

Saját eredmények

Sorbarendezési feladatok Bevezettünk egy sorbarendezési feladatot, az (f, g) -FAS feladatot, melyben egy (élsúlyozott) irányított gráf minden v csúcsára adott egy $f(v)$ alsó és egy $g(v)$ felső korlát. Szeretnénk eldönteni, hogy létezik-e olyan csúcssorrend, amely szerint minden v csúcs bal (súlyozott) kifoka $f(v)$ és $g(v)$ között van.

A feladat egy általánosításaként bevezettük az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladatot, melyben egy V alaphalmaz minden v elemére adott egy $h_v : 2^{V-v} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő halmazfüggvény valamint egy $f(v)$ alsó és egy $g(v)$ felső korlát. (Feltesszük, hogy a h_v függvények hatékonyan kiértékelhetők.) Szeretnénk eldönteni, hogy létezik-e az elemeknek egy olyan sorrendje, amely szerint minden v elemre teljesül, hogy az őt megelőző elemek halmazának h_v szerinti értéke $f(v)$ és $g(v)$ között van.

Megmutattuk, hogy mindkét feladat polinom időben megoldható, ha vagy csak alsó, vagy csak felső korlátok adottak — ezzel speciális esetként egy gráf befenyvesre és aciklikus részgráfra bonthatósága is eldönthető, amelyről bebizonyítottuk, hogy a súlyozott esetben már NP-nehéz. Beláttuk, hogy a csak felső korlátos eset kis módosítások esetén már NP-teljessé válik, például ha valamely elemre egyszerre adott alsó és felső korlát is, illetve ha a halmazfüggvények nem monoton növekvők.

Bebizonyítottuk, hogy az (f, g) -FAS feladat NP-teljes az $f \equiv g$ korlátos esetben. A speciális korlátos esetek másik véglete, amikor minél nagyobb különbséget engedünk meg az egyes csúcsokhoz tartozó alsó és felső korlátok között. Az első és az utolsó csúcs kivételével $f(v) = 1$, $g(v) = \delta(v) - 1$ korlátos (f, g) -FAS feladat esetén az s - t számozás feladatot kapjuk vissza, amelyről ismert, hogy polinom időben megoldható. Igazoltuk, hogy lényegében bármilyen szigorúbb korlátok esetén, tehát tetszőleges $a \geq 1$ és $b \geq 2$ paraméterek esetén az első és utolsó csúcs kivételével $f(v) = a$, $g(v) = \delta(v) - b$ korlátos esetben már NP-teljes feladatot kapunk.

A d -távolságú párosítás feladat mintájára megvizsgáltuk a csak felső korlátos feladat azon módosítását, melyben a megelőző (legfeljebb) d csúcsba menő élek számát korlátozzuk, azaz minden $i \in \{1, \dots, |V|\}$ -re az i -edik helyre kerülő csúcs előtti $\min\{d, i - 1\}$ darab csúcsba menő élek számát. Bebizonyítottuk, hogy a feladat polinom időben megoldható, ha $d = |V| - k$ valamely k konstansra. Azonban a feladat NP-teljes, ha a csúcsszáma és a d távolságra teljesül, hogy $|V| = (d + 1)(l + 1) - 2$, ahol $l = \Omega(|V|^c)$ valamely $c > 0$ konstansra. Ebből speciális esetként kapjuk, hogy a feladat nehéz a $d = 1$ és a $d = \sqrt{|V|}$ esetben.

Gráffelbontási feladatok Beláttuk, hogy a csak felső korlátos (f, g) -FAS feladat alkalmazásaként polinom időben eldönthető, hogy egy gráf felbomlik-e egy befenyves és egy aciklikus részgráf uniójára. Azonban megmutattuk, hogy legkisebb élszámú befenyvesre és aciklikus gráfra bontás NP-nehéz feladat. Beláttuk, hogy a befenyvesre és aciklikus részgráfra bonthatóság akkor is megoldható, ha bizonyos csúcsokról megköveteljük, hogy a befenyvesben gyökek legyenek (lehet, hogy más csúcsok is gyökek lesznek). A feladatnak a nehézsége nyitott kérdés, ha pontosan egy gyökeret követelünk meg, azaz befenyőre és aciklikus részgráfra bontást keresünk. Megmutattuk, hogy minimális költségű befenyőre és aciklikus gráfra bonthatóság NP-nehéz feladat. Bebizonyítottuk, hogy egy tetszőleges méretű párosításra és egy aciklikus részgráfra, illetve teljes párosításra és aciklikus részgráfra való felbonthatóság eldöntése NP-teljes feladat.

A dolgozatban megmutattuk, hogy ezek a gráffelbontási feladatok jól illeszkednek a szakirodalomban korábban vizsgált kérdések közé. Továbbá kitértünk az (f, g) -FAS feladat kapcsolata bizonyos rangsorolási feladatokkal.