

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MEGSZORÍTOTT FEEDBACK ARC SET ÉS
SORBARENDEZÉSI FELADATOK

OTDK DOLGOZAT

BORSIK NÓRA ANNA
ALKALMAZOTT MATEMATIKUS MSC

TÉMAVEZETŐ:
MADARASI PÉTER
ELTE MATEMATIKAI INTÉZET
OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK



BUDAPEST, 2023

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Sorbarendezési feladatok	6
2.1. Egy oldali korlátok	6
2.1.1. Csak felső korlát: $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend	6
2.1.2. Csak alsó korlát: $(f, \infty; h)$ -tulajdonságú sorrend	8
2.2. Nehézségi eredmények	10
2.2.1. Egyetlen csúcson pontos előírás	10
2.2.2. Nem monoton növekvő h	12
2.2.3. Az $f \equiv g$ korlátos eset	13
2.2.4. Tág korlátos eset	15
2.2.5. A d -távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladat	17
3. Speciális FAS feladatok	19
3.1. Befenyvesre és aciklikus részgráfra bontás	19
3.2. Párosításra és aciklikus részgráfra bontás	22
4. Nyitott kérdések	26

Kivonat

A dolgozat egyik fő kérdése, hogy mikor lehet egy irányított gráf irányított köreit valamilyen speciális tulajdonságú élhalmazzal lefogni. Bebizonyítjuk, hogy polinom időben eldönthető, hogy egy irányított gráf irányított körei lefoghatóak-e egy befenyvessel, azaz hogy a gráf felbomlik-e egy befenyves és egy aciklikus részgráf uniójára. Belátjuk, hogy egy párosításra és egy aciklikus részgráfra való felbonthatóság eldöntése viszont NP-teljes. A befenyvesek esetének általánosításaként bevezetünk egy sorbarendezési feladatot, az (f, g) -FAS feladatot, melyben egy (élsúlyozott) irányított gráf minden v csúcsára adott egy $f(v)$ alsó és egy $g(v)$ felső korlát. Szeretnénk eldönteni, hogy létezik-e olyan csúcssorrend, amely szerint minden v csúcs bal (súlyozott) kifoka $f(v)$ és $g(v)$ között van. Megmutatjuk, hogy a fenti kérdés polinom időben megoldható, ha minden csúcsra vagy csak alsó, vagy csak felső korlát adott — ezzel speciális esetként egy gráf befenyvesre és aciklikus részgráfra bonthatósága is eldönthető, amely a súlyozott esetben már NP-nehéz. Az algoritmust a feladat egy általánosítására adjuk meg, melyben a gráf éleinek szerepét tetszőleges monoton növekvő halmazfüggvények veszik át. Megmutatjuk, hogy a feladat NP-teljessé válik, ha a halmazfüggvények nem monoton növekvőek, illetve ha valamely csúcsra egyszerre adott alsó és felső korlát is. Az első és az utolsó csúcs kivételével $f(v) = 1, g(v) = \delta(v) - 1$ korlátos (f, g) -FAS feladat esetén az s - t számozás feladatot kapjuk vissza, amelyről ismert, hogy polinom időben megoldható. Igazoljuk, hogy lényegében bármilyen szigorúbb korlátok esetén, tehát tetszőleges $a \geq 1$ és $b \geq 2$ paraméterek esetén az első és utolsó csúcs kivételével $f(v) = a, g(v) = \delta(v) - b$ korlátos esetben már NP-teljes feladatot kapunk. A d -távolságú párosítás feladat mintájára megvizsgáljuk a csak felső korlátos feladat azon módosítását, melyben a megelőző d csúcsba menő élek számát korlátozzuk.

1. Bevezetés

A dolgozat egyik fő kérdése, hogy mikor lehet egy irányított gráf irányított köreit valamilyen speciális tulajdonságú élhalmazzal lefogni. Ilyen kérdés például, hogy egy irányított gráf irányított körei lefoghathatóak-e egy befenyvessel, azaz hogy a gráf felbomlik-e egy befenyves és egy aciklikus részgráf uniójára. (Egy irányított gráfot befenyvesnek nevezünk, ha irányítatlan értelemben erdő és minden gyengén összefüggő komponense egy kijelölt gyökércsúcs felé van irányítva. Az egyetlen komponensű befenyveseket befenyőnek nevezzük.) A fenti gráffelbontási kérdést megfogalmazhatjuk befenyves helyett egy befenyőre, egy irányított körre, vagy egy párosításra is.

A befenyves esetéhez kapcsolódóan bevezetünk egy sorbarendezi feladatot, az (f, g) -FAS feladatot, melyben egy (élsúlyozott) irányított gráf minden v csúcsára adott egy $f(v)$ alsó és egy $g(v)$ felső korlát. Szeretnénk eldönteni, hogy létezik-e olyan csúcssorrend, amely szerint minden v csúcs bal (súlyozott) kifoka az $f(v)$ alsó és a $g(v)$ felső korlát között van. Élsúlyozott gráf esetén a feladatot $(f, g; \sum w)$ -FAS feladatnak nevezzük. A feladat bevezetésének a fő motivációja, hogy speciális esetként megkapjuk egy gráf befenyvesre és aciklikus részgráfra bonthatóságának karakterizációját. Emellett konszenzusos rangsorolási feladatoknál is alkalmazható, amint azt a fejezet végén látni fogjuk.

1.1. Definíció ($(f, g; \sum w)$ -FAS feladat). *Adott egy $D = (V, E)$ irányított hurokélmentes gráf egy $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ élsúlyozással. Adott egy $f : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ alsó korlát és egy $g : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ felső korlát. Azt szeretnénk eldönteni, hogy létezik-e olyan sorrend, mely szerint minden v csúcsra teljesül, hogy*

$$f(v) \leq \delta^w(v) \leq g(v),$$

ahol $\delta^w(v)$ jelöli a sorrend szerinti bal súlyozott kifokát a v csúcsnak. Azaz minden csúcsnak a sorrend szerinti bal súlyozott kifoka legalább akkora, mint a csúcshoz tartozó alsó korlát és legfeljebb akkora, mint a csúcshoz tartozó felső korlát.

Ha egy D élsúlyozott irányított gráfon létezik megoldása az $(f, g; \sum w)$ -FAS feladatnak, akkor a sorrend szerinti visszaélek részgráfja egy olyan feedback arc set, amelyben minden csúcs súlyozott kifoka teljesíti az f és g korlátokat. Ezért a feladatot $(f, g; \sum w)$ -FAS feladatnak nevezzük a feedback arc set feladat után, élsúlyozatlan gráfra pedig (f, g) -FAS feladatnak.

Látni fogjuk, hogy az $(f, g; \sum w)$ -FAS feladat polinom időben megoldható, ha minden csúcsra vagy csak alsó, vagy csak felső korlát adott. Bevezetjük az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladatot, mely jelentősen általánosítja az $(f, g; \sum w)$ -FAS feladatot, és a csak alsó, illetve csak felső korlátos esetek megoldhatóságát erre az általánosabb feladatra fogjuk megmutatni.

1.2. Definíció ($(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend). *Egy V alaphalmaz minden v elemére adott egy $h_v : 2^{V-v} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő halmazfüggvény, azaz tetszőleges $A \subseteq B \subseteq V - v$ esetén $h_v(A) \leq h_v(B)$ teljesül. Feltesszük, hogy ezek a függvények hatékonyan kiértékelhetők. Adott egy $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ alsó korlát és egy $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ felső korlát. Azt mondjuk,*

hogy a V alaphalmaz egy σ sorrendje $(f, g; h)$ -tulajdonságú, ha minden v elemre teljesül, hogy

$$f(v) \leq h_v(\bar{\sigma}(v)) \leq g(v),$$

ahol $\bar{\sigma}(v)$ jelöli a σ sorrendben a v elemet megelőző elemek halmazát. Tehát σ olyan sorrend, hogy minden v elemre, az őt megelőző elemek halmazának h_v szerinti értéke a v elemhez tartozó alsó és felső korlát közé esik.

Azon speciális esetben, amikor az elemekhez nincs alsó korlát, csak a $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ felső korlát adott, a felső korlátot teljesítő σ sorrendeket $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságúnak nevezzük. Hasonlóan, amikor nincs felső korlát, csak az $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ alsó korlát adott, az alsó korlátot teljesítő σ sorrendeket $(f, \infty; h)$ -tulajdonságúnak nevezzük.

Vegyük észre, hogy az $(f, g; \sum w)$ -FAS feladat speciális esete az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladatnak: a h_v halmazfüggvényt úgy definiáljuk, hogy egy adott $V' \subseteq V - v$ csúcshalmazhoz a v csúcshoz a V' csúcsokra megszorított súlyozott kifokát rendeljük. Azaz

$$h_v(V') = \sum_{e \in \delta(v, V')} w(e),$$

ahol $\delta(v, V')$ jelöli a v csúcsból a V' csúcshalmazba menő élek halmazát. Az így definiált h_v függvény az élsúlyozás nemnegativitása miatt monoton növekvő. Ekkor egy σ sorrendre $h_v(\bar{\sigma}(v)) = \bar{\delta}^w(v)$. Ezért a h_v halmazfüggvény szerinti $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrendek éppen azon σ sorrendek, melyekben minden v csúcsra teljesül, hogy

$$f(v) \leq \bar{\delta}^w(v) \leq g(v),$$

azaz a csúcsok σ sorrend szerinti bal súlyozott kifoka legalább akkora, mint a csúcs-hoz tartozó alsó korlát és legfeljebb akkora, mint a csúcshoz tartozó felső korlát. Tehát az $(f, g; \sum w)$ -FAS feladat megoldásai megegyeznek ezen h_v halmazfüggvény szerinti $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrendekkel. Most áttérünk a szakirodalom áttekintésére.

Gráffelbontási és sorbarendezeési feladatok Számos cikkben foglalkoznak gráffelbontási kérdésekkel [2, 3, 4, 5]. Az általunk vizsgált kérdésekhez legszorosabban a [2] cikk kapcsolódik, melyben például belátják, hogy NP-teljes probléma annak eldöntése, hogy egy irányított gráf előáll-e egy irányított kör és egy aciklikus részgráf uniójaként, illetve irányított diszjunkt körfedés és egy aciklikus részgráf uniójaként. Ismert, hogy NP-teljes annak eldöntése, hogy egy gráf tartalmaz-e valamely r gyökére egy éldiszjunkt r -befenyőt és egy r -kifenyőt, azaz felbontható-e egy r -befenyőt tartalmazó és egy r -kifenyőt tartalmazó részgráfra [1]. Azonban a feladat két r -kifenyő esetén megoldható, sőt általánosan k darab r -kifenyő esetén is [8]. Hasonló kérdés feltehető körökre is, az [5] cikkben azt vizsgálják, hogy egy irányított teljes gráf mikor bomlik fel k élű körök uniójára. A dolgozatban olyan felbontásokra szorítkozunk, melyek egyik élhalmaza egy aciklikus részgráf. A legismertebb ilyen jellegű feladat a feedback arc set feladat, melyben egy minimális méretű élhalmazt keresünk, melyet elhagyva egy aciklikus gráfort kapunk. A feladatról ismert, hogy NP-nehéz [10]. A feedback arc set feladattal ekvivalens

egy olyan csúcssorrend keresése, mely minimalizálja a visszaélek számát. A dolgozatban gráffelbontásokon kívül sorbarendezési feladatokkal foglalkozunk. Az általunk bevezetett (f, g) -FAS feladatnak egy speciális esete az s - t számozás feladat, melyben azt szeretnénk eldönteni, hogy egy irányított gráfra létezik-e olyan csúcssorrend, melyben minden nem szélső csúcsból kiindul legalább egy él a sorrend szerint korábbi és legalább egy él a sorrend szerint későbbi csúcsokba. A [7] cikkben megmutatják, hogy az s - t számozás feladat polinom időben megoldható. Azonban az általánosabb, úgynevezett „betweenness” feladat már NP-teljes [14].

Saját eredmények A 2.1. Fejezetben megmutatjuk, hogy az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladat polinom időben megoldható, ha minden elemre vagy csak alsó, vagy csak felső korlát adott. A 2.2. Fejezetben ennek a megoldható esetnek néhány természetes módosítását vizsgáljuk meg, melyekre már nem remélhetünk hatékony algoritmust. Megmutatjuk, hogy a feladat NP-teljessé válik, ha a halmazfüggvények nem monoton növeők, illetve ha valamely elemre egyszerre adott alsó és felső korlát is. Megvizsgáljuk az (f, g) -FAS feladat nehézségét speciális f alsó és g felső korlátok esetén. Belátjuk, hogy az $f \equiv g$ korlátok esetén a feladat NP-teljes, már minden csúcsban konstans fokszámú gráfokon is. Az első és az utolsó csúcs kivételével $f(v) = 1, g(v) = \delta(v) - 1$ korlátos (f, g) -FAS feladat esetén az s - t számozás feladatot kapjuk vissza, amelyről ismert, hogy polinom időben megoldható [7]. Igazoljuk, hogy lényegében bármilyen szigorúbb korlátok esetén, tehát tetszőleges $a \geq 1$ és $b \geq 2$ paraméterek esetén az első és utolsó csúcs kivételével $f(v) = a, g(v) = \delta(v) - b$ korlátos esetben már NP-teljes feladatot kapunk. A d -távolságú párosítás feladat [12, 13] mintájára bevezetjük az d -távolságú (f, g) -FAS feladatot. Belátjuk, hogy a feladat $d = |V| - c$ korlátok esetén megoldható, azonban általános d esetén NP-teljes. A 3. Fejezetben rátérünk a gráffelbontási kérdésekre. Az (f, g) -FAS feladatot felhasználva bebizonyítjuk, hogy polinom időben eldönthető, hogy egy irányított gráf felbomlik-e egy befenyves és egy aciklikus részgráf uniójára. Megmutatjuk, hogy a feladat költséges változata viszont NP-nehéz. Belátjuk, hogy egy párosításra és egy aciklikus részgráfra bonthatóság eldöntése NP-teljes.

Egy motiváló feladat A fejezet hátralévő részében bemutatunk egy természetes rangsorolási feladatot, mely polinom időben megoldható és további motivációt ad az (f, g) -FAS feladat bevezetésére.

Konszenzusos rangsorolási feladatoknál adott versenyzők egy halmaza és bírók egy halmaza. Minden bíró felállít egy szigorú sorrendet a versenyzők között, és a feladatunk egy közös sorrend meghatározása, amely valamilyen szempontból jól összesíti az egyes bírók sorrendjeit. Például a Kemény rangsorolási problémánál olyan közös sorrendet keresünk, amely minimalizálja az egyes bírókhoz képest felcserélt versenyzőpárok számának összegét [11]. A [6] cikkben belátják, hogy ez a feladat NP-nehéz, és bevezetnek egy hasonló feladatot, melyben a felcserélt versenyzőpárok számának összege helyett az egyes bírókkal szemben felcserélt versenyzők számának maximumát szeretnénk minimalizálni. Szemléletesen olyan sorrendet szeretnénk, mely az egyes bírók szerinti sorrendektől vett maximális távolságot minimalizálja. Megmutatják, hogy ez a feladat szintén NP-nehéz.

A következőkben egy hasonló feladatot vizsgálunk, mely a bírók helyett a versenyzők szempontjából „igazságos”, és polinom időben megoldható:

Adott versenyzők egy halmaza és bírók egy halmaza. Minden bíró felállít egy szigorú sorrendet a versenyzők között, és a feladatunk egy közös sorrend meghatározása, amely minimalizálja a versenyzők maximális elégedetlenségét. A v versenyző elégedetlenségének azon u versenyzők számát nevezzük, melyekre a bírók többségénél v jobb helyezésen végzett mint u , de a közös sorrendben v rosszabb helyezésen végzett, mint u .

Definiálhatunk egy büntetési gráfot, melynek csúcshalmaza megegyezik a versenyzők halmazával és az u, v csúcsok között akkor vezet egy uv irányított él, ha a bírók többségénél v jobb helyezésen végzett mint u . Ebben a büntetési gráfban szeretnénk egy olyan csúcssorrendet találni, amely minimalizálja a maximális bal kifok értékét, ahol egy csúcs bal kifokának az adott csúcsból a sorrend szerint őt megelőző csúcsokba kiinduló élek számát nevezzük. Egy v csúcs egy adott sorrend szerinti bal kifokát $\bar{\delta}(v)$ jelöli, egy D' részgráfra megszorított kifokát pedig $\delta_{D'}(v)$.

A feladatot vizsgálhatjuk általánosan irányított gráfokon, azaz szeretnénk egy adott D irányított gráfra egy olyan csúcssorrendet találni, amely minimalizálja a legnagyobb bal kifok értékét. Nem nehéz belátni, hogy az $(f, g; \sum w)$ -FAS feladat ezen feladat eldöntési verziójának az általánosítása.

Megadunk egy polinom idejű algoritmust egy maximális bal kifokot minimalizáló sorrend keresésére:

1. Algoritmus MINMAXBALKIFOK($D = (V, E)$)

```

1:  $D'(V', E') := D(V, E)$ 
2:  $n := |V|$ 
3: Jelölje  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  a keresett csúcssorrendet
4: for  $i = n, \dots, 1$  do
5:    $\sigma_i := \arg \min_{v \in V'} \{\delta_{D'}(v)\}$ 
6:    $D' := D' \setminus \{\sigma_i\}$ 
7: end for
8: output  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ 
```

Az 1. Algoritmus során jobbról balra rögzítjük a csúcsok sorrendjét, D' jelöli a még nem rögzített csúcsok által feszített részgráfot. Az algoritmus 5. sorában vesszük a D' részgráf egy minimális kifokú csúcsát, rögzítjük a sorrend utolsó még szabad helyére és töröljük a gráfból. Ezt ismételjük, amíg minden csúcsot rögzítettünk.

Az algoritmus helyességének a bizonyításához szükségünk lesz a következő állításra.

1.3. Állítás. Egy D irányított gráfban tetszőleges csúcssorrend szerinti maximális bal kifok értékre alsó korlát egy tetszőleges D' feszített részgráfban a minimális kifok.

Bizonyítás. Legyen σ egy tetszőleges csúcssorrend a D irányított gráf csúcsain. Tekintsük a D' részgráf csúcsainak σ szerinti sorrendjében az utolsó csúcsot, jelölje ezt a csúcsot

v . Ennek a v csúcsnak minden D' részgráfon belüli ki-éle balra megy, tehát az összes csúcs tetszőleges sorrendjében a bal kifoka legalább akkora lesz, mint a D' részgráfra megszorított kifoka, azaz $\bar{\delta}(v) \geq \delta_{D'}(v)$. $\square$

Rátérünk az algoritmus helyességének a bizonyítására:

1.4. Állítás. *Az 1. Algoritmus megad egy olyan csúcssorrendet, amely minimalizálja a maximális bal kifok értékét.*

Bizonyítás. Jelölje $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ az algoritmus által megtalált csúcssorrendet, és legyen σ_i az a csúcs, amelynek a bal kifoka maximális ezen sorrend szerint. Legyen D' a $\sigma_1, \dots, \sigma_i$ csúcsok által feszített részgráf — amely egybeesik az algoritmus szerinti D' gráffal σ_i rögzítésekor. Ebben a D' gráfban σ_i egy minimális kifokú csúcs, mert amikor rögzítettük a σ_i csúcs helyét, akkor pontosan a D' részgráf csúcsai közül választhattunk az algoritmus 5. sorában. Tehát a megoldásban a maximális bal kifok értéke megegyezik a D' részgráfból kapott alsó korláttal, így a megoldás optimális az 1.3. Állítás miatt. $\square$

2. Sorbarendezi feladatok

A 2.2. Fejezetben megmutatjuk, hogy az $(f, g; \sum w)$ -FAS és $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladatok általános esetben NP-teljesek. Azonban a 2.1. Fejezetben látni fogjuk, hogy a feladatok polinom időben megoldhatóak a csak alsó és a csak felső korlátos esetekben.

2.1. Egy oldali korlátok

Ebben a fejezetben az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladat — és speciálisan az $(f, g; \sum w)$ -FAS feladat — csak alsó, illetve csak felső korlátos eseteivel foglalkozunk. Elsőként a csak felső korlátos esetet tekintjük, majd áttérünk a csak alsó korlátokra.

2.1.1. Csak felső korlát: $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend

A következőkben adunk egy polinomiális algoritmust a csak felső korlátos $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladatra. Az algoritmust, illetve a kapcsolódó szükséges és elégséges feltételt felhasználjuk majd a 3.1. Fejezetben annak a jellemzéséhez, hogy mikor bomlik fel egy irányított gráf egy befenyves és egy aciklikus részgráf uniójára.

Először mutatunk egy sértő halmazt $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend létezésére, melyre szükségünk lesz a 2.2. Tétel bizonyításához.

2.1. Állítás. *Ha a V alaphalmaznak létezik olyan V' részhalmaza, hogy V' minden v elemére igaz a $h_v(V' - v) > g(v)$ egyenlőtlenség, akkor nem létezik $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend a V alaphalmazon.*

Bizonyítás. Tekintsük a V alaphalmaz elemeinek egy tetszőleges σ sorrendjét. Vegyük a σ sorrend szerinti utolsó elemét a V' részhalmaznak, jelölje ezt az elemet v . Ekkor a v elemre teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$h_v(\tilde{\sigma}(v)) \geq h_v(V' - v) > g(v),$$

ahol az első egyenlőtlenség azért igaz, mert v a σ sorrend szerinti utolsó eleme a V' részhalmaznak, ezért a $V' - v$ halmaz részhalmaza a $\tilde{\sigma}(v)$ halmaznak és h_v monoton növekvő halmazfüggvény. A második egyenlőtlenség a V' részhalmaz definíciójából következik. A fenti egyenlőtlenségből látszik, hogy a σ sorrendben a v elemet megelőző elemek halmazához rendelt h_v érték sérti a g felső korlátot, így a σ sorrend nem lehet $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú. $\square$

Adunk egy algoritmust $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend létezésének eldöntésére.

2. Algoritmus $(-\infty, g; h)$ -TULAJDONSÁG

```

1:  $V' := V$ 
2:  $n := |V|$ 
3: Jelölje  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  a keresett sorrendet
4: for  $i = n, \dots, 1$  do
5:    $V^* := \{v \in V' : h_v(V' - v) \leq g(v)\}$ 
6:   if  $V^* \neq \emptyset$  then
7:     Legyen  $\sigma_i \in V^*$  tetszőleges
8:      $V' := V' - \sigma_i$ 
9:   else
10:    output Nincs megoldás
11:    exit
12:  end if
13: end for
14: output  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ 

```

A 2. Algoritmus jobbról balra rögzíti az elemek sorrendjét, közben V' jelöli a még nem rögzített elemek részhalmazát. Az algoritmus 7. sorában mindig vesszük a V' részhalmaz egy olyan v elemét, amelyre $h_v(V' - v) \leq g(v)$ teljesül, azaz a többi még nem rögzített elem részhalmazához rendelt h_v érték legfeljebb akkora, mint a v elemhez tartozó felső korlát. Ezt az elemet rögzítjük a σ sorrendben az utolsó még szabad helyre és töröljük a V' részhalmazból. Ha valamikor nem létezik ilyen v elem, akkor kiírjuk, hogy nem létezik $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend és az algoritmus leáll.

2.2. Tétel. A 2. Algoritmus polinom sok lépésben, a h függvényt legfeljebb $O(n^2)$ részhalmazon kiértékelve eldönti, hogy a V alaphalmazon létezik-e $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend.

Bizonyítás. Az algoritmus 7. sorában mindig olyan elemet rögzítünk a sorrendben, amely teljesíti a hozzá tartozó felső korlátot. Ha minden lépésben létezett ilyen elem, akkor az algoritmus által meghatározott $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sorrend $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú. Az algoritmus csak akkor akadhat el, ha az 5. sorában definiált V^* halmaz üres, azaz a még nem

rögzített elemek V' halmazában minden v elemre teljesül a $h_v(V' - v) > g(v)$ egyenlőtlenség. Tehát V' egy sértő halmaz a 2.1. Állítás miatt, így tényleg nem létezik a keresett sorrend. $\square$

A 2. Algoritmus helyességéből következik a 2.1. Állítás erősebb változata:

2.3. Tétel. *A V alaphalmazon pontosan akkor létezik $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend, ha nem létezik olyan V' részhalmaz, melynek minden v elemére igaz a $h_v(V' - v) > g(v)$ egyenlőtlenség.*

Mivel az $(f, g; \sum w)$ -FAS feladat az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladat egy speciális esete, ezért ebből következik az alábbi tétel:

2.4. Tétel. *A D élsúlyozott irányított gráfban pontosan akkor létezik $(-\infty, g; \sum w)$ -FAS problémára megengedett megoldás, ha nem létezik olyan $D' = (V', E')$ feszített részgráf, hogy D' minden v csúcsára $\delta^w(v, V') > g(v)$ teljesül, ahol $\delta^w(v, V')$ jelöli a v csúcsnak a D' részgráfra megszorított súlyozott kifokát.*

2.1.2. Csak alsó korlát: $(f, \infty; h)$ -tulajdonságú sorrend

Adunk egy algoritmust a csak alsó korlátos $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladatra, csak felső korlátos esethez hasonlóan. Először mutatunk egy sértő halmazt $(f, \infty; h)$ -tulajdonságú sorrend létezésére, melyre szükségünk lesz a 2.6. Tétel bizonyításához.

2.5. Állítás. *Ha a V alaphalmaznak létezik olyan V' részhalmaza, hogy V' minden v elemére $h_v(V \setminus V') < f(v)$ egyenlőtlenség teljesül, akkor nem létezik $(f, \infty; h)$ -tulajdonságú sorrend a V alaphalmazon.*

Bizonyítás. Tekintsük a V alaphalmaz elemeinek egy tetszőleges σ sorrendjét. Vegyük a V' részhalmaznak a σ sorrend szerinti első elemét, jelölje ezt az elemet v . Ekkor a v elemre teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$h_v(\bar{\sigma}(v)) \leq h_v(V \setminus V') < f(v),$$

ahol az első egyenlőtlenség azért igaz, mert v a σ sorrend szerinti első eleme a V' részhalmaznak, ezért $\bar{\sigma}(v)$ részhalmaza a $V \setminus V'$ halmaznak és h_v monoton növekvő halmazfüggvény. A második egyenlőtlenség a V' részgráf definíciójából következik. Tehát a σ sorrend szerint a v elemet megelőző elemek részhalmazához tartozó h_v érték sérti az f alsó korlátot, így a σ sorrend nem lehet $(f, \infty; h)$ -tulajdonságú. $\square$

Adunk egy algoritmust $(f, \infty; h)$ -tulajdonságú sorrend létezésének eldöntésére.

3. Algoritmus $(f, \infty; h)$ -TULAJDONSÁG

```
1:  $V' := V$ 
2:  $n := |V|$ 
3: Jelölje  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  a keresett sorrendet
4: for  $i = 1, \dots, n$  do
5:    $V^* := \{v \in V' : h_v(V \setminus V') \geq f(v)\}$ 
6:   if  $V^* \neq \emptyset$  then
7:     Legyen  $\sigma_i \in V^*$  tetszőleges
8:      $V' := V' - \sigma_i$ 
9:   else
10:    output Nincs megoldás
11:    exit
12:  end if
13: end for
14: output  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ 
```

A 3. Algoritmus balról jobbra rögzíti az elemek sorrendjét, szemben a 2. Algoritmussal. Közben V' jelöli a még nem rögzített elemek részhalmazát. Az algoritmus 7. sorában mindig vesszük a V' halmaz egy olyan v elemét, amelyre $h_v(V \setminus V') \geq f(v)$ teljesül, azaz a már rögzített elemek részhalmazához tartozó h_v érték legalább akkora, mint az $f(v)$ alsó korlát. Ezt a v elemet rögzítjük a sorrend következő helyére és töröljük a V' részhalmazból. Ha valamikor nem létezik ilyen v elem, akkor kiírjuk, hogy nem létezik $(f, \infty; h)$ -tulajdonságú sorrend és az algoritmus leáll.

2.6. Tétel. A 3. Algoritmus polinom sok lépésben, a h függvényt legfeljebb $O(n^2)$ részhalmazon kiértékelve eldönti, hogy a V alaphalmazon létezik-e $(f, \infty; h)$ -tulajdonságú sorrend.

Bizonyítás. Az algoritmus 7. sorában mindig egy olyan elemet rögzítünk a sorrendben, amely teljesíti a hozzá tartozó alsó korlátot. Ha minden lépésben létezett ilyen elem, akkor a $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sorrend $(f, \infty; h)$ -tulajdonságú. Az algoritmus csak akkor akadhatott el, ha az 5. sorában definiált V^* halmaz üres, azaz a még nem rögzített elemek V' részhalmazában minden v elemre teljesül a $h_v(V \setminus V') < f(v)$ egyenlőtlenség, tehát V' egy sértő halmaz a 2.5. Állítás miatt, így tényleg nem létezik a keresett sorrend. $\square$

A 3. Algoritmus helyességéből következik a 2.5. Állítás erősebb változata:

2.7. Tétel. A V alaphalmazon pontosan akkor létezik $(f, \infty; h)$ -tulajdonságú sorrend, ha nem létezik olyan V' részhalmaz, melynek minden v elemére teljesül a $h_v(V \setminus V') < f(v)$ egyenlőtlenség.

Mivel az $(f, g; \sum w)$ -FAS feladat az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladat egy speciális esete, ezért ebből következik az alábbi tétel:

2.8. Tétel. A D élsúlyozott irányított gráfban pontosan akkor létezik $(f, \infty; \sum w)$ -FAS problémára megengedett megoldás, ha nem létezik olyan $D' = (V', E')$ feszített részgráf,

hogy D' minden v csúcsára $\delta^w(v, V \setminus V') < f(v)$ teljesül, ahol $\delta^w(v, V \setminus V')$ jelöli a v csúcsnak a $V \setminus V'$ csúcshalmazba kimenő éleire megszorított súlyozott kifokát.

A továbbiakban teszünk néhány megfigyelést az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladattal és speciálisan az $(f, g; \sum w)$ -FAS feladattal kapcsolatban.

Megjegyzés. Az $(f, \infty; \sum w)$ -FAS probléma ekvivalens a $(-\infty, g; \sum w)$ -FAS problémával, mert egy σ sorrend pontosan akkor teljesíti a g felső korlátot, ha a σ sorrend fordítottja teljesíti a $(\delta^w - g)$ alsó korlátot. Azonban az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrendeknél általában nem működik ez a visszavezetés, ezért volt szükséges az alsó és a felső korlátos esetet külön tárgyalni a 2.1.1 és 2.1.2 Fejezetekben.

Megjegyzés. A csak felső korlátos $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladat akkor is megoldható, ha az alaphalmazon egy adott részbenrendezést teljesítő megoldást keresünk. Ez a probléma visszavezethető a $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladatra: Ha a részbenrendezés szerint az u elem megelőzi a v elemet, akkor módosítjuk a h_u halmazfüggvény értékét minden olyan halmazon, amely tartalmazza a v elemet. Ezen halmazokon a h_u függvény értékét egy megfelelően nagy M értékre állítjuk, amely nagyobb a $g(u)$ felső korlátnál és a $h_u(V' - v)$ értéknél. Így a h_u függvény továbbra is monoton növvő. Az így konstruált feladatnak pontosan azon sorrendek a megoldásai, melyek megoldásai az eredeti h szerinti $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladatnak és teljesítik a részbenrendezés megelőzési feltételeit.

Megjegyzés. Az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladat polinom időben megoldható ha egyes elemekre csak alsó, a többi elemre csak felső korlát adott. Pontosán akkor létezik ilyen $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend, ha létezik $(f, \infty; h)$ -tulajdonságú és $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend. A feladatot a következő módon tudjuk megoldani: A 2. Algoritmussal meghatározzuk egy megoldást a csak felső korlátos elemekre. Ezen elemeket a kapott sorrendben rögzítjük a sorrend elejére és a 3. Algoritmust ezen állapotból indítva meghatározhatjuk a csak alsó korlátos elemek helyét a sorrend végén. Ha valamikor elakadunk, akkor az algoritmusból kapott sértő halmaz bizonyítja, hogy már csak alsó, vagy csak felső korlátok esetén sem létezik megoldás.

2.2. Nehézségi eredmények

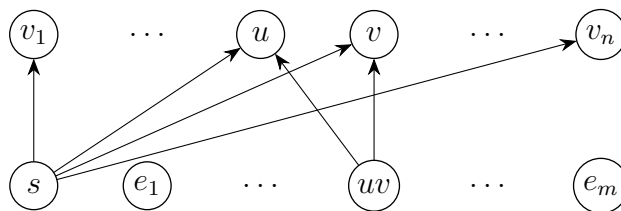
Ebben a fejezetben az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladat és $(f, g; \sum w)$ -FAS feladat speciális eseteinek a nehézségét vizsgáljuk meg. Megmutatjuk, hogy mindkét feladat nehéz, ha egyszerre adott alsó és felső korlát a csúcson. Továbbá vizsgáljuk a feladatok nehézségét különböző speciális korlátok esetén. Ezek azt mutatják, hogy a 2.1.1 és a 2.1.2 Fejezetekben megoldott feladat már a legtermészetesebb, egészen kis mértékű módosítások esetén is nehezzé válik.

2.2.1. Egyetlen csúcson pontos előírás

A 2.2.1. és a 2.2.2. Fejezetekben belátjuk, hogy az (f, g) -FAS probléma és az $(f, g; \sum w)$ -FAS probléma egy-egy speciális esete NP-teljes. A tételek kimondása előtt tekintsük a

következő konstrukciót, amelyet mindkét tétel bizonyításában fel fogunk használni:

A k méretű független csúcshalmaz feladatról ismert, hogy NP-teljes [10], ezt vezetjük majd vissza a problémákra. Legyen $G = (V, E)$ az a gráf, melyben el szeretnénk dönteni, hogy létezik-e k méretű független csúcshalmaz. Definiáljuk hozzá a következő D irányított gráfot: A G gráf minden v csúcsának és minden e élének megfelel a D gráf egy csúcsa, valamint D tartalmaz egy plusz s csúcsot is. A D irányított gráfban minden $e = uv$ élnek megfelelő $e \in V_D$ csúcsból kiindul két irányított él a végpontjainak megfelelő $u \in V_D$ és $v \in V_D$ csúcsokba. Emellett az s csúcsból vezet minden olyan $v \in V_D$ csúcsba egy él, amely az eredeti G gráf csúcsainak felel meg. A D gráfot az 1. Ábra szemlélteti.



1. Ábra. A 2.11. és 2.9. Tételek bizonyításakor konstruált gráf, amellyel visszavezetjük a feladatokat a k méretű független csúcshalmaz feladatra.

A 2.1. Fejezetben megmutattuk, hogy ha minden elemre külön-külön vagy csak alsó vagy csak felső korlát adott, akkor az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladatra létezik polinomiális algoritmus. Természetes kérdés a feladat nehézsége, ha az elemeken egyszerre adott alsó és felső korlát is. Belátjuk, hogy a feladat már akkor is NP-teljes, ha egyetlen elemre adott egyszerre alsó és felső korlát is, a többi elemre csak felső korlát.

2.9. Tétel. Az (f, g) -FAS probléma NP-teljes, ha egy csúcsra pontos előírás, a többi csúcsra csak felső korlát adott.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy az (f, g) -FAS feladat NP-beli. Kiindulunk a konstrukció szerinti D gráfból, amit az 1. Ábra szemléltet. Az s csúcsra $f(s) = g(s) = k$ korlátot rendelünk, a többi csúcsra $g(v) = 1$ felső korlátot rendelünk. Bevezetünk új éleket, amelyek biztosítják az 1. Ábra alsó sorában lévő csúcsok rögzített sorrendjét. Az alsó sorban az s csúcsból az e_1 csúcsba kiindul n darab párhuzamos él, a többi csúcsból kiindul két párhuzamos él az őt követő csúcsba.

Ha a G gráfban létezik k méretű független csúcshalmaz, akkor legyen σ az a sorrend, ahol ezen csúcsok vannak elől, aztán az alsó sor csúcsai a meghatározott sorrendben, majd a maradék csúcsok. Ekkor σ egy megengedett sorrend a D gráfon definiált (f, g) -FAS feladatra, mert a felső sor csúcsainak 0 a kifoka, tehát minden sorrendben teljesítik a hozzájuk tartozó korlátot. Az s csúcs előtt pontosan k darab csúcs van (ezért $\tilde{\delta}(s) = k$), és az éleknek megfelelő csúcsokat legfeljebb egyik végpontjuk előzi meg a σ sorrendben (ezért $\tilde{\delta}(e) \leq 1$). Tehát az alsó sor csúcsai is teljesítik hozzájuk tartozó korlátot.

Fordított irányban, ha létezik egy σ megengedett sorrend az (f, g) -FAS feladatra, akkor ebben a sorrendben az alsó sor csúcsai a megadott sorrendben szerepelnek, a köztük bevezetett párhuzamos élek miatt. Tehát az s csúcs megelőzi az összes élnek megfelelő $e \in V_D$

csúcsot. Az $f(s) = g(s) = k$ korlát miatt pontosan k darab $v \in V_G$ csúcs van a sorrend szerint s előtt. Az éleknek megfelelő $e \in V_D$ csúcsokat a $g(e) = 1$ felső korlát miatt legfeljebb egyik végpontjuk előzheti meg. Ezekből következik, hogy a σ sorrendben az s csúcsot megelőző csúcsok halmaza egy k méretű független csúcshalmaz a G gráfban. $\square$

2.10. Következmény. Az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladat is NP-teljes, ha létezik olyan elem, amelyre egyszerre adott alsó és felső korlát is.

2.2.2. Nem monoton növekvő h

A csak felső korlátos $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladatot úgy definiáltuk, hogy az elemekhez tartozó h_v halmazfüggvények monoton növekvők. Megmutattuk, hogy ezen feladat polinom időben megoldható. Felmerül a kérdés, hogy tetszőleges h_v halmazfüggvény esetén is polinomiális-e a feladat. Az előző fejezetben adott konstrukciót felhasználva megmutatjuk, hogy az $(f, g; \sum w)$ -FAS feladat nehéz, ha lehetnek negatív élsúlyok is. Ebből következik, hogy az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladat nehéz, ha a h_v halmazfüggvények nem monoton növekvők.

2.11. Tétel. A $(-\infty, g; \sum w)$ -FAS probléma NP-teljes, ha megengedünk negatív $w(e)$ élsúlyokat.

Bizonyítás. Látható, hogy a $(-\infty, g; \sum w)$ -FAS feladat NP-beli. Kiindulunk a konstrukció szerinti D gráfból, amelyet az 1. Ábra szemléltet. Az s csúcsból kiinduló élekhez $w(e) = -1$, a többi élhez $w(e) = 1$ élsúlyokat rendelünk. Az s csúcshoz $g(s) = -k$, a többi csúcshoz $g(v) = 1$ felső korlátot rendelünk. Bevezetünk új éleket, amelyek biztosítják, hogy az 1. Ábra alsó sorában lévő csúcsok minden megengedett sorrendben egymáshoz képest a megadott sorrendben szerepeljenek. Az alsó sorban az s csúcsból kiindul egy él az e_1 csúcsba, $w(se_1) = n$ súllyal, a többi csúcsból kiindul egy $w(e) = 2$ súlyú él, az őt követő csúcsba.

Ha a G gráfban létezett k méretű független csúcshalmaz, akkor létezik megengedett sorrend a D gráfon definiált $(-\infty, g; \sum w)$ -FAS feladatra. A σ sorrend elején legyenek a független csúcshalmaz csúcsai tetszőleges sorrendben, utánuk következnek az alsó sor csúcsai a meghatározott sorrendben, majd a többi csúcs. Az így kapott σ sorrend megengedett megoldás a D irányított gráfon definiált $(-\infty, g; \sum w)$ -FAS feladatra, mert a felső sor csúcsainak 0 a kifoka, tehát minden sorrendben teljesítik a felső korlátot. Az s csúcs előtt pontosan k darab csúcs szerepel (ezért $\delta(s) = -k$), az éleknek megfelelő csúcsokat pedig legfeljebb egyik végpontjuk előzi meg a σ sorrend szerint (ezért $\delta(e) = 1$). Tehát az alsó sor csúcsai sem sértik a hozzájuk rendelt korlátokat.

Fordított irányban, ha veszünk egy σ megengedett sorrendet a $(-\infty, g; \sum w)$ -FAS feladatra, akkor a σ sorrendben az alsó sor csúcsai biztosan a megadott sorrendben szerepelnek a köztük bevezetett, nagy súlyú élek miatt. Tehát s megelőzi az összes élek megfelelő $e \in V_D$ csúcsot. A $g(s) = -k$ felső korlát miatt az s csúcsot legalább k darab $v \in V_G$ csúcs megelőzi a sorrendben. Mivel minden élek megfelelő $e \in V_D$ csúcsra $g(e) = 1$ a felső korlát, ezért az él két végpontja közül legfeljebb az egyik lehet előtte. Ezekből

következik, hogy a σ sorrendben az s csúcsot megelőző csúcsok halmaza egy legalább k méretű független csúcshalmaz a G gráfban, tehát a sorrend első k csúcsa éppen egy k méretű független csúcshalmaz. $\square$

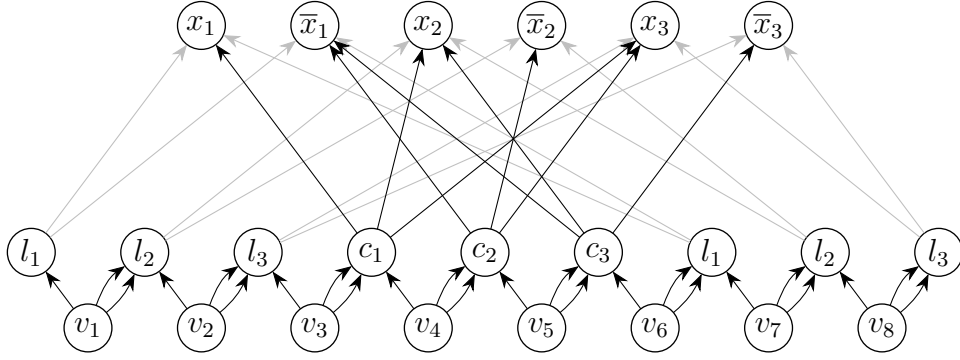
2.12. Következmény. *A $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladat is NP-teljes, ha nem követeljük meg a h_v halmazfüggvény monotonitását.*

2.2.3. Az $f \equiv g$ korlátos eset

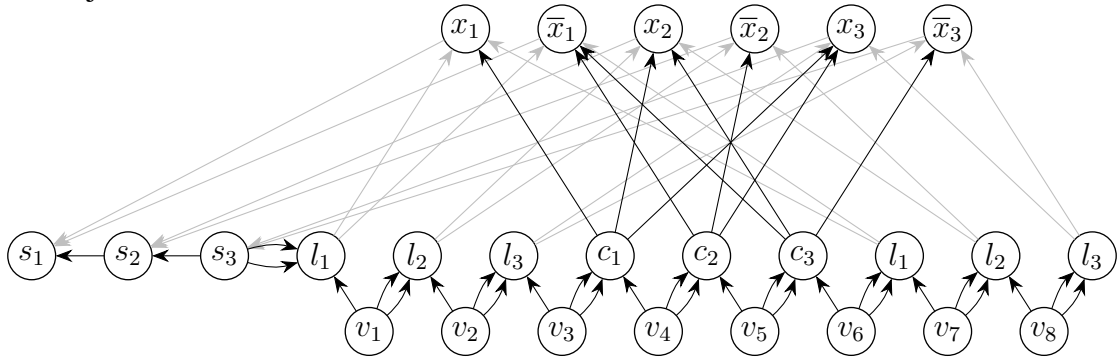
A 2.9. Tételben megmutattuk, hogy az (f, g) -FAS feladat NP-teljes, ha egy csúcs bal súlyozott kifokát előírjuk, a többi csúcsra csak felső korlát adott. Ebben a fejezetben az $f \equiv g$ korlátos feladattal foglalkozunk, melyben minden csúcs bal súlyozott kifokát pontosan előírjuk. A következő tételben kimondjuk, hogy az (f, g) -FAS probléma $f \equiv g$ korlátok esetén NP-teljes, már minden csúcsra konstans fokszámú gráfokon is.

2.13. Tétel. *Az (f, g) -FAS probléma NP-teljes az $f \equiv g$ esetben. A feladat már akkor is nehéz, ha a gráf minden csúcsának a súlyozatlan értelemben vett foka legfeljebb 6, és az $f \equiv g$ korlát egy csúcsban 0, a többiben 1.*

Bizonyítás. Világos, hogy az (f, g) -FAS feladat NP-beli. A 3-XSAT-3 feladatban adott egy konjunktív normálforma, amelyben minden klóz pontosan 3 literált tartalmaz és minden változó pontosan 3 klózban szerepel. Szeretnénk eldönteni, hogy kielégíthető-e az adott konjunktív normálforma úgy, hogy minden klózban pontosan egy literál igaz. Ismert, hogy a 3-XSAT-3 feladat NP-teljes [15]. Ezt a problémát fogjuk visszavezetni a majdnem minden csúcsra azonosan 1 korlátos (f, g) -FAS feladatra, amihez a következők szerint konstruálunk meg egy (f, g) -FAS feladatot. A D irányított gráfban a konjunktív normálforma minden literáljának megfelel egy x_i vagy $\bar{x}_i$ csúcs (a 2. Ábra felső sora). Minden klóznak megfelel egy c_j csúcs, valamint minden változónak megfelel két l_i csúcs. Minden c_j klózból megy egy él a benne szereplő literálok x_i vagy $\bar{x}_i$ csúcsába és minden l_i változónak megfelelő csúcsból kiindul két él az adott változóhoz tartozó x_i és $\bar{x}_i$ literáloknak megfelelő csúcsokba. Tekintsük a 2. Ábra alsó részén az $l_1, \dots, l_n, c_1, \dots, c_n, l_1, \dots, l_n$ csúcsokat. A sorrend szerinti bármely két szomszédos csúcs közé hozzáveszünk a gráfhoz egy v_k csúcsot. Ebből a csúcsból kiindul egy él az előtte lévő csúcsba és két párhuzamos él a mögötte lévő csúcsba. Belátható, hogy a 2. Ábrán szemléltetett D irányított gráfban az alsó két sor csúcsain azonosan 1, a felső sor csúcsain azonosan 0 korlátokat megkövetelve pontosan akkor megoldható az (f, g) -FAS feladat, ha a 3-XSAT-3 feladat megoldható az adott konjunktív normálformára. Ezt az állítást nem bizonyítjuk, de később mutatunk egy hasonló bizonyítást a 3. Ábrán szemléltetett konstrukcióra. Ahhoz, hogy a felső csúcsokra is azonosan 1 korlátot követelhessünk meg, hozzáveszünk az alsó csúcsok elé minden változóhoz egy s_i csúcsot. Az így kibővített gráfot a 3. Ábrán szemléltetjük. Minden x_i és $\bar{x}_i$ literál csúcsából kiindul egy él az adott literálhoz tartozó s_i változó csúcsába. Minden s_i csúcsból megy egy él az őt megelőző s_i csúcsba, valamint az utolsóból hozzáveszünk két párhuzamos élt az első l_1 csúcsba. Legyenek $f \equiv g \equiv 1$ korlátok, kivéve az s_1 csúcsra, amelyre $f(s_1) = g(s_1) = 0$.



2. Ábra. A 2.13. Tétel bizonyításában a visszavezetés során készített gráf szemléltetése a következő konjunktív normálformára $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$. A gráfban a c_j csúcsok a klózoknak, l_i csúcsok a változóknak, az x_i és $\bar{x}_i$ csúcsok a literáloknak felelnek meg. A v_k csúcsok az $l_1, \dots, l_n, c_1, \dots, c_n, l_1, \dots, l_n$ csúcsok sorrendjét biztosítják.



3. Ábra. A 2.13. Tétel bizonyításában a $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$ konjunktív normálformához készített gráf kiegészítve minden változóhoz az s_i csúccsal.

A konjunktív normálformának pontosan akkor létezik 3-XSAT-3 feladatra megoldása, ha a D gráfra definiált (f, g) -FAS feladat megoldható. Vegyük a konjunktív normálforma egy megoldását. A klózokhoz és literálokhöz tartozó csúcsok legyenek az ábra szerinti $l_1, \dots, l_n, c_1, \dots, c_n, l_1, \dots, l_n$ sorrendben és minden v_k címkeű csúcsot tegyük közvetlenül azon csúcs elé, amelybe a v_k csúcsból két párhuzamos él vezet. Az igaz literálokat tegyük közvetlenül az s_i változók csúcsai mögé, a hamis literálokat tegyük a sorrend végére, így megengedett sorrendet kapunk a D gráfon definiált (f, g) -FAS feladatra. Fordított irányban, ha veszünk egy megengedett (f, g) -FAS megoldást, akkor a sorrendben a 2. Ábra alsó csúcsai biztosan az $s_1, \dots, s_n, l_1, \dots, l_n, c_1, \dots, c_n, l_1, \dots, l_n$ sorrendben szerepelnek és minden v_k csúcs a két szomszédja között van, a v_k csúcsokból és az s_i csúcsokból kiinduló élek miatt. A c_j klózoknak megfelelő csúcsok előtti literálokat igaznak választva, a többi literált hamisnak választva a konjunktív normálforma egy megoldását kapjuk, a c_j klózokhoz tartozó $f(c_j) = g(c_j) = 1$ korlátok miatt. A literálokat beállíthatjuk így, mert minden i indexre az x_i és a $\bar{x}_i$ literálok közül pontosan az egyik szerepel a korábbi l_i változó előtt és a másik a későbbi l_i változó mögött, tehát nem lesz olyan változó, amelyre x_i és $\bar{x}_i$ literált egyszerre igaznak vagy egyszerre hamisnak állítjuk. A D gráfban minden x_i vagy $\bar{x}_i$ literálhoz tartozó csúcs és minden l_i változóhoz tartozó csúcs

foka legfeljebb 5, minden c_j csúcs foka legfeljebb 6 és minden s_i csúcs foka legfeljebb 4. Tehát a D irányított gráfban minden csúcs foka legfeljebb 6. $\square$

2.14. Következmény. Az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend létezésének eldöntése NP-teljes az $f \equiv g$ esetben, már akkor is, ha az $f \equiv g$ korlát egy elemre 0, a többi elemre 1.

2.2.4. Tág korlátos eset

Korábban láttuk, hogy az (f, g) -FAS feladat NP-teljes már akkor is, ha minden csúcsra $f \equiv g$ fokszám korlátokat követelünk meg. Ebben a fejezetben a feladat tág korlátos esetével foglalkozunk, amelyben adott egy s első csúcs és egy t utolsó csúcs, melyekre $f(s) = g(s) = 0$ és $f(t) = g(t) = \delta(t)$ és minden $v \neq \{s, t\}$ csúcsra $f(v) = a$ konstans és $g(v) = \delta(v) - b$ korlátok adottak, valamely a és b konstansokra. Szemléletesen olyan csúcssorrendet keresünk, melyben s az első csúcs, t az utolsó és minden köztes csúcsból kiindul balra legalább a darab és jobbra legalább b darab él. A továbbiakban mindig s jelöli a kijelölt első és t a kijelölt utolsó csúcsot.

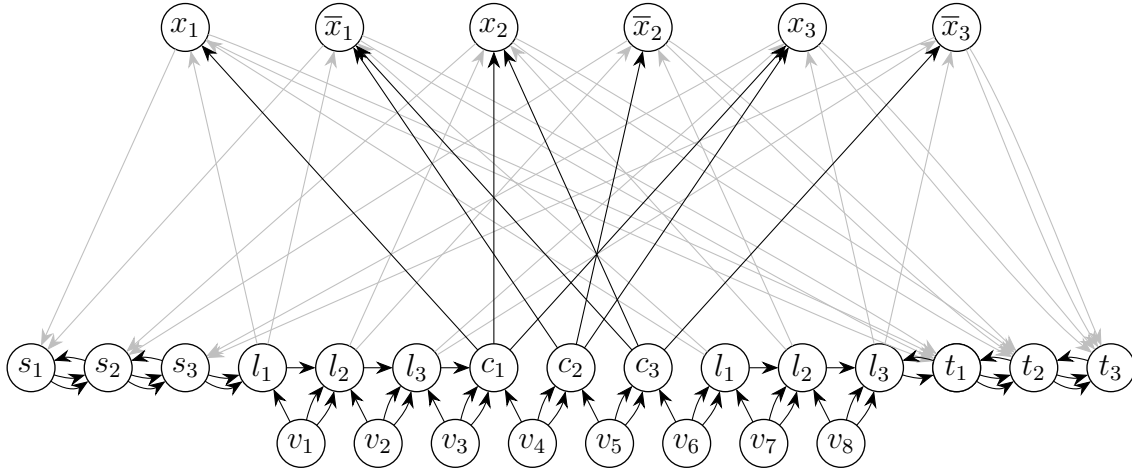
Először tekintsük az $a = b = 1$ esetet, ekkor olyan csúcssorrendet keresünk, melyben az s és a t csúcs kivételével minden csúcsból kiindul legalább egy él balra és legalább egy él jobbra. A szakirodalomban ezt a feladatot irányított gráfokon értelmezett s - t számozás feladatnak nevezik. Az s - t számozás feladat polinom időben megoldható [7].

Természetes kérdés a feladat nehézsége más a és b konstansok esetén. Megmutatjuk, hogy egy D irányított gráfra NP-teljes annak eldöntése, hogy létezik-e olyan csúcssorrend, melyben minden nem szélső csúcsból kiindul legalább egy él a sorrend szerint korábbi és legalább kettő él a sorrend szerint későbbi csúcsokba.

2.15. Tétel. Az (f, g) -FAS feladat NP-teljes az első és utolsó csúcs kivételével $f = 1$, $g = \delta - 2$ korlátok esetén. A feladat már akkor is nehéz, ha a gráfban minden csúcs kifoka legfeljebb 3 és minden csúcs súlyozatlan értelemben vett fokszáma konstans.

Bizonyítás. Világos, hogy a feladat NP-beli. A 3-XSAT-3 feladatot fogjuk visszavezetni a problémára [15]. A D gráf konstrukciójának az alapja megegyezik a 2.13. Tétel bizonyításánál adott konstrukció alapjával, amelyet a 2. Ábrán szemléltettünk.

Nézzük a korábbi konstrukciótól vett eltéréseket: Hozzáveszünk a gráfhoz minden változóra egy s_i , és egy t_i csúcsot. Azt szeretnénk, hogy egy (f, g) -FAS megoldásban az $l_1, \dots, l_n, c_1, \dots, c_n, l_1, \dots, l_n$ csúcsoknál korábban legyenek az $s_1, \dots, s_n$ csúcsok és később a $t_1, \dots, t_n$ csúcsok a megadott sorrendben, ezért minden s_i csúcsból behúzzunk két párhuzamos élt a sorrend szerint következő csúcsba és s_1 kivételével behúzzunk egy élt a sorrend szerint előtte lévő csúcsba. Hasonlóan minden t_i csúcsból behúzzunk egy élt az őt megelőző csúcsba és t_n kivételével behúzzunk két párhuzamos élt a sorrend szerint következő csúcsba. Továbbá szeretnénk, hogy az s_1 és a t_n csúcsokon kívül minden csúcsnak 3 legyen a kifoka, ezért minden l_i csúcsból vezet egy él a fenti sorrend szerinti következő csúcsba és minden x_i csúcsból vezet egy él az s_i csúcsba és két párhuzamos él a t_i csúcsba. A kapott gráfot a 2.2.4. Ábra szemlélteti.



4. Ábra. A 2.15. Tétel bizonyításában a visszavezetés során készített gráf szemléltetése a következő konjunktív normálformára $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$. A gráfban a c_j csúcsok a klózoknak, l_i csúcsok a változóknak, az x_i és $\bar{x}_i$ csúcsok a literáloknak felelnek meg, valamint minden változóhoz tartozik egy s_i és egy t_i csúcs. A v_k csúcsok az $l_1, \dots, l_n, c_1, \dots, c_n, l_1, \dots, l_n$ csúcsok sorrendjét biztosítják.

A konjunktív normálformának pontosan akkor létezik 3-XSAT-3 feladatra megoldása, ha konstrukció szerinti D gráfra az (f, g) -FAS feladat megoldható, ahol minden $v \notin s_1, t_n$ csúcsra $f(v) = 1$ és $g(v) = \delta - 2$, az s_1 csúcsra $f(s_1) = g(s_1) = 0$, a t_n csúcsra $f(t_n) = g(t_n) = \delta(t_n)$. Azaz létezik olyan csúcssorrend, amelyben s_1 az első csúcs, t_n az utolsó és a többi csúcsra kiindul legalább egy él balra és legalább két él jobbra.

Először tegyük fel, hogy adott a konjunktív normálforma egy megoldása. Ehhez konstruálunk egy sorrendet az (f, g) -FAS feladatra. Legyenek a 2.2.4. Ábra alsó felén lévő csúcsok az ábra szerinti $s_1, \dots, s_n, l_1, \dots, l_n, c_1, \dots, c_n, l_1, \dots, l_n, t_1, \dots, t_n$ sorrendben, és minden v_k csúcs legyen a két szomszédja között. A konjunktív normálforma megoldásában igaz értékű literálok csúcsai legyenek közvetlenül az s_n csúcs után, a hamis értékű literálok csúcsai pedig közvetlenül t_1 csúcs előtt. A kapott sorrend az (f, g) -FAS feladat egy megoldása, mivel az alsó csúcsok sorrendje biztosítja, hogy minden s_i, t_i és v_k csúcsra pontosan egy él menjen a sorrend szerint balra és két él jobbra. A sorrendben minden x_i vagy $\bar{x}_i$ literál csúcsa az s_i és a t_i csúcsok között van, ezért ezen csúcsok is teljesítik a hozzájuk tartozó fokszám korlátokat. Az x_i és $\bar{x}_i$ literálok közül pontosan az egyik igaz, így az l_i csúcsoknak megy egy éle jobbra és egy éle balra. Az l_i csúcsokból kiinduló harmadik él az alsó csúcsok sorrendje miatt jobbra megy. Mivel minden c_j klózban pontosan egy igaz literál van, ezért a c_j csúcsokból is pontosan 1 él megy jobbra és két él balra. Tehát a kapott sorrend egy megoldása a tétel szerinti (f, g) -FAS feladatnak.

A fordított irányhoz tekintsük az (f, g) -FAS feladat egy megoldását. Ebben a sorrendben a klózokhoz és változókhöz tartozó csúcsok csak $l_1, \dots, l_n, c_1, \dots, c_n, l_1, \dots, l_n$ szerepelhetnek a v_k csúcsok miatt, és minden v_k csúcs a két szomszédja között van a sorrendben. Az $s_1, \dots, s_n$ csúcsok az első l_1 csúcs előtt vannak a sorrendben és a $t_1, \dots, t_n$ csúcsok a második l_n csúcs mögött vannak a sorrendben, az s_i és t_i csúcsokból kiinduló párhuzamos élek miatt. Minden l_i csúcsból már biztosan vezet egy él a sorrend szerint jobbra,

ezért az $l_i x_i$ és $l_i \bar{x}_i$ élek közül pontosan az egyik lesz jobbra és az egyik balra él. Ezért az x_i és $\bar{x}_i$ közül az egyik az első l_i csúcs előtt a másik a második l_i csúcs után lehet csak a sorrendben. Az alsó csúcsok sorrendje miatt ebből következik, hogy minden változóra az x_i és $\bar{x}_i$ csúcsok közül pontosan az egyik lesz a $c_1, \dots, c_n$ csúcsok előtt és a másik mögöttük. Mivel minden c_j klózból a benne szereplő literálokba vezet él, ezért minden c_j klózt pontosan az egyik benne szereplő literál előzheti meg a sorrendben. Tehát ha a $c_1, \dots, c_n$ csúcsok előtti x_i vagy $\bar{x}_i$ literálokat igazra állítjuk, a többi pedig hamisra, akkor a konjunktív normálforma egy megoldását kapjuk.

A D gráfban minden csúcs kifoka legfeljebb 3 és minden csúcs súlyozatlan értelemben vett kifoka konstans. $\square$

Láttuk, hogy NP-teljes annak eldöntése, hogy egy D irányított gráfra létezik-e olyan csúcssorrend, melyben minden köztes csúcsból kiindul legalább $a = 1$ él balra és legalább $b = 2$ él jobbra. Megmutatjuk, hogy ebből következik a feladat nehézsége tetszőleges $a \geq 1$ és $b \geq 2$ konstansok esetén is.

2.16. Következmény. Minden $a \geq 1$ és $b \geq 2$ konstansra NP-teljes az (f, g) -FAS feladat az első és utolsó csúcs kivételével $f(v) = a$, $g(v) = \delta(v) - b$ korlátok esetén.

Bizonyítás. Visszavezethetjük rá a minden $v \notin \{s, t\}$ csúcsra $f(v) = 1$, $g(v) = \delta - 2$ korlátos esetet, melyről a 2.15. Tételben láttuk, hogy NP-nehéz. Legyen D' egy tetszőleges irányított gráf, ehhez konstruálunk egy D irányított gráfot úgy, hogy minden $v \notin \{s, t\}$ csúcsból behúzzunk s -be $a - 1$ és t -be $b - 2$ élt. Ekkor D' -re pontosan akkor létezik $f(v) = 1$, $g(v) = \delta(v) - 2$ korlátokat teljesítő sorrend, ha D -re létezik $f(v) = a$, $g(v) = \delta(v) - b$ korlátokat teljesítő sorrend. $\square$

2.2.5. A d -távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladat

Módosíthatjuk a csak felső korlátos $(-\infty, g)$ -FAS feladatot úgy, hogy az egyes csúcsokhoz tartozó g felső korlát az összes csúcs helyett csak a megelőző (legfeljebb) d csúcsra vonatkozzon, azaz minden $i \in \{1, \dots, |V|\}$ -re az i -edik helyre kerülő csúcs előtti $\min\{d, i - 1\}$ darab csúcsra. A módosított feladatot a d -távolságú párosítás [12, 13] mintájára d -távolságú (f, g) -FAS feladatnak nevezzük. Speciálisan $d = |V|$ esetén visszakapjuk az eredeti feladatot, melynek a csak felső korlátos esetéről láttuk, hogy polinom időben megoldható. Természetes kérdés a d -távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladat nehézsége különböző d paraméterek esetén.

2.17. Tétel. A $D = (V, E)$ irányított gráfon a d -távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladat polinom időben megoldható, ha $d = |V| - c$ valamely c konstansra.

Bizonyítás. Rögzítsük le a sorrend első c és utolsó c csúcsát minden lehetséges módon. Minden ilyen módon lerögzített csúcsra meg tudjuk határozni az adott csúcsot megelőző (legfeljebb) $|V| - c$ elemet, így ellenőrizhetjük, hogy a rögzített csúcsok sértik-e a hozzájuk tartozó felső korlátot. Ha nem, akkor a középső $|V| - 2c$ elemre tudjuk, hogy a megelőző (legfeljebb) $|V| - c$ csúcs között szerepel az első c csúcs, így ezekre a csúcsokra csökkentjük a felső korlátot az első c csúcsba vezető élek számával. A módosított

korlátokkal keresünk egy megoldást a középső $|V| - 2c$ elemen értelmezett $(-\infty, g)$ -FAS feladatra. Ha létezik megoldás, akkor a rögzített csúcsok közé a kapott sorrendben beírva a csúcsokat az eredeti feladat egy megoldását kapjuk. Ez a módszer polinomiális, mivel az első és utolsó c csúcsot legfeljebb n^{2c} féle sorrendben rögzíthetjük, tehát ennyiszer fogjuk meghívni 2.1.1. Fejezetben adott algoritmust a középső $|V| - 2c$ csúcsra. $\square$

Felmerül a kérdés, hogy kisebb d paraméter esetén is megoldható marad-e a feladat. Megmutatjuk, hogy tetszőleges d paraméter esetén a feladat már NP-teljes.

2.18. Tétel. *A d -távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladat NP-teljes a $D = (V, E)$ irányított gráfon, ha a csúcsszámra és a $d \geq 1$ távolságra teljesül, hogy $|V| = (d + 1)(l + 1) - 2$, ahol $l = \Omega(|V|^c)$ valamely $c > 0$ konstansra.*

Bizonyítás. Látható, hogy a feladat NP-beli. Először a $d = 1$ eset nehézségét bizonyítjuk. Visszavezetjük rá a Hamilton-út feladatot, melyről ismert, hogy NP-teljes [10]. Az 1-távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladatnál $g \equiv 0$ korlát esetén olyan sorrendet keresünk, amely szerint egyik csúcsból sem indul ki él az eggyel korábbi csúcsba. Legyen G egy irányítatlan gráf $2l$ csúcson, melyre meg szeretnénk oldani a Hamilton-út feladatot. Vegyük a G gráf komplementerét és irányítsuk meg minden élet oda-vissza, a kapott gráfot jelölje D . Megmutatjuk, hogy pontosan akkor létezik a G gráfban Hamilton-út, ha a D gráfon létezik megengedett csúcssorrend az 1-távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladatra. Tegyük fel, hogy a G gráfban létezik egy Hamilton-út. Legyen a csúcsok sorrendje a Hamilton-út szerinti sorrend. Ekkor semelyik két szomszédos csúcs között nem vezet él a D gráfban, tehát a kapott sorrend egy megoldás. Fordított irányban, ha az 1-távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladatra egy adott sorrend megoldás, akkor a sorrend szerint nem mehet él egyik csúcsból sem az eggyel korábbi csúcsba. Tehát a sorrend szerint a szomszédos csúcsok között vezetett él a G gráfban, és ekkor a csúcsok ebben a sorrendben egy Hamilton-utat alkotnak.

A $d \geq 2$ esetre visszavezetjük a $d = 1$ esetet. Legyen a D' gráf egy oda-vissza irányított gráf $2l$ csúcson, melyre meg szeretnénk oldani az 1-távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladatot $g \equiv 0$ korlát esetén. Ehhez konstruáljunk egy D gráfot a következő módon: Vegyünk hozzá a D' gráfhoz $d - 1$ darab $l + 1$ csúcsú oda-vissza irányított teljes gráfot. Jelölje ezen részgráfokat $K_1, \dots, K_{d-1}$. A D' gráf csúcsait eredeti csúcsoknak nevezzük, a K_j részgráfok csúcsait pedig klikk csúcsoknak. Megmutatjuk, hogy $g \equiv 0$ felső korlát esetén a D' gráfra pontosan akkor oldható meg az 1-távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladat, ha a D gráfra megoldható a d -távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladat. Tegyük fel, hogy a D' gráfra létezik egy σ' sorrend, mely szerint egyik csúcsból sem vezet él az eggyel korábbi csúcsba. Tekintsük a D gráf csúcsain a következő σ sorrendet: az eredeti csúcsok szerepeljenek kettesével a σ' szerinti sorrendben és minden ilyen két csúcsú blokk között, valamint a sorrend elején és végén szerepeljen minden K_j részgráfból egy-egy csúcs, a részgráfok indexe szerinti sorrendben. Megmutatjuk, hogy a σ sorrend megoldás a tétel szerinti feladatra. A klikk csúcsok csak az azonos K_j klikkhez tartozó csúcsokkal szomszédosak, melyek egymástól legalább $d + 1$ távolságra vannak a σ sorrendben. A σ sorrendben minden eredeti csúcsra a megelőző (legfeljebb) d csúcs közül $d - 1$ klikk csúcs szerepel és legfeljebb egy eredeti csúcs. Így ha a σ' sorrendben nem indul ki él egyik csúcsból sem a megelőző csúcsba, akkor a σ sorrendben nem vezet él egyik csúcsból sem a megelőző (legfeljebb) d csúcsba.

Fordított irányban, tegyük fel, hogy a σ sorrend egy megoldás a D gráfon értelmezett

feladatra. Megmutatjuk, hogy ekkor a sorrendben felváltva szerepel $d - 1$ darab klikk csúcs és két eredeti csúcs úgy, hogy a sorrend elején és végén is $d - 1$ darab klikk csúcs szerepel. Indirekt tegyük fel, hogy a sorrendben nem ezen minta szerint szerepelnek a csúcsok. Ekkor valamely $i = 1, \dots, l$ -re az i -edik eredeti csúcspár valamelyik tagja helyén egy klikk csúcs szerepel a K_j klikkből. Vegyük észre, hogy ezen csúcs előtt legfeljebb $i(d+1)-1$ csúcs, és mögötte legfeljebb $(l+1-i)(d+1)-1$ csúcs szerepel. Továbbá azonos klikkbe tartozó bármely két csúcsnak legalább $d + 1$ távolságra kell lennie egymástól. Ezekből következik az alábbi becslés a K_j klikk csúcsainak számára:

$$\left\lfloor \frac{i(d+1)-1}{d+1} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{(l+1-i)(d+1)-1}{d+1} \right\rfloor < l + 1.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, mivel minden klikknek $l + 1$ csúcsa van. Tehát a σ sorrendben a csúcsok a fenti minta szerint szerepelnek. Ekkor minden eredeti csúcstra a megelőző (legfeljebb) d csúcs között legfeljebb egy eredeti csúcs és $d - 1$ darab klikk csúcs szerepel. Így a σ sorrendből a klikk csúcsokat elhagyva egy olyan σ' sorrendet kapunk a D' gráf csúcsaira, melyben nem vezet egyik csúcsból sem él az eggyel korábbi csúcsba. $\square$

Megjegyezzük, hogy ennek a bizonyításnak egy egyszerű módosításával egy legnagyobb d -távolságú b -párosítást adó permutáció meghatározásának [12] a nehézsége is igazolható.

3. Speciális FAS feladatok

Ebben a fejezetben speciális tulajdonságú feedback arc set-ekkel foglalkozunk. Megvizsgáljuk például, hogy egy D irányított gráf felbontható-e egy befenyves és egy aciklikus részgráf uniójára vagy egy párosítás és egy aciklikus részgráf uniójára. Hasonló gráf-felbontási kérdésekkel foglalkoznak a [2] cikkben. Például belátják, hogy NP-teljes eldönteni hogy egy gráf felbomlik-e egy kör és egy aciklikus részgráf uniójára, illetve egy irányított diszjunkt körfedés és egy aciklikus részgráf uniójára.

3.1. Befenyvesre és aciklikus részgráfra bontás

Megmutatjuk, hogy egy D irányított gráfon a $(-\infty, g)$ -FAS feladatra $g \equiv 1$ korlát esetén pontosan akkor létezik megoldás, ha a gráf felbomlik egy befenyves és egy aciklikus részgráf uniójára. Tekintsük azt a kissé általánosabb feladatot, amikor a felső korlát $g \equiv c$. A D gráfon a $(-\infty, g)$ -FAS feladatra $g \equiv c$ konstans felső korláttal pontosan akkor létezik megengedett σ csúcssorrend, ha a D irányított gráf felbontható egy minden csúcsban legfeljebb c kifokú és egy aciklikus gráf uniójára. Tetszőleges megengedett sorrend szerinti jobbra élek az aciklikus gráf élei, a balra élek pedig a kifok korlátos részgráf élei. Vegyük észre, hogy fordítva ez nem teljesül, azaz nem létezik minden felbontáshoz egy megengedett sorrend, melyben a felbontás egyik komponense a balra élek részgráfja, másik komponense a jobbra élek részgráfja. Viszont az igaz, hogy minden felbontásban az

aciklikus gráf tetszőleges topologikus sorrendje egy megengedett sorrend (lehet, hogy a sorrend szerint kerülnek plusz élek az aciklikus gráfba).

Az $(-\infty, g)$ -FAS feladatot felhasználva megadjuk annak a karakterizációját, hogy mikor bontható fel egy D irányított gráf egy bizonyos csúcsokat gyökként tartalmazó befenyves és egy aciklikus részgráf uniójára.

3.1. Tétel. *Egy $D = (V, E)$ irányított gráfon polinom időben eldönthető, hogy adott $X \subseteq V$ csúcshalmazra létezik-e olyan $B \subseteq E$ befenyves, amelynek minden $v \in X$ csúcs gyökere, és a D irányított gráf előáll a B befenyves és egy aciklikus gráf uniójaként. Pontos akkor létezik ilyen felbontás, ha nem létezik olyan $D' = (V', E')$ feszített részgráf a D gráfban, amelyben minden $v \in X$ csúcs kifoka legalább 1 és minden $v \in V' \setminus X$ csúcs kifoka legalább 2.*

Bizonyítás (3.1. Tétel). Konstruálunk a feladathoz egy $(-\infty, g)$ -FAS feladatot a D gráfon. A $v \in X$ csúcsokon legyen $g(v) = 0$, a $v \in V \setminus X$ csúcsokon pedig $g(v) = 1$ a felső korlát. Megmutatjuk, hogy erre a $(-\infty, g)$ -FAS feladatra pontosan akkor létezik megoldás, ha létezik olyan B befenyves, amelynek minden $v \in X$ csúcs gyökere és a D gráf előáll a B befenyves és egy aciklikus gráf uniójaként. Ha létezik egy σ megengedett sorrend, akkor legyen az aciklikus gráf a σ sorrend szerinti jobbra éleket tartalmazó gráf, B pedig a σ sorrend szerinti balra éleket tartalmazó gráf. A felső korlátok miatt B tényleg egy befenyves, amelynek minden $v \in X$ csúcs gyökere. Fordított irányban, ha létezik megengedett felbontás, akkor legyen σ a felbontás szerinti aciklikus gráfnak egy tetszőleges topologikus sorrendje. Ekkor σ megengedett sorrend a $(-\infty, g)$ -FAS feladatra, mert a balra élek halmaza a B befenyves éleinek részhalmaza, így minden csúcs teljesíti a hozzá tartozó felső korlátot. A 2.4. Tételt alkalmazva kapjuk pontosan akkor létezik ilyen felbontás, ha nem létezik olyan D' feszített részgráf, amelyben minden $v \in X$ csúcs kifoka legalább 1 és minden $v \in V \setminus X$ csúcs kifoka legalább 2. $\square$

A tételt speciálisan $X = \emptyset$ esetben alkalmazva megkapjuk annak a karakterizációját, hogy mikor bontható fel egy D irányított gráf egy befenyves és egy aciklikus részgráf uniójára.

3.2. Tétel. *Egy $D = (V, E)$ irányított gráf pontosan akkor áll elő egy $B \subseteq E$ befenyves és egy aciklikus gráf uniójaként, ha nem létezik olyan $D' = (V', E')$ feszített részgráf a D gráfban, amelyben minden $v \in V'$ csúcs kifoka legalább 2.*

Megjegyezzük, hogy a 3.1. Tételben a B befenyvesnek lehetnek $v \notin X$ gyökerei is, ezért a tételből nem következik, hogy adott D irányított gráfról eldönthető, hogy előáll-e egy befenyő és egy aciklikus gráf uniójaként.

Érdekes kérdés, hogy egy irányított gráfban egy adott befenyves mikor egészíthető ki olyan befenyvessé, mely minden irányított kört lefog. Erre a feladatra is adunk egy karakterizációt a 3.1. Tételt felhasználva:

3.3. Következmény. *Egy $D = (V, E)$ irányított gráfon polinom időben eldönthető, hogy adott $B \subseteq E$ befenyvesnek létezik-e olyan $B' \subseteq E$ szintén befenyves kiegészítése, hogy D előáll a B' befenyves és egy aciklikus gráf uniójaként. Pontos akkor létezik ilyen kiegészítés, ha nem létezik olyan $D' = (V', E')$ feszített részgráf a D gráfban, amelyben minden $v \in V'$ csúcs kifoka legalább $2 - \delta_B(v, V \setminus V')$.*

Bizonyítás. Töröljük a D gráfból a B befenyves éleit, jelölje az így kapott gráfot D' . Legyen X azon v csúcsok halmaza, melyekből kiindult él a B befenyvesben. Ekkor az eredeti D gráfban a B befenyvesnek pontosan akkor létezik a tétel szerinti B' kiegészítése, ha a D' gráf felbomlik egy aciklikus gráfra és egy olyan befenyvesre, amelyben minden $v \in X$ csúcs gyökér. Erre a feladatra a 3.1. Tételt alkalmazva épp a bizonyítandó állítást kapjuk. $\square$

A 3.2. Tétel szerint polinom időben eldönthető, hogy egy gráf felbomlik-e egy befenyvesre és egy aciklikus részgráfra. Belátjuk, hogy a feladat költséges változata viszont NP-nehéz.

3.4. Tétel. *Irányított gráfban NP-nehéz egy legkisebb befenyvest keresni, melynek komplementere aciklikus.*

Bizonyítás. A tételben szereplő feladatra a minimális méretű lefogó csúcshalmaz feladatot vezetjük vissza, melyről ismert, hogy NP-nehéz [10]. Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, melyben szeretnénk egy minimális méretű lefogó csúcshalmazt keresni. Ehhez konstruáljunk egy $D = (V \cup V', E')$ irányított gráfot a következő módon: Minden $v \in V$ csúcsra tartalmazzon a D gráf egy v és egy v' csúcsot, valamint egy vv' irányított élt. Emellett minden $uv \in E$ élre vegyünk hozzá a D gráfhoz egy $u'v$ és egy uv' élt. Megmutatjuk, hogy a G gráfban pontosan akkor létezik legfeljebb k méretű lefogó csúcshalmaz, ha a D gráfban létezik egy legfeljebb k élű befenyves, amely lefog minden irányított kört. Tegyük fel, hogy a G gráfban adott egy legfeljebb k méretű lefogó csúcshalmaz. A lefogó csúcsokat jelölje $v_1, \dots, v_l$, ahol $l \leq k$. Megmutatjuk, hogy a D gráfban a $v_1v'_1, \dots, v_lv'_l$ élek egy legfeljebb k élű befenyvest alkotnak, amely minden irányított kört lefog. Az élhalmaz egy párosítás, ebből következik hogy befenyves is. Emellett minden élt lefog a V és a V' csúcsosztály között, azonos csúcsosztályon belül pedig nincsenek élek, tehát lefogja az összes irányított kört.

Fordított irányban, adott a D gráfban egy legfeljebb k méretű befenyves, amely lefogja az összes kört. Megmutatjuk, hogy ha tartalmazna egy $u'v$ élt, akkor ezt az élt elhagyhatjuk és bevehetjük helyette az uu' élt (ha még nem tartalmazta a befenyves). Ha minden élre elvégeztük a fent leírt cserét, akkor egy párosítást kapunk a D gráfban, mely nyilván egy befenyves. Tehát elég belátni, hogy a kapott élhalmaz lefogja az összes irányított kört a gráfban. Ennek elégséges feltétele, hogy ha egy kör tartalmazza az $u'v$ élt, akkor tartalmazza az uu' élt is. Ez teljesül, mivel az u' csúcsba belép egy él a körben, amely csak az uu' él lehet, mivel a D gráfban ez az egyetlen belépő él az u' csúcsba. Tehát feltehető, hogy a befenyves csak vv' típusú éleket tartalmaz. Vegyük azon v csúcsok halmazát, melyekre a befenyves tartalmazza a vv' élt. Belátjuk, hogy a kapott csúcsok egy lefogó csúcshalmazt alkotnak a G gráfban. A D' gráf minden $uv \in E$ élre tartalmaz egy $uu'vv'$ kört, ezért a befenyves biztosan tartalmazza a kör valamelyik élet. Ez csak az uu' vagy a vv' él lehet, így a kapott csúcshalmaz tartalmazza vagy az u vagy a v csúcsot, tehát lefogja az uv élt. $\square$

Megjegyzés. A konstrukcióból az is következik, hogy egy $D = (V, E)$ gráfban NP-nehéz olyan minimális méretű párosítást keresni, amely lefogja az összes irányított kört. Az uu' élek halmaza olyan párosítás, amely minden irányított kört lefog a konstrukció szerinti D gráfban. Ennél fogva felmerül az a kérdés, hogy ha a párosítás méretére nem teszünk

megkötést, akkor megoldhatóvá válik-e a feladat. A 3.6 Tételben látni fogjuk, hogy ez a feladat is nehéz.

Az előbbi konstrukciót könnyen módosíthatjuk minimális költségű befenyők esetére.

3.5. Következmény. *Adott egy $D = (V, E)$ irányított gráf, az élein egy 0-1 költségfüggvénnyel. Ekkor NP-nehéz olyan minimális költségű befenyőt keresni, amelynek a komplementere aciklikus.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint egy $D' = (V', E')$ gráfban NP-nehéz olyan legkisebb befenyvest keresni, amely lefogja az összes irányított kört. A D' gráfhoz konstruáljunk egy $D = (V' + s, E)$ gráfot a következő módon: Vegyünk hozzá D' -hez egy s csúcsot, és minden más csúcsból vezessen egy irányított él az s csúcsba. Ezen vs élekre legyen $c(vs) = 0$, a D' -beli uv élekre pedig $c(uv) = 1$. Megmutatjuk, hogy a D' gráfban pontosan akkor létezik legfeljebb k élű befenyves, amely lefogja az összes irányított kört, ha a D gráfban létezik a c költség szerint egy legfeljebb k költségű befenyő, amely lefogja az összes irányított kört. Vegyük észre, hogy a D' gráfban pontosan ugyanazok a körök szerepelnek mint a D gráfban. Egy k élű befenyves a D' gráfban kiegészíthető $|V'| - k$ darab vs él hozzávételével befenyővé a D gráfban. Az így kapott befenyő c szerinti költsége k .

Fordított irányban, ha van egy k költségű befenyő a D gráfban, mely minden irányított kört lefog, akkor ez pontosan $|V'| - k$ darab vs élt tartalmaz. Ezen éleket elhagyva egy k élű befenyvest kapunk a D' gráfban, mely minden irányított kört lefog. $\square$

3.2. Párosításra és aciklikus részgráfra bontás

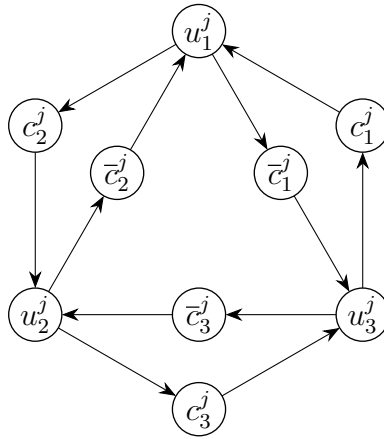
A továbbiakban irányított gráfoknak egy párosításra és egy aciklikus részgráfra bontásával foglalkozunk. Belátjuk, hogy annak eldöntése, hogy egy gráfnak létezik-e ilyen felbontása már páros gráfok esetén is NP-teljes.

3.6. Tétel. *NP-teljes eldönteni, hogy egy irányított páros gráf felbomlik-e egy párosítás és egy aciklikus részgráf uniójára.*

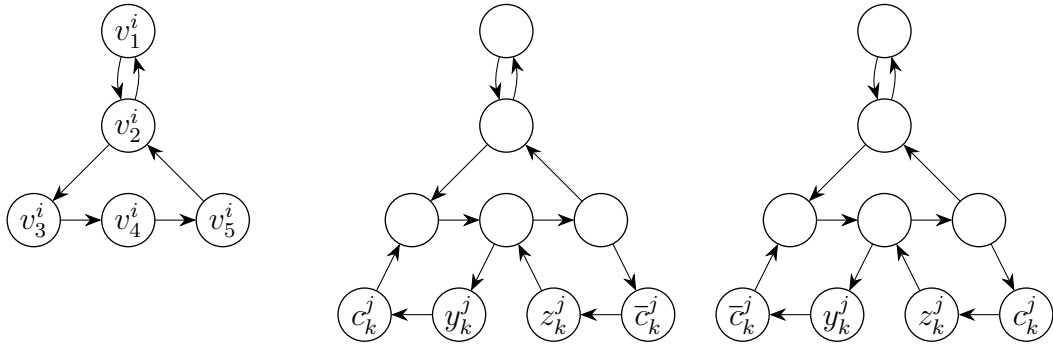
Bizonyítás. Világos, hogy a feladat NP-beli. A NAE-3-SAT feladatban adott egy konjunktív normálforma, melyben minden klóz pontosan 3 literált tartalmaz. Szeretnénk eldönteni, hogy létezik-e olyan kielégítése, melyben minden klóz tartalmaz legalább egy igaz és legalább egy hamis literált. A NAE-3-SAT feladatról ismert, hogy NP-teljes [15]. Ezt a feladatot fogjuk visszavezetni a tételben szereplő gráffelbontási feladatra. A konjunktív normálformához konstruálunk egy D gráfot a következő módon: Minden c_j klózhoz felvesszünk egy 9 csúcsú részgráfot melynek csúcsait jelölje u_k^j, c_k^j és $\bar{c}_k^j$, ahol $k = 1, 2, 3$. A c_k^j csúcsok az adott klóz k -adik literáljának felelnek meg, a $\bar{c}_k^j$ csúcsok pedig a literál negáltjának. A c_j klóz részgráfja tartalmaz egy $c_1^j u_1^j c_2^j u_2^j c_3^j u_3^j$ külső kört és egy $\bar{c}_1^j u_3^j \bar{c}_3^j u_2^j \bar{c}_2^j u_1^j$ belső kört. A konstrukciót az 5. Ábra szemlélteti. Továbbá minden x_i változóhoz felvesszünk egy 5 pontú részgráfot, melynek csúcsait jelölje $v_l^i, l = 1, \dots, 5$. Felvesszünk egy oda-vissza élt a v_1^i és v_2^i csúcsok között, és egy $v_2^i v_3^i v_4^i v_5^i$ kört. Ezeket a részgráfokat az alábbiak szerint kapcsoljuk össze:

1. Ha a c_j klóznak a k -adik literálja x_i , akkor az x_i változó részgráfjához hozzáveszünk egy y_k^j és egy z_k^j csúcsot és hozzákapcsoljuk a c_j klóz részgráfjában szereplő c_k^j és $\bar{c}_k^j$ csúcsokat egy $v_5^i \bar{c}_k^j z_k^j v_4^i y_k^j c_k^j v_3^i$ úttal.
2. Hasonlóan, ha a c_j klóznak a k -adik literálja $\bar{x}_i$, akkor az x_i változó részgráfjához hozzáveszünk egy y_k^j és egy z_k^j csúcsot, hozzákapcsoljuk a c_j klóz részgráfjában szereplő c_k^j és $\bar{c}_k^j$ csúcsokat egy $v_5^i c_k^j z_k^j v_4^i y_k^j \bar{c}_k^j v_3^i$ úttal.

Ezt minden c_j klózra elvégezzük, amely tartalmazza az x_i változót. A D gráf egy x_i változóhoz tartozó részgráfját a 6. Ábra szemlélteti.



5. Ábra. A c_j klózhoz tartozó részgráf.



6. Ábra. Az x_i változóhoz tartozó részgráf és a kiegészítései, ha a c_j klóz k -adik literálja x_i , illetve ha a c_j klóz k -adik literálja $\bar{x}_i$. Annyiszor vesszük hozzá a kiegészítést, ahány klózban az x_i , illetve a $\bar{x}_i$ literál előfordul. A c_k^j és a $\bar{c}_k^j$ csúcsok megegyeznek a klózek részgráfjához tartozó azonos nevű csúcsokkal.

Megmutatjuk, hogy a NAE-3-SAT feladat pontosan akkor megoldható, ha a D gráfban létezik olyan párosítás (az irányítástól eltekintve), amely lefoglalja az összes irányított kört.

Elsőként tegyük fel, hogy a NAE-3-SAT feladat megoldható, és tekintsük a következő párosítást. Ha a j -edik klóz k -adik literálja igaz, akkor a j -edik klózhoz tartozó részgráfban a párosításba bevesszük a c_k^j csúcsból kiinduló élt; ha a k -adik literál hamis, akkor a

$\bar{c}_k^j$ csúcsból kiinduló élt. Az x_i változóhoz tartozó részgráfban a v_1^i, v_2^i csúcsokon a kettő hosszú kört lefoglaljuk valamelyik élével.

1. Ha az x_i változó igaz, akkor lefoglaljuk a $v_3^i v_4^i$ élt, továbbá ha a j -edik klóz k -adik literálja x_i , akkor lefoglaljuk a $\bar{c}_k^j z_k^j$ élt; ha a j -edik klóz k -adik literálja $\bar{x}_i$, akkor lefoglaljuk a $c_k^j z_k^j$ élt.
2. Különben, ha az x_i változó hamis, akkor a $v_4^i v_5^i$ élt fogjuk le, továbbá ha a j -edik klóz k -adik literálja x_i akkor lefoglaljuk a $y_k^j c_k^j$ élt, ha a j -edik klóz k -adik literálja $\bar{x}_i$ lefoglaljuk a $y_k^j \bar{c}_k^j$ élt.

Bebizonyítjuk, hogy az így kiválasztott párosítás lefoglalja az összes irányított kört a D gráfban. Vegyük észre, hogy a különböző változókhoz, illetve klózokhoz tartozó részgráfok csak a c_k^j és $\bar{c}_k^j$ csúcsokban kapcsolódnak egymáshoz, és ezen csúcsokra illeszkedő él csak akkor tartozik a párosításhoz a j -edik klóz részgráfjában, ha a c_k^j , illetve a $\bar{c}_k^j$ csúcsához tartozó literál igaz; a változók részgráfjában pedig akkor, ha az adott literál hamis. Itt a csúcsnak megfelelő literált úgy értjük, hogy ha a j -edik klóz k -adik literálja igaz, akkor c_k^j csúcsnak megfelelő literál igaz és $\bar{c}_k^j$ csúcsnak megfelelő literál hamis. Belátjuk, hogy a párosítás lefoglal minden kört a klózokhoz tartozó részgráfokon belül: A c_j klózhoz tartozó részgráfon belül a külső és a belső kört is lefoglaltuk, mivel a klózban kell lennie legalább egy igaz és legalább egy hamis változónak. Ezen kívül van három darab 4 hosszú kör, melyeket vagy a c_k^j vagy a $\bar{c}_k^j$ csúcsból kiinduló él foglalja le. Továbbá látható, hogy a párosítás lefoglal minden irányított kört a változók részgráfjaiban, illetve egyetlen c_j klózhoz tartozó kiegészítéseiken belül. A többi irányított körnek tartalmaznia kell egy x_i változónak több c_j klózhoz tartozó kiegészítéséből éleket, mivel csak ezen éleken keresztül juthatunk át a változók különböző kiegészítéseibe, illetve különböző változókhoz, vagy klózokhoz tartozó részgráfokba. Ezért a párosításnak tartalmaznia kell valamelyik x_i változóhoz tartozó részgráfban két különböző literál csúcsa között egy st utat, ahol $s \in \{c_j^k, \bar{c}_j^k\}$ és $t \in \{c_{j'}^{k'}, \bar{c}_{j'}^{k'}\}$. Megmutatjuk, hogy a párosítás lefoglal minden ilyen utat a D gráfban. Először tekintsük az igaz értékű literáloknak megfelelő c_k^j vagy $\bar{c}_k^j$ csúcsokból kiinduló utakat:

1. Ha az x_i változó igaz, akkor egy igaz értékű literálnak megfelelő c_k^j vagy $\bar{c}_k^j$ csúcsból csak a v_3^i csúcsba lép ki él, a v_3^i csúcsból pedig csak a v_4^i csúcsba és a $v_3^i v_4^i$ élt lefoglalja a párosítás.
2. Ha az x_i változó hamis, akkor egy igaz értékű literálnak megfelelő c_k^j vagy $\bar{c}_k^j$ csúcsból egyetlen él indul ki a z_k^j csúcsba, onnan szintén egyetlen él a v_4^i csúcsba. Innen a $v_4^i v_5^i$ élt lefoglalja a párosítás, tehát csak egy $y_{k'}^{j'}$ csúcs felé mehetünk. Viszont az $y_{k'}^{j'}$ csúcsból kiinduló egyetlen élt lefoglalja a párosítás.

Hasonlóan a hamis értékű literáloknak megfelelő csúcsokból kiinduló utak esetén:

1. Ha az x_i változó igaz, akkor a változóhoz tartozó részgráfban egy hamis értékű c_k^j vagy $\bar{c}_k^j$ literálhoz tartozó csúcsból csak egyetlen él lép ki a z_k^j csúcsba, ezen éleket a párosítás lefoglalja.
2. Ha az x_i változó hamis, akkor a változó részgráfjában egy hamis értékű c_k^j vagy $\bar{c}_k^j$ literálhoz tartozó csúcsból egyetlen él indul ki a v_3^i csúcsba, onnan egyetlen él

indul ki a v_4^i csúcsba. A $v_4^i v_5^i$ élt lefogja a párosítás, tehát csak valamely $y_k^{j'}$ csúcsba vezethet él, ezen csúcsokból kiinduló éleket pedig lefogja a párosítás.

Tehát a párosítás lefogja a D gráfban az összes irányított kört.

Fordított irányban tekintsünk egy M párosítást, amely lefogja az összes irányított kört a D gráfban. Az x_i változóhoz tartozó részgráfokon M biztosan tartalmazza az egyik élt v_1^i és v_2^i között. Valamint le kell fognia a $v_2^i v_3^i v_4^i v_5^i$ kört, ezért tartalmazza vagy a $v_3^i v_4^i$ vagy a $v_4^i v_5^i$ élt. Ha a $v_3^i v_4^i$ élt tartalmazza, akkor az x_i változót igaznak választjuk, ha a $v_4^i v_5^i$ élt, akkor hamisnak. A továbbiakban belátjuk, hogy így a NAE-3-SAT feladat egy megoldását kapjuk. Ha a $v_3^i v_4^i$ élt tartalmazta a párosítás, akkor minden olyan klózra, melynek k -adik változója x_i tartalmaznia kell a $v_4^i v_5^i \bar{c}_k^j z_k^j$ kör egyik élt, ez csak valamelyik $\bar{c}_k^j$ csúcsra illeszkedő él lehet, és minden olyan klózra, melynek k -adik literálja $\bar{x}_i$ tartalmaznia kell a $v_4^i v_5^i c_k^j z_k^j$ kör valamelyik élt, ez csak valamelyik c_k^j csúcsra illeszkedő él lehet. Ugyanígy látható, hogy ha a $v_4^i v_5^i$ élt tartalmazza a párosítás, akkor minden olyan klózra, melynek k -adik változója x_i tartalmaznia kell a $v_3^i v_4^i y_k^j c_k^j$ kör egyik élt, ez csak valamelyik c_k^j csúcsra illeszkedő él lehet, és minden olyan klózra, melynek k -adik literálja $\bar{x}_i$ tartalmaznia kell a $v_3^i v_4^i y_k^j \bar{c}_k^j$ kör valamelyik élt, ez csak valamelyik $\bar{c}_k^j$ csúcsra illeszkedő él lehet. Vegyük észre, hogy az x_i változóhoz tartozó részgráfon belül a c_k^j és $\bar{c}_k^j$ csúcsok közül pontosan az egyikre illeszkedik párosításbeli él. Ha a korábban leírt módon állítjuk be a változók értékét, akkor c_k^j vagy $\bar{c}_k^j$ csúcsok közül a hamis értékű literálhoz tartozó csúcsra illeszkedik.

A klózokhoz tartozó részgráfokon M legalább egy élt tartalmaz a c_k^j és a $\bar{c}_k^j$ csúcsokra illeszkedő 4 él közül, mivel ezen élek egy kört alkotnak. Mivel a hamis értékű literálhoz tartozó csúcsra már illeszkedik egy párosításbeli él az adott változó részgrádján belül, ezért pontosan egy ilyen élt tartalmaz M , amely c_k^j és a $\bar{c}_k^j$ közül az igaz literál csúcsára illeszkedik. Továbbá M biztosan tartalmaz legalább egy élt a külső $c_1^j u_1^j c_2^j u_2^j c_3^j u_3^j$ és legalább egy élt a belső $\bar{c}_1^j u_3^j \bar{c}_3^j u_2^j \bar{c}_2^j u_1^j$ körről. Ez éppen azt jelenti, hogy a kapott párosítás megfelel a konjunktív normálforma egy kielégítésének, mivel a külső körről tartalmazott él miatt lesz legalább egy igaz változó minden klózban és a belső körről tartalmazott éle miatt pedig lesz legalább egy hamis változó minden klózban. $\square$

Az előbbi konstrukció kis módosításával hasonló eredményt kapunk teljes párosításra és aciklikus részgráfra bonthatóságról: A bizonyítás során konstruált D gráf minden x_i változóhoz tartozó részgrádjához vegyünk hozzá egy s_i csúcsot, melyből kiindul egy-egy él a v_3^i és a v_5^i csúcsokba. Valamint a részgráf minden kiegészítéséhez vegyünk hozzá egy t_k^j csúcsot, melyből kiindul egy-egy él az y_k^j és a z_j^j csúcsokba. Vegyük észre, hogy ezzel nem hoztunk létre új kört a gráfban. Az előző bizonyításhoz hasonlóan megmutatható, hogy pontosan akkor bontható fel a kapott gráf egy teljes párosítás és egy aciklikus részgráf uniójára, ha a NAE-3-SAT feladat megoldható. Ebből a következő állítást kapjuk:

3.7. Következmény. *NP-teljes eldönteni, hogy egy páros gráf felbomlik-e egy teljes párosítás és egy aciklikus részgráf uniójára.*

4. Nyitott kérdések

Zárásként mutatunk néhány nyitott kérdést a dolgozatban érintett gráffelbontási és sorba-rendezési feladatok témaköréből. A 3.1. Fejezetben láttuk, hogy polinom időben eldönthető, hogy egy gráf felbomlik-e egy befenyves és egy aciklikus részgráf uniójára, azonban az algoritmus nem terjed ki a befenyő és aciklikus részgráf esetére. Érdekes nyitott kérdés marad tehát egy gráf befenyőre — vagy általánosabban egy adott gyökérhalmazú befenyvesre — és aciklikus részgráfra bonthatóságának nehézsége. Ez szorosan kapcsolódik a [2] cikkben tárgyalt kérdésekhez is, ahol többek között a befenyő helyett a befenyőt tartalmazó részgráf esete merül fel, amely nagyon könnyen megoldható.

A diszjunkt körfedésre és aciklikus részre felbonthatóságról tudjuk, hogy NP-teljes [2]. Nyitott kérdés, hogy ez érvényben marad-e akkor is, ha csak a körök diszjunkságát követeljük meg, azt nem, hogy minden csúcsot fedjenek.

Az (f, g) -FAS és az $(f, g; h)$ -tulajdonságú sorrend feladatok nehézségét részletesen elemeztük. Beláttuk, hogy a csak felső korlátos esetben mindkét feladat megoldható. Definiálhatjuk a költséges változatukat, amelynél minden elem-helyezés párra adott egy c költség, és egy legolcsóbb $(-\infty, g)$ -FAS vagy $(-\infty, g; h)$ -tulajdonságú sorrendet keresünk. A feladatok költséges változata hasonlít a [9] cikkben bevezetett pozíció alapú ütemezési problémára. A feladatok egy másik természetes módosítása, ha megengedett sorrend helyett egy kétdimenziós elhelyezést keresünk. Ekkor az egy elemet „megelőző” elemek halmazának definiálhatjuk az elrendezés szerint az elemtől balra-lefelé elhelyezkedő elemek halmazát.

A 2.18 Tétel szerint a d -távolságú $(-\infty, g)$ -FAS feladat nehéz, ha d polinomiálisan kisebb az alaphalmaz méreténél, de polinom időben megoldható, ha csak egy konstanssal kisebb nála. Nyitott kérdés, hogy mi történik a többi esetben. Például létezik-e FPT algoritmus $|V| - d$ paraméterrel? Vagy mi mondható a $d = |V|/2$ esetben?

Hivatkozások

- [1] Jørgen Bang-Jensen. Edge-disjoint in- and out-branchings in tournaments and related path problems. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 51(1):1–23, 1991.
- [2] Jørgen Bang-Jensen, Stéphane Bessy, Daniel Gonçalves, and Lucas Picasarri-Arrieta. Complexity of some arc-partition problems for digraphs. *Theoretical Computer Science*, 928:167–182, 2022.
- [3] Jørgen Bang-Jensen and Carl J. Casselgren. Restricted cycle factors and arc-decompositions of digraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 193:80–93, 2015.
- [4] Jørgen Bang-Jensen, Gregory Gutin, and Anders Yeo. Arc-disjoint strong spanning subdigraphs of semicomplete compositions. *Journal of Graph Theory*, 95(2):267–289, 2020.
- [5] Jean-Claude Bermond and Vance Faber. Decomposition of the complete directed graph into k -circuits. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 21(2):146–155, 1976.
- [6] Therese Biedl, Franz J. Brandenburg, and Xiaotie Deng. On the complexity of crossings in permutations. *Discrete Mathematics*, 309(7):1813–1823, 2009.
- [7] Joseph Cheriyan and John H. Reif. Directed s - t numberings, rubber bands, and testing digraph k -vertex connectivity. *Combinatorica*, 14(4):435–451, 1994.
- [8] Jack Edmonds. Edge-disjoint branchings. *Combinatorial algorithms*, 1973.
- [9] Markó Horváth and Tamás Kis. Polyhedral results for position-based scheduling of chains on a single machine. *Annals of Operations Research*, 284(1):283–322, 2020.
- [10] Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of computer computations*, pages 85–103. Springer, 1972.
- [11] John G. Kemeny. Mathematics without numbers. *Daedalus*, 88(4):577–591, 1959.
- [12] Péter Madarasi. The distance matching problem. In *International Symposium on Combinatorial Optimization*, pages 202–213. Springer, 2020.
- [13] Péter Madarasi. Matchings under distance constraints i. *Annals of Operations Research*, 305(1):137–161, 2021.
- [14] Jaroslav Opatrny. Total ordering problem. *SIAM Journal on Computing*, 8(1):111–114, 1979.
- [15] Stefan Porschen, Tatjana Schmidt, Ewald Speckenmeyer, and Andreas Wotzlaw. XSAT and NAE-SAT of linear CNF classes. *Discrete Applied Mathematics*, 167:1–14, 2014.