyanakkor sokszor a korrekció nem tökéletes és a korrigált görbe kicsivel nagyobb különbséget jósol a 90 és 180 fokban mért aktivitások közt, mint amit a valóságban mértünk. A szimulált adatok hibái statisztikus hibákból származnak, így ezen adatokat hosszabb szimuláció futtatásával pontosabbá tehetjük. A szimulált adatok és a mért adatok jó egyezésben állnak egymással.

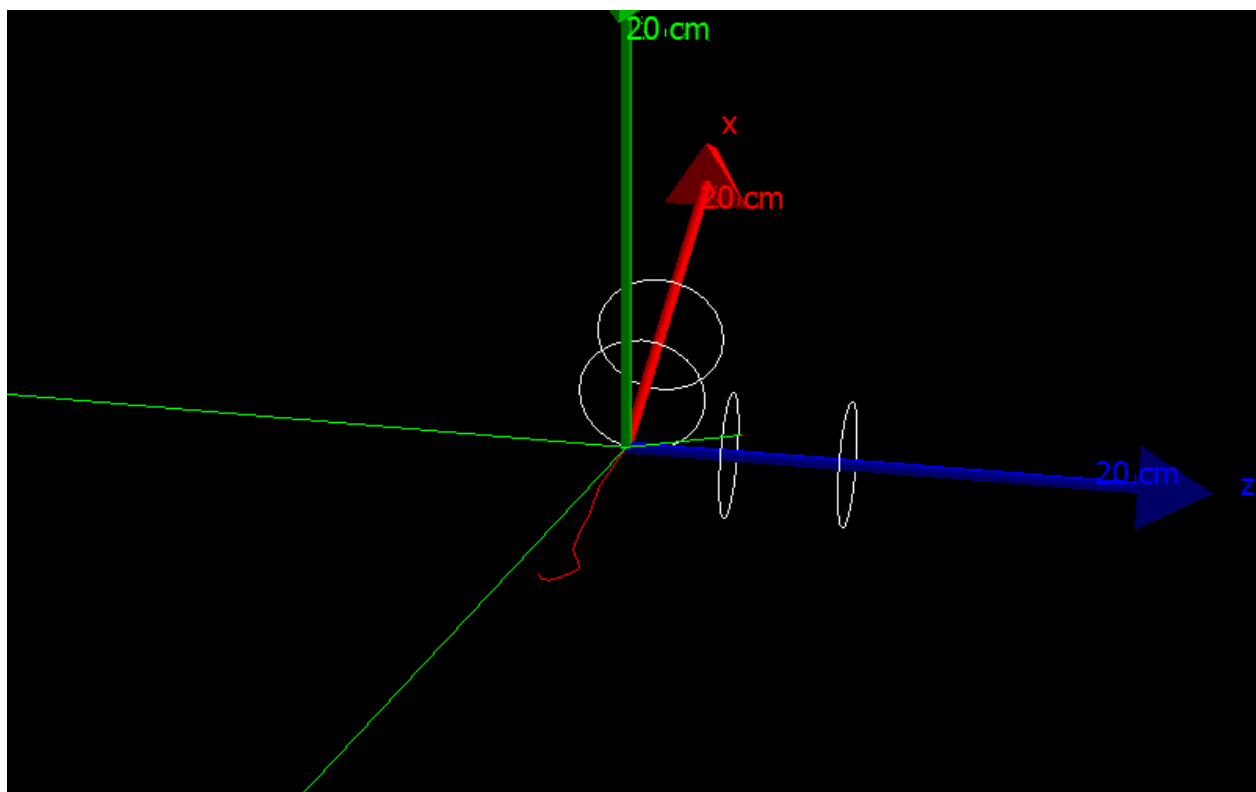
A grafikonon látható, hogy a mért adataink hibán belül eléri az elméleti $7/6$ értéket. Azonban a nagyobb távolságok esetén nem tudtunk olyan pontosan mérni, hogy eldönthető legyen, hogy milyen módon közelíti a vizsgált arány az elméleti értéket. Ez részben annak tudható be, hogy továbbra sem vagyunk elég távol a mintától. Viszont a legjelentősebb akadály ebben a mérési sorozatban a méréseink hibája volt. Nagyobb detektor-minta távolságok esetén jelentősen megnő a háttérsugárzás aránya a mért beütésszámokban, ami a grafikonon látható hibák legnagyobb befolyásoló tényezője. Pontosabb aktivitás arányokat csak még hosszabb mérések és kisebb háttérsugárzás esetében tudnánk elérni. A szimulált adatok szintén a beütésszámok távolsággal való csökkenése következtében rendelkeznek viszonylag nagy hibával. (3 cm esetén 100 millió, 3.5 cm-nél 500 millió, 6 cm-nél 200 millió, 8.5 cm-nél 350 millió, 10 és 13 cm esetén pedig 500 millió bomlást szimuláltam.)

7. Szimuláció

7.1. GEANT4 szimuláció

A mérési elrendezés szimulálásához a GEANT4 programcsomagot használtam. A szimulációban csak a két detektor aktív detektáló térfogatai (NaI kristályok) szerepeltek. Ezeket homogén hengerekként modelleztem, melyek átmérője 4.3 cm, hossza 4.1 cm voltak.

A mintát egy pontszerű atommaggal modelleztem, mely egyszerre egy bomlást tud végezni, így a mintánk kiterjedt geometriáját nem tükrözi a szimulációs modell, sem azt, hogy a valóságban több bomlás is történhet (a detektor időfelbontásához mérten) egyszerre. A szimuláció segítségével tetszőleges mennyiségű bomlást szimulálhatunk és megkaphatjuk az ezek hatására a detektorkristályban hagyott energiamennyiség spektrumát, az egyes detektorok oldalági beütésszámait és a koincidenciák számát is. A szimuláció geometriája a 13. ábrán látható.



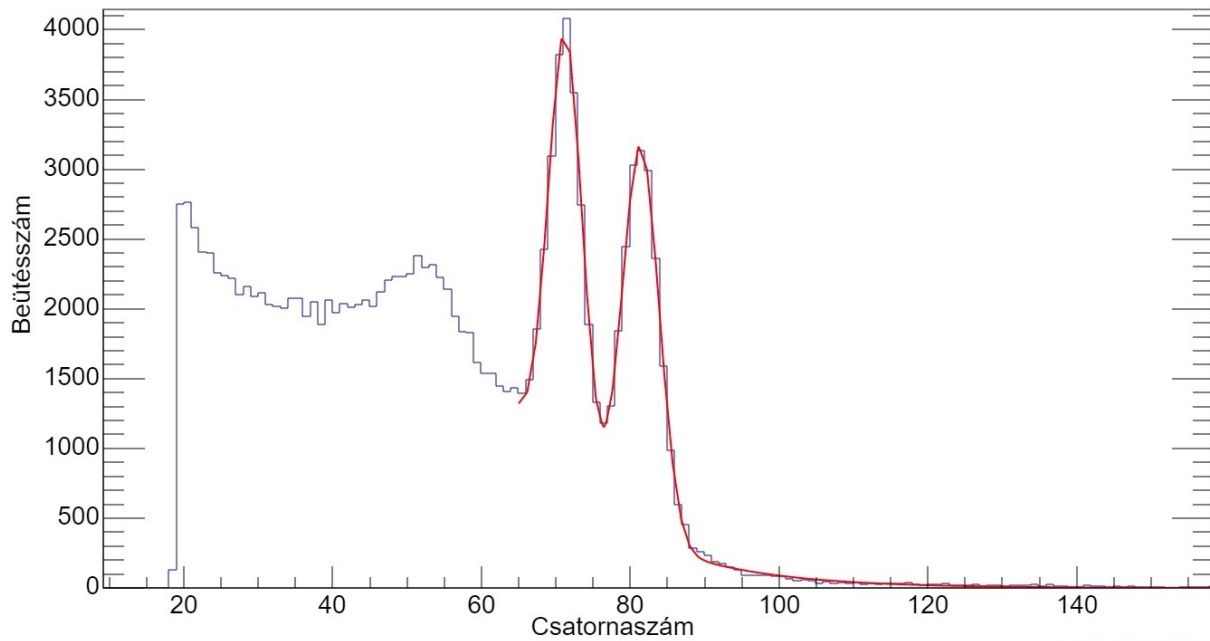
13. ábra. A szimuláció geometriájáról készült kép, melyen egy bomlás látható, amikor az egyik foton teljesen elnyelődik a detektor kristályában. (Zöld szín → lehet foton vagy neutrínó is, Piros szín → elektron)

A szimuláció helyesen visszaadta az energiaspektrum fő csúcsainak helyét, ugyanakkor a csúcsok szórása sokkal kisebb lett a valós mérések folyamán tapasztalt szórásnál (15. ábra). Ezt azonban utólag tudjuk korrigálni, ha minden adatpontot ábrázolás előtt helyettesítünk egy Gauss-eloszlást követő random számmal, ahol az eloszlás átlaga a szimulációs adatpont és a szórását mi adjuk meg. (Ez az eljárás elmossa a Dirac-delta-szerű csúcsokat.) A szimulációs adatok feldolgozásához Pythont és a ROOT programcsomagot használtam.

A többcsatornás analízátor (MCA) segítségével készített energiaspektrumot összehasonlíthatjuk a szimuláció eredményeként kapott energiaspektrummal. Ennek kvantitatív tárgyalásához hasznos, ha egy olyan empirikus görbét illesztünk az MCA-ból kapott hisztogramra, mely egy exponenciálisan lecsengő háttérből és két Gauss-eloszlást követő csúcsból áll:

$$f_{\text{illesztett}}(E) = A \cdot e^{-\lambda E} + B \cdot e^{-\left(\frac{E-\mu_1}{\sqrt{2}\sigma_1}\right)^2} + C \cdot e^{-\left(\frac{E-\mu_2}{\sqrt{2}\sigma_2}\right)^2}$$

A 14. ábrán látható az MCA segítségével mért (minta-detektor távolság: 3.5 cm) hisztogramra való illesztés:



Illesztési paraméter	Illesztett érték és hibája
A	$(1.69 \pm 0.18) \cdot 10^4$
λ	$(7.55 \pm 0.11) \cdot 10^{-2}$
B	3210 ± 36
μ_1	71.28 ± 0.03
σ_1	2.29 ± 0.04
C	2812 ± 29
μ_2	81.42 ± 0.02
σ_2	2.48 ± 0.02

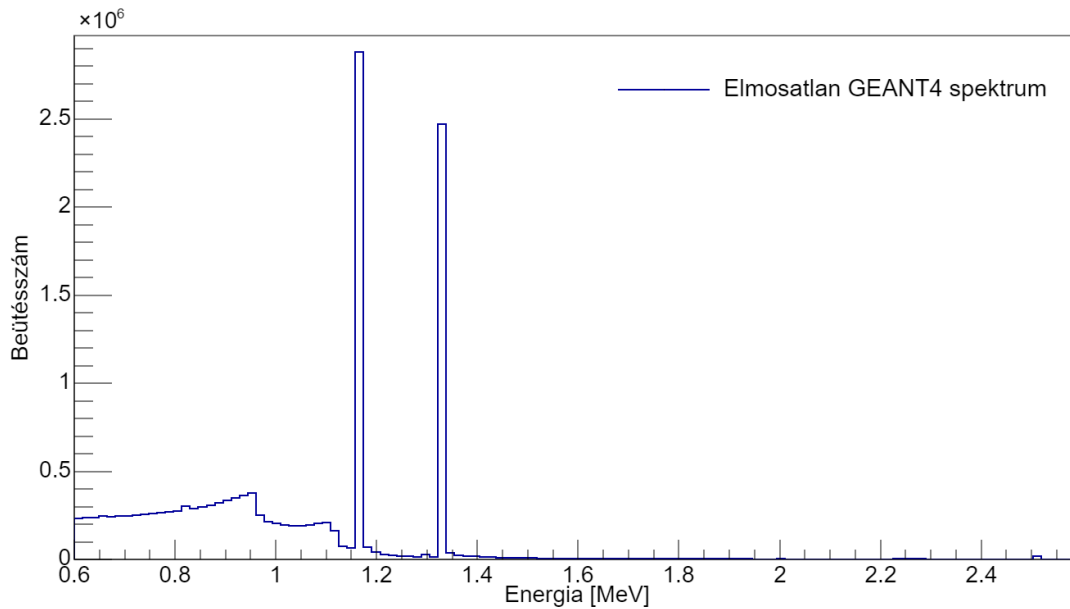
14. ábra. Az ábrán az MCA-val mért beütésszámok olvashatóak a csatornaszám függvényében és a piros függvény az illesztett görbénk. (1 csatorna szélessége: 16,4 keV, a küszöbérték a 63. csatornánál volt ekkor.) A táblázatban olvashatóak az illesztett paraméterek és hibáik.

A két gamma csúcs energiájának ismeretében a csatornaszám átszámítható energiára és így megkaphatjuk, hogy a két gamma csúcs szórása $\approx 38 \pm 1$ keV és $\approx 41 \pm 1$ keV. Az ekkora szórásokhoz tartozó félértékszélesség: 94 ± 5 keV.

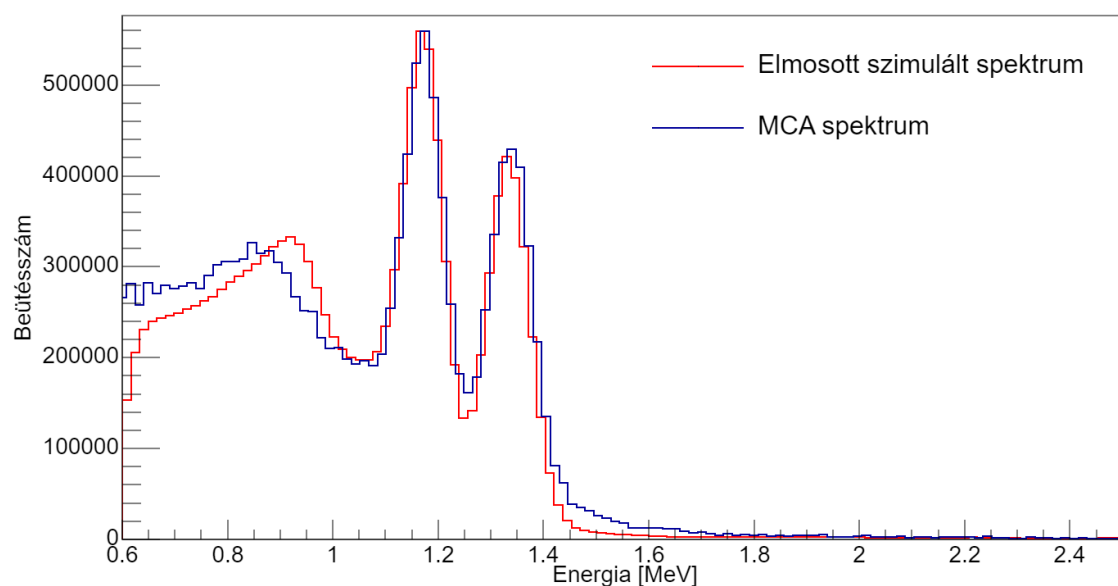
A szcintillátor detektorok energiafelbontása energiafüggő és jól modellezhető a következő függvénnyel (itt most a függvény a csúcsok szórását írja le):

$$\sigma(E) = \sqrt{a \cdot E + b}$$

Felhasználva az illesztett paraméterekből kapott szórásokat megkaphatjuk, hogy a szórás képletében a két paraméter: $a = 1.5 \pm 0.7$ keV és $b = -400 \pm 900$ keV². Ezen paramétereket használtam fel a dolgozatom során a szimulációs adatok elmosására. Az ezzel a szórással elmosott szimulált spektrum és a megfelelően átskalázott MCA spektrum összehasonlítása a 16. ábrán látható. Az MCA spektrum esetében az 1.33 MeV-nél nagyobb beütések főként több (véletlen koincidencia) foton összegeként keletkeztek, míg ilyen a szimulációban nem történhetett, mert egyenként szimuláltuk a bomlásokat, tehát a spektrum ezen vége jobban eltérhet a szimulációban és a valóságban egymástól.

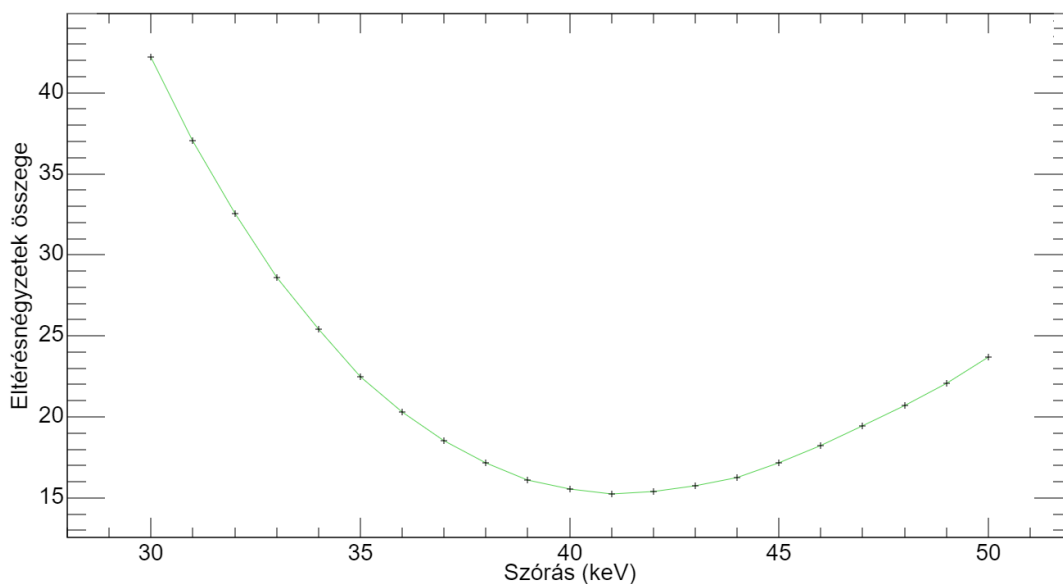


15. ábra. A GEANT4 szimulált spektruma elmosás nélkül



16. ábra. Az MCA átskálázott energiaspektruma és a szimulációból elmosással kapott energiaspektrum.

A szimuláció segítségével más módon is közelíthetjük az egyes csúcsok szórását. Ehhez vehetjük a megfelelően átskálázott MCA spektrum és a szimulált spektrum különbségét egy hisztogramban, majd minden különbséget eloszthatunk az azon pontbeli statisztikus hibával. Az így kapott hisztogram minden pontbeli értékének kiszámolhatjuk a négyzetét és vehetjük ezen értékek átlagát a vizsgált energia tartományon. Ezt ábrázolva a szimulált adatoknak adott szórás függvényében nagyjából látszik, hogy mennyi a valós adatokhoz legközelebb álló szórás érték. Az erről készített grafikon az 17. ábrán látható. Látszik, hogy 41 ± 1 keV szórás alkalmazása esetén kapjuk a legjobb egyezést. Itt minden adatpont ugyanazon szórást kapta, tehát nem vettük figyelembe az energiafelbontás energiafüggését, ezért ez a módszer csak a szórás nagyságrendi értékét hivatott ellenőrizni. Láthatjuk, hogy az eredmény jó egyezésben áll a két energiacsúcsra kapott szórásokkal.



17. ábra. Az MCA és a szimulált adatok közti eltérések négyzetösszege a szimulált adatokhoz használt szórás függvényében.

7.2. A gamma korrelációs görbe kiszámítása

Az elméleti $W(\theta)$ függvény detektorfelülettel való súlyozását egy numerikus Python integrálás segítségével végeztem el. A számolás során gömbszimmetria helyett csak henger-szimmetriát használunk, mivel így sokkal egyszerűbbé válnak a képletek, ugyanakkor kellően jó egyezést kapunk a mért adatokkal is. Emellett ez a számolás elhanyagolja a minta térbeli méreteit is (pontoszerű forrást használ).

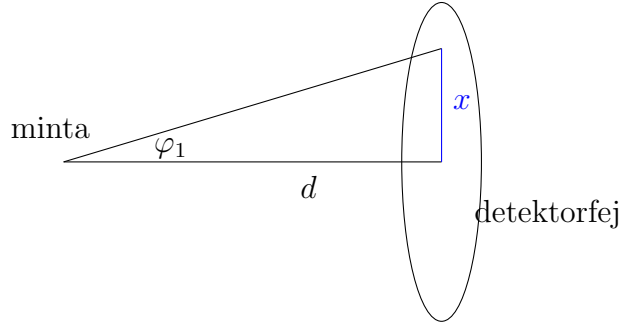
Először meg kell határoznunk a maximális szögeltérést egy adott detektor tengelyétől, aminél még eltalálhatja a gamma-foton a detektort. Ezt a következő képlet adja meg számunkra:

$$\varphi_{max} = \arctan\left(\frac{r}{d}\right)$$

ahol r a detektorunk sugara és d a minta-detektor távolság. Az integrálást a két detektorba érkező fotonok minden elrendezésére el kell végeznünk. Legyen a két detektorfej által bezárt szög φ_0 , továbbá az első, ill. a második gamma foton és a detektorok tengelyei által bezárt szögeket jelölje φ_1 , ill. φ_2 . Ekkor a képletünk:

$$W_{\text{kor}}(\varphi_0) = \frac{\int_{A_1} \int_{A_2} W(\varphi_0 + \varphi_1 - \varphi_2) dA_2 dA_1}{A_1 A_2}$$

ahol A_1 és A_2 a két detektorfej területei. Még meg kell határoznunk mekkora dA_1, dA_2 tartozik a φ_1, φ_2 szögekhez. Ehhez használjuk a következő ábrát: (felülnézet)



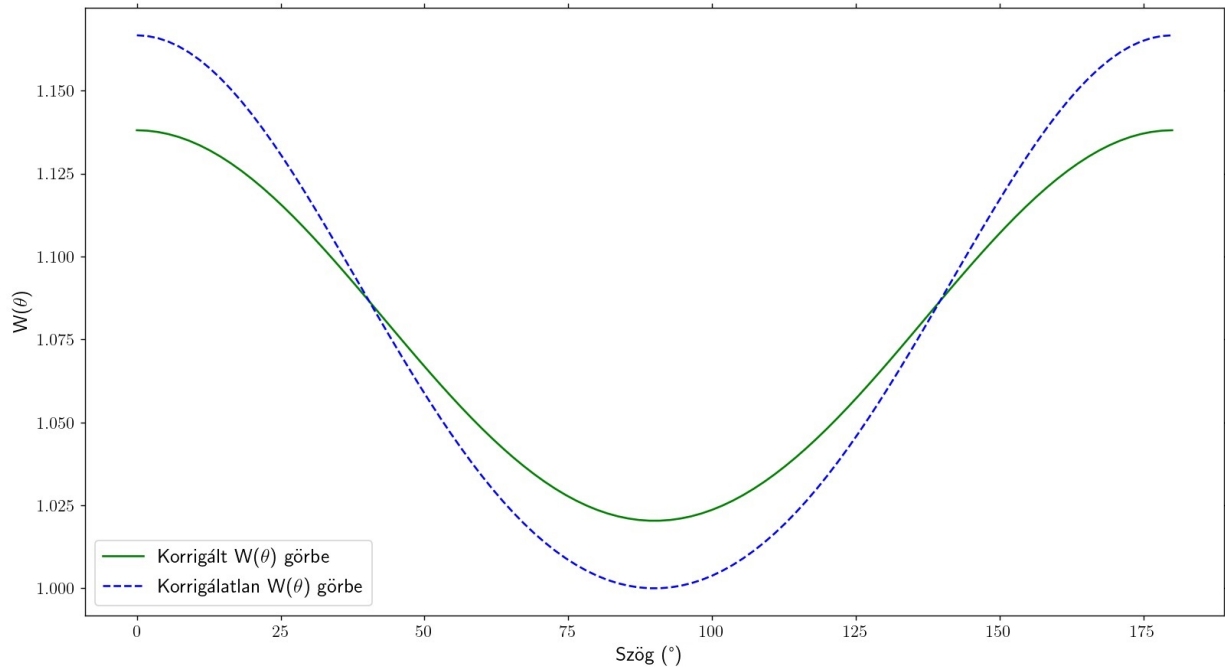
Látszik, hogy $x = d \cdot \tan(\varphi_1)$, ahonnan $dx = \frac{d}{\cos^2(\varphi_1)} d\varphi_1$. Továbbá könnyen kiszámolható, hogy az x helyen a detektorfejen (egy r sugarú körlap) vett terület magassága $h = 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$. Ezáltal a keresett φ_1 -hez tartozó dA_1 területelem:

$$dA_1 = 2 \cdot \sqrt{r^2 - (d \cdot \tan(\varphi_1))^2} \cdot \frac{d}{\cos^2(\varphi_1)} d\varphi_1$$

Így felírva a korrigált szöghorrelációs képletet:

$$W_{\text{kor}}(\varphi_0) = \frac{4d^2 \int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} \int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} W(\varphi_0 + \varphi_1 - \varphi_2) \frac{\sqrt{r^2 - (d \cdot \tan(\varphi_2))^2}}{\cos^2(\varphi_2)} d\varphi_2 \frac{\sqrt{r^2 - (d \cdot \tan(\varphi_1))^2}}{\cos^2(\varphi_1)} d\varphi_1}{A_1 A_2} \quad (20)$$

A képletben szereplő integrálokat numerikusan Python segítségével végeztem el. A korrigálás előtti és utáni szöghorrelációs görbék a következő ábrán láthatóak:



18. ábra. Az ábra $r=2.15$ cm és $d= 3.5$ cm paraméterekkel készült. Kék: Hamilton elméleti görbe, Zöld: kiterjedt detektorfejekre korrigált görbe

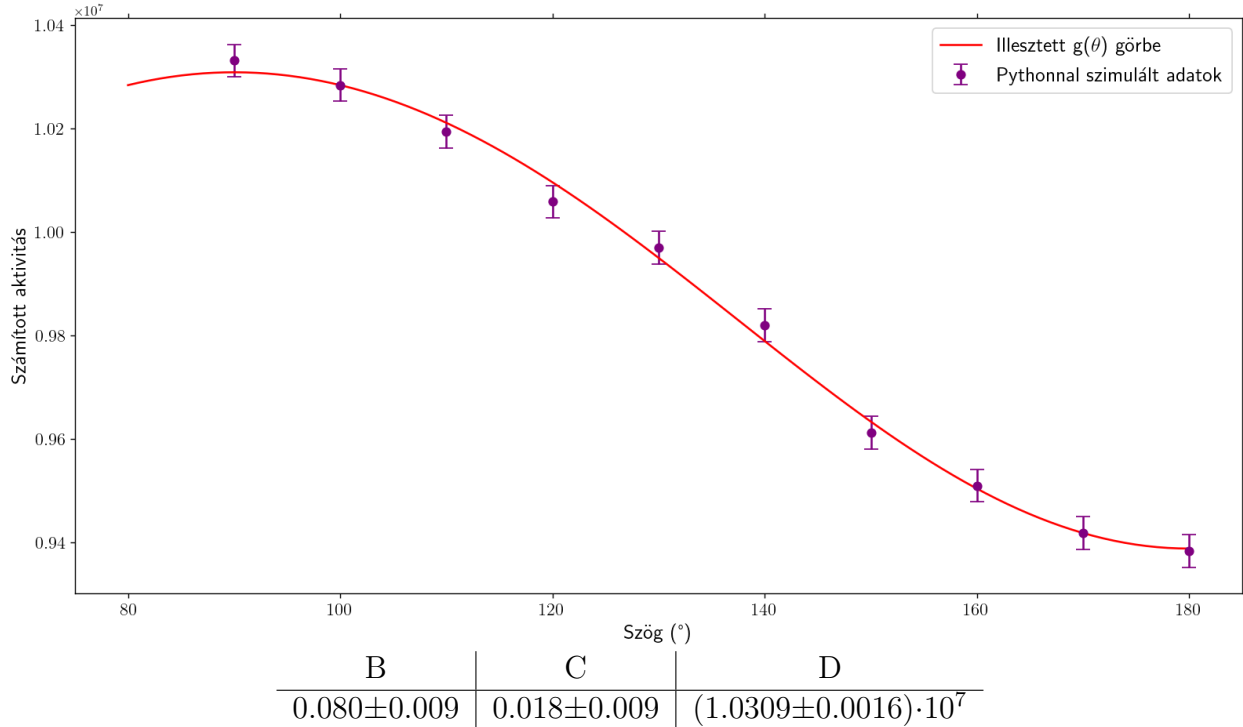
A korrigálás hatására az elméleti görbe csúcsai "ellaposodtak", ahogy azt várnánk is, mivel a csúcsok környezetében csak kisebb elméleti valószínűségeket találunk és ezért az ezekkel vett súlyozott átlag szükségképpen kisebb, mint a csúcs magassága.

7.3. Az abszolút aktivitás elméleti számolásának tesztelése

A 6.2. alfejezetben bemutatott elméleti megfontolások tesztelésére írtam egy kisebb Python szimulációt, melyben csak azt vizsgálom, hogy ha a detektoraink hatásfoka 100% lenne és csak a két fotont kibocsátó ^{60}Co bomlások következnenek be, akkor milyen aktivitásokat mérnénk a detektorok által bezárt szög függvényében.

A szimulációban az első foton irányát random generálok egy egységgömbön, majd ehhez képest a Hamilton által jóslott szögfüggés szerinti eloszlással generálok a második foton irányát. Végül minden szimulált bomlásnál megvizsgálom, hogy eltalálták-e az egyik ill. a másik detektort a fotonok. Ennek a módszernek az elmélet ellenőrzése szempontjából a GE-ANT4 szimulációval szemben az az előnye, hogy itt kisebb a statisztikus ingadozás, továbbá az adatainkat nem mossuk és vágjuk le energiaspektrum szerint, emiatt itt az integráloknak biztosan vissza kell adni a szimulált bomlások számát illesztési hibán belül. Az elméleti Hamilton együtthatókat ekkor sem tudjuk visszakapni a függvény illesztésekor a kiterjedt detektorfejek hatása miatt.

Az így generált adatok és a rájuk illesztett $g(\theta)$ görbe a 19. ábrán láthatóak.



19. ábra. A Python szimulációból generált adatok és a rájuk illesztett $g(\theta)$ görbe. Az illesztésnél: $\chi^2 = 0.59$

Az illesztésből kapott bomlások száma:

$$N_{\text{bomlások}} = (1.0006 \pm 0.0008) \cdot 10^7$$

A szimuláció során pedig 10^7 bomlást generáltunk, tehát az illesztés és az elméleti számolás által kapott bomlások száma hibahatáron belül egyezik a tényleges értékkel. Ezzel igazoltuk, hogy az elméleti indoklás tényleg helyes a 6.2. fejezetben.

8. A minta aktivitásának mérése HPGe detektor segítségével

8.1. Összegcsúcs-módszer ismertetése

A mintánk abszolút aktivitását megmérhetjük egy másik detektor használatával is. Esetünkben ezt a mérést egy HPGe detektor segítségével végeztük el és az úgynevezett összegcsúcs-módszert [6] használtuk fel hozzá. A módszer lényege, hogy a HPGe detektorunk nagy felbontású energia spektrumából a detektor hatásfokának ismerete nélkül is megkaphatjuk a mintánk aktivitását.

Az energiaspektrum két fő csúcsának (^{60}Co esetén 1.17 MeV és 1.33 MeV) beütési rátái a következőképp kaphatóak:

$$A_1 = A_0 \cdot e_1^p (1 - e_2^t \overline{W}(0)) L_p$$

$$A_2 = A_0 \cdot e_2^p (1 - e_1^t \overline{W}(0)) L_p$$

Ahol A_0 a forrás aktivitása, $\overline{W}(0)$ egy effektív szöggkorrelációs faktor, e_1^p , e_2^p a fő csúcsok elnyelődési valószínűségei, e_1^t , e_2^t pedig az egyes fotonokra vett teljes hatásfokok. A zárójelben található faktorokra azért van szükség, mert ha két fotonunk egyszerre érkezik be és az egyik foton teljesen elnyelődik, míg a másikat is detektáljuk valamilyen energiával, akkor nem kapunk a fő csúcsokban beütéseket, csak a spektrum egy másik részén. Az L_p tag pedig egy jelfelhalmozódás miatti korrekciós tag, mivel lehetséges, hogy egyszerre érkező több beütés helyett csak egyet detektálunk.

Az összegcsúcs (1.17 MeV + 1.33 MeV = 2.50 MeV) beütési rátája a következő képlettel adható meg:

$$A_{12} = A_0 \cdot e_1^p e_2^p \overline{W}(0) L_p + G$$

Ahol G azon beütések rátája, amikor nem egy bomlásból érkező két foton okozott beütést az összegcsúcsban (úgymond a véletlen koincidenenciák száma). Szükségünk van még a teljes spektrum beütési rátájára is:

$$A_t = A_0 \cdot (e_1^t + e_2^t - e_1^t e_2^t \overline{W}(0))$$

Ezen képletek átrendezésével megkaphatunk egy új képletet a forrás aktivitására:

$$A_0 = \left(\frac{A_1 A_2}{(A_{12} - G) L_p} + A_t \right) \overline{W}(0) \quad (21)$$

Ezáltal a spektrumon látható fő csúcsok, az összegcsúcs és a teljes spektrum beütési rátáiból kiszámolhatjuk a forrás aktivitását (a korrekciós faktorok ismeretében).

A mérési módszer egyik nehézsége, hogy a teljes spektrum beütésszámait nem tudjuk pontosan 0 keV-től mérni, mivel nagyon kis energiákon megjelenik az elektromos zaj és erősen megnő a detektor holtideje, így nem vihetjük le a használt energia-küszöbértéket 0 keV-ig. A másik problémát a $\overline{W}(0)$ faktor meghatározása jelenti, amely a szögkorrelációs görbe egy megfelelően súlyozott változata, ez függ a detektor geometriától, a detektor anyagának elnyelőképességétől, valamint a minta gamma-fotonjai közti szögkorrelációtól is. Továbbá nagy pontosságú mérések esetén nehézséget okoz a G és L_p korrekciós faktorok meghatározása is.

A G faktor kiszámolásához szükségünk van a detektor τ_R koinkidencia felbontási idejére is, melynek segítségével a G faktor megkapható úgy, hogy vesszük azt az időintervallumot, ameddig a koinkidenciákat várjuk az egyik fő csúcsba érkezett beütések után (pl. $t_1 = \tau_R A_1$) és kiszámoljuk, hogy ez idő alatt mennyi véletlenszerű beütés érkezik csak a másik fő csúcs beütési rátája alapján ($G_1 = t_1 A_2 = \tau_R A_1 A_2$). A véletlenszerű beütések sorrendjének két lehetséges permutációja van, ezért G értéke a következő módon kapható meg:

$$G = 2\tau_R A_1 A_2$$

Az L_p faktor kiszámolásához használhatunk egy τ_p effektív holtidőt, amely az olyan egymás után érkező jelek közti időintervallum, amelyek a beütésszám csökkenését okozhatják. Ezt felhasználva az L_p faktor:

$$L_p = 1 - \tau_p A_t$$

8.2. Mérés menete

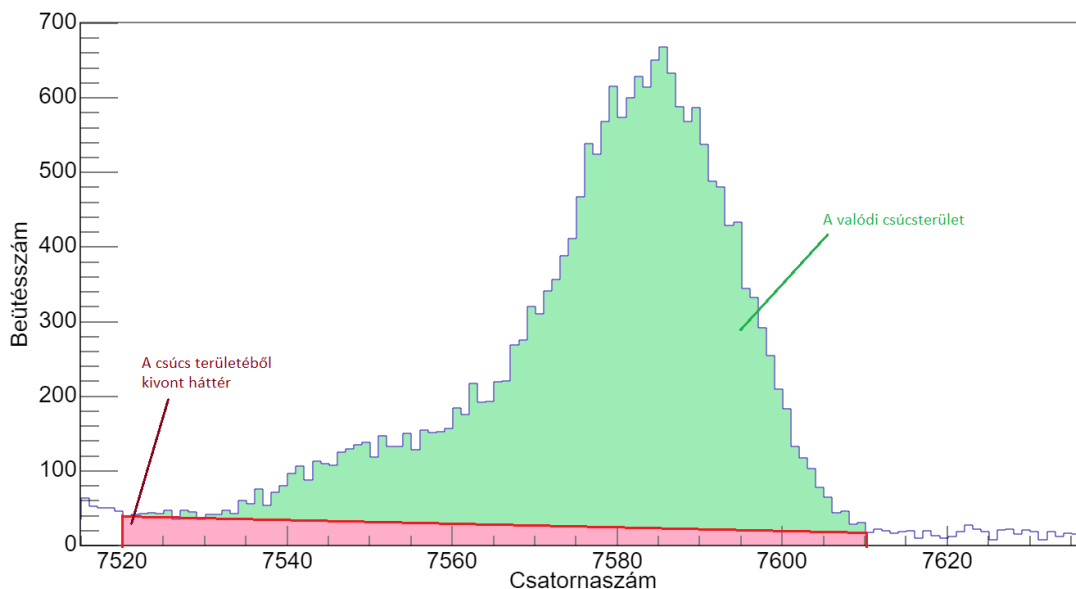
A HPGe detektor segítségével két mérést is végeztünk, különböző detektor-minta távolságok esetén. A mérések során az energiaspektrum felvételéhez egy többcsatornás analizátort használtunk és az energia-küszöbértéket nagyjából 12 keV - re állítottuk be. Így mérve az energiaspektrumon a fő csúcsok területeit, az összegcsúcs területét és az egész spektrum területét a 11. táblázatban található értékeket kaptuk:

Minta-detektor távolság	0.7 cm	5.7 cm
A_1 (cps)	117.75 ± 0.25	19.108 ± 0.007
A_2 (cps)	104.95 ± 0.22	17.483 ± 0.006
A_{12} (cps)	1.888 ± 0.030	0.0410 ± 0.0003
A_t (cps)	2044.57 ± 0.96	364.78 ± 0.03
Időtartam (s)	2218	434837
Dátum	2022.12.09.	2022.12.12.

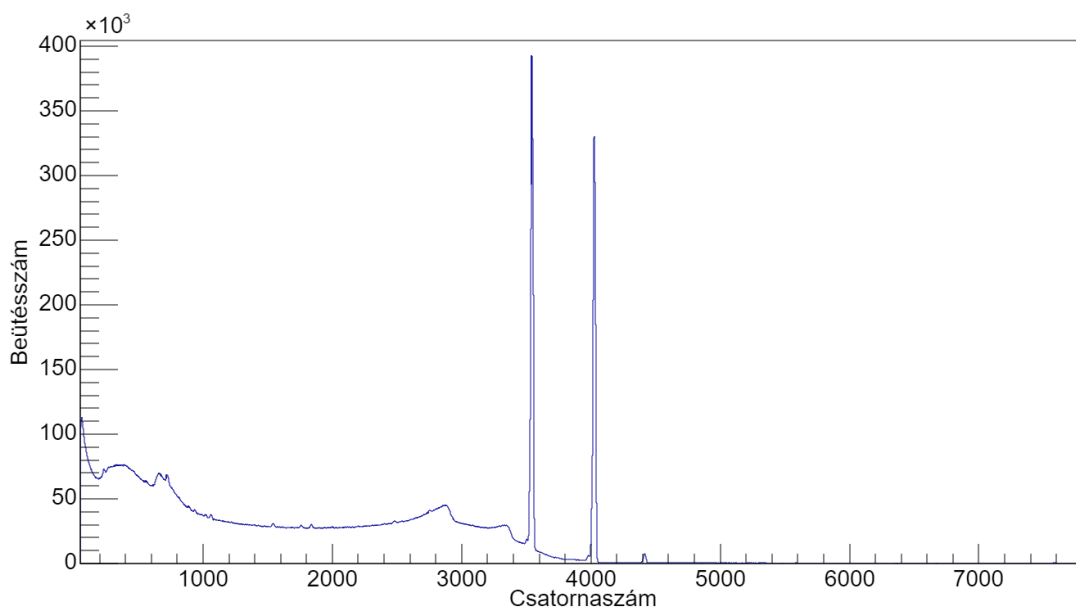
11. táblázat. A HPGe detektorral végzett mérések adatai.

A mérés időtartamánál az MCA által mért valós időt adtuk meg (a $\approx 3\%$ -nyi holtidő már ki lett vonva a mérés időtartamából). A csúcsterületeket úgy kapjuk, hogy a csúcs két oldalán a folyamatos háttér értékeinek átlagát vesszük a csúcs háttérének és ennek értékét levonjuk a spektrumbeli csúcs teljes területéből (lásd 20. ábra). Továbbá a teljes spektrum beütési

rátáiból ki kell vonnunk a háttérsugárzás miatti beütések rátáját is, amely $\approx 55 \pm 1$ cps volt egy minta nélkül végzett háttérmérés alapján. A mért spektrumra egy példa a 21. ábrán látható.



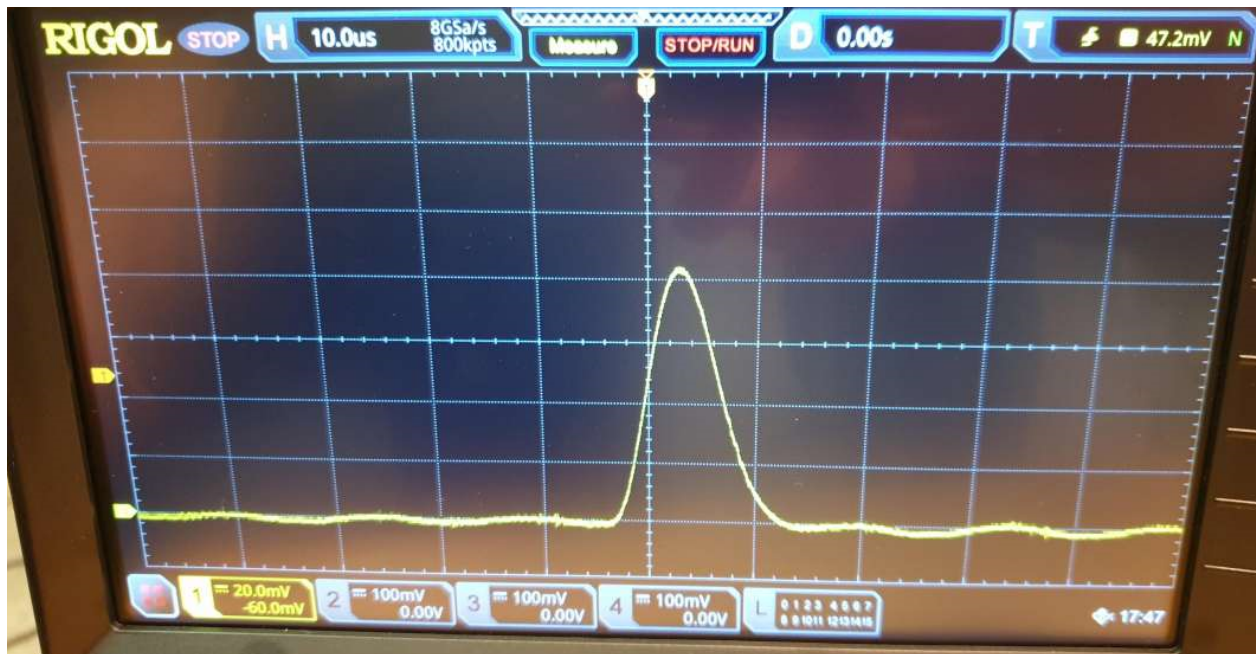
20. ábra. Az összegcsúcs területének meghatározása.



21. ábra. A távolabbi mérésből kapott energiaspektrum.

8.3. Mérés kiértékelése

A spektrum mérése mellett a minta aktivitásának kiszámításához még szükségünk van a $\overline{W}(0)$, L_p és G faktorokra is. A τ_R és τ_p értékek a detektor jelalakjának változtatásával és mélyebb elemzésével kaphatóak, amire sajnos nem volt lehetőségünk méréseink során, azonban értékeiket $\approx 2.5 \pm 2\mu\text{s}$ nagyságúnak becsülhetjük az erősítőtől MCA-ba érkező jel oszcilloszkóppal végzett vizsgálatából (a jel alakja a 22. ábrán látható).



22. ábra. Az erősítőtől MCA-ba érkező jel egy oszcilloszkópon.

A $\overline{W}(0)$ faktor meghatározásához egy a NaI szcintillátor detektor esetén használthoz hasonló GEANT4 szimulációt készítettem. Ebben a HPGe detektorkristálya egy 5.45 cm magas és 2.4 cm sugarú germánium henger volt (a detektorburkolat nem szerepelt a szimulációban). A ^{60}Co bomlásokat egy 0.5 cm magas és 0.5 cm sugarú henger alakú térfogatban random pozícióban generáltam egyenként. A szimulációból kapott energiaspektrumot a mérés esetén alkalmazott módszerrel vizsgálva megkaphatjuk az adott távolságra a $\overline{W}(0)$ faktor értékét, mivel a szimuláció esetén ismerjük a generált bomlások számát, így a (21) képletünkben már csak a $\overline{W}(0)$ faktor lesz az egyetlen ismeretlen (a szimulációban $G = 0$ és $L_p = 1$). Az elmélet szerint ezen faktor 1-től indulva $\frac{10}{9} \approx 1.11$ felé tart a távolság növekedésével. A szimulációk alapján a $\overline{W}(0)$ faktor értéke 0.7 cm-es detektor-minta távolságnál $\approx 1.063 \pm 0.005$ és 5.7 cm-es távolságnál $\approx 1.088 \pm 0.013$.

A mérési adatainkat és a megfelelő korrekciós faktorokat felhasználva már kiszámíthatjuk a mintánk aktivitását és összehasonlíthatjuk a NaI szcintillátor detektorokkal kapott eredménnyel:

Minta-detektor távolság	0.7 cm	5.7 cm
A_0 (kBq)	9.35 ± 0.31	9.60 ± 0.40
A_{NaI} (kBq)	9.381 ± 0.042	9.371 ± 0.042
Dátum	2022.12.09.	2022.12.12.

12. táblázat. A HPGe detektorral végzett mérésekből számított aktivitások és a NaI szcintillátorral végzett mérések eredményeinek összehasonlítása.

A HPGe detektorral végzett mérések legnagyobb bizonytalanságát a τ_R és τ_p értékek pontatlan ismerete okozta, a feltüntetett aktivitásértékek hibáinak $\approx 60\%$ -át ezen faktorok bizonytalansága teszi ki, míg a maradék hibát egyéb tényezők okozzák (statisztikus hiba, $\overline{W}(0)$ bizonytalansága). A két különböző detektorral végzett méréseink jó egyezésben állnak egymással, azonban a HPGe-vel mért értékek bizonytalansága jóval nagyobb a NaI szcintillátorral mért érték hibájánál, ezáltal csak $\approx 4\%$ hibán belül tudtuk ellenőrizni a forrás aktivitásának korábban kapott értékét.

9. Összegzés

Munkám eredményeként sikeresen megállapítottam, a vizsgált ^{60}Co forrás abszolút aktivitását több különböző módszerrel is. Az abszolút aktivitás értékére a következőt kaptam NaI szcintillátorral végzett méréseim alapján: (2022. 07. 28. dátumra)

$$A_{\text{abszolút}} = (9.845 \pm 0.044) \text{ kBq}$$

A bomláskor keletkező gamma-fotonok irány-korrelációjának vizsgálatához kiszámoltam az elméleti szöghorrelációs görbe egy kiterjedt detektorokra használható változatát, ami egész jó egyezést mutatott a mért adatokkal (10. ábra). Ezzel közvetett módon ellenőrizve a Hamilton által kiszámolt α_k együtthatókat a ^{60}Co esetében. Továbbá kísérletet tettem a megfigyelt szöghorreláció távolságfüggésének vizsgálatára is.

A mért adatokat összevettem a GEANT4 szimulációból kapott adatokkal és a szimulációt felhasználtam bizonyos hibafaktorok becslésére is (küszöbérték ingadozása, összegcsúcs korrekció). A szimuláció jó egyezést mutatott mind a mért adatokkal, mind az elméleti várakozásokkal. A NaI szcintillátor detektorunkkal mért aktivitás nagyságrendi értékét ellenőriztem két HPGe detektorral végzett mérés segítségével is. Ezen mérések jó egyezésben álltak egymással.

A kidolgozott módszerek később alkalmazhatóak a koincidencia-módszer szöghorrelációval rendelkező forrásokra való kiterjesztéseként. Továbbá a minta abszolút aktivitásának ismeretében felhasználhatjuk azt más detektorok kalibrálása során is, ami az egyik fő motivációját jelentette dolgozatomnak.

10. Kitekintés

A minta aktivitására kapott eredményem egy lehetséges későbbi felhasználása HPGe detektorok kalibrálása, mivel azon detektorok hatásfokának relatív energiafüggése ismert (pl.

urán mintával végzett mérésekből), csak az abszolút hatásfoka nem. Az abszolút hatásfokát pedig megállapíthatjuk pontforrások esetére, ha az ezen dolgozatban kalibrált ^{60}Co forrás két gamma csúcsának HPGe detektorral mért aktivitását elosztjuk a minta abszolút aktivitásával. Ebből a relatív hatásfok energiafüggését az ismert abszolút hatásfokokra illesztve bármilyen pontforrás és bármilyen foton energia esetén megkaphatjuk a detektor hatásfokát.

Továbbá a dolgozatomban vizsgált mintát használhatjuk más mintákban való elnyelődés vizsgálatára is HPGe detektoroknál úgy, hogy az ismert mintánkkal átvilágítunk kiterjedt forrásokat. Majd fizikai megfontolásokból megkaphatjuk az önellenyelődés energiafüggését is, ezzel még pontosabbá téve az aktivitásmérést kiterjedt mintákra.

A Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-6 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.



Hivatkozások

- [1] ELTE TTK oktatói. *FIZIKAI MÉRÉSEK (összevont laboratóriumi tananyag I.)*, pages 12–29. http://metal.elte.hu/oktatas/klaszfizlab/klaszikus_labor_anyaga_o.pdf, 2013.
- [2] ELTE TTK oktatói. *FIZIKAI MÉRÉSEK (összevont laboratóriumi tananyag II.)*, pages 183–196. <http://atomfizika.elte.hu/kvml/docs/korszeruosszefuzott.pdf>, 2013.
- [3] Donald R. Hamilton. On directional correlation of successive quanta. *Phys. Rev.*, 58:122–131, Jul 1940.
- [4] BIMP Bureau International des Poids et Mesures. <https://www.bipm.org/en/publications/monographies>.
- [5] E. C. Amato et. al. Measurement of the angular correlation between the two gamma rays emitted in the radioactive decays of a ^{60}Co source with two NaI(Tl) scintillators. *European Journal of Physics*, 43(5), 2022.
- [6] I.J. Kim, C.S. Park, and H.D. Choi. Absolute calibration of ^{60}Co by using sum-peak method and an HPGe detector. *Applied Radiation and Isotopes*, 58(2):227–233, 2003.